

REKURSIVE GRAPHISCHE LÖSUNG VON
FUNKTIONALDIFFERENTIALGLEICHUNGEN
FÜR FEYNMAN-DIAGRAMME IN DER
 ϕ^4 -THEORIE

Diplomarbeit von
Konstantin Glaum

Hauptberichter : Prof. Dr. H. Kleinert



Freie Universität Berlin
Oktober 2001

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	5
1.1	Die ϕ^4 -Theorie	7
1.2	Graphische Regeln	8
1.3	Algebraische Umformungen	10
2	Zusammenhängende Feynman-Diagramme	13
2.1	Schwinger-Dyson-Gleichung	13
2.2	Die negative freie Energie W	14
2.3	Graphische Rekursion für W	16
2.4	Anwendung der graphischen Rekursion für W	18
2.5	Definition der Zwei- und Vier-Punkt-Funktionen \mathbf{G}_{12} und \mathbf{G}_{1234}^c	22
2.6	Bestimmungsgleichungen für \mathbf{G}_{12} und \mathbf{G}_{1234}^c	25
2.7	Graphische Rekursion für \mathbf{G}_{12} und \mathbf{G}_{1234}^c	28
2.8	Anwendung der graphischen Rekursion für \mathbf{G}_{12} und \mathbf{G}_{1234}^c	29
2.9	Von \mathbf{G}_{12} und \mathbf{G}_{1234}^c zu W	37
3	Ein-Teilchen-irreduzible Feynman-Diagramme	41
3.1	Definition der ein-Teilchen-irreduziblen Funktionen $\mathbf{\Sigma}_{12}$ und $\mathbf{\Gamma}_{1234}$	41
3.2	Bestimmungsgleichungen für $\mathbf{\Sigma}_{12}$ und $\mathbf{\Gamma}_{1234}$	44
3.3	Rekursionsgleichungen für \mathbf{G}_{12} , $\mathbf{\Sigma}_{12}$ und $\mathbf{\Gamma}_{1234}$	49
3.4	Erzeugung der $\mathbf{\Sigma}_{12}$ -, $\mathbf{\Gamma}_{1234}$ - und \mathbf{G}_{12} -Graphen	52
3.5	Vier-Punkt-Funktionen: von der ein-Teilchen-irreduziblen zu der zusammenhängenden	59
3.6	Negative freie Energie W aus ein-Teilchen-irreduziblen Funktionen	60
4	Tadpolelose Graphen	63

4.1	Definition tadpoleloser Funktionen	64
4.2	Bestimmungsgleichungen für tadpolelose Funktionen	66
4.3	Rekursionen für die tadpolefreien Funktionen	69
4.4	Erzeugung der tadpolelosen Graphen	76
4.5	Tadpolelose Vakuumdiagramme	84
5	Linien-Legendre-Transformation	93
5.1	Definitionen	93
5.2	Bestimmungsgleichungen für Σ_{12} und Γ_{1234}	94
5.3	Rekursionsgleichungen	97
5.4	Erzeugung der Graphen für Σ_{12} und Γ_{1234}	100
5.5	Vakuumdiagramme	105
5.6	Rücktransformation für Σ_{12} und Γ_{1234}	111
5.7	Rücktransformation für die freie Energie	115
6	Vertex-Legendre-Transformation	121
6.1	Definitionen	121
6.2	Bestimmungsgleichungen	123
6.3	Rekursionsgleichungen	126
6.4	Erzeugung der Graphen für $\tilde{\Sigma}_{12}$ und γ_{1234}	127
6.5	Vakuumdiagramme	133
6.6	Vertex-Legendre-Rücktransformation	137
7	Zusammenfassung und Ausblick	141
	Literaturverzeichnis	145
	Danksagung	149

Kapitel 1

Einführung

In dem störungstheoretischen Zugang zur Feldtheorie beruht die Berechnung physikalischer Grössen auf der Auswertung von Feynman-Integralen, die durch Diagramme dargestellt werden. Dabei ist jedes Diagramm mit einem Gewicht versehen, das von seiner Topologie abhängt. Mittlerweile gibt es mehrere umfangreiche Computerprogramme, wie z.B. FeynArts [1–3] oder QGRAF [4, 5], die für unterschiedliche Feldtheorien die Diagramme konstruieren und deren Gewichte bestimmen. Einige Computerprogramme basieren auf dem kombinatorischen Zugang, bei dem die Knoten entsprechend der Feynman-Regeln auf alle mögliche Arten mit Kanten verbunden werden. Andere wiederum basieren auf der systematischen Erzeugung sogenannter homeomorpher irreduzibler Sterngraphen [6, 7]. Dieser Zugang ist auch für höhere Ordnungen effizient, besitzt aber den konzeptionellen Nachteil, daß zwischenzeitlich viele Diagramme mit verschiedenen Knotenvalenzen erzeugt werden, die bei fest vorgegebenen Knotenvalenzen letztlich bedeutungslos sind. Dies ist insbesondere der Fall bei der von uns zu untersuchenden ϕ^4 -Theorie mit der spezifischen Knotenvalenz 4.

Vor längerer Zeit wurde in [8, 9] eine auf physikalischen Überlegungen basierende Methode vorgeschlagen, die Feynman-Diagramme einer bestimmten Feldtheorie zu konstruieren. Sie beruht auf der Beobachtung, daß die vollständige Kenntnis der Vakuumenergie die gesamte Theorie festlegt (“The Vacuum is the world.”) [10, 11]. In diesem Sinne werden zunächst die Vakuumdiagramme auf graphisch-rekursivem Wege erzeugt. Das Verfahren basiert auf Funktionaldifferentialgleichungen für die Vakuumenergie, die gewisse Manipulationen mit den Kanten und Knoten beinhalten. Anschliessend werden die physikalisch wichtigen n -Punkt-Funktionen gewonnen, indem bestimmte Funktionalableitungen auf die Vakuumenergie angewandt werden, was diagrammatisch als Wegnahme entsprechender graphischer Bauelemente aus den Vakuumenergie-Diagrammen interpretiert werden kann. Kürzlich gelang es mit diesem Zugang, die zusammenhängenden und die ein-Teilchen-irreduziblen Feynman-Diagramme der ϕ^4 -Theorie sowohl in der ungeordneten, symmetrischen Phase [12] als auch in der geordneten, symmetriegebrochenen Phase [13, 14] zu erzeugen (siehe auch die Arbeit [15]). Ausserdem wurden auf diesem Wege die zusammenhängenden Feynman-Diagramme der QED [16] und der skalaren QED [17] gewonnen. Im Unterschied zur sonst üblichen Methode der erzeugenden Funktionale [18–23], konnte man dabei auf die Einführung von

(Grassmann-)Strömen verzichten. Ein weiterer Vorteil bestand darin, daß die Anzahl der Funktionalableitungen, die zur Erzeugung bestimmter Korrelationsfunktionen benötigt wurde, gegenüber dem Strom-Ableitungsfomalismus halbiert wurde.

In der vorliegenden Diplomarbeit wird ein modifizierter Zugang zur graphischen Rekursion von Feynman-Diagrammen entwickelt [24, 25]. Anstatt von den Diagrammen der Vakuumenergie auszugehen, versuchen wir, die Feynman-Diagramme der n -Punkt-Funktionen auf direktem Wege zu erzeugen. Dabei müssen wir uns mit dem Problem auseinandersetzen, daß die n -Punkt-Funktionen einer Feldtheorie einer unendlichen Hierarchie gekoppelter Schwinger-Dyson-Gleichungen genügen [9, 18–23]. In dieser Diplomarbeit zeigen wir am Beispiel der ϕ^4 -Theorie, daß sich die Schwinger-Dyson-Gleichungen durch Heranziehung der Funktionalableitungen schliessen lassen.

In unserer Diplomarbeit gehen wir dabei im einzelnen wie folgt vor. In den folgenden Abschnitten des ersten Kapitels wird zunächst die ϕ^4 -Theorie dargestellt und anschliessend die für die Arbeit wichtigen funktionalanalytischen Methoden und die Feynman-Regeln eingeführt.

Im Kapitel 2 wenden wir unsere funktionalanalytischen Methoden zur Erzeugung von Diagrammen der Vakuumenergie an und halten uns dabei an die Arbeit [12]. Im Anschluss daran leiten wir ein geschlossenes Gleichungssystem ab, mit dessen Hilfe sich Graphen der zusammenhängenden Zwei- und Vier-Punkt-Funktionen effizient graphisch-rekursiv konstruieren lassen.

Im Kapitel 3 wird das Verfahren dahingehend erweitert, daß ein geschlossenes Gleichungssystem für die Selbstenergie und die sogenannte ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktion hergeleitet wird. Dessen graphisch-rekursive Lösung führt auf alle ein-Teilchen-irreduzible Feynman-Diagramme, die für die Renormierung der ϕ^4 -Theorie benötigt werden.

Kapitel 4 beschäftigt sich schliesslich mit der Frage, wie die Resummation von Tadpole-Diagrammen durch eine Umdefinition der Kanten in unseren Graphen bewerkstelligt wird. Dabei erhalten wir ein modifiziertes Gleichungssystem für die Selbstenergie und die ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktion, das automatisch auf alle tadpolelosen Feynman-Diagramme führt. Es handelt sich hierbei genau um diejenigen Diagramme, die im \overline{MS} -Renormierungsschema unter Verwendung der $(4 - \varepsilon)$ -Regularisierung berechnet werden müssen [26, 27].

Im Kapitel 5 werden die freien Propagatoren, die diagrammatisch als Kanten unserer Graphen aufzufassen waren, durch die vollen Propagatoren ersetzt. Dies geschieht im Rahmen der Linien-Legendre-Transformation. Dadurch werden wir auf ein Gleichungssystem geführt, dessen Rekursion die Diagramme ohne Linienkorrekturen ergibt [8]. Aus diesen wenigen Graphen lassen sich dann alle ein-Teilchen-irreduziblen und alle tadpolelosen Diagramme rekonstruieren, indem die Linien-Legendre-Transformation invertiert wird.

Anschliessend wird im Kapitel 6 die Zahl der auftretenden Diagramme noch weiter reduziert. Hier werden die einfachen Vertizes, die für elementare Wechselwirkungsereignisse stehen und uns als Knoten unserer Graphen dienen, durch die vollen Vertizes ersetzt, die

die vollständige Information über die ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktion tragen. Das geschieht im Rahmen der Vertex-Legendre-Transformation. Aus dem entsprechenden graphisch-rekursiven Gleichungssystem erzeugen wir dann die sogenannten Skelett-Diagramme der ϕ^4 -Theorie, die keinerlei Linien- oder Vertexkorrekturen beinhalten.

Zum Schluss diskutiert Kapitel 7, welche weiteren Fragestellungen zur graphischen Rekursion von Feynman-Diagrammen auf der Grundlage der vorliegenden Diplomarbeit untersucht werden könnten.

1.1 Die ϕ^4 -Theorie

Die $O(N)$ -symmetrische ϕ^4 -Theorie basiert auf dem Ginzburg-Landau-Ansatz für das Energiefunktional, mit dem sich Phasenübergänge zweiter Art beschreiben lassen:

$$E[\phi] = \int d^D x \left\{ \frac{1}{2!} \phi(x) (-\partial_x^2 + m^2) \phi(x) + \frac{g}{4!} [\phi^2(x)]^2 \right\} . \quad (1.1)$$

Hierbei stellt $\phi(x)$ ein selbstwechselwirkendes bosonisches Vektorfeld mit N Komponenten in einem D -dimensionalen Raum dar, g ist eine Kopplungskonstante und m die Masse. Das Energiefunktional $E[\phi]$ lässt sich auch in einer quadratisch-quartischen Integralform schreiben:

$$E[\phi] = \frac{1}{2!} \int_{12} G_{12}^{-1} \phi_1 \phi_2 + \frac{g}{4!} \int_{1234} V_{1234} \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 . \quad (1.2)$$

Hierbei machen wir Gebrauch von der abkürzenden Schreibweise, in der

$$1 \equiv \{x_1, \alpha_1\} \quad , \quad \int_1 \equiv \sum_{\alpha_1} \int d^D x_1 \quad , \quad \phi_1 \equiv \phi_{\alpha_1}(x_1) \quad (1.3)$$

mit $\alpha_1 = 1, 2, \dots, N$ bedeuten. Der *bilokale Kern* G_{12}^{-1} steht dabei für

$$G_{12}^{-1} \equiv G_{\alpha_1, \alpha_2}^{-1}(x_1, x_2) \equiv \delta_{\alpha_1, \alpha_2} \delta(x_1 - x_2) (-\partial_{x_1}^2 + m^2) \quad (1.4)$$

und der Tensor V_{1234} , auch *Vierer-Wechselwirkung* genannt, für

$$V_{1234} \equiv V_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \frac{1}{3} \{ \delta_{\alpha_1, \alpha_2} \delta_{\alpha_3, \alpha_4} + \delta_{\alpha_1, \alpha_3} \delta_{\alpha_2, \alpha_4} + \delta_{\alpha_1, \alpha_4} \delta_{\alpha_2, \alpha_3} \} \delta(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3) \delta(x_1 - x_4) . \quad (1.5)$$

Bem. Sowohl der bilokale Kern G^{-1} als auch die Vierer-Wechselwirkung V sind definitionsgemäss symmetrisch bezüglich Permutation ihrer Indizes, es gilt nämlich

$$G_{12}^{-1} = G_{21}^{-1} \quad , \quad (1.6)$$

$$V_{1234} = V_{1243} = V_{1423} = V_{1432} = \dots \quad , \quad (1.7)$$

wobei die letzte Gleichung insgesamt 24 Indexpermutationen beinhaltet.

Die gängigen Modelle der $O(N)$ -symmetrischen ϕ^4 -Theorie mit der Imaginärzeit sind z.B. Ising-Modelle (mit $N = 1$), Heisenberg-Ferromagnete ($N = 3$), aber auch verdünnte Polymere ($N = 0$) oder Superfluide ($N = 2$), wo sie zur Beschreibung von Phasenübergängen angewandt wird (siehe dazu [27]). In der Realzeit entspricht die ϕ^4 -Theorie einer Quantenfeldtheorie von $O(N)$ -symmetrischen Higgs-Teilchen.

1.2 Graphische Regeln

Bevor wir zur graphischen Rekursion übergehen, brauchen wir einige graphische Bezeichnungen. So stellen wir im folgenden die vier-Teilchen-Wechselwirkung V_{1234} samt der Kopplung als einen Punkt mit vier Stümmel, also als einen Vierer-Vertex, dar:

$$-g V_{1234} \equiv \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 4 \end{array} . \quad (1.8)$$

Bem. Der Vierer-Vertex ist invariant bezüglich der Permutation seiner Stümmel, sowie auch die Vierer-Wechselwirkung V_{1234} gemäss (1.7) invariant bezüglich der Indexpermutation ist.¹

Der bilokale Kern bekommt keine eigene Bezeichnung. Statt dessen führen wir dessen funktionale Umkehrung G ein, die durch

$$\int_3 G_{13} G_{32}^{-1} \equiv \delta_{12} \quad (1.9)$$

definiert wird und die auch als *freier Propagator* bezeichnet wird. Die Symmetrieeigenschaft des bilokalen Kernes (1.6) überträgt sich auch auf den freien Propagator:

$$G_{12} = G_{21} . \quad (1.10)$$

Dieser funktionalen Umkehrung wird nun diagrammatisch eine einfache Linie zugeordnet:

$$G_{12} \equiv 1 \text{ --- } 2 . \quad (1.11)$$

Bem. Wegen der symmetrieeigenschaft (1.10) braucht eine solche Linie nicht gerichtet zu sein.

Alle Graphen im nächsten Kapitel werden aus Vierer-Vertizes (1.8) und Linien (1.11) aufgebaut. Dazu bedarf es der wichtigen graphischen Operation des **Anklebens** einer Linie an einen Vertexstümmel. Es handelt sich dabei um eine Art graphischer Integration, die mit den Bezeichnungen (1.8) und (1.11) durch die Vorschrift

$$-g \int_4 V_{1234} G_{45} \equiv \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 4 \end{array} \text{ --- } 5 \equiv \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 5 \end{array} \quad (1.12)$$

¹Diese Dualität in der funktional-graphischen Symmetrie ist letztlich dafür verantwortlich, daß wir topologisch-äquivalente Diagramme auch als physikalisch-äquivalent ansehen dürfen und umgekehrt.

erklärt wird. Auch zwei Stümmel eines Vertex können durch eine Linie miteinander verbunden werden, so entsteht z.B. ein *Tadpole*:

$$-g \int_{34} V_{1234} G_{34} \equiv \begin{array}{c} 2 \quad 3 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \quad | \\ 1 \quad 4 \quad 4 \end{array} \equiv \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \circ \\ 1 \end{array} . \quad (1.13)$$

Es können natürlich auch kompliziertere Graphen miteinander verklebt werden, man muss dabei nur beachten, daß beim Zusammenkleben immer an den Stellen mit gleichen Indizes verbunden wird (oder in der Sprache der Funktionale wird über diese integriert), und zwar sind es immer Linien, die an Stümmel geklebt werden. Das können wir am folgenden Beispiel demonstrieren.

Beispiel 1: Ankleben eines Vertex an den Tadpole

$$\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 5 \end{array} \quad \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \quad \circ \\ 5 \end{array} \equiv \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 6 \quad 6 \end{array} \quad \begin{array}{c} 4 \quad 6 \quad 6 \\ \diagdown \quad \diagup \quad | \\ 5 \quad 5 \quad 7 \quad 7 \end{array} \equiv \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \circ \\ 1 \quad 4 \end{array} . \quad (1.14)$$

Sowohl die Zerlegung im ersten Schritt als auch das Verbinden im zweiten wurden durch die Regeln (1.12) und (1.13) festgelegt, hier haben wir diese lediglich der Reihe nach angewendet.

Eine weitere wichtige graphische Operation ist die **Linienamputation**, was zur Illustration der Funktionalableitung $\delta/\delta G$ dienen soll. Dazu stellen wir zuerst fest, daß

$$\frac{\delta G_{12}}{\delta G_{34}} \equiv \frac{\delta \text{---} 1 \text{---} 2}{\delta \text{---} 3 \text{---} 4} = \frac{1}{2} \{ \delta_{13} \delta_{24} + \delta_{14} \delta_{23} \} . \quad (1.15)$$

Bem. Dies ist bereits die symmetrisierte Form, die von der Symmetrieeigenschaft (1.10) des freien Propagators Gebrauch macht.

Die verallgemeinerte Deltafunktion

$$\delta_{12} \equiv \delta_{\alpha_1, \alpha_2} \delta(x_1 - x_2) \quad (1.16)$$

ist in Verbindung mit einer Integration über dem Index 1 (oder 2) ein Indexvertauschungsoperator, der 1 gegen 2 (oder 2 gegen 1) vertauscht. Denn es gilt

$$\int_3 \delta_{13} G_{32} = G_{12} \quad , \quad \int_5 \delta_{15} V_{5234} = V_{1234} \quad (1.17)$$

oder graphisch dargestellt

$$\delta_{13} \begin{array}{c} 3 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \quad , \quad \delta_{15} \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 5 \quad 4 \end{array} = \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 4 \end{array} . \quad (1.18)$$

Wendet man die Operation $\delta/\delta G_{34}$ auf die Linie G_{12} an, so wird nach (1.15) diese Linie gelöscht (amputiert) und anschliessend werden die Indizes (1,2) gegen (3,4) ausgetauscht,

und zwar auf beiden möglichen Wegen als Mittelwert.

Bem. Durch diese Operation können nur Linien amputiert werden, jedoch nicht die Stümmel. Obwohl diese sehr ähnlich aussehen, müssen wir den Unterschied in Anwendungen stets beachten.

Beispiel 2: Linienamputation am Tadpole

Hier erinnern wir uns an die Definition eines Tadpoles in (1.13) und schreiben

$$\frac{\delta}{\delta G_{34}} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad \bigcirc \end{array} \right\} = \frac{\delta}{\delta \text{---}3\text{---}4} \left\{ \begin{array}{c} 2 \quad 5 \quad 5 \\ \diagdown \quad \diagup \quad | \\ 1 \quad 6 \quad 6 \end{array} \right\}. \quad (1.19)$$

Weil V und G (bzw. G^{-1}) voneinander unabhängige Funktionale sind, können wir den Vierer-Vertex auch rausziehen und erhalten dann wegen (1.15) und (1.18)

$$\begin{array}{c} 2 \quad 5 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 6 \end{array} \frac{\delta \text{---}5\text{---}6}{\delta \text{---}3\text{---}4} = \frac{1}{2} \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 4 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 2 \quad 4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \end{array} = \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 4 \end{array}. \quad (1.20)$$

Im letzten Schritt wurde noch ausgenutzt, daß es bei einem Vertex wegen (1.7) nicht auf die Reihenfolge der Stümmel ankommt. Aus diesem Ergebnis sehen wir, daß durch die Funktionalableitung $\delta/\delta G$ die einzige Linie des Tadpoles entfernt und zwei zusätzliche Stümmel hinterlassen wurden.

1.3 Algebraische Umformungen

Auf dem Wege zur graphischen Rekursion treffen wir oft nicht auf die Linienamputation selbst, sondern auf bestimmte Kombinationen dieser Operation. Eine solche ist die **Linienaufschneidung**, die der Funktionalableitung $-\delta/\delta G^{-1}$ entspricht. Wir versuchen nun, diese auf die Linienamputation zurückzuführen. Hierzu verwenden wir den folgenden Zusammenhang zwischen den beiden Funktionalableitungen $\delta/\delta G^{-1}$ und $\delta/\delta G$:

$$\frac{\delta}{\delta G_{12}^{-1}} = \int_{34} \frac{\delta G_{34}}{\delta G_{12}^{-1}} \frac{\delta}{\delta G_{34}}, \quad (1.21)$$

der sich aus der funktionalen Kettenregel ergibt. Leitet man die Gleichung (1.9) nach G_{56}^{-1} ab, so liefert uns dies die Beziehung

$$\int_3 G_{13}^{-1} \frac{\delta G_{32}}{\delta G_{56}^{-1}} = - \int_3 \frac{\delta G_{13}^{-1}}{\delta G_{56}^{-1}} G_{32}. \quad (1.22)$$

Mit $\int_1 G_{14}$ erweitert, können wir daraus wegen (1.9) die folgende Relation herleiten:

$$\frac{\delta G_{12}}{\delta G_{34}^{-1}} = - \int_{56} G_{15} \frac{\delta G_{56}^{-1}}{\delta G_{34}^{-1}} G_{62}. \quad (1.23)$$

Analog wie in der Gleichung (1.15), gilt folgende symmetrisierte Form der Funktionalableitung:

$$\frac{\delta G_{12}^{-1}}{\delta G_{34}^{-1}} = \frac{1}{2} \{ \delta_{13} \delta_{24} + \delta_{14} \delta_{23} \} , \quad (1.24)$$

so daß nach Einsetzen in (1.23) gilt

$$\frac{\delta G_{12}}{\delta G_{34}^{-1}} = -\frac{1}{2} \{ G_{13} G_{24} + G_{14} G_{23} \} . \quad (1.25)$$

Erinnern wir uns noch an (1.21), so erhalten wir

$$-\frac{\delta}{\delta G_{12}^{-1}} = \int_{34} G_{13} G_{24} \frac{\delta}{\delta G_{34}} . \quad (1.26)$$

Diese Gleichung besagt also, daß die Linienaufschneidung die Hintereinanderausführung der Linienamputation und des Anklebens zweier Linien an die hinterbliebenen Stümmel ist.

Beispiel 3: Aufschneiden eines Tadpoles

Hier erinnern wir uns an die Definition eines Tadpoles in (1.13) und schreiben

$$-\frac{\delta}{\delta G_{34}^{-1}} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bigcirc \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array} \right\} = \begin{array}{c} 4 \text{ --- } 6 \\ 3 \text{ --- } 5 \end{array} \frac{\delta}{\delta \text{---} 5 \text{---} 6} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bigcirc \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array} \right\} = \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 4 \end{array} , \quad (1.27)$$

wobei wir hier auf das Ergebnis von Beispiel 2 zurückgegriffen haben. Durch die negative Funktionalableitung $\delta/\delta G^{-1}$ wurde also die einzige Linie des Tadpoles durchtrennt.

Manchmal kommt die Linienamputation zusammen mit anschliessendem Ankleben einer Linie an beide hinterbliebenen Stümmel vor, also als Operation

$$\hat{L} \equiv \int_{12} G_{12} \frac{\delta}{\delta G_{12}} . \quad (1.28)$$

Das ist der sogenannte **Linienzähleroperator**. Eine Einzellinie lässt er unberührt, denn wegen (1.15) gilt

$$\hat{L} G_{34} = \int_{12} G_{12} \frac{\delta}{\delta G_{12}} G_{34} = G_{34} , \quad (1.29)$$

was in diagrammatischer Sprache bedeutet

$$\left(\begin{array}{c} 1 \quad \delta \text{---} 4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \quad \delta \text{---} 1 \end{array} \right) = 3 \text{ --- } 4 . \quad (1.30)$$

Wie dieser Operator auf die komplizierteren Graphen wirkt, sehen wir aus dem folgenden Beispiel.

Beispiel 4: Linienzählung bei dem Hantelgraph

Der Hantelgraph ist in der Tabelle 1 auf Seite 21 unter der Nummer #1.1 zu sehen. Wenden

wir den Linienzähloperator \hat{L} darauf, so erhalten wir

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \frac{\delta}{\delta \text{---} 1 \text{---} 2} \right) \left\{ \text{Diagramm} \right\} = \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \frac{\delta}{\delta \text{---} 1 \text{---} 2} \right) \right\} \begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \text{Diagramm} + \text{Diagramm} \begin{array}{c} 5 \\ 6 \end{array} \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \frac{\delta}{\delta \text{---} 1 \text{---} 2} \right) \right\} ,$$

und wegen (1.30) ergibt sich daraus

$$\hat{L} \text{Diagramm} = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \right) \text{Diagramm} + \left(\begin{array}{c} 5 \\ 6 \end{array} \right) \text{Diagramm} = 2 \text{Diagramm} . \quad (1.31)$$

Die Wirkung auf den gegebenen Graph bestand also in dessen Verdopplung. Dies hatte damit zu tun, daß es im vorliegenden Fall nur zwei Linien gab. Alle Graphen des ersten Kapitels bestehen nur aus einfachen Linien und Vertizes und, da die Funktionalableitung $\delta/\delta G_{12}$ nicht auf die Vertizes wirkt, wirkt auch die Linienzähloperation nur auf die Linien eines Diagramms, und zwar auf jede genau ein Mal und belässt dabei diese so, wie sie war. Mit anderen Worten, sie zählt in der Tat die Linien dieses Graphes.

Nun haben wir die ersten graphischen Operationen und ihre algebraisch modifizierten Formen eingeführt. Im Laufe der Zeit werden auch weitere Regeln von Nöten sein, sie werden je nach Bedarf eingeführt und sind meistens auf die bereits besprochenen zurückzuführen. Diese werden aber zuerst ausreichen, um im nächsten Kapitel die zusammenhängenden Feynman-Diagramme zu erzeugen.

Kapitel 2

Zusammenhängende Feynman-Diagramme

Ein systematischer Weg zur rekursiven graphischen Erzeugung von Feynman-Diagrammen der ϕ^4 -Theorie mit den dazugehörigen relativen Gewichten wurde bereits in der Arbeit [12] besprochen. Es wurden dabei die Graphen der negativen freien Energie, die sogenannten Vakuumdiagramme, erzeugt. Im vorliegenden Kapitel werden wir zuerst den Gedankengang dieser Arbeit nachvollziehen und im Anschluss daran diesen auf die zusammenhängenden Zwei- und Vier-Punkt-Funktionen ausweiten.

2.1 Schwinger-Dyson-Gleichung

Der Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist die Integro-Differentialgleichung

$$\int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta\phi_1} \{ \phi_2 e^{-E[\phi]} \} = 0 \quad , \quad (2.1)$$

die durch die partielle Integration im Funktionalintegral und aus dem schnellen Verschwinden der Exponentialfunktion im Unendlichen folgt. Setzen wir darin die explizite Form des Energiefunktional (1.2) ein, so lautet diese speziell für die ϕ^4 -Theorie

$$\int \mathcal{D}\phi \left\{ \delta_{12} - \int_3 G_{13}^{-1} \phi_2 \phi_3 - \frac{g}{6} \int_{345} V_{1345} \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_5 \right\} e^{-E[\phi]} = 0 \quad . \quad (2.2)$$

Die *Zustandssumme* eines Systems im thermischen Gleichgewicht lautet

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-E[\phi]} \quad , \quad (2.3)$$

wobei der Boltzmann-Faktor $k_B T$ auf 1 normiert ist. Man kann (2.2) auch mit der Zustandssumme Z ausdrücken, und zwar gilt dann :

$$\delta_{12} Z + 2 \int_3 G_{13}^{-1} \frac{\delta Z}{\delta G_{23}^{-1}} = \frac{2g}{3} \int_{345} V_{1345} \frac{\delta^2 Z}{\delta G_{23}^{-1} \delta G_{45}^{-1}} \quad . \quad (2.4)$$

Die Gleichung (2.2) bzw. (2.4) bezeichnet man als Schwinger-Dyson-Gleichung.

2.2 Die negative freie Energie W

Die negative freie Energie eines Systems im thermischen Gleichgewicht ist

$$W = \ln Z \quad , \quad (2.5)$$

wobei wiederum $k_B T \equiv 1$ gesetzt ist. Mit dieser Definition kann man (2.4) auch umschreiben zu

$$\delta_{12} + 2 \int_3 G_{13}^{-1} \frac{\delta W}{\delta G_{23}^{-1}} = \frac{2g}{3} \int_{345} V_{1345} \left\{ \frac{\delta^2 W}{\delta G_{23}^{-1} \delta G_{45}^{-1}} + \frac{\delta W}{\delta G_{23}^{-1}} \frac{\delta W}{\delta G_{45}^{-1}} \right\} . \quad (2.6)$$

An dieser Stelle sei bemerkt, daß wir durch diese Umformung aus der in Z linearen Funktionaldifferentialgleichung (2.4) eine nichtlineare in W bekommen haben.

Zuerst betrachten wir den ungestörten Fall mit der freien Energie $W = W^{(0)}$, bei dem $g = 0$ gesetzt wird und die Gleichung (2.6) sich auf die lineare Gleichung

$$\delta_{12} + 2 \int_3 G_{13}^{-1} \frac{\delta W^{(0)}}{\delta G_{23}^{-1}} = 0 \quad (2.7)$$

reduziert. Wie z.B. dem Lehrbuch [28] zu entnehmen ist, kann deren Lösung bis auf eine additive Konstante in der Form

$$W^{(0)} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln G^{-1} \quad (2.8)$$

gefunden werden, wobei hier die abkürzende Schreibweise¹

$$\text{Tr} \ln G^{-1} \equiv -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{1\dots n} (\delta_{12} - G_{12}^{-1}) \dots (\delta_{n-1,n} - G_{n-1,n}^{-1}) (\delta_{n1} - G_{n1}^{-1}) \quad (2.9)$$

verwendet wurde. Wir bemerken noch an dieser Stelle, daß die explizite Reihendarstellung des freien Propagators G als Funktionalumkehrung von G^{-1} lautet²

$$G_{12} = \delta_{12} + (\delta_{12} - G_{12}^{-1}) + \sum_{n=3}^{\infty} \int_{3\dots n} (\delta_{13} - G_{13}^{-1}) \dots (\delta_{n-1,n} - G_{n-1,n}^{-1}) (\delta_{n2} - G_{n2}^{-1}) . \quad (2.10)$$

Ableitung von $W^{(0)}$ aus (2.8) mit (2.9) nach G^{-1} liefert daher unmittelbar die folgende Identität:

$$\frac{\delta W^{(0)}}{\delta G_{12}^{-1}} = -\frac{1}{2} G_{12} . \quad (2.11)$$

¹Dies basiert auf der funktionalanalytischen Form der Taylor-Entwicklung $\ln x = -\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^n/n$.

²Diese Reihendarstellung basiert auf der Taylorreihe $x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n$.

Mit (1.9) überzeugt man sich leicht, daß damit die lineare Funktionaldifferentialgleichung (2.7) trivialerweise erfüllt ist. Die Lösung des allgemeinen Problems (2.6) suchen wir nun in der Form

$$W = W^{(0)} + W^{(\text{int})} \quad , \quad (2.12)$$

wobei $W^{(\text{int})}$ den wechselwirkenden Anteil der negativen freien Energie bezeichnet. Bemerken wir weiterhin, daß wegen (2.11) und (1.25) gilt

$$\frac{\delta^2 W^{(0)}}{\delta G_{12}^{-1} \delta G_{34}^{-1}} = \frac{1}{4} \{G_{13} G_{24} + G_{14} G_{23}\} \quad , \quad (2.13)$$

so können wir unter Verwendung der Relation (1.9) aus der Schwinger-Dyson-Gleichung (2.6), erweitert mit $\int_{12} \delta_{12}$, das folgende Ergebnis bekommen:

$$\begin{aligned} \int_{12} G_{12}^{-1} \frac{\delta W^{(\text{int})}}{\delta G_{12}^{-1}} &= \frac{g}{4} \int_{1234} V_{1234} G_{12} G_{34} - \frac{g}{3} \int_{1234} V_{1234} G_{12} \frac{\delta W^{(\text{int})}}{\delta G_{34}^{-1}} \\ &+ \frac{g}{3} \int_{1234} V_{1234} \left\{ \frac{\delta^2 W^{(\text{int})}}{\delta G_{12}^{-1} \delta G_{34}^{-1}} + \frac{\delta W^{(\text{int})}}{\delta G_{12}^{-1}} \frac{\delta W^{(\text{int})}}{\delta G_{34}^{-1}} \right\} . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Erinnern wir uns an dieser Stelle an die funktionale Kettenregel (1.26), so stellen wir fest, daß

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2}{\delta G_{12}^{-1} \delta G_{34}^{-1}} &= \int_{5678} G_{15} G_{26} G_{37} G_{48} \frac{\delta^2}{\delta G_{56} \delta G_{78}} + \frac{1}{2} \int_{56} \{G_{13} G_{25} G_{46} + G_{14} G_{25} G_{36}\} \frac{\delta}{\delta G_{56}} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{56} \{G_{23} G_{15} G_{46} + G_{24} G_{15} G_{36}\} \frac{\delta}{\delta G_{56}} . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Mit den Umformungen (1.26) und (2.15) unter Berücksichtigung (1.9) können wir (2.14) umschreiben zu

$$\begin{aligned} \int_{12} G_{12} \frac{\delta W^{(\text{int})}}{\delta G_{12}} &= -\frac{g}{4} \int_{1234} G_{12} V_{1234} G_{34} - g \int_{123456} G_{12} V_{1234} G_{35} G_{46} \frac{\delta W^{(\text{int})}}{\delta G_{56}} \\ &- \frac{g}{3} \int_{12345678} V_{1234} G_{15} G_{26} G_{37} G_{48} \frac{\delta^2 W^{(\text{int})}}{\delta G_{56} \delta G_{78}} \\ &- \frac{g}{3} \int_{12345678} \frac{\delta W^{(\text{int})}}{\delta G_{56}} G_{51} G_{62} V_{1234} G_{37} G_{48} \frac{\delta W^{(\text{int})}}{\delta G_{78}} . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Den ungestörten Anteil der negativen freien Energie $W^{(0)}$ stellen wir diagrammatisch z.B. als einen Ring dar:

$$W^{(0)} \equiv \frac{1}{2} \bigcirc \quad , \quad (2.17)$$

und den wechselwirkenden Anteil $W^{(\text{int})}$ bezeichnen wir als eine Ellipse

$$W^{(\text{int})} \equiv \bigcirc . \quad (2.18)$$

Mit dieser Bezeichnung können wir die Bestimmungsgleichung (2.16) für den wechselwirkenden Anteil der negativen freien Energie entsprechend den Anklebevorschriften (1.12) und (1.13) graphisch aufschreiben als

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \delta \bigcirc \\ 2 \end{array} \right) \frac{\delta}{\delta_{1-2}} &= \frac{1}{4} \bigcirc \bigcirc + \bigcirc \begin{array}{c} 1 \\ \delta \bigcirc \\ 2 \end{array} \frac{\delta}{\delta_{1-2}} + \frac{1}{3} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \right) \frac{\delta^2 \bigcirc}{\delta_{1-2} \delta_{3-4}} \\ &+ \frac{1}{3} \frac{\delta \bigcirc}{\delta_{1-2}} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \left(\begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \right) \frac{\delta \bigcirc}{\delta_{3-4}} . \end{aligned} \quad (2.19)$$

2.3 Graphische Rekursion für W

Hier versuchen wir, die Gleichung (2.16) nach $W^{(\text{int})}$ aufzulösen. Hierzu machen für diesen wechselwirkenden Anteil der negativen freien Energie einen störungstheoretischen Ansatz

$$W^{(\text{int})} = \sum_{p=1}^{\infty} W^{(p)} , \quad (2.20)$$

graphisch sinnvollerweise dargestellt als

$$\bigcirc = \sum_{p=1}^{\infty} \bigcirc^p , \quad (2.21)$$

wobei $W^{(p)}$ alle Terme der p -ten Ordnung in der Kopplung g einschliesst. \bigcirc^p beinhaltet demnach alle Graphen mit p Vertizes, denn diese Zahl fällt ja nach (1.8) mit der g -Potenz zusammen (das Hinzufügen eines Vertex entspricht im funktionalen Sinne einer Multiplikation mit gV). Jetzt müssen wir uns noch an den Operator \hat{L} erinnern, der die Linien eines Graphen zählt (siehe dazu Beispiel 4 auf der Seite 11 mit anschliessender Bemerkung). Bei den Vakuumdiagrammen hängt deren Linienzahl N unmittelbar mit der Zahl p der Vertizes zusammen durch die Relation $N = 2p$, wovon man sich anhand der Tabelle 1 leicht überzeugen kann. Demnach gilt für $p \geq 1$

$$\hat{L} W^{(p)} = \int_{12} G_{12} \frac{W^{(p)}}{\delta G_{12}} = 2p W^{(p)} , \quad (2.22)$$

und nach einer kurzen Umformung finden wir dann die folgende wichtige Relation:

$$\int_{12} G_{12} \frac{\delta W^{(\text{int})}}{\delta G_{12}} = 2 W^{(1)} + \sum_{p=1}^{\infty} 2(p+1) W^{(p+1)} . \quad (2.23)$$

Nach Einsetzen dieses Ergebnisses in (2.16) erhalten wir durch Trennung der g -Potenzen die Rekursionsformel für $p \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 W^{(p+1)} &= -\frac{g}{2(p+1)} \int_{123456} G_{12} V_{1234} G_{35} G_{46} \frac{\delta W^{(p)}}{\delta G_{56}} \\
 &\quad - \frac{g}{6(p+1)} \int_{12345678} V_{1234} G_{15} G_{26} G_{37} G_{48} \frac{\delta^2 W^{(p)}}{\delta G_{56} \delta G_{78}} \\
 &\quad - \frac{g}{6(p+1)} \sum_{q=1}^{p-1} \int_{12345678} \frac{\delta W^{(q)}}{\delta G_{56}} G_{51} G_{62} V_{1234} G_{37} G_{48} \frac{\delta W^{(p-q)}}{\delta G_{78}} \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

mit dem Rekursionsanfang

$$W^{(1)} = -\frac{g}{8} \int_{1234} G_{12} V_{1234} G_{34} \quad (2.25)$$

Das kann man auch diagrammatisch illustrieren (hier mit $p \geq 1$):

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} &= \frac{1}{8} \textcircled{\textcircled{1}} \quad , \\
 \textcircled{p+1} &= \frac{1}{2(p+1)} \textcircled{\textcircled{p}} + \frac{1}{6(p+1)} \textcircled{\textcircled{\textcircled{p}}} \\
 &\quad + \frac{1}{6(p+1)} \sum_{q=1}^{p-1} \textcircled{\textcircled{q}} \textcircled{\textcircled{p-q}} \quad .
 \end{aligned}$$

(Rek. 1)

Bem. Mit diesem Ergebnis kann man per vollständiger Induktion zwei folgende wichtige Eigenschaften der Vakuondiagramme zeigen:

Beh.1. Alle Vakuondiagramme sind zusammenhängend.



Beh.2. Alle Vakuondiagramme sind ein-Teilchen-irreduzibel, d.h. nach einmaliger Linienamputation bleiben diese immer noch zusammenhängend³.

Beweis:

(*). Für ein zusammenhängendes geschlossenes Diagramm gilt, daß es nach einmaliger Linienamputation zusammenhängend bleibt.

Dazu nehmen wir an, es gäbe ein zusammenhängendes geschlossenes Diagramm, das nach einer Linienamputation einen nichtzusammenhängenden Graph ergibt, also einen, der aus

³Der Begriff 'ein-Teilchen-irreduzibel' wurde von den Feldtheoretikern geprägt, Graphentheoretiker sprechen dabei von den (mindestens) 2-fach-kantenzusammenhängenden Graphen (siehe z.B. [39]).



$N > 1$ Teilgraphen besteht, wobei ein Teilgraph zwei Stümmel hat und $N - 1$ andere geschlossen sind (so z.B. ist  ein solcher mit $N = 2$). Durch das Schliessen dieses Graphen, d.h. durch das Ankleben einer Linie an beide äusseren Stümmel, bekommt man N geschlossene (aber getrennte) Teilgraphen, (speziell in unserem Beispiel ) , und das ergibt keinen zusammenhängenden Graphen. Andererseits haben wir in unserem ursprünglichen Diagramm lediglich eine Linie amputiert und anschliessend diese wieder ran-geklebt. Wie wir es uns schon überlegt haben, sollte diese Linie dabei nur 'gezählt' werden, an dem Diagramm selbst sollte sich dabei aber nichts geändert haben. Da wir aber von einem zusammenhängenden Diagramm ausgegangen sind, erhalten wir einen Widerspruch.

(**). Zwei und also auch endlich viele zusammenhängende Graphen ergeben nach dem Zusammenkleben wieder einen zusammenhängenden Graphen.

Das ist ohne weiteres klar.

Nun kommen wir zum Induktionsbeweis.

Der Induktionsanfang  ist bereits explizit vorgegeben und ist offensichtlich zusammenhängend.

Seien alle Diagramme bis zur p -ten Ordnung zusammenhängend. Dann sind wegen (*) auch alle daraus resultierenden ein-mal-linienamputierten Graphen zusammenhängend. Im ersten Term werden solche an den zusammenhängenden  geklebt und es ergeben sich laut (**) nur zusammenhängende Diagramme. Im letzten gemischten Term werden jeweils zwei solche an den zusammenhängenden  gebunden und es ergibt sich nach (**) wiederum nur etwas zusammenhängendes. Im zweiten Term haben wir es mit zwei-mal-linienamputierten Graphen zu tun. Diese entstehen durch eine weitere Linienamputation zusammenhängender ein-mal-amputierter Graphen und bestehen deswegen aus höchstens zwei getrennten Teilgraphen. Die vorliegende Situation entspricht also der in dem letzten Mischterm, und auch hier sind Graphen allesamt zusammenhängend.

Jetzt, nachdem wir den Zusammenhang der Vakuumdiagramme festgestellt haben, sehen wir unmittelbar aus (*), daß diese auch ein-Teilchen-irreduzibel sind. Somit sind wir auch schon fertig.

2.4 Anwendung der graphischen Rekursion für W

Ausgehend vom Rekursionsanfang $W^{(1)}$, versuchen wir mit Hilfe von (Rek. 1), die nächste Ordnung $W^{(2)}$ zu bestimmen. Dazu bemerken wir, daß der letzte gemischte Term in (Rek. 1) in dieser Ordnung noch nicht mitspielt und demnach gilt

$$\textcircled{2} = \frac{1}{4} \textcircled{1} \begin{matrix} 1 \\ \diagdown \\ \diagup \\ 2 \end{matrix} \frac{\delta \textcircled{1}}{\delta_{1-2}} + \frac{1}{12} \begin{matrix} 1 \\ \diagdown \\ \diagup \\ 3 \\ \diagdown \\ \diagup \\ 4 \end{matrix} \frac{\delta^2 \textcircled{1}}{\delta_{1-2} \delta_{3-4}} . \quad (2.26)$$

Die dazu benötigten Linienamputationen ergeben sich nach der Regel (1.15) wie auch schon

im Beispiel 2 auf Seite 10:

$$\frac{\delta \textcircled{1}}{\delta_{1-2}} = \frac{1}{8} \frac{\delta}{\delta_{1-2}} \left\{ \textcircled{1} \textcircled{1} \right\} = \frac{1}{4} \textcircled{1} \textcircled{2} \quad , \quad (2.27)$$

und also, wiederum wie im Beispiel 2, weiterhin

$$\frac{\delta^2 \textcircled{1}}{\delta_{1-2} \delta_{3-4}} = \frac{1}{4} \frac{\delta}{\delta_{3-4}} \left\{ \textcircled{1} \textcircled{2} \right\} = \frac{1}{4} \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \quad . \quad (2.28)$$

Mit der Anklebevorschrift (1.12) gilt dann analog zum Beispiel 1 auf der Seite 9

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \textcircled{2} \frac{\delta \textcircled{1}}{\delta_{1-2}} &= \frac{1}{4} \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{1} \quad , \\ \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \frac{\delta^2 \textcircled{1}}{\delta_{1-2} \delta_{3-4}} &= \frac{1}{4} \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{1} \quad . \end{aligned} \quad (2.29)$$

Das Endergebnis lautet dann nach (2.26)

$$\textcircled{2} = \frac{1}{16} \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{1} + \frac{1}{48} \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{1} \quad . \quad (2.30)$$

Das Resultat (2.30) finden wir nun in der Tabelle 1 wieder. Dort sind ausserdem alle Vakuumdiagramme bis zur vierten Vertexordnung zusammengefasst, die wir mit der Rekursionsbeziehung (Rek. 1) bestimmen können.

Bem. Erfahrungen mit höheren Ordnungen zeigen, daß der Mischterm in (Rek. 1) keine topologisch neuen Graphen liefert, aber zur richtigen Bestimmung der Gewichte notwendig ist.

Interessant ist in diesem Zusammenhang zu bemerken, daß schon im Rahmen der Diplomarbeit [26] die richtigen Vakuumdiagramme und ihre Gewichte bestimmt werden konnten, obwohl die Rekursionsbeziehung (Rek. 1) damals noch nicht zur Verfügung stand. Die Vakuumdiagramme wurden in [26] durch empirisch aufgestellte Regeln erzeugt, die gerade den beiden linearen Termen in der Rekursionsbeziehung (Rek. 1) entsprechen (siehe auch die Diskussion in Chap. 14 von [27]). Die entsprechenden Gewichte w der einzelnen Vakuumdiagramme wurden dann in [26] nachträglich kombinatorisch berechnet nach der Gleichung

$$w = \frac{1}{(2!)^{S+D} (3!)^T (4!)^V P} \quad , \quad (2.31)$$

die für alle Vertexordnungen gültig ist bis auf die erste. Hierbei ist S die Zahl der Selbstbindungen, D , T und V sind Zahlen der Doppel-, Tripel- und Quadrupel-Bindungen im jeweiligen Graphen und P ist die Zahl der formerhaltender Knotenpermutationen. Genauer gesagt bezeichnet S die Zahl der Linien, die zwei Stümmel ein und desselben Vertex verbinden und ist praktisch die Zahl der Tadpoles. D ist die Zahl der Knotenpaare, die durch genau

zwei Linien miteinander verbunden werden, und T bzw. V die Zahlen der Knotenpaare, die durch genau drei bzw. vier Linien verbunden werden. Diese Zahlen sind dem jeweiligen Graphen unmittelbar zu entnehmen. Anders ist es jedoch bei der Zahl P , zu deren Bestimmung wir alle Knoten färben bzw. numerieren und auf allen möglichen Wegen permutieren lassen. Anzahl der Permutationen, die bei ausser Acht lassen der Färbung denselben Graphen ergeben, ist dann schliesslich die gesuchte Zahl P . Zum Schluss wollen wir noch zeigen, wie man den Gewichtungsfaktor w eines bestimmten Graphen nach (2.31) kombinatorisch bestimmen kann. Dies führen wir am Beispiel des Diagramms #3.1 aus der nachfolgenden Tabelle 1 vor. Dieses Diagramm besitzt keinen Tadpole und es gilt demnach $S = 0$. Ebenfalls gibt es keine drei- oder vierfachen Verbindungen zwischen zwei Knotenpunkten. Alle sechs Linien sind in drei Doppelverbindungen involviert, demnach gilt $T = 0$, $V = 0$ und $D = 3$. Es gibt insgesamt $3! = 6$ Knotenpermutationen und alle sechs ergeben den identischen Graphen, d.h. $P = 6$. Der Gewichtungsfaktor ergibt sich demnach im Falle des Graphen #3.1 zu

$$w(\#3.1) = \frac{1}{(2!)^3 (3!)^0 (4!)^0 6} = \frac{1}{48} \quad , \quad (2.32)$$

was in völliger Übereinstimmung mit dem Wert aus der Tabelle 1 steht. Die einzige Ausnahme ist allerdings, wie bereits angesprochen, der Graph #1.1, dessen Gewicht der Gleichung (2.31) nicht entnommen werden kann. Zusammenfassend sei gemerkt, daß bei unserem Zugang mit Verwendung der Schwinger-Dyson-Gleichungen die Gewichtungsfaktoren automatisch mitbestimmt werden und keiner nachträglichen kombinatorischen Rechnung bedürfen. Auch der Graph #1.1 unterliegt bei diesem Zugang keiner Ausnahmeregelung.




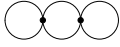

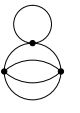
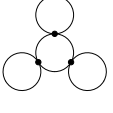
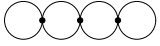


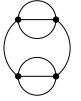
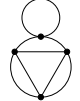
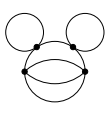
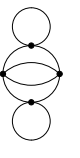
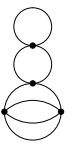
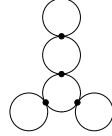
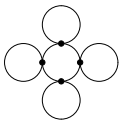
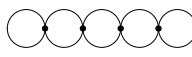
p				
1	#1.1 $\frac{1}{8}$  $(2,0,0,0;1)$			
2	#2.1 $\frac{1}{48}$  $(0,0,0,1;2)$	#2.2 $\frac{1}{16}$  $(2,1,0,0;2)$		
3	#3.1 $\frac{1}{48}$  $(0,3,0,0;6)$	#3.2 $\frac{1}{24}$  $(1,0,1,0;2)$	#3.3 $\frac{1}{48}$  $(3,0,0,0;6)$	#3.4 $\frac{1}{32}$  $(2,2,0,0;2)$
4	#4.1 $\frac{1}{128}$  $(0,4,0,0;8)$	#4.2 $\frac{1}{32}$  $(0,2,0,0;8)$	#4.3 $\frac{1}{144}$  $(0,0,2,0;4)$	#4.4 $\frac{1}{16}$  $(1,2,0,0;2)$
	#4.5 $\frac{1}{48}$  $(2,0,1,0;2)$	#4.6 $\frac{1}{32}$  $(2,1,0,0;4)$	#4.7 $\frac{1}{48}$  $(1,1,1,0;2)$	#4.8 $\frac{1}{32}$  $(3,1,0,0;2)$
	#4.9 $\frac{1}{128}$  $(4,0,0,0;8)$	#4.10 $\frac{1}{64}$  $(2,3,0,0;2)$		

Tabelle 1: Zusammenhängende Vakuumbdiagramme mit deren relativen Gewichten in der ϕ^4 -Theorie. Jedes Diagramm wird durch den fünfer-Tupel $(S, D, T, V; P)$ charakterisiert, wobei S, D, T und V die jeweiligen Zahlen der Selbst-, Doppel-, Tripel- und Quadrupel-Bindungen sind und P die Zahl der formerhaltenden Knotenpermutationen.

2.5 Definition der Zwei- und Vier-Punkt-Funktionen \mathbf{G}_{12} und \mathbf{G}_{1234}^c

In der Funktionaldifferentialgleichung (2.6) für die negative freie Energie W traten die Ausdrücke $\delta W/\delta G_{12}^{-1}$ und $\delta^2 W/\delta G_{12}^{-1}\delta G_{34}^{-1}$ auf. Diese haben eine eigenständige physikalische Bedeutung, auf die wir in diesem Abschnitt näher eingehen wollen.

Die *Zwei-Punkt-Funktion*, die mit \mathbf{G}_{12} bezeichnet wird, stellt die Paarverteilungsfunktion zweier Felder ϕ_1 und ϕ_2 dar und ist als der Mittelwert des Produktes dieser Felder definiert. Mit der Zustandssumme Z aus (2.3) ist das also

$$\mathbf{G}_{12} \equiv \langle \phi_1 \phi_2 \rangle \equiv \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \phi_1 \phi_2 e^{-E[\phi]} \quad . \quad (2.33)$$

Die *Vier-Punkt-Funktion*, mit \mathbf{G}_{1234} bezeichnet, ist entsprechend die Vier-Feld-Verteilungsfunktion der Felder $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ und ist mit

$$\mathbf{G}_{1234} \equiv \langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle \equiv \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 e^{-E[\phi]} \quad (2.34)$$

definiert. Die beiden Verteilungsfunktionen lassen sich mit Hilfe des sogenannten *erzeugenden Funktionals*

$$Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\phi e^{-E[\phi] + \int J_1 \phi_1} \quad (2.35)$$

berechnen, wobei hier J den *äusseren Strom* darstellt. Die für die Statistik relevanten Grössen bekommt man jeweils an der Stelle $J = 0$, so sieht man z.B. ohne weiteres, daß für die Zustandssumme Z aus (2.3) gilt:

$$Z = Z[J] \Big|_{J=0} \quad . \quad (2.36)$$

Die Zwei- und Vier-Punkt-Funktionen ergeben sich dann aus dem erzeugenden Funktional (2.35) durch mehrfache Funktionalableitungen bzgl. des Stromes J , die wiederum an der Stelle $J = 0$ ausgewertet werden:

$$\mathbf{G}_{12} = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J_1 \delta J_2} \Big|_{J=0} \quad , \quad (2.37)$$

$$\mathbf{G}_{1234} = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta^4 Z[J]}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_3 \delta J_4} \Big|_{J=0} \quad . \quad (2.38)$$

Ein anderer wichtiger Begriff in der statistischen Physik ist der der Korrelationsfunktionen. Diese werden ähnlich den Verteilungsfunktionen eingeführt, und zwar als entsprechende Funktionalableitungen des Logarithmus vom erzeugenden Funktional

$$W[J] \equiv \ln Z[J] \quad . \quad (2.39)$$

Im Gegenteil zu den Verteilungsfunktionen werden diese Korrelationsfunktionen nur durch zusammenhängende Graphen dargestellt, was wir an dieser Stelle nur als eine Behauptung formulieren und erst am Ende des Kapitels auch beweisen werden. Aus diesem Grund bezeichnen wir die Korrelationsfunktionen als *zusammenhängende n-Punkt-Funktionen*. Diese definieren wir mit dem erzeugenden Funktional für Korrelationen (2.39) als

$$\mathbf{G}_{1\dots n}^c \equiv \left. \frac{\delta^n W[J]}{\delta J_1 \dots \delta J_n} \right|_{J=0} . \quad (2.40)$$

So ist z.B.

$$\mathbf{G}_1^c \equiv \left. \frac{\delta W[J]}{\delta J_1} \right|_{J=0} = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \phi_1 e^{-E[\phi]} \equiv \langle \phi_1 \rangle \quad (2.41)$$

der Felderwartungswert. In der symmetrischen ungeordneten Phase, die wir in dieser Diplomarbeit betrachten wollen, gilt aber aus Symmetriegründen

$$\mathbf{G}_1^c = \langle \phi_1 \rangle = 0 . \quad (2.42)$$

Die *zusammenhängende Zwei-Punkt-Funktion* ist die Paarkorrelationsfunktion, und das ist nach (2.40)

$$\mathbf{G}_{12}^c \equiv \left. \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_1 \delta J_2} \right|_{J=0} = \langle \phi_1 \phi_2 \rangle - \langle \phi_1 \rangle \langle \phi_2 \rangle . \quad (2.43)$$

In der symmetrischen ungeordneten Phase fallen aber die Paarkorrelationsfunktion und Paarverteilungsfunktion wegen (2.42) zusammen:

$$\mathbf{G}_{12}^c = \mathbf{G}_{12} . \quad (2.44)$$

Ebenfalls nach (2.40) gilt für die *zusammenhängende drei-Punkt-Funktion*

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{123}^c \equiv \left. \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_3} \right|_{J=0} &= \langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \rangle - 2 \langle \phi_1 \rangle \langle \phi_2 \phi_3 \rangle - 2 \langle \phi_2 \rangle \langle \phi_1 \phi_3 \rangle \\ &\quad - 2 \langle \phi_3 \rangle \langle \phi_1 \phi_2 \rangle + 6 \langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \rangle , \end{aligned} \quad (2.45)$$

und, weil alle Terme Erwartungen ungerader Produkte enthalten, verschwindet auch dieser Ausdruck in der ungeordneten Phase.

Die nächste nichtverschwindende Korrelationsfunktion ist die *zusammenhängende Vier-Punkt-Funktion* \mathbf{G}_{1234}^c

$$\mathbf{G}_{1234}^c \equiv \left. \frac{\delta^4 W[J]}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_3 \delta J_4} \right|_{J=0} , \quad (2.46)$$

für die in der symmetrischen Phase gilt

$$\mathbf{G}_{1234}^c \equiv \langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle - \langle \phi_1 \phi_2 \rangle \langle \phi_3 \phi_4 \rangle - \langle \phi_1 \phi_3 \rangle \langle \phi_2 \phi_4 \rangle - \langle \phi_1 \phi_4 \rangle \langle \phi_2 \phi_3 \rangle . \quad (2.47)$$

Mit den Definitionen (2.33) und (2.34) gilt demnach

$$\mathbf{G}_{1234}^c = \mathbf{G}_{1234} - \mathbf{G}_{12}\mathbf{G}_{34} - \mathbf{G}_{13}\mathbf{G}_{24} - \mathbf{G}_{14}\mathbf{G}_{23} \quad . \quad (2.48)$$

Bem. Aus (2.33), (2.34) und (2.48) sieht man, daß die Funktionen \mathbf{G}_{12} , \mathbf{G}_{1234} und \mathbf{G}_{1234}^c symmetrisch bezüglich der Permutation deren Indizes sind.

Wenden wir uns nun den Termen $\delta W/\delta G_{12}^{-1}$ und $\delta^2 W/\delta G_{12}^{-1}\delta G_{34}^{-1}$ zu, so sehen wir mit der negativen freien Energie (2.5) und der Zustandssumme (2.3), daß

$$\frac{\delta W}{\delta G_{12}^{-1}} = -\frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta E[\phi]}{\delta G_{12}^{-1}} e^{-E[\phi]} \quad (2.49)$$

gilt. Mit dem Energiefunktional (1.2) ergibt sich daraus

$$\frac{\delta W}{\delta G_{12}^{-1}} = -\frac{1}{2Z} \int \mathcal{D}\phi \phi_1 \phi_2 e^{-E[\phi]} \quad (2.50)$$

und nach der Definition (2.33)

$$\mathbf{G}_{12} = -2 \frac{\delta W}{\delta G_{12}^{-1}} \quad . \quad (2.51)$$

Bem. In der Realzeit entspricht diese Paarkorrelationsfunktion dem feldtheoretischen Feynman-Propagator, der als Vakuumerwartung des zeitgeordneten Produktes zweier Felder ϕ_1 und ϕ_2 definiert ist, also als $\mathbf{G}_{12}^F \equiv -\langle 0| T(\phi_1 \phi_2) |0\rangle$, wobei hier T der Zeitordnungsoperator ist. Im störungsfreien Fall reduziert sich (2.51) auf (2.11) mit der ungestörten freien Energie $W^{(0)}$. Daraus erkennen wir, daß G_{12} die Rolle des wohlbekannten freien Feynman-Propagators spielt.

Weiterhin gilt nach der Definition (2.34)

$$\mathbf{G}_{1234} = 4 \frac{\delta^2 W}{\delta G_{34}^{-1} \delta G_{12}^{-1}} + 4 \frac{\delta W}{\delta G_{12}^{-1}} \frac{\delta W}{\delta G_{34}^{-1}} \quad (2.52)$$

also mit (2.51) auch

$$\mathbf{G}_{1234} = -2 \frac{\delta \mathbf{G}_{12}}{\delta G_{34}^{-1}} + \mathbf{G}_{12}\mathbf{G}_{34} \quad . \quad (2.53)$$

Laut Relation (2.48) erhalten wir dann

$$\mathbf{G}_{1234}^c = -2 \frac{\delta \mathbf{G}_{12}}{\delta G_{34}^{-1}} - \mathbf{G}_{13}\mathbf{G}_{24} - \mathbf{G}_{14}\mathbf{G}_{23} \quad . \quad (2.54)$$

Bem. Die Formeln (2.51) und (2.52) bieten gegenüber den ursprünglichen (2.37) und (2.38)

zwei grosse Vorteile. Einerseits ist eine einfache Ableitung nach dem bilokalen Kern leichter durchzuführen als eine zweifache nach den Strömen. Andererseits lassen sich Ableitungsterme aus (2.51) und (2.52) als Linienaufschneidung der Vakuumdiagramme, die wir im Einleitungskapitel auf Seite 10 bereits eingeführt haben, graphisch interpretieren.

Die gerade definierten Korrelationsfunktionen bekommen eigene graphische Bezeichnungen. Die Zwei-Punkt-Funktion \mathbf{G}_{12} wird als eine Doppellinie dargestellt, manchmal auch *volle Linie* genannt, und die zusammenhängende Vier-Punkt-Funktion \mathbf{G}_{1234}^c als ein Vertex mit einem Kreis in der Mitte und langen Beinchen:

$$\mathbf{G}_{12} \equiv \text{---} \equiv \text{---} \quad , \quad \mathbf{G}_{1234}^c \equiv \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 4 \end{array} . \quad (2.55)$$

2.6 Bestimmungsgleichungen für \mathbf{G}_{12} und \mathbf{G}_{1234}^c

Die physikalisch wichtigen zusammenhängenden Zwei- und Vier-Punkt-Funktionen \mathbf{G}_{12} und \mathbf{G}_{1234}^c könnte man mit Hilfe der Gleichungen (2.51) und (2.52) mit (2.48) aus den bereits bekannten Vakuumdiagrammen bekommen. Das haben wir bei der Vakuumdiagramm-Rekursion mit den Zwischenschritten (2.27) und (2.28) auch schon stillschweigend getan. Auch in den früheren Arbeiten (siehe z.B. [12]) wurde tatsächlich so vorgegangen. In diesem und dem nächsten Abschnitt werden wir jedoch diese Funktionen durch eigenständige Rekursionsgleichungen ohne Verwendung von Vakuumdiagrammen bestimmen.

Dazu betrachten wir zuerst die Schwinger-Dyson-Gleichung (2.2) und setzen darin die Definitionen (2.33) und (2.34) ein. Mit Hilfe der Gleichung (2.48) liefert uns dies die Schwinger-Dyson-Gleichung

$$\delta_{12} - \int_3 G_{13}^{-1} \mathbf{G}_{32} = \frac{g}{2} \int_{345} V_{1345} \mathbf{G}_{34} \mathbf{G}_{52} + \frac{g}{6} \int_{345} V_{1345} \mathbf{G}_{3452}^c \quad (2.56)$$

oder, mit $\int_{16} G_{61}$ erweitert, die Bestimmungsgleichung für die zusammenhängende Zwei-Punkt-Funktion:

$$\mathbf{G}_{12} = G_{12} - \frac{g}{2} \int_{3456} G_{13} V_{3456} \mathbf{G}_{45} \mathbf{G}_{62} - \frac{g}{6} \int_{3456} G_{13} V_{3456} \mathbf{G}_{4562}^c . \quad (2.57)$$

Um diese Gleichung diagrammatisch zu illustrieren, benötigen wir zu der in (1.12) bereits erklärten Anklebevorschrift noch zwei weitere. Eine davon ist das Ankleben einer vollen Linie an einen Vertex, die durch

$$-g \int_4 V_{1234} \mathbf{G}_{45} \equiv \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 4 \end{array} \equiv \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 5 \end{array} \quad (2.58)$$

illustriert wird. Die andere ist das Ankleben der zusammenhängenden Vier-Punkt-Funktion \mathbf{G}_{1234}^c an einen Vertex, was durch die Vorschrift

$$-g \int_4 V_{1234} \mathbf{G}_{4567}^c \equiv \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ | \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 6 \\ | \\ 7 \end{array} \equiv \begin{array}{c} 3 \\ | \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ | \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 6 \\ | \\ 7 \end{array} \quad (2.59)$$

erklärt wird. Analog zur Regel (1.12) wird auch hier an den Stellen mit gleichen Indizes verbunden. Nun sind wir in der Lage, die Bestimmungsgleichung (2.57) für die Paarkorrelationsfunktion auch graphisch darzustellen, und zwar als

$$1 \equiv 2 = 1 \text{---} 2 + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{---} \\ \bigcirc \\ \text{---} \end{array} 2 + \frac{1}{6} \begin{array}{c} \text{---} \\ \bigcirc \\ \bigcirc \\ \text{---} \end{array} 2 \quad . \quad (2.60)$$

Wie man unschwer erkennen kann, setzt diese Gleichung die Kenntnis der zusammenhängenden Vier-Punkt-Funktion \mathbf{G}_{1234}^c voraus. Um diese zu bestimmen, könnten wir die Gleichung (2.54) verwenden, die graphisch mit Hilfe der Kettenregel (1.26) wie folgt ausgeschrieben wird:

$$\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} = \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ \text{---} \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \text{---} \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} - \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \\ 4 \end{array} - \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} \quad . \quad (2.61)$$

Hier erkennt man sofort, daß die letzten beiden Produkte mit Sicherheit nicht zusammenhängend und negativ sind, obwohl \mathbf{G}_{1234}^c selbst nur zusammenhängende und positive Beiträge enthalten sollte (siehe dazu z.B. Ergebnisse in der Tabelle 3 auf Seite 36). Offensichtlich dienen Graphen dieser Produkte dazu, die im ersten Ableitungsterm entstandenen nichtzusammenhängende Graphen wegzuheben. Auf dem Wege zum Endergebnis würden wir diese aber schon zweimal berechnen müssen, damit sie sich zum Schluss wegheben. Das würde uns zwar die richtigen Diagramme mit den richtigen Gewichtsfaktoren liefern, wäre aber viel zu aufwendig.

Glücklicherweise können wir dieses Problem umgehen, indem wir für die zusammenhängende Vier-Punkt-Funktion \mathbf{G}_{1234}^c eine eigenständige Rekursionsbeziehung finden. Dazu leiten wir die Schwinger-Dyson-Gleichung (2.56) nach G_{67}^{-1} ab und berücksichtigen dabei (2.54). Anschliessend mit $\int_1 G_{18}$ erweitert, liefert dies zunächst:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{1234}^c &= \frac{g}{3} \int_{5678} G_{15} V_{5678} \frac{\delta \mathbf{G}_{6782}^c}{\delta G_{34}^{-1}} - g \int_{5678} G_{15} V_{5678} \mathbf{G}_{62} \mathbf{G}_{73} \mathbf{G}_{84} \\ &\quad - \frac{g}{2} \int_{5678} G_{15} V_{5678} \mathbf{G}_{6734}^c \mathbf{G}_{82} - \frac{g}{2} \int_{5678} G_{15} V_{5678} \mathbf{G}_{8234}^c \mathbf{G}_{67} \\ &\quad + \mathbf{G}_{23} \left\{ G_{14} - \mathbf{G}_{14} - \frac{g}{2} \int_{5678} G_{15} V_{5678} \mathbf{G}_{67} \mathbf{G}_{84} \right\} \\ &\quad + \mathbf{G}_{24} \left\{ G_{13} - \mathbf{G}_{13} - \frac{g}{2} \int_{5678} G_{15} V_{5678} \mathbf{G}_{67} \mathbf{G}_{83} \right\} \quad . \quad (2.62) \end{aligned}$$

Nach Einsetzen von (2.57) vereinfacht sich dies zu

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{1234}^c &= \frac{g}{3} \int_{5678} G_{15} V_{5678} \frac{\delta \mathbf{G}_{6782}^c}{\delta G_{34}^{-1}} - g \int_{5678} G_{15} V_{5678} \mathbf{G}_{62} \mathbf{G}_{73} \mathbf{G}_{84} \\ &\quad - \frac{g}{2} \int_{5678} G_{15} V_{5678} \mathbf{G}_{6734}^c \mathbf{G}_{82} - \frac{g}{2} \int_{5678} G_{15} V_{5678} \mathbf{G}_{8234}^c \mathbf{G}_{67} \\ &\quad + \frac{g}{6} \int_{5678} G_{15} V_{5678} \mathbf{G}_{6784}^c \mathbf{G}_{23} + \frac{g}{6} \int_{5678} G_{15} V_{5678} \mathbf{G}_{6783}^c \mathbf{G}_{24} \quad . \quad (2.63) \end{aligned}$$

Wie man auch hier unschwer erkennen kann, sind die letzten zwei Terme nichtzusammenhängend und liefern Graphen mit negativem Vorzeichen. Diese nichtzusammenhängenden Graphen entstehen in dem ersten Term mit $\delta \mathbf{G}_{6782}^c / \delta G_{34}^{-1}$. Die vorliegende Formel (2.63) ist also immer noch ineffizient.

Die Lösung dieses Problems ergibt sich aus Erfahrungen mit Graphen niedriger Ordnungen. Es stellt sich nämlich im Unterschied zum oberen Ableitungsterm heraus, daß der Term $\int_{5678} G_{15} V_{5678} \delta \mathbf{G}_{8234}^c / \delta G_{67}^{-1}$ zusammenhängend ist und diese Probleme erst gar nicht verursacht. Um von diesem Umstand zu profitieren, stellen wir folgende Kommutationsbeziehung fest:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbf{G}_{1234}^c}{\delta G_{56}^{-1}} - \frac{\delta \mathbf{G}_{1256}^c}{\delta G_{34}^{-1}} &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{G}_{13} \mathbf{G}_{2456}^c + \mathbf{G}_{14} \mathbf{G}_{2356}^c + \mathbf{G}_{23} \mathbf{G}_{1456}^c + \mathbf{G}_{24} \mathbf{G}_{1356}^c \\ &\quad - \mathbf{G}_{15} \mathbf{G}_{2346}^c - \mathbf{G}_{16} \mathbf{G}_{2345}^c - \mathbf{G}_{25} \mathbf{G}_{1346}^c - \mathbf{G}_{26} \mathbf{G}_{1345}^c \} \quad , \quad (2.64) \end{aligned}$$

die sich aus der Relation (2.54) aufgrund der Vertauschbarkeit der Funktionalableitungen ergibt. Wenden wir nun diese auf (2.63) an, so erhalten wir unter Beachtung von (1.26) die Bestimmungsgleichung für die zusammenhängende Vier-Punkt-Funktion:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{1234}^c &= -g \int_{5678} G_{15} V_{5678} \mathbf{G}_{62} \mathbf{G}_{73} \mathbf{G}_{84} - \frac{g}{3} \int_{5678} G_{15} V_{5678} G_{69} G_{70} \frac{\delta \mathbf{G}_{8234}^c}{\delta G_{90}} \\ &\quad - \frac{g}{6} \int_{5678} G_{15} V_{5678} \mathbf{G}_{8234}^c \mathbf{G}_{67} - \frac{g}{6} \int_{5678} G_{15} V_{5678} \mathbf{G}_{6723}^c \mathbf{G}_{84} \\ &\quad - \frac{g}{6} \int_{5678} G_{15} V_{5678} \mathbf{G}_{6724}^c \mathbf{G}_{83} - \frac{g}{6} \int_{5678} G_{15} V_{5678} \mathbf{G}_{6734}^c \mathbf{G}_{82} \quad . \quad (2.65) \end{aligned}$$

Auch diese Gleichung lässt sich mit den bereits bekannten Anklebevorschriften (1.12), (2.58) und (2.59) diagrammatisch illustrieren:

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} &= \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \frac{1}{3} \begin{array}{c} 5 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} 7 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} \frac{\delta}{\delta G_{56}^{-1}} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 7 \end{array} + \frac{1}{6} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \frac{1}{6} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 3 \end{array} \\ &\quad + \frac{1}{6} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 2 \end{array} + \frac{1}{6} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} \quad . \quad (2.66) \end{aligned}$$

2.7 Graphische Rekursion für G_{12} und G_{1234}^c

Die Gleichungen (2.57) und (2.65) bzw. deren graphische Darstellungen (2.60) und (2.66) bilden das Gleichungssystem zur Bestimmung der zusammenhängenden Zwei- und Vier-Punkt-Funktionen G_{12} und G_{1234}^c . Deren Lösungen suchen wir, wie auch schon im Falle der negativen freien Energie, rekursiv mit den Störungsreihenansätzen

$$G_{12} \equiv \sum_{p=0}^{\infty} G_{12}^{(p)} \quad , \quad G_{1234}^c \equiv \sum_{p=0}^{\infty} G_{1234}^{c,(p)} \quad (2.67)$$

und den entsprechenden graphischen Darstellungen

$$1 \text{ --- } 2 \equiv \sum_{p=0}^{\infty} 1 \overset{p}{\text{---}} 2 \quad , \quad \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad / \\ \circ \\ / \quad \diagdown \\ 1 \quad 4 \end{array} \equiv \sum_{p=0}^{\infty} \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad / \\ \circ(p) \\ / \quad \diagdown \\ 1 \quad 4 \end{array} . \quad (2.68)$$

Hierbei beinhalten $G_{12}^{(p)}$ und $G_{1234}^{c,(p)}$ alle Terme der p -ten Ordnung in der Kopplung g und deren Graphen haben jeweils p Vertizes. Die Anklebevorschriften für diese p -te Ordnungen werden selbstverständlich völlig analog denen aus (2.58) und (2.59) durchgeführt. Mit diesen bekommen wir aus dem graphischen Gleichungssystem (2.60), (2.66) die folgende Rekursion (für $p = 0, 1, 2, \dots$):

$$1 \overset{0}{\text{---}} 2 = 1 \text{ --- } 2 \quad , \quad \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad / \\ \circ(0) \\ / \quad \diagdown \\ 1 \quad 4 \end{array} = 0 \quad ,$$

$$1 \overset{p+1}{\text{---}} 2 = \frac{1}{2} \sum_{q=0}^p 1 \overset{p-q}{\text{---}} \overset{q}{\text{---}} 2 + \frac{1}{6} 1 \text{---} \overset{p}{\text{---}} 2 \quad ,$$

$$\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad / \\ \circ(p+1) \\ / \quad \diagdown \\ 1 \quad 4 \end{array} = \sum_{q=0}^p \sum_{r=0}^q \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad / \\ \circ(p-q) \\ / \quad \diagdown \\ 1 \quad 4 \end{array} \overset{q-r}{\text{---}} \overset{r}{\text{---}} 2 + \frac{1}{3} 1 \text{---} \overset{5}{\text{---}} \overset{6}{\text{---}} \overset{7}{\text{---}} \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad / \\ \circ(p) \\ / \quad \diagdown \\ 4 \end{array} + \frac{1}{6} \sum_{q=1}^p 1 \overset{p-q}{\text{---}} \overset{q}{\text{---}} 2$$

$$+ \frac{1}{6} \sum_{q=1}^p \begin{array}{c} 4 \quad p-q \\ \diagdown \quad / \\ \circ(q) \\ / \quad \diagdown \\ 1 \quad 3 \end{array} + \frac{1}{6} \sum_{q=1}^p \begin{array}{c} 3 \quad p-q \\ \diagdown \quad / \\ \circ(q) \\ / \quad \diagdown \\ 1 \quad 4 \end{array} + \frac{1}{6} \sum_{q=1}^p \begin{array}{c} 2 \quad p-q \\ \diagdown \quad / \\ \circ(q) \\ / \quad \diagdown \\ 1 \quad 3 \end{array} .$$

(Rek. 2)

Bem. Mit diesem Ergebnis kann man per vollständiger Induktion in der Tat zeigen:

Beh.3. Alle Graphen der Zwei-Punkt- und der zusammenhängenden Vier-Punkt-Funktion sind zusammenhängend.

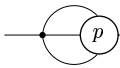
Beweis:

(*). Zwei, und also auch endlich viele, zusammenhängende Graphen ergeben nach dem Zu-


sammenkleben wieder einen zusammenhängenden Graphen.

Mit diesem Fakt, dem wir auch schon beim Beweis des Zusammenhangs der Vakuumdiagramme (siehe **Beh.1,2** auf Seite 17) begegneten, können wir nun den Induktionsbeweis durchführen.


Der Induktionsanfang ist explizit vorgegeben und es sind in der Tat zusammenhängende Graphen.

Seien nun alle Graphen der zusammenhängenden Zwei- und Vier-Punkt-Funktion bis einschliesslich p -ter Ordnung zusammenhängend. Bei dem Term  werden zusammen-

hängende Graphen der Vier-Punkt-Funktion von der p -ten Ordnung und die einfache Linie, die offensichtlich auch zusammenhängend ist, mit dem Vertex verknüpft und es ergibt sich dabei laut (*) wiederum etwas zusammenhängendes. Dies ist entsprechend auch bei dem

Term  der Fall. Hier werden Graphen der Zwei-Punkt-Funktionen \underline{q} und $\underline{p-q}$, die für $q = 0, 1, \dots, p$ nach Annahme allesamt zusammenhängend sind, und die einfache Linie an den Vertex geklebt und ergeben dabei wegen (*) lauter zusammenhängende Graphen. Also sind nach (Rek. 2) Graphen der Zwei-Punkt-Funktion der $(p+1)$ -ter Ordnung tatsächlich zusammenhängend.

So ähnlich argumentiert man auch bei allen Termen für die zusammenhängende Vier-Punkt-Funktion in der $(p+1)$ -ten Ordnung bis auf den zweiten Term, der die Linienamputation beinhaltet. Ein zusammenhängender Graph bleibt nicht durch jede Linienamputation zusammenhängend. Falls er trotz der Linienamputation zusammenhängend bleibt, so wenden wir die oben geschilderte Argumentation direkt an, und diese führt auf den zusammenhängenden Beitrag des zweiten Terms. Andernfalls überzeugt man sich leicht davon, daß der ursprüngliche Graph lediglich in zwei zusammenhängende Teilgraphen zerfällt. Im vorliegenden Fall entsteht dann immer eine Konstellation, bei der einer der Teilgraphen den Index 6 an dem durch die Amputation entstandenen Stümmel trägt und der andere den Index 7. Die beiden

(zusammenhängenden) Teilgraphen werden dann durch den Graphen  zu einem einzelnen verbunden, und dieser neu entstandene Graph ist dann laut (*) zusammenhängend. Nun haben wir uns überzeugt, daß alle Terme, die zur zusammenhängenden Vier-Punkt-Funktion in der $(p+1)$ -ten Ordnung beitragen, lauter zusammenhängende Diagramme liefern, also sind alle Graphen der zusammenhängenden Vier-Punkt-Funktion auch tatsächlich zusammenhängend.

Somit sind wir auch schon fertig.

2.8 Anwendung der graphischen Rekursion für G_{12} und G_{1234}^C

Jetzt wollen wir wissen, wie die ersten Ordnungen für die Korrelationsfunktionen G_{12} und G_{1234}^C aussehen. Für $G_{12}^{(1)}$ gilt z.B. nach (Rek. 2) mit $p = 0$:

$$1 \overset{1}{=} 2 = \frac{1}{2} 1 \text{---} \overset{0}{\bigcirc} \text{---} 2 + \frac{1}{6} 1 \text{---} \overset{0}{\bigcirc} \text{---} 2 = \frac{1}{2} 1 \text{---} \overset{0}{\bigcirc} \text{---} 2 . \quad (2.69)$$

Für $\mathbf{G}_{1234}^{c,(1)}$ erhalten wir mit $p = 0$

$$\begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \\ 4 \end{array} = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \textcircled{0} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{0} \\ \diagdown \\ 4 \end{array} = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \cdot \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \cdot \\ \diagdown \\ 4 \end{array} . \quad (2.70)$$

Bem. Es handelt sich bei $\mathbf{G}_{1234}^{c,(1)}$ nicht um den reinen Vertex V_{1234} , sondern um einen mit Linien anstatt Stümmeln, denn analytisch lautet dieser Ausdruck

$$\mathbf{G}_{1234}^{c,(1)} = -g \int_{5678} G_{15} G_{26} V_{1234} G_{73} G_{85} . \quad (2.71)$$

Für die nächste Ordnung bemerken wir noch, daß nach der Linienamputationsvorschrift (1.15) mit dem Ergebnis aus (2.70)

$$\begin{aligned} \frac{\delta \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \\ 4 \end{array}}{\delta \text{---} 6 \text{---} 7} &= \frac{1}{2} \delta_{26} \begin{array}{c} 7 \\ | \\ 5 \text{---} 3 \\ | \\ 4 \end{array} + \frac{1}{2} \delta_{36} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ 5 \text{---} 7 \\ | \\ 4 \end{array} + \frac{1}{2} \delta_{46} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ 5 \text{---} 3 \\ | \\ 7 \end{array} + \frac{1}{2} \delta_{27} \begin{array}{c} 6 \\ | \\ 5 \text{---} 3 \\ | \\ 4 \end{array} \\ &+ \frac{1}{2} \delta_{37} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ 5 \text{---} 6 \\ | \\ 4 \end{array} + \frac{1}{2} \delta_{47} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ 5 \text{---} 3 \\ | \\ 6 \end{array} + \frac{1}{2} \delta_{56} \begin{array}{c} 7 \\ | \\ 7 \text{---} 3 \\ | \\ 4 \end{array} + \frac{1}{2} \delta_{57} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ 6 \text{---} 3 \\ | \\ 4 \end{array} \quad (2.72) \end{aligned}$$

gilt. Mit der Anklebevorschrift (1.12) und der Regel (1.18) gilt weiterhin

$$1 \text{---} \begin{array}{c} 5 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} 7 \\ \diagup \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \\ 7 \end{array} \frac{\delta \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \\ 4 \end{array}}{\delta \text{---} 6 \text{---} 7} = \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \textcircled{0} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{0} \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \textcircled{0} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \textcircled{0} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \textcircled{0} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{0} \\ \diagdown \\ 3 \end{array} + 1 \text{---} \overset{2}{\bigcirc} \text{---} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ 3 \\ | \\ 4 \end{array} . \quad (2.73)$$

Bem. Aufgrund der Symmetrie der gegebenen Anordnung hätten wir uns in (2.72) die Symmetrisierung bezüglich des Indizespaars (6,7) sparen können.

Nun ist es leicht, die Graphen von $\mathbf{G}_{12}^{(2)}$ und $\mathbf{G}_{1234}^{c,(2)}$ zu erzeugen. So gilt nach (Rek. 2) mit $p = 1$ für $\mathbf{G}_{12}^{(2)}$

$$1 \overset{2}{=} 2 = \frac{1}{2} 1 \text{---} \overset{1}{\bigcirc} \text{---} 2 + \frac{1}{2} 1 \text{---} \overset{0}{\bigcirc} \text{---} 2 + \frac{1}{6} 1 \text{---} \overset{1}{\bigcirc} \text{---} 2 , \quad (2.74)$$

und nach der Ausführung der Anklebevorschrift (1.12) wie im Beispiel 1 auf Seite 9 liefert uns dies das folgende Ergebnis:

$$1 \overset{2}{=} 2 = \frac{1}{4} 1 \text{---} \overset{2}{\bigcirc} \text{---} 2 + \frac{1}{4} 1 \text{---} \overset{1}{\bigcirc} \text{---} \overset{1}{\bigcirc} \text{---} 2 + \frac{1}{6} 1 \text{---} \overset{1}{\bigcirc} \text{---} 2 . \quad (2.75)$$

Für $\mathbf{G}_{1234}^{c,(2)}$ gilt laut (Rek. 2)

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \textcircled{2} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \\ \diagdown \\ 4 \end{array} &= \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 0 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 0 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 0 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \frac{1}{3} \begin{array}{c} 5 \\ \diagdown \\ 1 \\ \diagup \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} 6 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 7 \end{array} \frac{\delta}{\delta} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \\
 + \frac{1}{6} \begin{array}{c} 0 \\ \diagdown \\ 1 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \frac{1}{6} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \\ \diagdown \\ 2 \end{array} + \frac{1}{6} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \frac{1}{6} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \\ \diagdown \\ 2 \end{array} . \quad (2.76)
 \end{aligned}$$

Mit der Anklebevorschrift (1.12) und nach Einsetzen von (2.70) erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \textcircled{2} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \\ \diagdown \\ 4 \end{array} &= \frac{1}{2} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \\ \diagdown \\ 1 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \\
 + \frac{1}{3} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \\ \diagdown \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \\ \diagdown \\ 3 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \right\} \\
 + \frac{1}{6} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \\ \diagdown \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \\ \diagdown \\ 3 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \right\} \quad (2.77)
 \end{aligned}$$

oder zusammengefasst als endgültige Form:

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \textcircled{2} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \\ \diagdown \\ 4 \end{array} &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \\ \diagdown \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right\} \\
 + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \\ \diagdown \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \textcircled{1} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \right\} . \quad (2.78)
 \end{aligned}$$

Bem. Bei diesem Ergebnis sieht man deutlich, wie sich die Symmetrie bezüglich der Indexpermutation für \mathbf{G}_{1234}^c manifestiert. Es sind nämlich jeweils vier und drei Graphen für diese Symmetrie nötig gewesen.

Die Ergebnisse (2.69), (2.70), (2.75) und (2.78) finden wir in den Tabellen 2 und 3 auf den nächsten Seiten wieder, wo alle Diagramme für die Zwei- und Vier-Punkt-Funktion bis zur vierten Ordnung bis auf die Graphenisomorphie zusammengefasst sind. Dort haben wir allerdings aus Platzgründen auf deren Indizierung verzichtet. Für die analytische Berechnung dieser Graphen ist diese auch unerheblich, aber leider nicht für die weiteren Rekursionsstufen. Dazu müssen wir die Indizierung mit Hilfe der Symmetrieüberlegungen wiederherstellen. Die Symmetrieeigenschaften von jedem Graphen findet man ebenfalls in den Tabellen, und

zwar ist das der letzte Beitrag in den zugehörigen Tupeln.

Beispielsweise ist der vertexähnliche Graph #1.1 aus der Tabelle 3 totalsymmetrisch und alle der $4! = 24$ Kombinationen sind identisch, deren Symmetriegrad wird dann also mit 24 festgelegt. Bei dem Diagramm #2.1 gibt es gemäss (2.78) drei Kombinationsgruppen mit jeweils 8 identischen Kombinationen, deren Symmetriegrad ist also 8. Für einen beliebigen Graphen kann man dessen Symmetriegrad auch unabhängig von seiner Erzeugung aus Rekursionsgleichungen berechnen, und zwar durch sukzessives Besetzen freier Enden mit Indizes. Dies wollen wir am Beispiel des Graphen #4.5 der Tabelle 3 erläutern:


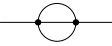




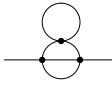
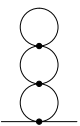


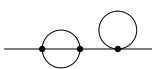
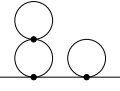
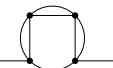
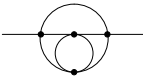
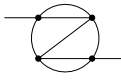
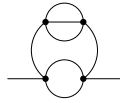

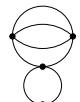
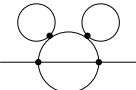
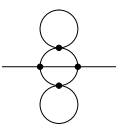
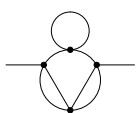
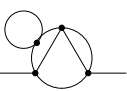
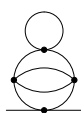
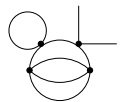
$$\begin{aligned}
 & 24 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \mapsto 24 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \mapsto 8 \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} + 8 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} + 8 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \mapsto \\
 & \mapsto 4 \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 4 \end{array} + 4 \begin{array}{c} 2 \quad 4 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \end{array} + 4 \begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 4 \end{array} + 4 \begin{array}{c} 4 \quad 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \end{array} + 4 \begin{array}{c} 3 \quad 4 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} + 4 \begin{array}{c} 4 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} . \quad (2.79)
 \end{aligned}$$

Der Symmetriegrad ist im vorliegenden Fall gleich 4. Etwas mehr Aufmerksamkeit erfordern nicht-planare Graphen. Beispielsweise erhalten wir beim Graphen #4.2 von Tabelle 3

$$\begin{aligned}
 & 24 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \mapsto 24 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \mapsto 24 \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \mapsto 24 \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 4 \end{array} . \quad (2.80)
 \end{aligned}$$




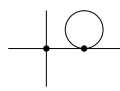
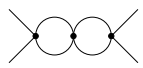
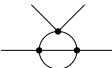
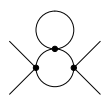
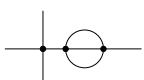
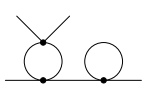
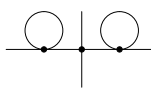
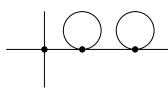
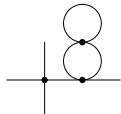
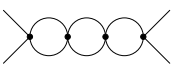
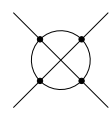
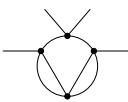
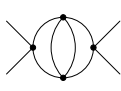
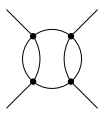
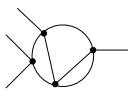
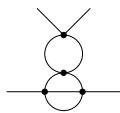
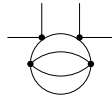
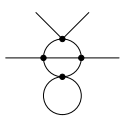
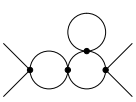
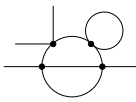
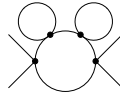
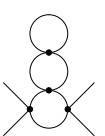
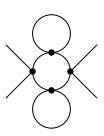
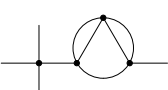
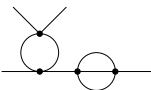
Die letzten beiden Besetzungsschritte scheinen überhaupt nicht plausibel zu sein, zumindest wenn man den Graphen als planar betrachtet. Da aber dieser gar nicht planar ist, muss man ihn sich dreidimensional vorstellen. Jetzt sehen wir, daß er einem Tetraeder ähnelt und somit tatsächlich totalsymmetrisch ist mit dem Symmetriegrad 24.

Bei den Zwei-Punkt-Funktionsgraphen gibt es $2! = 2$ mögliche Kombinationen und wir unterscheiden nur zwei Fälle: den symmetrischen mit Symmetriegrad 2 und den nicht-symmetrischen mit Symmetriegrad 1. Die meisten Diagramme aus der Tabelle 2 sind symmetrisch, so beispielsweise auch das Diagramm #3.3, dagegen ist z.B. das Diagramm #3.7 nicht symmetrisch.

p	<u>p</u>			
0	#0.1 1 ——— (0,0,0;2)			
1	#1.1 1/2  (1,0,0;2)			
2	#2.1 1/6  (0,0,1;2)	#2.2 1/4  (1,1,0;2)	#2.3 1/4  (2,0,0;2)	
3	#3.1 1/4  (0,2,0;2)	#3.2 1/12  (0,0,1;2)	#3.3 1/4  (1,1,0;2)	#3.4 1/8  (1,2,0;2)
	#3.5 1/8  (2,0,0;2)	#3.6 1/8  (3,0,0;2)	#3.7 1/6  (1,0,1;1)	#3.8 1/4  (2,1,0;1)
4	#4.1 1/8  (0,3,0;2)	#4.2 1/4  (0,1,0;2)	#4.3 1/4  (0,2,0;2)	#4.4 1/12  (0,1,1;2)
	#4.5 1/8  (0,2,0;2)	#4.6 1/24  (0,1,1;2)	#4.7 1/8  (2,1,0;2)	#4.8 1/8  (2,0,0;2)
	#4.9 1/8  (1,2,0;2)	#4.10 1/2  (1,1,0;1)	#4.11 1/8  (1,1,0;2)	#4.12 1/12  (1,0,1;2)

	<p>#4.13 1/8 (1,2,0;2)</p>	<p>#4.14 1/16 (2,1,0;2)</p>	<p>#4.15 1/8 (2,1,0;2)</p>	<p>#4.16 1/16 (3,0,0;2)</p>
	<p>#4.17 1/16 (1,3,0;2)</p>	<p>#4.18 1/36 (0,0,2;2)</p>	<p>#4.19 1/4 (2,1,0;1)</p>	<p>#4.20 1/24 (2,0,1;2)</p>
4	<p>#4.21 1/12 (1,0,1;1)</p>	<p>#4.22 1/12 (1,1,1;1)</p>	<p>#4.23 1/16 (2,2,0;2)</p>	<p>#4.24 1/8 (2,2,0;1)</p>
	<p>#4.25 1/8 (3,0,0;1)</p>	<p>#4.26 1/12 (2,0,1;1)</p>	<p>#4.27 1/4 (1,2,0;1)</p>	
	<p>#4.28 1/16 (3,1,0;2)</p>	<p>#4.29 1/8 (3,1,0;1)</p>	<p>#4.30 1/16 (4,0,0;2)</p>	

Tabelle 2: Diagramme der Zwei-Punkt-Funktion mit deren relativen Gewichten in der ϕ^4 -Theorie bis zur vierten Vertexordnung. Jedes Diagramm wird charakterisiert durch den Vierer-Tupel $(S, D, T; N)$, wobei S, D und T die Zahlen der Selbst-, Doppel- und Tripel-Bindungen und N der Symmetriegrad ist.

p								
1	#1.1 1 (0,0,0;24) 							
2	#2.1 3/2 (0,1,0;8)		#2.2 2 (1,0,0;6)					
3	#3.1 3/4 (0,2,0;8)		#3.2 3 (0,1,0;4)		#3.3 3/2 (1,0,0;8)		#3.4 2/3 (0,0,1;6)	
	#3.5 3 (1,1,0;2)		#3.6 3/2 (2,0,0;4)		#3.7 1 (2,0,0;6)		#3.8 1 (1,1,0;6)	
4	#4.1 3/8 (0,3,0;8)		#4.2 1 (0,0,0;24)		#4.3 3/2 (0,2,0;4)		#4.4 3/4 (0,1,0;8)	
	#4.5 3/2 (0,2,0;4)		#4.6 6 (0,1,0;2)		#4.7 3/2 (0,2,0;4)		#4.8 1/2 (0,0,1;8)	
	#4.9 3 (1,0,0;4)		#4.10 3/2 (1,1,0;4)		#4.11 3 (1,1,0;2)		#4.12 3/4 (2,0,0;8)	
	#4.13 3/4 (1,1,0;8)		#4.14 3/8 (2,0,0;8)		#4.15 1 (0,2,0;6)		#4.16 1 (0,1,1;2)	

	<p>#4.17 3 (1,1,0;2)</p>	<p>#4.18 3 (1,1,0;2)</p>	<p>#4.19 3 (2,0,0;2)</p>	<p>#4.20 3/2 (1,2,0;2)</p>
	<p>#4.21 3/2 (1,2,0;2)</p>	<p>#4.22 3/2 (2,1,0;2)</p>	<p>#4.23 3/4 (2,1,0;4)</p>	<p>#4.24 1 (1,1,0;6)</p>
4	<p>#4.25 3/2 (2,1,0;2)</p>	<p>#4.26 1/2 (2,0,0;6)</p>	<p>#4.27 1/2 (3,0,0;6)</p>	<p>#4.28 1/3 (0,0,1;6)</p>
	<p>#4.29 1/3 (1,0,1;6)</p>	<p>#4.30 3/2 (3,0,0;2)</p>	<p>#4.31 3/2 (2,1,0;2)</p>	
	<p>#4.32 1/2 (2,1,0;6)</p>	<p>#4.33 1 (1,0,1;2)</p>	<p>#4.34 1/2 (2,1,0;6)</p>	
	<p>#4.35 1/3 (1,0,1;6)</p>	<p>#4.36 1/2 (3,0,0;6)</p>	<p>#4.37 1/2 (1,2,0;6)</p>	

Tabelle 3: Diagramme der zusammenhängenden Vier-Punkt-Funktion mit deren relativen Gewichten in der ϕ^4 -Theorie bis zur vierten Vertexordnung. Im Vierer-Tupel $(S, D, T; N)$ sind S, D, T entsprechende Zahlen der Selbst-, Doppel- und Tripel-Bindungen, N ist der Symmetriegrad.

2.9 Von \mathbf{G}_{12} und \mathbf{G}_{1234}^c zu W

Zu Beginn des Kapitels haben wir mit (Rek. 1) eine graphische Rekursionsgleichung für die negative freie Energie W gefunden, die auf der Schwinger-Dyson-Gleichung (2.6) basierte. Dabei sind die ersten und zweiten Funktionalableitungen der negativen freien Energie nach dem bilokalen Kern G^{-1} aufgetreten. Da wir aber diese Funktionalableitungen durch die Zwei- und Vier-Punkt-Funktionen \mathbf{G}_{12} und \mathbf{G}_{1234}^c ausdrücken können, sind wir jetzt in der Lage, die Bestimmungsgleichung für die negative freie Energie auch etwas übersichtlicher aufzuschreiben. Die Funktionaldifferentialgleichung (2.6) lässt sich dann unter Berücksichtigung der Definitionen (2.51) und (2.52) mit (2.48) umschreiben als

$$\delta_{12} + 2 \int_3 G_{13}^{-1} \frac{\delta W}{\delta G_{23}^{-1}} = \frac{g}{6} \int_{345} V_{1345} \mathbf{G}_{3452}^c + \frac{g}{2} \int_{345} V_{1234} \mathbf{G}_{45} \mathbf{G}_{32} \quad . \quad (2.81)$$

Erinnern wir uns dabei noch an die Zerlegung (2.12) mit der Identität (2.7), so können wir die linke Seite der obigen Relation vereinfachen zu

$$\delta_{12} + 2 \int_3 G_{13}^{-1} \frac{\delta W}{\delta G_{23}^{-1}} = 2 \int_3 G_{13}^{-1} \frac{\delta W^{(\text{int})}}{\delta G_{23}^{-1}} = -2 \int_4 G_{24} \frac{\delta W^{(\text{int})}}{\delta G_{14}} \quad , \quad (2.82)$$

wobei die letzte Gleichung von der funktionalen Kettenregel (1.26) mit (1.9) herrührt. In (2.81) eingesetzt und mit $\int_{12} \delta_{12}$ erweitert, ergibt das die folgende Form der Bestimmungsgleichung für die negative freie Energie:

$$\int_{12} G_{12} \frac{\delta W^{(\text{int})}}{\delta G_{12}} = -\frac{g}{12} \int_{1234} V_{1234} \mathbf{G}_{1234}^c - \frac{g}{4} \int_{1234} V_{1234} \mathbf{G}_{12} \mathbf{G}_{34} \quad . \quad (2.83)$$

Diese lässt sich mit den Aufklebevorschriften (2.58) und (2.59) auch graphisch illustrieren:

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \delta \\ 2 \end{array} \right) \frac{\delta \text{---} \text{---} \text{---}}{\delta \text{---} \text{---} \text{---}} = \frac{1}{12} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \text{---} \quad . \quad (2.84)$$

Mit den Reihendarstellungen aus (2.21) und (2.68) können wir diese Bestimmungsgleichung unter Verwendung der Relation (2.22) in die Rekursionsgleichung für Vakuumdiagramme übersetzen, und diese lautet für $p = 0, 1, 2, \dots$

$$\boxed{\text{---} \text{---} \text{---} = \frac{1}{24(p+1)} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{8(p+1)} \sum_{q=0}^p \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \quad .}$$

(Rek. 3)

Durch Einsetzen der Zwei- und Vier-Punkt-Funktionen können wir tatsächlich die in der

Tabelle 1 stehenden Vakuumdiagramme konstruieren. Das führen wir exemplarisch für die dritte Vertexordnung vor:

$$\textcircled{3} = \frac{1}{72} \textcircled{2} + 2 \times \frac{1}{24} \textcircled{0} + \frac{1}{24} \textcircled{1} \quad (2.85)$$

Für die einzelnen Summanden gilt

$$\textcircled{2} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{2} \textcircled{1} + 2 \textcircled{2} \right\} = \frac{3}{2} \textcircled{1} + 2 \textcircled{2} \quad (2.86)$$

wobei wir hier auf die Indexsymmetrisierung der Vier-Punkt-Graphen wegen der Symmetrie des Vierer-Vertex verzichteten (alle 4 Linien der Vier-Punkt-Graphen wurden ja an die identischen Vertexstümmel geklebt). Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \textcircled{0} &= \textcircled{1} \left\{ \frac{1}{6} \textcircled{1} + \frac{1}{4} \textcircled{2} + \frac{1}{4} \textcircled{3} \right\} = \\ &= \frac{1}{6} \textcircled{2} + \frac{1}{4} \textcircled{3} + \frac{1}{4} \textcircled{4} \quad (2.87) \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \textcircled{2} = \frac{1}{4} \textcircled{3} \quad (2.88)$$

Durch (2.85) zusammengefasst, ergeben diese Zwischenergebnisse den folgenden Ausdruck:

$$\textcircled{3} = \frac{1}{48} \textcircled{1} + \frac{1}{24} \textcircled{2} + \frac{1}{32} \textcircled{3} + \frac{1}{48} \textcircled{4} \quad (2.89)$$

der mit den entsprechenden Einträgen in der Tabelle 1 auf Seite 21 übereinstimmt.

An dieser Stelle erwähnen wir noch eine weitere alternative Möglichkeit, die Vakuumdiagramme zu erzeugen. Diese setzt lediglich die Kenntnis der Zwei-Punkt-Funktionsgraphen voraus und ist in der Anwendung sogar noch einfacher, als die zuvor geschilderte. Dazu betrachten wir die Definitionsgleichung für die Zwei-Punkt-Funktion (2.51). Diese kann man durch Separation der g -Potenzen auch für jede Ordnung p anschreiben:

$$\mathbf{G}_{12}^{(p)} = -2 \frac{\delta W^{(p)}}{\delta G_{12}^{-1}} \quad (2.90)$$

Unter Verwendung (1.26) ergibt sich nach Erweiterung mit $\int_{12} G_{12}^{-1}$ die Relation

$$\int_{12} G_{12} \frac{\delta}{\delta G_{12}} = - \int_{12} G_{12}^{-1} \frac{\delta}{\delta G_{12}^{-1}} \quad (2.91)$$

und demnach gilt trivialerweise

$$\int_{12} G_{12} \frac{\delta W^{(p)}}{\delta G_{12}} = \frac{1}{2} \int_{12} G_{12}^{-1} \mathbf{G}_{12}^{(p)} . \quad (2.92)$$

Mit der Regel (2.22), die nur für $p \geq 1$ gilt, ergibt sich nun

$$W^{(p)} = \frac{1}{4p} \int_{12} G_{12}^{-1} \mathbf{G}_{12}^{(p)} . \quad (2.93)$$

An dieser Stelle ist es sinnvoll, eine graphische Bezeichnung für den bilokalen Kern G_{12}^{-1} in Form eines Zweier-Vertex mit Stümmel einzuführen:

$$G_{12}^{-1} \equiv 1 \text{---} \circ \text{---} 2 . \quad (2.94)$$

Vermittels dieses Zweier-Vertex kann man z.B. zwei Linien aneinander kleben, wie das am folgenden Beispiel klar wird :

$$\int_{12} G_{31} G_{12}^{-1} G_{24} \equiv 3 \text{---} 1 \text{---} \circ \text{---} 2 \text{---} 4 = 3 \text{---} 4 . \quad (2.95)$$

Bei diesem Beispiel wurde der wegen (1.9) triviale Zusammenhang $\int_{12} G_{31} G_{12}^{-1} G_{24} = G_{34}$ illustriert. Bedenkt man noch, daß alle Diagramme der Zwei-Punkt-Funktion an deren freien Enden einfache Linien haben, so lässt sich der Zusammenhang (2.93) sinnvollerweise graphisch aufschreiben, und zwar als

$$\boxed{\text{---} \circ \text{---} = \frac{1}{4p} \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} .}$$

(Rek. 4)

für alle $p \geq 1^4$.

Für die erste Ordnung erhalten wir nach (Rek. 4) mit $\mathbf{G}_{12}^{(1)}$ aus der Tabelle 2

$$\text{---} \circ \text{---} = \frac{1}{4} \text{---} \circ \text{---} \left\{ \frac{1}{2} \text{---} \circ \text{---} \right\} = \frac{1}{8} \left\{ 3 \text{---} 1 \text{---} \circ \text{---} 2 \text{---} 4 \right\} \text{---} \circ \text{---} ,$$

und nach dem Beispiel (2.95) ist das

$$\text{---} \circ \text{---} = \frac{1}{8} 3 \text{---} 4 \text{---} \circ \text{---} = \frac{1}{8} \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} . \quad (2.96)$$

⁴Weil $W^{(0)}$ als ein Ring dargestellt wird, ist man geneigt, diese Form als eine Folge der Anwendung von (Rek. 4) anzusehen. Es handelt sich aber lediglich um eine günstig gewählte Darstellung, denn für $p = 0$ ist (Rek. 4) ja nicht anzuwenden.

So ähnlich läuft das auch für die nächste Ordnung:

$$\textcircled{2} = \frac{1}{8} \textcircled{1-2} \left\{ \frac{1}{6} \textcircled{1-2} + \frac{1}{4} \textcircled{1-2} + \frac{1}{4} \textcircled{1-2} \right\},$$

und das ergibt wiederum nach (2.95) das folgende Resultat:

$$\textcircled{2} = \frac{1}{16} \textcircled{2} + \frac{1}{48} \textcircled{2}. \quad (2.97)$$

Wie man unschwer erkennen kann, bekommen wir die Vakuumdiagramme durch das Aneinanderkleben offener Enden der Zwei-Punkt-Funktionsgraphen. Auch wenn diese zweite Möglichkeit der Vakuumdiagrammerzeugung gegenüber der ersten gewisse Vorzüge aufweist, ist diese in der Tat nur äquivalent zu dieser. Die Rekursionsbeziehung (Rek. 3) ist eine Art Verbindung der Erzeugung von \mathbf{G}_{12} -Graphen nach (Rek. 2) mit der Abschliessung durch das Verbinden offener Enden entsprechend (Rek. 4).

Kapitel 3

Ein-Teilchen-irreduzible Feynman-Diagramme

In diesem Kapitel werden Graphen behandelt, die nach einmaliger Linienamputation noch zusammenhängend bleiben. Diese Graphen haben eine besondere Bedeutung in der Renormierungstheorie. Es stellt sich nämlich heraus, daß man alle zusammenhängenden reduzierbaren Graphen als Kombinationen aus mehreren ein-Teilchen-irreduziblen darstellen kann, im funktionalen Sinne also als deren multiplikative Kombinationen. Diese liefern demnach nichts neues hinsichtlich des Divergenzverhaltens, so daß die ein-Teilchen-irreduziblen Graphen für solche Untersuchungen schon ausreichend sind.

Insbesondere sind alle ein-Teilchen-irreduziblen Diagramme trivialerweise selbst zusammenhängend und können deswegen aus den Tabellen 2 und 3 unmittelbar entnommen werden. In der Tabelle 2 sind das z.B. die Diagramme #1.1, #2.1–2, #3.1–5 u.s.w., die Diagramme #2.3, #3.6–8 u.s.w. sind es dagegen nicht. In der Tabelle 3 sind z.B. die Diagramme #1.1, #2.1, #3.1–3 ein-Teilchen-irreduzibel im Gegensatz zu den Diagrammen #2.2, #3.4–8 u.s.w. In diesem Kapitel wird es uns gelingen, alle ein-Teilchen-irreduziblen Graphen einem eigenständigen rekursiven Gleichungssystem zu entnehmen. Anschliessend werden wir auch in der Lage sein, aus diesen die bereits bekannten zusammenhängenden Zwei- und Vier-Punkt-Funktionen zu rekonstruieren.

3.1 Definition der ein-Teilchen-irreduziblen Funktionen

Σ_{12} und Γ_{1234}

Betrachtet man die zusammenhängenden Diagramme der Vier-Punkt-Funktion aus der Tabelle 3 genauer, so stellt man fest, daß man alle Diagramme gedanklich aufteilen kann, und zwar in einen 'Kerngraphen' und vier Zwei-Punkt-Funktionsgraphen, die an dessen Enden dranhängen. So kann man z.B. den offensichtlich ein-Teilchen-reduzierbaren Graphen #4.33

aus der Tabelle 3 wie folgt trennen:

$$\begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \circ \text{---} \quad \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \text{---} \end{array} \end{array} , \quad (3.1)$$

oder den ein-Teilchen-irreduziblen Graphen #3.1 aus der Tabelle 3:

$$\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \quad \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \text{---} \end{array} \end{array} . \quad (3.2)$$

Hier sieht man z.B., daß die jeweiligen 'Kerngraphen' $\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$ und $\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$ selbst ein-Teilchen-irreduzibel sind. Diesen Umstand kann man bei jedem einzelnen Graphen aus der Tabelle 3 vorfinden. Weiterhin sieht man aus den obigen Beispielen, daß der vorliegende ein-Teilchen-irreduzible Graph #3.1 lediglich einfache Linien an dem 'Kerngraphen' dranhängen hat, während bei dem reduzierbaren Graphen #4.33 auch kompliziertere Zwei-Punkt-Funktionsdiagramme auftreten. Diese Besonderheit findet man ebenfalls bei allen Diagrammen aus der Tabelle 3 und ist das generelle Unterscheidungsmerkmal.

Die ein-Teilchen-irreduziblen Graphen kann man trivialerweise aus den ein-Teilchen-irreduziblen 'Kerngraphen' wiedergewinnen, indem man einfache Linien an deren Enden anklebt. Diese Graphen sind dann in gewisser Weise isomorph zu den 'Kerngraphen', und wir können deshalb solche 'Kerngraphen' auch schon als ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktionsgraphen bezeichnen. Ähnlich wie bei der zusammenhängenden Vier-Punkt-Funktion werden wir die gesamte Mannigfaltigkeit der gewichteten ein-Teilchen-irreduziblen 'Kerngraphen' als die *ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktion* bezeichnen. In der funktionalen Sprache drücken wir diese mit $-\Gamma_{1234}$ aus¹. Die am Anfang dieses Abschnittes besprochene Aufteilung der Vier-Punkt-Funktion können wir in der funktionalen Sprache wie folgt erfassen:

$$\mathbf{G}_{1234}^c = - \int_{5678} \Gamma_{5678} \mathbf{G}_{51} \mathbf{G}_{62} \mathbf{G}_{73} \mathbf{G}_{84} . \quad (3.3)$$

Führen wir an dieser Stelle ein neues Funktional \mathbf{G}_{12}^{-1} ein, das die funktionale Umkehrung der Zwei-Punkt-Funktion \mathbf{G}_{12} entsprechend der Gleichung

$$\int_3 \mathbf{G}_{13} \mathbf{G}_{32}^{-1} \equiv \delta_{12} \quad (3.4)$$

darstellt, so lässt sich (3.3) äquivalent umformulieren:

$$-\Gamma_{1234} = \int_{5678} \mathbf{G}_{5678}^c \mathbf{G}_{51}^{-1} \mathbf{G}_{62}^{-1} \mathbf{G}_{73}^{-1} \mathbf{G}_{84}^{-1} . \quad (3.5)$$

Des weiteren fassen wir diese Gleichung als Definition der ein-Teilchen-irreduziblen Vier-Punkt-Funktion $-\Gamma_{1234}$ auf und werden mit dieser in der Tat beweisen können, daß deren

¹Die Vorzeichenwahl ist historisch bedingt.

Graphen allesamt ein-Teilchen-irreduzibel sind.



Zuerst aber wollen wir die ein-Teilchen-irreduzible Zwei-Punkt-Funktion einführen. In Analogie zu dem Fall der Vier-Punkt-Funktionsgraphen lassen sich auch alle Diagramme der Zwei-Punkt-Funktion aus der Tabelle 2 bis auf den trivialen Liniengraph #0.1 aufteilen. Diesmal erfolgt die Aufteilung aber in einen ein-Teilchen-irreduziblen 'Zwei-Punkt-Kerngraphen' und zwei an dessen beiden Enden dranhängenden Zwei-Punkt-Funktionsgraphen. So lässt sich z.B. der reduzierbare Graph #3.7 aus der Tabelle 2 auf Seite 34 folgendermassen zerlegen:

$$\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \text{---} \end{array} = \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \text{---} \end{array} . \quad (3.6)$$

Im Gegensatz zum Fall der Vier-Punkt-Funktion ist diese Zerlegung aber nicht eindeutig. Eindeutig ist diese nur bei den ein-Teilchen-irreduziblen Diagrammen, wie am Beispiel des Graphen #3.1

$$\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ \text{---} \end{array} = \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ \text{---} \end{array} \text{---} \quad (3.7)$$

leicht zu erkennen ist.

Die jeweiligen 'Zwei-Punkt-Kerngraphen'  und  sind nun tatsächlich ein-Teilchen-irreduzibel und solche kann man bei jedem Diagramm aus der Tabelle 2 finden, auch wenn die Zuordnung nicht immer eindeutig ist. Wie bei Vier-Punkt-Funktionsgraphen, ist die Trivialität der Zerlegung bei den ein-Teilchen-irreduziblen Zwei-Punkt-Funktionsgraphen charakteristisch und auch hier werden wir die irreduziblen 'Zwei-Punkt-Kerngraphen' als ein-Teilchen-irreduzibel bezeichnen. Deren Funktional, in der Literatur oft die *Selbstenergie* genannt, wird mit Σ_{12} bezeichnet. Mit unserem Kenntnisstand können wir deren funktionale Form sogar schon erraten, denn wegen (3.4) gilt

$$\mathbf{G}_{12} = \int_{34} \mathbf{G}_{13} \mathbf{G}_{34}^{-1} \mathbf{G}_{42} . \quad (3.8)$$

Diese Gleichung können wir als die funktionelle Formulierung der oben geschilderten Zerlegung von Zwei-Punkt-Funktionen auffassen. Das Funktional \mathbf{G}_{34}^{-1} steht also für die 'Zwei-Punkt-Kerngraphen', die wir jetzt ein-Teilchen-irreduzible Zwei-Punkt-Graphen nennen. Dieses Funktional können wir aber noch nicht mit der Selbstenergie Σ_{34} identifizieren, denn der triviale Graph #0.1 nimmt eine gewisse Ausnahmestellung ein. Dieser ist sicherlich ein-Teilchen-irreduzibel und man könnte eigentlich die Gleichung (2.95) aus dem letzten Kapitel so auffassen, daß der bilokale Kern G_{12}^{-1} dort die Rolle des 'Zwei-Punkt-Kerngraphen' übernehmen würde. An ihm kleben nämlich einfache Linien, wie das für ein-Teilchen-irreduzible Zwei-Punkt-Graphen charakteristisch ist. Die graphische Bezeichnung von G_{12}^{-1} , die wir mit (2.94) lokal eingeführt haben, fällt aber ein wenig aus der Reihe, und wir würden auf diesen Beitrag wegen der Einheitlichkeit der Darstellungen gerne verzichten. Deshalb definieren wir die Selbstenergie Σ_{12} als das um diesen Beitrag korrigierte Funktional \mathbf{G}_{12}^{-1} , mit negativem Vorzeichen genommen:

$$-\Sigma_{12} \equiv \mathbf{G}_{12}^{-1} - G_{12}^{-1} . \quad (3.9)$$

Durch diese Vorzeichenwahl werden alle Σ_{12} -Graphen positiv, wie wir später sehen werden. Im übernächsten Abschnitt werden wir auch unter anderem beweisen, daß deren Diagramme tatsächlich alle ein-Teilchen-irreduzibel sind.

Bem. Die mit (3.5) und (3.9) definierten Funktionen $-\Gamma_{1234}$ und Σ_{12} sind invariant bezüglich Indexvertauschung, was man schon aus der Symmetrie der Funktionen \mathbf{G}_{1234}^c und \mathbf{G}_{12}^{-1} sieht.

Ein-Teilchen-irreduzible Funktionen bekommen auch eigene graphische Darstellungen. Die ein-Teilchen-irreduzible Zwei-Punkt-Funktion wird als ein Doppelkreis mit zwei Aussenstümmeln dargestellt und die ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktion wiederum als ein Doppelkreis, aber nun mit vier Aussenstümmeln:

$$\Sigma_{12} \equiv 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 \quad , \quad -\Gamma_{1234} \equiv \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bigcirc \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 4 \end{array} \quad . \quad (3.10)$$

3.2 Bestimmungsgleichungen für Σ_{12} und Γ_{1234}

Als Ausgangspunkt verwenden wir die Schwinger-Dyson-Gleichung in der Form (2.56). Erinnern wir uns an die Identität (3.4) und setzen die Definitionsgleichungen (3.3) und (3.9) ein, so erhalten wir

$$\int_3 \Sigma_{13} \mathbf{G}_{32} = -\frac{g}{2} \int_{345} V_{1345} \mathbf{G}_{34} \mathbf{G}_{52} + \frac{g}{6} \int_{3456789} V_{1345} \mathbf{G}_{36} \mathbf{G}_{47} \mathbf{G}_{58} \Gamma_{6789} \mathbf{G}_{92} \quad , \quad (3.11)$$

was uns nach Erweitern mit $\int_2 \mathbf{G}_{20}^{-1}$ unter Verwendung von (3.4) auch schon die Bestimmungsgleichung für die Selbstenergie liefert:

$$\Sigma_{12} = -\frac{g}{2} \int_{34} V_{1234} \mathbf{G}_{34} + \frac{g}{6} \int_{345678} V_{1345} \mathbf{G}_{36} \mathbf{G}_{47} \mathbf{G}_{58} \Gamma_{6782} \quad . \quad (3.12)$$

Diese Schwinger-Dyson-Gleichung läßt sich natürlich auch diagrammatisch illustrieren. Die dazu benötigte zusätzliche Anklebevorschrift ist das Verbinden der vollen Linie mit dem Γ -Vertex, was durch

$$-\int_4 \Gamma_{1234} \mathbf{G}_{45} \equiv \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bigcirc \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 4 \end{array} \text{---} 5 \equiv \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bigcirc \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 4 \end{array} \text{---} 5 \quad (3.13)$$

erklärt wird. Mit Hilfe dieser Vorschrift und der Regel (2.58) wird (3.12) graphisch dargestellt durch

$$1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 = \frac{1}{2} \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \text{---} 2 + \frac{1}{6} \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \text{---} 2 \quad . \quad (3.14)$$

Diese Bestimmungsgleichung setzt die Kenntnis der zusammenhängenden Zwei-Punkt-Funktion \mathbf{G}_{12} voraus. Diese könnte z.B. aus dem letzten Kapitel übernommen werden, was aber

eher eine unbefriedigende Lösung wäre. Es ist aber auch möglich, diese im Rahmen der Theorie der ein-Teilchen-irreduziblen Funktionen zu bestimmen. Dazu stellen wir eine triviale Äquivalenz fest, die sich lediglich auf die Gleichung (1.9) stützt:

$$\mathbf{G}_{12} = \int_{34} G_{13} G_{34}^{-1} \mathbf{G}_{42} \quad . \quad (3.15)$$

Benutzen wir jetzt die Definitionsgleichung (3.9), so sehen wir, daß $G_{34}^{-1} = \mathbf{G}_{34}^{-1} + \Sigma_{34}$ gilt, und wir erhalten wegen (3.4)

$$\mathbf{G}_{12} = G_{12} + \int_{34} G_{13} \Sigma_{34} \mathbf{G}_{42} \quad . \quad (3.16)$$

Diese sogenannte Dyson-Gleichung können wir mit zwei weiteren diagrammatischen Regeln

$$\int_3 \Sigma_{13} G_{32} \equiv 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 3 \quad 3 \text{---} 2 \equiv 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 \quad , \quad (3.17)$$

$$\int_3 \Sigma_{13} \mathbf{G}_{32} \equiv 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 3 \quad 3 \text{=} 2 \equiv 1 \text{---} \bigcirc \text{=} 2 \quad (3.18)$$

als folgende graphische Bestimmungsgleichung aufschreiben:

$$1 \text{=} 2 = 1 \text{---} 2 + 1 \text{---} \bigcirc \text{=} 2 \quad . \quad (3.19)$$

Zur Bestimmung von Σ_{12} benötigen wir nach (3.14) noch die ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktion. Diese wird uns im weiteren Verlauf dieses Abschnittes beschäftigen. Dazu setzen wir zuerst in deren Definitionsgleichung (3.5) die zusammenhängende Vier-Punkt-Funktion \mathbf{G}_{5678}^c in der Form (2.54) ein. Unter Verwendung von (3.4) ergibt sich dann nach einer kurzen Rechnung die Gleichung

$$\Gamma_{1234} = 2 \int_{5678} \frac{\delta \mathbf{G}_{56}}{\delta G_{78}^{-1}} \mathbf{G}_{51}^{-1} \mathbf{G}_{62}^{-1} \mathbf{G}_{73}^{-1} \mathbf{G}_{84}^{-1} + \mathbf{G}_{13}^{-1} \mathbf{G}_{24}^{-1} + \mathbf{G}_{14}^{-1} \mathbf{G}_{23}^{-1} \quad . \quad (3.20)$$

Den Ausdruck für den Term $\delta \mathbf{G}_{56} / \delta G_{78}^{-1}$ bekommen wir aus der Relation (3.4) durch Ableitung nach dem bilokalen Kern und anschliessendem Erweitern mit einer entsprechenden zusammenhängenden Zwei-Punkt-Funktion zu

$$\frac{\delta \mathbf{G}_{56}}{\delta G_{78}^{-1}} = - \int_{90} \mathbf{G}_{59} \frac{\delta \mathbf{G}_{90}^{-1}}{\delta G_{78}^{-1}} \mathbf{G}_{06} \quad . \quad (3.21)$$

Mit der Identität (3.9) ergibt sich dann daraus wegen (1.24)

$$\frac{\delta \mathbf{G}_{56}}{\delta G_{78}^{-1}} = - \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{G}_{57} \mathbf{G}_{68} + \mathbf{G}_{58} \mathbf{G}_{67} \right\} + \int_{90} \mathbf{G}_{59} \frac{\delta \Sigma_{90}}{\delta G_{78}^{-1}} \mathbf{G}_{06} \quad , \quad (3.22)$$

was uns nach Einsetzen in (3.20) die Gleichung

$$\Gamma_{1234} = 2 \int_{56} \mathbf{G}_{35}^{-1} \frac{\delta \Sigma_{12}}{\delta G_{56}^{-1}} \mathbf{G}_{64}^{-1} \quad (3.23)$$

liefert. Nach Anwendung von (1.26) und (3.9) erhalten wir unter Berücksichtigung von (1.9) auch

$$\begin{aligned} -\Gamma_{1234} &= 2 \frac{\delta \Sigma_{12}}{\delta G_{34}} - 2 \int_{56} \Sigma_{35} G_{56} \frac{\delta \Sigma_{12}}{\delta G_{64}} - 2 \int_{56} \frac{\delta \Sigma_{12}}{\delta G_{35}} G_{56} \Sigma_{64} \\ &+ 2 \int_{5678} \Sigma_{35} G_{57} \frac{\delta \Sigma_{12}}{\delta G_{78}} G_{86} \Sigma_{64} \quad . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Unter Verwendung der Anklebevorschrift (3.17) lässt sich diese tatsächlich auch graphisch darstellen:

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \quad 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 3 \quad 4 \end{array} &= 2 \frac{\delta \begin{array}{c} 1-\bigcirc-2 \\ \diagdown \\ 3-4 \end{array}}{\delta \begin{array}{c} 3-4 \end{array}} + 2 \begin{array}{c} 3-\bigcirc-5 \\ \diagdown \\ 3-5 \end{array} \frac{\delta \begin{array}{c} 1-\bigcirc-2 \\ \diagdown \\ 5-6 \end{array}}{\delta \begin{array}{c} 5-6 \end{array}} \begin{array}{c} 6-\bigcirc-4 \\ \diagdown \\ 6-4 \end{array} \\ &- 2 \begin{array}{c} 3-\bigcirc-5 \\ \diagdown \\ 3-5 \end{array} \frac{\delta \begin{array}{c} 1-\bigcirc-2 \\ \diagdown \\ 5-4 \end{array}}{\delta \begin{array}{c} 5-4 \end{array}} - 2 \frac{\delta \begin{array}{c} 1-\bigcirc-2 \\ \diagdown \\ 3-5 \end{array}}{\delta \begin{array}{c} 3-5 \end{array}} \begin{array}{c} 5-\bigcirc-4 \\ \diagdown \\ 5-4 \end{array} \quad . \end{aligned} \quad (3.25)$$

Die letzten beide Terme sind negativ und darüberhinaus reduzibel. Offensichtlich besteht deren Rolle darin, die in den ersten beiden Termen entstandenen reduziblen Graphen aufzuheben. Deshalb ist diese Formel höchst ineffizient, und wir werden uns darum bemühen müssen, diesen Umstand zu beheben. Wie auch schon im Falle der zusammenhängenden Vier-Punkt-Funktion im Kapitel 2, erreichen wir dies durch die Aufstellung einer weiteren Bestimmungsgleichung für die ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktion, die ohne die Selbstenergie auskommt.

Dabei gehen wir zuerst von der Gleichung (3.23) aus und setzen dort die explizite Form von Σ_{12} aus der Schwinger-Dyson-Gleichung (3.12) ein. Für $\delta \Sigma_{12} / \delta G_{56}^{-1}$ ergibt sich dabei nach der Relation (2.54)

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Sigma_{12}}{\delta G_{56}^{-1}} &= \frac{g}{2} \int_{78} V_{1278} \mathbf{G}_{75} \mathbf{G}_{86} + \frac{g}{4} \int_{78} V_{1278} \mathbf{G}_{7856}^c - \frac{g}{4} \int_{7890\bar{1}\bar{2}} \mathbf{G}_{57} V_{7189} \mathbf{G}_{8\bar{1}} \mathbf{G}_{9\bar{2}} \Gamma_{\bar{1}\bar{2}20} \mathbf{G}_{06} \\ &- \frac{g}{4} \int_{7890\bar{1}\bar{2}} \mathbf{G}_{57} V_{7189} \mathbf{G}_{8\bar{1}} \mathbf{G}_{9\bar{2}} \Gamma_{\bar{1}\bar{2}20} \mathbf{G}_{06} - \frac{g}{4} \int_{7890\bar{1}\bar{2}} V_{7189} \mathbf{G}_{8\bar{1}} \mathbf{G}_{9\bar{2}} \Gamma_{\bar{1}\bar{2}20} \mathbf{G}_{0567}^c \\ &+ \frac{g}{6} \int_{7890\bar{1}\bar{2}} V_{1789} \mathbf{G}_{70} \mathbf{G}_{8\bar{1}} \mathbf{G}_{9\bar{2}} \frac{\delta \Gamma_{0\bar{1}\bar{2}2}}{\delta G_{56}^{-1}} \quad . \end{aligned} \quad (3.26)$$

Nach dem Ausschreiben der zusammenhängenden Vier-Punkt-Funktionen \mathbf{G}_{7856}^c und \mathbf{G}_{0567}^c

in der Form (3.3) und Einsetzen des Ergebnisses in (3.23) erhalten wir wegen (3.4) die folgende Bestimmungsgleichung für die Funktion Γ_{1234} :

$$\begin{aligned} \Gamma_{1234} &= g V_{1234} - \frac{g}{2} \int_{5678} V_{1256} \mathbf{G}_{57} \mathbf{G}_{68} \Gamma_{7834} - \frac{g}{2} \int_{5678} V_{1356} \mathbf{G}_{57} \mathbf{G}_{68} \Gamma_{7824} \\ &\quad - \frac{g}{2} \int_{5678} V_{1456} \mathbf{G}_{57} \mathbf{G}_{68} \Gamma_{7823} + \frac{g}{2} \int_{567890\bar{1}\bar{2}} V_{5167} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \Gamma_{902\bar{1}} \mathbf{G}_{\bar{1}\bar{2}} \Gamma_{\bar{2}348} \mathbf{G}_{85} \\ &\quad + \frac{g}{3} \int_{567890\bar{1}\bar{2}} V_{1567} \mathbf{G}_{58} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \frac{\delta \Gamma_{8902}}{\delta \mathbf{G}_{\bar{1}\bar{2}}^{-1}} \mathbf{G}_{\bar{1}3}^{-1} \mathbf{G}_{24}^{-1} . \end{aligned} \quad (3.27)$$

Der letzte Term dieser Gleichung bereitet einige Schwierigkeiten hinsichtlich seiner graphischer Darstellung. Einem ähnlichen Problem sind wir aber auch schon bei der Gleichung (3.23) begegnet. Dort haben wir eine diagrammatisch interpretierbare Form durch die Aufspaltung der Funktionalumkehrungen \mathbf{G}_{35}^{-1} und \mathbf{G}_{64}^{-1} nach (3.9) erreichen können. Das Ergebnis dieser Aufspaltung war aber eine ineffiziente Gleichung. Auch im Falle der Gleichung (3.27) können wir den letzten Term nach (3.9) aufspalten. Aber auch hier bringt diese Aufspaltung ähnliche Effizienzprobleme mit sich und ist deswegen keine befriedigende Lösung. Das Problem können wir aber glücklicherweise auch anders angehen. Und zwar lässt sich der problematische Term $\int_{\bar{1}\bar{2}} \delta \Gamma_{8902} / \delta \mathbf{G}_{\bar{1}\bar{2}}^{-1} \mathbf{G}_{\bar{1}3}^{-1} \mathbf{G}_{24}^{-1}$ mit Hilfe einer Kommutatorbeziehung umformen. Eine solche bekommen wir mit der Gleichung (3.23) und der dazu äquivalenten Form

$$\frac{\delta \Sigma_{12}}{\delta \mathbf{G}_{34}^{-1}} = \frac{1}{2} \int_{56} \mathbf{G}_{35} \Gamma_{5126} \mathbf{G}_{64} \quad (3.28)$$

nach einer längeren Rechnung als

$$\begin{aligned} &\int_{78} \frac{\delta \Gamma_{1234}}{\delta \mathbf{G}_{78}^{-1}} \mathbf{G}_{75}^{-1} \mathbf{G}_{86}^{-1} - \int_{78} \frac{\delta \Gamma_{1256}}{\delta \mathbf{G}_{78}^{-1}} \mathbf{G}_{73}^{-1} \mathbf{G}_{84}^{-1} = \\ &= 2 \int_{7890\bar{1}\bar{2}} \mathbf{G}_{57}^{-1} \mathbf{G}_{68}^{-1} \frac{\delta}{\delta \mathbf{G}_{78}^{-1}} \{ \mathbf{G}_{39}^{-1} \mathbf{G}_{40}^{-1} \} \mathbf{G}_{9\bar{1}} \mathbf{G}_{0\bar{2}} \Gamma_{\bar{1}\bar{2}12} \\ &\quad - 2 \int_{7890\bar{1}\bar{2}} \mathbf{G}_{37}^{-1} \mathbf{G}_{48}^{-1} \frac{\delta}{\delta \mathbf{G}_{78}^{-1}} \{ \mathbf{G}_{59}^{-1} \mathbf{G}_{60}^{-1} \} \mathbf{G}_{9\bar{1}} \mathbf{G}_{0\bar{2}} \Gamma_{\bar{1}\bar{2}12} . \end{aligned} \quad (3.29)$$

Mit einer weiteren Relation

$$\frac{\delta \mathbf{G}_{12}^{-1}}{\delta \mathbf{G}_{34}^{-1}} = \frac{1}{2} \{ \delta_{13} \delta_{24} + \delta_{14} \delta_{23} \} - \frac{1}{2} \int_{56} \mathbf{G}_{35} \Gamma_{5126} \mathbf{G}_{64} , \quad (3.30)$$

die wir unmittelbar nach Einsetzen von (1.24) und (3.28) in (3.9) bekommen, können wir (3.29) nach mehrmaligem Anwenden von (3.4) in die endgültige Kommutatorbeziehung

überführen. Diese lautet

$$\begin{aligned} \int_{78} \frac{\delta \mathbf{\Gamma}_{1234}}{\delta G_{78}^{-1}} \mathbf{G}_{75}^{-1} \mathbf{G}_{86}^{-1} - \int_{78} \frac{\delta \mathbf{\Gamma}_{1256}}{\delta G_{78}^{-1}} \mathbf{G}_{73}^{-1} \mathbf{G}_{84}^{-1} &= \frac{1}{2} \int_{78} \mathbf{\Gamma}_{3457} \mathbf{G}_{78} \mathbf{\Gamma}_{8126} + \frac{1}{2} \int_{78} \mathbf{\Gamma}_{3467} \mathbf{G}_{78} \mathbf{\Gamma}_{8125} \\ &- \frac{1}{2} \int_{78} \mathbf{\Gamma}_{5637} \mathbf{G}_{78} \mathbf{\Gamma}_{8124} - \frac{1}{2} \int_{78} \mathbf{\Gamma}_{5647} \mathbf{G}_{78} \mathbf{\Gamma}_{8123} . \end{aligned} \quad (3.31)$$

Wir bemerken im übrigen, daß die Kommutatorbeziehung (3.31) äquivalent zu der entsprechenden Beziehung (2.64) aus dem Kapitel 2 ist. Das können wir zeigen, indem wir zuerst den Ausdruck auf der linken Seite von (3.31) mit Hilfe der Definitionsgleichungen (3.3) und (3.5) auswerten. Nach einer längeren Rechnung ergibt sich dann

$$\begin{aligned} &\int_{78} \frac{\delta \mathbf{\Gamma}_{1234}}{\delta G_{78}^{-1}} \mathbf{G}_{75}^{-1} \mathbf{G}_{86}^{-1} - \int_{78} \frac{\delta \mathbf{\Gamma}_{1256}}{\delta G_{78}^{-1}} \mathbf{G}_{73}^{-1} \mathbf{G}_{84}^{-1} = \\ &= - \int_{7890\bar{1}\bar{2}} \left\{ \frac{\delta \mathbf{G}_{90\bar{1}\bar{2}}^c}{\delta G_{78}^{-1}} - \frac{\delta \mathbf{G}_{9078}^c}{\delta G_{\bar{1}\bar{2}}^{-1}} \right\} \mathbf{G}_{91}^{-1} \mathbf{G}_{02}^{-1} \mathbf{G}_{\bar{1}3}^{-1} \mathbf{G}_{\bar{2}4}^{-1} \mathbf{G}_{75}^{-1} \mathbf{G}_{86}^{-1} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{\Gamma}_{2346} \mathbf{G}_{15}^{-1} + \mathbf{\Gamma}_{2345} \mathbf{G}_{16}^{-1} + \mathbf{\Gamma}_{1346} \mathbf{G}_{25}^{-1} + \mathbf{\Gamma}_{1345} \mathbf{G}_{26}^{-1} \right\} \\ &- \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{\Gamma}_{2564} \mathbf{G}_{13}^{-1} + \mathbf{\Gamma}_{2563} \mathbf{G}_{14}^{-1} + \mathbf{\Gamma}_{1564} \mathbf{G}_{23}^{-1} + \mathbf{\Gamma}_{1563} \mathbf{G}_{24}^{-1} \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{78} \mathbf{\Gamma}_{3457} \mathbf{G}_{78} \mathbf{\Gamma}_{8126} + \frac{1}{2} \int_{78} \mathbf{\Gamma}_{3467} \mathbf{G}_{78} \mathbf{\Gamma}_{8125} \\ &- \frac{1}{2} \int_{78} \mathbf{\Gamma}_{5637} \mathbf{G}_{78} \mathbf{\Gamma}_{8124} - \frac{1}{2} \int_{78} \mathbf{\Gamma}_{5647} \mathbf{G}_{78} \mathbf{\Gamma}_{8123} . \end{aligned} \quad (3.32)$$

Aus der Kommutatorbeziehung (2.64) erhalten wir mit Hilfe von (3.4) und (3.5)

$$\begin{aligned} &\int_{7890\bar{1}\bar{2}} \left\{ \frac{\delta \mathbf{G}_{90\bar{1}\bar{2}}^c}{\delta G_{78}^{-1}} - \frac{\delta \mathbf{G}_{9078}^c}{\delta G_{\bar{1}\bar{2}}^{-1}} \right\} \mathbf{G}_{91}^{-1} \mathbf{G}_{02}^{-1} \mathbf{G}_{\bar{1}3}^{-1} \mathbf{G}_{\bar{2}4}^{-1} \mathbf{G}_{75}^{-1} \mathbf{G}_{86}^{-1} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{\Gamma}_{2346} \mathbf{G}_{15}^{-1} + \mathbf{\Gamma}_{2345} \mathbf{G}_{16}^{-1} + \mathbf{\Gamma}_{1346} \mathbf{G}_{25}^{-1} + \mathbf{\Gamma}_{1345} \mathbf{G}_{26}^{-1} \right\} \\ &- \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{\Gamma}_{2564} \mathbf{G}_{13}^{-1} + \mathbf{\Gamma}_{2563} \mathbf{G}_{14}^{-1} + \mathbf{\Gamma}_{1564} \mathbf{G}_{23}^{-1} + \mathbf{\Gamma}_{1563} \mathbf{G}_{24}^{-1} \right\} , \end{aligned} \quad (3.33)$$

so daß sich nach Einsetzen in die Gleichung (3.32) bereits die Kommutatorbeziehung (3.31) ergibt.

Nun können wir uns wieder der Gleichung (3.27) zuwenden und diese in eine effiziente Form bringen. Der problematische letzte Term wird nun nach der Kommutatorbeziehung (3.31)

umgeformt als

$$\begin{aligned}
 & \int_{567890\bar{1}\bar{2}} V_{1567} \mathbf{G}_{58} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \frac{\delta \Gamma_{8902}}{\delta G_{\bar{1}\bar{2}}^{-1}} \mathbf{G}_{\bar{1}3}^{-1} \mathbf{G}_{\bar{2}4}^{-1} = \int_{5678} V_{1567} \mathbf{G}_{78} \frac{\delta \Gamma_{8234}}{\delta G_{56}^{-1}} \\
 & + \frac{1}{2} \int_{567890\bar{1}\bar{2}} V_{5167} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \Gamma_{903\bar{1}} \mathbf{G}_{\bar{1}\bar{2}} \Gamma_{\bar{2}248} \mathbf{G}_{85} + \frac{1}{2} \int_{567890\bar{1}\bar{2}} V_{5167} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \Gamma_{904\bar{1}} \mathbf{G}_{\bar{1}\bar{2}} \Gamma_{\bar{2}238} \mathbf{G}_{85} \\
 & \quad - \int_{567890\bar{1}\bar{2}} V_{5167} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \Gamma_{902\bar{1}} \mathbf{G}_{\bar{1}\bar{2}} \Gamma_{\bar{2}348} \mathbf{G}_{85} . \tag{3.34}
 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis liefert nun nach Einsetzen in (3.27) die endgültige Bestimmungsgleichung für die ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktion

$$\begin{aligned}
 -\Gamma_{1234} &= -g V_{1234} + \frac{g}{3} \int_{567890} V_{1567} \mathbf{G}_{58} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \frac{\delta \Gamma_{8234}}{\delta G_{90}} \\
 & + \frac{g}{2} \int_{5678} V_{1256} \mathbf{G}_{57} \mathbf{G}_{68} \Gamma_{7834} + \frac{g}{2} \int_{5678} V_{1356} \mathbf{G}_{57} \mathbf{G}_{68} \Gamma_{7824} + \frac{g}{2} \int_{5678} V_{1456} \mathbf{G}_{57} \mathbf{G}_{68} \Gamma_{7823} \\
 & - \frac{g}{6} \int_{567890\bar{1}\bar{2}} V_{5167} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \Gamma_{902\bar{1}} \mathbf{G}_{\bar{1}\bar{2}} \Gamma_{\bar{2}348} \mathbf{G}_{85} - \frac{g}{6} \int_{567890\bar{1}\bar{2}} V_{5167} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \Gamma_{903\bar{1}} \mathbf{G}_{\bar{1}\bar{2}} \Gamma_{\bar{2}248} \mathbf{G}_{85} \\
 & \quad - \frac{g}{6} \int_{567890\bar{1}\bar{2}} V_{5167} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \Gamma_{904\bar{1}} \mathbf{G}_{\bar{1}\bar{2}} \Gamma_{\bar{2}238} \mathbf{G}_{85} , \tag{3.35}
 \end{aligned}$$

die noch von der Relation (1.26) Gebrauch macht. Mit diagrammatischen Mitteln, die uns nach (2.58), (3.10) und (3.13) zu Verfügung stehen, lässt sich diese graphisch illustrieren als

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} &= \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \times \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \times \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \frac{1}{3} \int \begin{array}{c} 5 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \frac{\delta \Gamma_{5678}}{\delta G_{67}} + \frac{1}{2} \int \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \frac{1}{2} \int \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 2 \end{array} \\
 & + \frac{1}{2} \int \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 3 \end{array} + \frac{1}{6} \int \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \frac{1}{6} \int \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 2 \end{array} + \frac{1}{6} \int \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 3 \end{array} . \tag{3.36}
 \end{aligned}$$

3.3 Rekursionsgleichungen für \mathbf{G}_{12} , Σ_{12} und Γ_{1234}

Mit den Gleichungen (3.12), (3.16), (3.35) bzw. ihren graphischen Darstellungen (3.14), (3.19) und (3.36) steht uns ein geschlossenes Gleichungssystem zur Verfügung, das die ein-Teilchen-irreduziblen Zwei- und Vier-Punkt-Funktionen Σ_{12} und Γ_{1234} , sowie auch die zusammenhängende Zwei-Punkt-Funktion \mathbf{G}_{12} bestimmt. Deren Lösungen werden jeweils rekursiv gesucht.

Dazu definieren wir die folgenden Störungsreihen:

$$\Sigma_{12} \equiv \sum_{p=1}^{\infty} \Sigma_{12}^{(p)} \quad , \quad \Gamma_{1234} \equiv \sum_{p=1}^{\infty} \Gamma_{1234}^{(p)} \quad (3.37)$$

und die zugehörigen graphischen Darstellungen:

$$1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 = \sum_{p=1}^{\infty} 1 \text{---} \bigcirc^p \text{---} 2 \quad , \quad \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} = \sum_{p=1}^{\infty} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc^p \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc^p \\ \diagup \\ 4 \end{array} \quad (3.38)$$

Hierbei beinhalten $\Sigma_{12}^{(p)}$ und $\Gamma_{1234}^{(p)}$ alle Terme p -ter Ordnung in der Kopplungskonstante g , so daß deren graphische Darstellungen alle Graphen mit p Vertizes enthalten. Die Störungsreihe für \mathbf{G}_{12} übernehmen wir unverändert aus (2.68). Die Anklebevorschriften (3.13), (3.17) und (3.18) werden nun auch auf die einzelnen Ordnungen ausgeweitet. Setzen wir Reihendarstellungen (2.68) und (3.38) in die Bestimmungsgleichungen (3.14), (3.19) und (3.36) ein, so bekommen wir durch Trennung der verschiedenen Vertexordnungen das folgende rekursive Gleichungssystem mit $p = 1, 2, 3, \dots$:

$$\begin{aligned} 1 \overset{0}{=} 2 &= 1 \text{---} 2 \quad , \quad \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} = \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \times \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \times \\ \diagup \\ 4 \end{array} \quad , \\ 1 \text{---} \bigcirc^p \text{---} 2 &= \frac{1}{2} 1 \text{---} \bigcirc^p \text{---} 2 + \frac{1}{6} \sum_{q=1}^{p-1} \sum_{r=1}^q \sum_{s=1}^r 1 \text{---} \bigcirc^{p-q-1} \begin{array}{c} q-r \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ r-s \end{array} \text{---} 2 \quad , \\ 1 \overset{p}{=} 2 &= \sum_{q=1}^p 1 \text{---} \bigcirc^q \overset{p-q}{=} 2 \quad , \\ \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc^{p+1} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc^{p+1} \\ \diagup \\ 4 \end{array} &= \frac{1}{3} \sum_{q=1}^p 1 \text{---} \begin{array}{c} p-q \\ \diagup \\ \delta \\ \diagdown \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc^q \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^p \sum_{r=1}^q 2 \text{---} \begin{array}{c} p-q \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ q-r \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^p \sum_{r=1}^q 4 \text{---} \begin{array}{c} p-q \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ q-r \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 3 \end{array} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{q=1}^p \sum_{r=1}^q 3 \text{---} \begin{array}{c} p-q \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ q-r \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 2 \end{array} + \frac{1}{6} \sum_{q=2}^p \sum_{r=2}^q \sum_{s=2}^r \sum_{t=1}^{s-1} \sum_{k=0}^{t-1} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc^{r-s} \\ \diagdown \\ t-k \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc^{r-s} \\ \diagup \\ s-t \end{array} \\ &+ \frac{1}{6} \sum_{q=2}^p \sum_{r=2}^q \sum_{s=2}^r \sum_{t=1}^{s-1} \sum_{k=0}^{t-1} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \bigcirc^{r-s} \\ \diagup \\ t-k \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc^{r-s} \\ \diagdown \\ p-q \end{array} + \frac{1}{6} \sum_{q=2}^p \sum_{r=2}^q \sum_{s=2}^r \sum_{t=1}^{s-1} \sum_{k=0}^{t-1} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \bigcirc^{r-s} \\ \diagdown \\ t-k \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \bigcirc^{r-s} \\ \diagup \\ p-q \end{array} \quad . \end{aligned}$$

(Rek. 5)

Bem. Mit diesem Ergebnis kann man zeigen:

Beh.4. Alle Graphen der Selbstenergie und der ein-Teilchen-irreduziblen Vier-Punkt-

Funktion sind in der Tat ein-Teilchen-irreduzibel.

Beweis:

- (*) Zwei, und somit auch endlich viele, zusammenhängende Graphen ergeben nach deren Verkleben einen zusammenhängenden Graphen.
- (**) Alle Graphen der zusammenhängenden Zwei-Punkt-Funktion sind zusammenhängend (siehe dazu **Beh.3** auf Seite 28).

(***). Die Operation $6 \text{---} \swarrow \searrow \text{---} 7 \xrightarrow{\delta} \delta \text{---} 6 \text{---} 7$ ersetzt nacheinander jede Linie des betroffenen Diagramms durch den Graphen $\text{---} \swarrow \searrow \text{---}$. Es handelt sich demnach um eine Erweiterung der Operation 'Linienzählung' aus dem ersten Kapitel (siehe Seite 11).

Diese Vorbemerkungen erlauben es uns, auch hier den Induktionsbeweis durchzuführen. Der Induktionsanfang für die ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktion ist mit (Rek. 5) explizit als reiner Vertex angegeben und ist trivialerweise ein-Teilchen-irreduzibel.

Nehmen wir an, alle Graphen der ein-Teilchen-irreduziblen Vier-Punkt-Funktion bis zur p -ten Ordnung seien tatsächlich ein-Teilchen-irreduzibel. Um die p -te Ordnung der Selbstenergie Σ_{12} zu untersuchen, betrachten wir die Wirkung einer einfachen Linienamputation auf deren Graphen. Bei den Graphen, die vom ersten Term der Selbstenergie-Rekursion stammen, werden die zusammenhängenden Zwei-Punkt-Funktionsgraphen an zwei Enden eines V -Vertex angeklebt. Durch die Linienamputation können die zusammenhängenden Zwei-Punkt-Graphen in zwei zusammenhängende Bruchstücke zerfallen. Da aber beide von dem Vierer-Vertex gebunden werden, ergibt sich nach (*) wieder ein zusammenhängendes Gebilde. Somit ist der erste Term in der Gleichung für Σ_{12} selbst ein-Teilchen-irreduzibel. Für den zweiten Term der Selbstenergie-Rekursion ergeben sich zwei Möglichkeiten der Linienamputation.

Fall 1.

Es wird im Teilgraph $\text{---} \textcircled{s} \text{---}$ eine Linie amputiert. Es kommen aber nur Werte $s = 1, 2, \dots, p-1$ vor und der fragliche Teilgraph ist laut Voraussetzung ein-Teilchen-irreduzibel, so daß er nach der Linienamputation auf jeden Fall zusammenhängend bleibt. Verklebt mit dem wegen (*) und (**) zusammenhängenden Rest $\text{---} \textcircled{\frac{q-r}{r-s}} \text{---}$, ergibt sich wiederum wegen (*) etwas zusammenhängendes.

Fall 2.

Die Linienamputation wirkt auf einen der Zwei-Punkt-Teilgraphen, z.B. auf $\underline{\underline{p-q-1}}$. Dieser zerfällt in höchstens zwei zusammenhängende Teilgraphen, die von dem zusammenhängenden Rest $\text{---} \textcircled{\frac{q-r}{r-s}} \text{---}$ gebunden werden. Das ergibt wegen (*) wieder lauter zusammenhängende Beiträge.

Wie wir sehen konnten, ergeben sich nach einmaliger Linienamputation auf dem betrachteten Term in beiden Fällen nur zusammenhängende Graphen. Daraus folgern wir, daß auch dieser Term selbst ein-Teilchen-irreduzibel sein muss. Ähnlich können wir alle Terme der Rekursi-

on für die ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktion Γ_{1234} bis auf den Ableitungsterm behandeln. Dessen Irreduzibilität wollen wir nun im weiteren auch beweisen.

Dazu bemerken wir zuerst, daß wir die Operation $\begin{array}{c} \text{---} 5 \\ \text{---} 6 \\ \text{---} 7 \end{array} \frac{\delta}{\delta} \text{---} 6 \text{---} 7$ als eine Teiloperation $6 \text{---} \swarrow \text{---} 8 \text{---} 7 \frac{\delta}{\delta} \text{---} 6 \text{---} 7$ mit anschließendem Verkleben durch $8 \text{---} \overline{\text{---}} \text{---} 5$ auffassen können. Die

erste Teiloperation, angewandt auf den nach Voraussetzung ein-Teilchen-irreduziblen Graphen \textcircled{q} ($q = 1, 2, \dots, p$), erzeugt wegen (***) Graphen einer sechs-Punkt-Funktion, die aber selbst alle ein-Teilchen-irreduzibel sind. Dies erkennt man durch die folgende Überlegung. Die durch eine Linienamputation von \textcircled{q} erzeugten Graphen sind zusammenhängend. Sei nun A ein beliebiger dieser Graphen. Schliessen wir nun die in A durch Amputation entstandene Lücke durch den Graphen $\text{---} \swarrow \text{---}$, so erhalten wir ein neues Sechs-Punkt-Diagramm, das wir B nennen. Eine Linienamputation im Diagramm B würde zu einer weiteren Fallunterscheidung führen.

Fall 1.

Es wird eine der Linien von A amputiert, so daß dieser höchstens in zwei zusammenhängende Teilgraphen zerfällt. Diese werden dann aber von der Brücke $\text{---} \swarrow \text{---}$ zusammengefasst, und es ergibt sich ein zusammenhängender Graph.

Fall 2.

Es wird eine der beiden Linien vom Graphen $\text{---} \swarrow \text{---}$ amputiert. Dabei ergibt sich ein zusammenhängender Graph, der nur an einem Ende von dem Graphen A gebunden wird, was schon einen zusammenhängenden Graph liefert.

Durch die einmalige Linienamputation zerfällt das Diagramm B in beiden Fällen nicht, ist also tatsächlich ein-Teilchen-irreduzibel. Das anschließende Verknüpfen mit den Graphen von $\overline{\text{---}} \text{---}$ macht aus dem Sechs-Punkt-Graphen B einen Vier-Punkt-Graphen, zerstört aber nicht seine Irreduzibilität, wie man sich leicht nach demselben Fallunterscheidungs-Muster überzeugen kann.

Somit sind wir auch schon fertig.

3.4 Erzeugung der Σ_{12} -, Γ_{1234} - und G_{12} -Graphen

Ausgehend von den Rekursionsanfängen, können wir zuerst nach (Rek. 5) Graphen der nächstniedersten Ordnung bekommen. Hierzu zählt $\Sigma_{12}^{(1)}$ mit

$$1 \text{---} \textcircled{1} \text{---} 2 = \frac{1}{2} \textcircled{1}^0 \text{---} 2 = \frac{1}{2} \textcircled{1} \text{---} 2, \tag{3.39}$$

das daraus zu bestimmende $G_{12}^{(1)}$ mit

$$1 \text{---} \overline{\text{---}} \text{---} 2 = 1 \text{---} \textcircled{1}^0 \text{---} 2 = \frac{1}{2} \textcircled{1} \text{---} 2 \tag{3.40}$$

und der Beitrag zweiter Ordnung $\Gamma_{1234}^{(2)}$ mit

$$\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} = \frac{1}{3} \begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ \diagdown \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \delta \\ \diagup \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} . \quad (3.41)$$

Da nach Rekursionsanfang $\Gamma_{1234}^{(1)}$ durch einen einfachen Vierer-Vertex dargestellt wird, gilt

$$\frac{\delta}{\delta \begin{array}{c} 6 \\ \text{---} \\ 7 \end{array}} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} = 0 , \quad (3.42)$$

so daß wir für $\Gamma_{1234}^{(2)}$ somit erhalten

$$\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} = \frac{1}{2} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} . \quad (3.43)$$

Die Ergebnisse aus (3.39), (3.40) und (3.43) benutzen wir nun, um die nächste Ordnung mit $p = 2$ auszurechnen. Für $\Sigma_{12}^{(2)}$ gilt nach (Rek. 5)

$$1 \text{---} \begin{array}{c} 2 \\ \textcircled{\quad} \\ \text{---} \\ 2 \end{array} = \frac{1}{2} \begin{array}{c} 1 \\ \textcircled{\quad} \\ \text{---} \\ 2 \end{array} + \frac{1}{6} \begin{array}{c} 0 \\ \textcircled{\quad} \\ \text{---} \\ 2 \end{array} = \frac{1}{4} \begin{array}{c} \textcircled{\quad} \\ \text{---} \\ 2 \end{array} + \frac{1}{6} \begin{array}{c} \textcircled{\quad} \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \quad (3.44)$$

und für das mit diesem Ergebnis zu bestimmende $G_{12}^{(2)}$

$$\begin{aligned} 1 \text{---} \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} &= 1 \text{---} \begin{array}{c} 1 \\ \textcircled{\quad} \\ \text{---} \\ 2 \end{array} + 1 \text{---} \begin{array}{c} 0 \\ \textcircled{\quad} \\ \text{---} \\ 2 \end{array} = \\ &= \frac{1}{4} \begin{array}{c} \textcircled{\quad} \\ \text{---} \\ 2 \end{array} + \frac{1}{4} \begin{array}{c} \textcircled{\quad} \\ \text{---} \\ 2 \end{array} + \frac{1}{6} \begin{array}{c} \textcircled{\quad} \\ \text{---} \\ 2 \end{array} . \end{aligned} \quad (3.45)$$

So ähnlich sind auch die Graphen von $\Gamma_{1234}^{(3)}$ zu bestimmen, für die nach (Rek. 5) unter Berücksichtigung des Ergebnisses aus (3.42) gilt

$$\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} = \frac{1}{3} \begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ \diagdown \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \delta \\ \diagup \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right\} \\ + \frac{1}{2} \times 2 \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right\} \\ + \frac{1}{6} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right\} . \quad (3.46)$$

Um das auswerten zu können, benötigen wir zuerst ein paar Zwischenergebnisse:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta} \frac{\begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowleft \\ 2 \\ \circlearrowright \\ 3 \\ \diagup \\ 4 \\ \diagdown \\ 5 \end{array}}{6-7} &= \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta} \frac{\begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowleft \\ 3 \\ \diagup \\ 4 \\ \diagdown \\ 5 \end{array}}{6-7} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowleft \\ 3 \\ \diagup \\ 4 \\ \diagdown \\ 5 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \circlearrowleft \\ 2 \\ \diagup \\ 3 \\ \diagdown \\ 5 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \circlearrowleft \\ 4 \\ \diagup \\ 2 \\ \diagdown \\ 5 \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowleft \\ 3 \\ \diagup \\ 4 \\ \diagdown \\ 5 \\ \circlearrowleft \\ 6-7 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowleft \\ 3 \\ \diagup \\ 4 \\ \diagdown \\ 5 \\ \circlearrowright \\ 6-7 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \circlearrowleft \\ 2 \\ \diagup \\ 3 \\ \diagdown \\ 5 \\ \circlearrowleft \\ 6-7 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \circlearrowleft \\ 2 \\ \diagup \\ 3 \\ \diagdown \\ 5 \\ \circlearrowright \\ 6-7 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \circlearrowleft \\ 4 \\ \diagup \\ 2 \\ \diagdown \\ 5 \\ \circlearrowleft \\ 6-7 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \circlearrowleft \\ 4 \\ \diagup \\ 2 \\ \diagdown \\ 5 \\ \circlearrowright \\ 6-7 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Demnach ergibt sich der ersten Summand in der Gleichung (3.46) nach Zusammenkleben zu

$$1 \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ 0 \\ \circlearrowright \\ 5 \\ \circlearrowleft \\ 6 \\ \circlearrowright \\ 7 \end{array} \frac{\delta}{\delta} \frac{\begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowleft \\ 2 \\ \circlearrowright \\ 3 \\ \diagup \\ 4 \\ \diagdown \\ 5 \end{array}}{6-7} = 1 \begin{array}{c} 3 \\ \circlearrowleft \\ 4 \\ \diagup \\ 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} + 1 \begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowleft \\ 3 \\ \diagup \\ 1 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + 1 \begin{array}{c} 4 \\ \circlearrowleft \\ 2 \\ \diagup \\ 1 \\ \diagdown \\ 3 \end{array}. \quad (3.47)$$

Die Summanden 2 bis 4 der Gleichung (3.46) sind ebenfalls etwas komplizierter und wir berechnen diese explizit am Beispiel des zweiten Summanden:

$$\begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowleft \\ 3 \\ \diagup \\ 4 \\ \diagdown \\ 1 \\ \circlearrowleft \\ 0 \end{array} = \begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowleft \\ 6 \\ \diagup \\ 5 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \frac{\delta}{\delta} \frac{\begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowleft \\ 2 \\ \circlearrowright \\ 3 \\ \diagup \\ 4 \\ \diagdown \\ 5 \end{array}}{6-7} = \frac{1}{2} \begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowleft \\ 6 \\ \diagup \\ 5 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{c} 6 \\ \circlearrowleft \\ 3 \\ \diagup \\ 4 \\ \diagdown \\ 5 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \circlearrowleft \\ 6 \\ \diagup \\ 3 \\ \diagdown \\ 5 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \circlearrowleft \\ 4 \\ \diagup \\ 6 \\ \diagdown \\ 5 \end{array} \right\}.$$

Nach Ausführung der Anklebevorschrift und Zusammenfassen gleicher Graphen erhalten wir

$$\begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowleft \\ 3 \\ \diagup \\ 4 \\ \diagdown \\ 1 \\ \circlearrowleft \\ 0 \end{array} = \frac{1}{2} \begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowleft \\ 6 \\ \diagup \\ 5 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowleft \\ 3 \\ \diagup \\ 4 \\ \diagdown \\ 5 \end{array} + 4 \begin{array}{c} 1 \\ \circlearrowleft \\ 2 \\ \diagup \\ 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array}. \quad (3.48)$$

Äquivalent dazu gehen wir auch bei dem dritten und vierten Summanden aus (3.46) vor. Die Summanden 5 und 8 ergeben sich mehr oder weniger trivial zu

$$\begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowleft \\ 3 \\ \diagup \\ 4 \\ \diagdown \\ 1 \\ \circlearrowleft \\ 0 \end{array} = \frac{1}{2} \begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowleft \\ 3 \\ \diagup \\ 4 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 4 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}, \quad \begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowleft \\ 1 \\ \circlearrowright \\ 0 \\ \circlearrowleft \\ 1 \\ \circlearrowright \\ 0 \end{array} = 1 \begin{array}{c} 3 \\ \circlearrowleft \\ 4 \\ \diagup \\ 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \quad (3.49)$$

und äquivalent dazu die Summanden 6, 7 und 9, 10. Mit den Zwischenergebnissen aus (3.47), (3.48) und (3.49) erhalten wir nach (3.46)

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta} \frac{\begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowleft \\ 3 \\ \diagup \\ 4 \\ \diagdown \\ 1 \end{array}}{6-7} &= \frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowleft \\ 3 \\ \diagup \\ 4 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowleft \\ 3 \\ \diagup \\ 4 \\ \diagdown \\ 5 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \circlearrowleft \\ 2 \\ \diagup \\ 3 \\ \diagdown \\ 5 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \circlearrowleft \\ 4 \\ \diagup \\ 2 \\ \diagdown \\ 5 \end{array} \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ \circlearrowleft \\ 4 \\ \diagup \\ 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowleft \\ 3 \\ \diagup \\ 1 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \circlearrowleft \\ 2 \\ \diagup \\ 1 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \circlearrowleft \\ 2 \\ \diagup \\ 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \circlearrowleft \\ 4 \\ \diagup \\ 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \circlearrowleft \\ 3 \\ \diagup \\ 4 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \circlearrowleft \\ 3 \\ \diagup \\ 4 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 4 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \circlearrowleft \\ 2 \\ \diagup \\ 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 3 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \circlearrowleft \\ 4 \\ \diagup \\ 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ 2 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \right\}. \quad (3.50) \end{aligned}$$

Die Resultate aus (3.39), (3.44) und für weitere zwei Ordnungen sind in der Tabelle 4 und die aus (3.43), (3.50) und deren Fortsetzungen bis zur 4.Ordnung in der Tabelle 5 zusammengefasst. Wie schon im Falle zusammenhängender Graphen verzichten wir dabei auf deren Indizierungen und verweisen statt dessen auf deren Symmetriegrade, die als letzter Beitrag im jeweiligen charakteristischen Vierer-Tupel zu sehen sind.

Eine alternative Berechnungsmöglichkeit der Ableitungsterme

Wie wir es bereits bei der Darstellung der Beweisidee zur Behauptung **Beh.4** auf der Seite 51 bereits im Punkt (***) erwähnt haben, können wir bei den Termen

$$1 \begin{array}{c} \overset{p-q}{\curvearrowright} \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 6 \\ \text{---} 7 \end{array} \delta \frac{\begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \textcircled{q} \text{---} 3 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 4 \end{array}}{\delta \text{---} 6 \text{---} 7}$$

auch ohne die explizite Ausführung der Amputationsvorschrift auskommen. Statt dessen können wir jeweils eine Linie der Diagramme von $\begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \textcircled{q} \text{---} 3 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 4 \end{array}$ durch den Graphen $\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \text{---} 8 \end{array}$ auf alle mögliche Weisen ersetzen und anschliessend das Teilergebnis mit den Diagrammen von $\begin{array}{c} \overset{p-q}{\text{---}} 5 \end{array}$ verknüpfen.

Dieses Vorgehen illustrieren wir nun explizit an einem Beispiel, das wir schon in (3.47) direkt mit Linienamputation ausgewertet haben. Zuerst zerlegen wir die gesammte Operation in zwei Teiloperationen entsprechend

$$1 \begin{array}{c} \overset{0}{\curvearrowright} \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 6 \\ \text{---} 7 \end{array} \delta \frac{\begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \textcircled{2} \text{---} 3 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 4 \end{array}}{\delta \text{---} 6 \text{---} 7} = 8 \begin{array}{c} \overset{0}{\text{---}} 5 \end{array} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \text{---} 8 \\ \text{---} 6 \end{array} \text{---} 7 \delta \frac{\begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \textcircled{2} \text{---} 3 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 4 \end{array}}{\delta \text{---} 6 \text{---} 7} \right\}. \quad (3.51)$$

Hierbei wird im ersten Schritt die bereits angekündigte Ersetzung vollzogen, und zwar an dem Ergebnis aus (3.43):

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \text{---} 8 \\ \text{---} 6 \end{array} \text{---} 7 \delta \frac{\begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \textcircled{2} \text{---} 3 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 4 \end{array}}{\delta \text{---} 6 \text{---} 7} &= \frac{1}{2} \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \text{---} 8 \\ \text{---} 6 \end{array} \text{---} 7 \frac{\delta}{\delta \text{---} 6 \text{---} 7} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \textcirclearrowleft \text{---} 3 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 4 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \text{---} \textcirclearrowleft \text{---} 2 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 3 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \text{---} \textcirclearrowleft \text{---} 4 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 2 \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \left\{ \begin{array}{c} 8 \\ \text{---} \textcirclearrowleft \text{---} 1 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 2 \end{array} \text{---} 3 \text{---} 4 + \begin{array}{c} 8 \\ \text{---} \textcirclearrowleft \text{---} 1 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 4 \end{array} \text{---} 2 \text{---} 3 + \begin{array}{c} 8 \\ \text{---} \textcirclearrowleft \text{---} 1 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 3 \end{array} \text{---} 4 \text{---} 2 \right\}. \quad (3.52) \end{aligned}$$

In (3.51) eingesetzt, liefert dies nach dem Ankleben im zweiten Teilschritt

$$\begin{aligned} 1 \begin{array}{c} \overset{0}{\curvearrowright} \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 6 \\ \text{---} 7 \end{array} \delta \frac{\begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \textcircled{2} \text{---} 3 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 4 \end{array}}{\delta \text{---} 6 \text{---} 7} &= 8 \text{---} 5 \left\{ \begin{array}{c} 8 \\ \text{---} \textcirclearrowleft \text{---} 1 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 2 \end{array} \text{---} 3 \text{---} 4 + \begin{array}{c} 8 \\ \text{---} \textcirclearrowleft \text{---} 1 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 4 \end{array} \text{---} 2 \text{---} 3 + \begin{array}{c} 8 \\ \text{---} \textcirclearrowleft \text{---} 1 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 3 \end{array} \text{---} 4 \text{---} 2 \right\} = \\ &= \begin{array}{c} 3 \\ \text{---} \textcirclearrowleft \text{---} 4 \\ \text{---} 1 \end{array} \text{---} 2 + \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \textcirclearrowleft \text{---} 3 \\ \text{---} 1 \end{array} \text{---} 4 + \begin{array}{c} 4 \\ \text{---} \textcirclearrowleft \text{---} 2 \\ \text{---} 1 \end{array} \text{---} 3. \quad (3.53) \end{aligned}$$

Wie wir sofort sehen, erhalten wir damit das Resultat von (3.47) erwartungsgemäss wieder, aber nun auf einem anderen Wege. Diese Methode hat einige Vorteile gegenüber der alten Vorgehensweise. Im ersten Schritt haben wir früher die Linien amputiert, jetzt haben wir diese ersetzt. Beide Operationen betrafen dieselben (im vorliegenden Fall zwei) Linien und der Aufwand war vergleichbar. In beiden Fällen wurden Sechs-Punkt-Graphen erzeugt, aber im ersten Fall die der zweiten Vertexordnung und im zweiten Fall die der dritten Ordnung. Diese Tatsache kommt bei der anschliessenden Anklebe-Operation zum Tragen, es ist nämlich wesentlich leichter, zwei Stümmel durch eine Linie zu verbinden wie bei (3.53), als gleich drei

Stümmel 5,6 und 7 mit dem Graphen $1 \leftarrow \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}$ zu verkleben, wie das bei (3.47) der Fall ist.

Wir würden dabei nicht nur durch geringeren Aufwand gewinnen, sondern vor allem auch an Übersichtlichkeit. Dieser Umstand würde bei den nächsten Ordnungen selbstverständlich noch deutlicher zu Tage treten.

p										
1	#1.1 $\frac{1}{2}$ (1,0,0;2)									
2	#2.1 $\frac{1}{6}$ (0,0,1;2)					#2.2 $\frac{1}{4}$ (1,1,0;2)				
3	#3.1 $\frac{1}{4}$ (0,2,0;2)		#3.2 $\frac{1}{12}$ (0,0,1;2)		#3.3 $\frac{1}{4}$ (1,1,0;2)		#3.4 $\frac{1}{8}$ (1,2,0;2)		#3.5 $\frac{1}{8}$ (2,0,0;2)	
4	#4.1 $\frac{1}{8}$ (0,3,0;2)		#4.2 $\frac{1}{4}$ (0,1,0;2)		#4.3 $\frac{1}{4}$ (0,2,0;2)		#4.4 $\frac{1}{12}$ (0,1,1;2)		#4.5 $\frac{1}{8}$ (0,2,0;2)	
	#4.6 $\frac{1}{24}$ (0,1,1;2)		#4.7 $\frac{1}{8}$ (2,1,0;2)		#4.8 $\frac{1}{8}$ (2,0,0;2)		#4.9 $\frac{1}{8}$ (1,2,0;2)			
	#4.10 $\frac{1}{2}$ (1,1,0;1)		#4.11 $\frac{1}{8}$ (1,1,0;2)		#4.12 $\frac{1}{12}$ (1,0,1;2)		#4.13 $\frac{1}{8}$ (1,2,0;2)			
	#4.14 $\frac{1}{16}$ (2,1,0;2)		#4.15 $\frac{1}{8}$ (2,1,0;2)		#4.16 $\frac{1}{16}$ (3,0,0;2)		#4.17 $\frac{1}{16}$ (1,3,0;2)			

Tabelle 4: Diagramme der Selbstenergie mit deren relativen Gewichten in der ϕ^4 -Theorie bis zur vierten Vertexordnung. Im Vierer-Tupel $(S, D, T; N)$ sind S, D, T Zahlen der Selbst-, Doppel- und Tripel-Bindungen und N der Symmetriegrad.









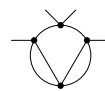



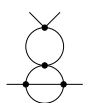


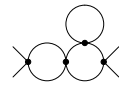
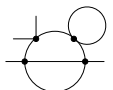
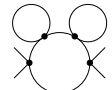
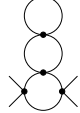
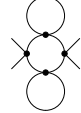
p	
1	<p>#1.1 1 (0,0,0;24)</p> 
2	<p>#2.1 3/2 (0,1,0;8)</p> 
3	<p>#3.1 3/4 (0,2,0;8)</p>  <p>#3.2 3 (0,1,0;4)</p>  <p>#3.3 3/2 (1,0,0;8)</p> 
4	<p>#4.1 3/8 (0,3,0;8)</p>  <p>#4.2 1 (0,0,0;24)</p>  <p>#4.3 3/2 (0,2,0;4)</p>  <p>#4.4 3/4 (0,1,0;8)</p>  <p>#4.5 3/2 (0,2,0;4)</p>  <p>#4.6 6 (0,1,0;2)</p>  <p>#4.7 3/2 (0,2,0;4)</p>  <p>#4.8 1/2 (0,0,1;8)</p>  <p>#4.9 3 (1,0,0;4)</p>  <p>#4.10 3/2 (1,1,0;4)</p>  <p>#4.11 3 (1,1,0;2)</p>  <p>#4.12 3/4 (2,0,0;8)</p>  <p>#4.13 3/4 (1,1,0;8)</p>  <p>#4.14 3/8 (2,0,0;8)</p> 

Tabelle 5: Diagramme der ein-Teilchen-irreduziblen Vier-Punkt-Funktion mit deren relativen Gewichten in der ϕ^4 -Theorie bis zur vierten Vertexordnung. Im Vierer-Tupel $(S, D, T; N)$ sind S, D, T Zahlen der Selbst-, Doppel- und Tripel-Bindungen entsprechend, N ist der Symmetriegrad.

3.5 Vier-Punkt-Funktionen: von der ein-Teilchen-irreduziblen zu der zusammenhängenden

Im letzten Abschnitt gelang es uns bereits, die zusammenhängende Zwei-Punkt-Funktion aus der Selbstenergie zu bestimmen. Ein entsprechendes Vorgehen wird auch bei den Vier-Punkt-Funktionen möglich sein. Die zusammenhängende Vier-Punkt-Funktion erhalten wir aus der ein-Teilchen-irreduziblen dadurch, daß wir unmittelbar die Definitionsgleichung (3.3) verwenden. Mit den diagrammatischen Darstellungen (2.55) und (3.10) können wir diese nach der Anklebevorschrift (3.13) graphisch illustrieren als

$$\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \circ \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \circ \\ \diagup \\ 4 \end{array} = \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \circ \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \circ \\ \diagup \\ 4 \end{array} . \tag{3.54}$$

Diese können wir mit den Reihendarstellungen (2.68) und (3.38) aber auch für jede Vertexordnung p schreiben:

$$\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \circ \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \circ \\ \diagup \\ 4 \end{array} = \sum_{q=1}^p \sum_{r=1}^q \sum_{s=1}^r \sum_{t=1}^s \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \circ \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \circ \\ \diagup \\ 4 \end{array} .$$

(Rek. 6)

Diese Gleichung können wir unmittelbar anwenden, um z.B. die Graphen der dritten Vertexordnung zu bestimmen. Dabei verzichten wir aus Platzgründen auf die Indizierung unserer G_{1234}^c -Diagramme. Da die Symmetrie bezüglich Permutation der Indizes unmittelbar einsichtig ist, können wir das auch getrost machen, zumal hier das Ergebnis nicht etwa zur weiteren Rekursion verwendet wird, wo die Indizierung vom Belang wäre. Zunächst erhalten wir aus (Rek. 6)

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \circ \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \circ \\ \diagup \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ \circ \\ \diagdown \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \diagdown \\ \circ \\ \diagup \\ 0 \end{array} + 4 \begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ \circ \\ \diagdown \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \diagdown \\ \circ \\ \diagup \\ 1 \end{array} + 4 \begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ \circ \\ \diagdown \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \diagdown \\ \circ \\ \diagup \\ 2 \end{array} + 6 \begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ \circ \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \diagdown \\ \circ \\ \diagup \\ 1 \end{array} . \tag{3.55}$$

Nun betrachten wir jeden Summanden einzeln. So ergibt sich der erste zu

$$\begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ \circ \\ \diagdown \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \diagdown \\ \circ \\ \diagup \\ 0 \end{array} = \begin{array}{c} 6 \\ \text{---} \\ 5 \\ \text{---} \end{array} \left\{ \frac{3}{4} \begin{array}{c} 6 \\ \diagup \\ \circ \\ \diagdown \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 7 \\ \diagdown \\ \circ \\ \diagup \\ 8 \end{array} + 3 \begin{array}{c} 6 \\ \diagup \\ \circ \\ \diagdown \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 7 \\ \diagdown \\ \circ \\ \diagup \\ 8 \end{array} + \frac{3}{2} \begin{array}{c} 6 \\ \diagup \\ \circ \\ \diagdown \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 7 \\ \diagdown \\ \circ \\ \diagup \\ 8 \end{array} \right\} \begin{array}{c} 7 \\ \text{---} \\ 8 \\ \text{---} \end{array} = \\
 = \frac{3}{4} \begin{array}{c} \diagup \\ \circ \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \circ \\ \diagup \end{array} + 3 \begin{array}{c} \diagup \\ \circ \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \circ \\ \diagup \end{array} + \frac{3}{2} \begin{array}{c} \diagup \\ \circ \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \circ \\ \diagup \end{array} , \tag{3.56}$$

wobei wir auch auf die Symmetrisierung bzgl. der Indizes 5,6,7,8 verzichtet haben, weil an jeden Stümmel die gleiche einfache Linie rangeklebt wurde. Alle diese Graphen sind selbstverständlich ein-Teilchen-irreduzibel. Die von allen anderen Summanden stammenden Diagramme werden es nicht mehr sein. Im einzelnen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\text{Diagram with 2 in a circle} &= \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{---} 6 \\ \text{---} 5 \end{array} \left\{ \frac{1}{2} \begin{array}{c} 6 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} 7 \\ \text{---} 8 \end{array} \text{circle} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 7 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} 5 \\ \text{---} 8 \end{array} \text{circle} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 7 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} 6 \\ \text{---} 8 \end{array} \text{circle} \right\} \begin{array}{c} \text{---} 7 \\ \text{---} 8 \end{array} \text{circle} = \\
&= \frac{3}{4} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{circles} , \quad (3.57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Diagram with 1 in a circle} &= \begin{array}{c} \text{---} 7 \\ \text{---} 6 \\ \text{---} 5 \end{array} \begin{array}{c} 7 \\ 6 \\ 5 \end{array} \left\{ \frac{1}{6} \begin{array}{c} \text{---} 8 \\ \text{---} 8 \end{array} \text{circle} + \frac{1}{4} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{circles} + \frac{1}{4} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{circles} \right\} = \\
&= \frac{1}{6} \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{circle} + \frac{1}{4} \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{circles} + \frac{1}{4} \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{circles} , \quad (3.58)
\end{aligned}$$

$$\text{Diagram with 1 in a circle} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{---} 6 \\ \text{---} 5 \end{array} \begin{array}{c} 6 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} 7 \\ \text{---} 8 \end{array} \begin{array}{c} 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{circle} = \frac{1}{4} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{circles} . \quad (3.59)$$

Die Ergebnisse aus (3.56)–(3.59) können wir nun mit Hilfe der Gleichung (3.55) zusammenfassen und erhalten dabei das folgende Resultat:

$$\begin{aligned}
\text{Diagram with 3 in a circle} &= \frac{3}{4} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{circles} + 3 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{circle} + \frac{3}{2} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{circles} + 3 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{circles} \\
&+ \frac{2}{3} \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{circle} + \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{circles} + \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{circles} + \frac{3}{2} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \text{circles} . \quad (3.60)
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis entspricht genau dem, das wir im Kapitel über die zusammenhängenden Funktionen gewinnen konnten (siehe dazu Tabelle 3 auf der Seite 36).

3.6 Negative freie Energie W aus ein-Teilchen-irreduziblen Funktionen

Aus der Dyson-Gleichung (3.16) folgt

$$\mathbf{G}_{12} - G_{12} = \int_{34} G_{13} \mathbf{\Sigma}_{34} \mathbf{G}_{42} . \quad (3.61)$$

Mit $\int_{12} G_{12}^{-1}$ erweitert, ergibt sich daraus

$$\int_{12} (\mathbf{G}_{12} - G_{12}) G_{12}^{-1} = \int_{12} \mathbf{\Sigma}_{12} \mathbf{G}_{12} . \quad (3.62)$$

Aus der Reihendarstellung (2.67) für die Zwei-Punkt-Funktion \mathbf{G}_{12} und mit der Tatsache, daß $\mathbf{G}_{12}^{(0)} = G_{12}$ ist, können wir die folgende Reihendarstellung herleiten:

$$\mathbf{G}_{12} - G_{12} = \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{G}_{12}^{(p)} . \quad (3.63)$$

Zusätzlich mit der Störungsreihendarstellung für Σ_{12} aus (3.37) können wir dann die folgende Rekursionsgleichung mit $p = 1, 2, 3, \dots$ aufstellen:

$$\int_{12} \mathbf{G}_{12}^{(p)} G_{12}^{-1} = \sum_{q=1}^p \int_{12} \Sigma_{12}^{(q)} \mathbf{G}_{12}^{(p-q)} . \quad (3.64)$$

Mit der Identität (2.93) ergibt sich dann daraus die endgültige Rekursionsgleichung (für jedes $p \geq 1$)

$$W^{(p)} = \frac{1}{4p} \int_{12} \Sigma_{12}^{(q)} \mathbf{G}_{12}^{(p-q)} , \quad (3.65)$$

die wir auch graphisch illustrieren können

$$\textcircled{p} = \frac{1}{4p} \sum_{q=1}^p \textcircled{q}_{p-q} .$$

(Rek. 7)

Als Anwendungsbeispiel berechnen wir mit Hilfe von (Rek. 7) Vakuumdiagramme der dritten Vertextordnung:

$$\textcircled{3} = \frac{1}{12} \textcircled{1}_2 + \frac{1}{12} \textcircled{2}_1 + \frac{1}{12} \textcircled{3}_0 . \quad (3.66)$$

Mit den Graphen aus den Tabellen 2 und 4 ergeben sich bei den einzelnen Summanden folgende Diagramme:

$$\begin{aligned} \textcircled{1}_2 &= \frac{1}{2} \textcircled{1}_2 \left\{ \frac{1}{6} \textcircled{1}_2 + \frac{1}{4} \textcircled{1}_2 + \frac{1}{4} \textcircled{1}_2 \right\} = \\ &= \frac{1}{12} \textcircled{1}_2 + \frac{1}{8} \textcircled{1}_2 + \frac{1}{8} \textcircled{1}_2 , \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2}_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{6} \textcircled{1}_2 + \frac{1}{4} \textcircled{1}_2 \right\} \textcircled{1}_2 = \\ &= \frac{1}{12} \textcircled{1}_2 + \frac{1}{8} \textcircled{1}_2 , \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ 0 \end{array} = \\
 & = \left\{ \frac{1}{4} \textcircled{1} \textcircled{2} + \frac{1}{12} \textcircled{1} \textcircled{2} + \frac{1}{4} \textcircled{1} \textcircled{2} + \frac{1}{8} \textcircled{1} \textcircled{2} + \frac{1}{8} \textcircled{1} \textcircled{2} \right\} \textcircled{1} \textcircled{2} \\
 & = \frac{1}{4} \textcircled{1} \textcircled{2} + \frac{1}{3} \textcircled{1} \textcircled{2} + \frac{1}{8} \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} + \frac{1}{8} \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} . \quad (3.69)
 \end{aligned}$$

Die Ergebnisse (3.67)–(3.69) liefern uns nach Einsetzen in die Gleichung (3.66) das erwünschte Endresultat:

$$\textcircled{3} = \frac{1}{48} \textcircled{1} \textcircled{2} + \frac{1}{24} \textcircled{1} \textcircled{2} + \frac{1}{32} \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} + \frac{1}{48} \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} , \quad (3.70)$$

das wir auch schon mit anderen Methoden in (2.89) erhielten.

An dieser Stelle geben wir noch eine Rekursion zur Bestimmung der Vakuumpdiagramme an, und zwar diejenige, die von der Kenntnis der ein-Teilchen-irreduziblen Vier-Punkt-Funktion ausgeht. Dazu setzen wir in die Rekursionsgleichung (Rek. 7) den Ausdruck für die Selbstenergie aus (Rek. 5) ein. Das führt auf die folgende graphische Rekursionsgleichung:



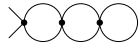



$$\boxed{
 \textcircled{p+1} = \frac{1}{8(p+1)} \sum_{q=0}^p q \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{p-q} + \frac{1}{24(p+1)} \sum_{q=1}^p \sum_{r=1}^q \sum_{s=1}^r \sum_{t=1}^s \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{p-q} .
 }$$

(Rek. 8)

Die Gleichung ist äquivalent zur Rekursion (Rek. 3) auf der Seite 37 und könnte aus dieser auch direkt mit Hilfe von (Rek. 6) hergeleitet werden.

Kapitel 4

Tadpolelose Graphen

In diesem Kapitel werden zusammenhängende und ein-Teilchen-irreduzible Graphen behandelt, die keine schleifenförmigen graphischen Elemente enthalten. Solche schleifenförmigen Elemente werden unter dem Begriff der *“Tadpole im erweiterten Sinne”* zusammengefasst. Dazu gehören beispielsweise der bereits in der Einführung mit (1.13) definierte *Tadpole im eigentlichen Sinne* , aber auch die Graphen  und  u.s.w. Ausserdem sollten auch kompliziertere Graphen wie  und sogar der Graph  u.s.w. durch diesen Begriff miterfasst werden. Berücksichtigen wir noch die zu diesen Diagrammen gehörigen relativen Gewichte, so zeigt der Vergleich mit den Graphen der zusammenhängenden Zwei-Punkt-Funktion, daß all diese von dem Graphen  mit dem Gewicht 1/2 stammen. Deshalb werden wir diesen in der Tat auch schon als den Tadpole im erweiterten Sinne, oder auch einfach nur als Tadpole, bezeichnen.

In der Quantenfeldtheorie mit massiven Teilchen führen solche Tadpoles lediglich zu impulsunabhängigen Massenkorrekturen. Da aber die Masse einen frei normierbaren Parameter darstellt, liefern uns diese Massenkorrekturen keine neue Information, d.h. die Tadpole-Beiträge sind unerheblich. Ein Blick in die Tabellen 1 bis 5 zeigt aber, daß mehr als etwa die Hälfte aller Graphen solche Schleifen besitzt. Durch das Weglassen all dieser Graphen lässt sich also der Aufwand bei der Berechnung von Feynman-Diagrammen drastisch reduzieren. Auf diese Weise wurde in [27] die Renormierung der ϕ^4 -Theorie bis zu fünf Schleifen und in der Arbeit [13] die Renormierung der Vakuumenergie zur selben Ordnung durchgeführt. Wir werden nun in diesem Kapitel versuchen, die Tadpole-Beiträge durch eine Umdefinition des Massenterms in unserem ursprünglichen Propagator G_{12} zu berücksichtigen. Es wird uns dann auch gelingen, ein geschlossenes effizientes Rekursionsgleichungssystem für die tadpolefreien Graphen herzuleiten (siehe die frühere Arbeit [24]).

4.1 Definition tadpoleloser Funktionen

Der in der Vorbemerkung definierte Tadpole im erweiterten Sinne lässt sich mit Hilfe von Funktionalen ausdrücken als

$$\frac{1}{2} \textcircled{1} \textcircled{2} = -\frac{g}{2} \int_{34} V_{1234} \mathbf{G}_{34} \quad , \quad (4.1)$$

was trivialerweise aus (2.55) mit der Anklebevorschrift (2.58) ersichtlich wird. Da dieser Tadpole gemäss der Schwinger-Dyson-Gleichung (3.14) einen Beitrag zur Selbstenergie darstellt, liegt es nahe, eine neue Funktion einzuführen, die der Selbstenergie mit dem abgezogenen Tadpole entspricht. Diese neue Funktion nennen wir dann die tadpolelose Selbstenergie und bezeichnen sie als $\tilde{\Sigma}_{12}$. Per Definition gilt demnach für diese

$$\tilde{\Sigma}_{12} \equiv \Sigma_{12} + \frac{g}{2} \int_{34} V_{1234} \mathbf{G}_{34} \quad . \quad (4.2)$$

Bezeichnen wir ferner diese neue Funktion graphisch als

$$\tilde{\Sigma}_{12} \equiv 1 \sim \textcircled{1} \sim 2 \quad , \quad (4.3)$$

so lässt sich die Gleichung (4.2) auch diagrammatisch darstellen als

$$1 \sim \textcircled{1} \sim 2 \equiv 1 \textcircled{1} 2 - \frac{1}{2} \textcircled{1} \textcircled{2} \quad . \quad (4.4)$$

Für deren rekursive Auswertung werden wir später die zusammenhängende Zwei-Punkt-Funktion \mathbf{G}_{12} benötigen. Diese wollen wir selbstverständlich auch in schleifenfreier Form erhalten. Andererseits brauchen wir \mathbf{G}_{12} für die Definition von $\tilde{\Sigma}_{12}$ nach (4.2) in einer unveränderten Form. Diese beiden Umstände lassen sich nur vereinigen, wenn wir \mathbf{G}_{12} als Funktion einer neuen Variable auffassen. Wir drücken diese also nicht mehr in Termini des freien Propagators G_{12} aus, sondern durch einen neuen Propagator \tilde{G}_{12} . Dieser wird diagrammatisch z.B. als eine gewellte Linie dargestellt:

$$\tilde{G}_{12} \equiv 1 \text{~~~~} 2 \quad . \quad (4.5)$$

Dieser neue Propagator sollte durch die Bedingung festgelegt werden, daß $\mathbf{G}_{12} = \mathbf{G}_{12}(\tilde{G})$ keine Tadpoles enthält. Um dieser Vorgabe in voller Allgemeinheit gerecht zu werden, sehen wir uns zuerst $\mathbf{G}_{12} = \mathbf{G}_{12}(G)$ aus dem letzten Kapitel etwas genauer an und schreiben dazu die Dyson-Gleichung (3.19) in der folgenden Form aus:

$$1 \text{====} 2 = 1 \text{---} 2 + 1 \text{---} \textcircled{1} \text{---} 2 + 1 \text{---} \textcircled{1} \textcircled{1} \text{---} 2 + \dots \quad . \quad (4.6)$$

Dabei haben wir für die volle Linie auf der rechten Seite von (3.19) den Ausdruck aus der linken Seite eingesetzt, haben also die selbstkonsistente Gleichung (3.19) lediglich ausgeschrieben. In der so ausgedrückten Funktion \mathbf{G}_{12} sind unter anderem die Graphen $\textcircled{1} \textcircled{2}$,

$\textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{2}$, $\textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{2}$ u.s.w. enthalten. Hierbei sehen wir, daß die Tadpoles durch die

Verwendung der Selbstenergie Σ entstanden. Um diese tadpolebehafteten Diagramme von vorn herein auszuschliessen, ersetzen wir die Selbstenergie Σ überall durch die tadpolefrei Selbstenergie $\tilde{\Sigma}$. Den Ausdruck für die volle zusammenhängende Zwei-Punkt-Funktion in der neuen Variablen wollen wir nach unserer Vorgabe nun wie folgt schreiben:

$$1 \equiv 2 = 1 \text{---} 2 + 1 \text{---} \text{---} 2 + 1 \text{---} \text{---} \text{---} 2 + \dots , \quad (4.7)$$

wobei wir hier die Anklebevorschrift

$$\int_3 \tilde{\Sigma}_{13} \tilde{G}_{32} \equiv 1 \text{---} \text{---} 3 \text{---} 3 \text{---} 2 \equiv 1 \text{---} \text{---} 2 . \quad (4.8)$$

benutzten. Mit einer weiteren Anklebevorschrift

$$\int_3 \tilde{\Sigma}_{13} \mathbf{G}_{32} \equiv 1 \text{---} \text{---} 3 \text{---} 3 \text{---} 2 \equiv 1 \text{---} \text{---} 2 \quad (4.9)$$

können wir aus (4.7) nun eine weitere Dyson-Gleichung herleiten:

$$1 \equiv 2 = 1 \text{---} 2 + 1 \text{---} \text{---} 2 , \quad (4.10)$$

die in der Funktionalsprache

$$\mathbf{G}_{12} = \tilde{G}_{12} + \int_{34} \tilde{G}_{13} \tilde{\Sigma}_{34} \mathbf{G}_{42} \quad (4.11)$$

lautet. Es handelt sich hierbei um die Dyson-Gleichung für die zusammenhängende Zwei-Punkt-Funktion in der tadpolelosen Formulierung.

Nun können wir auch die Frage nach der funktionellen Form des Propagators \tilde{G}_{12} beantworten. Das tun wir zuerst indirekt, indem wir deren funktionale Umkehrung \tilde{G}_{12}^{-1} mit der definierenden Eigenschaft

$$\int_3 \tilde{G}_{13} \tilde{G}_{32}^{-1} \equiv \delta_{12} \quad (4.12)$$

genauer untersuchen. Und dazu erweitern wir (4.11) mit $\int_{12} \tilde{G}_{51}^{-1} \mathbf{G}_{26}^{-1}$, was uns nach (3.4) und (4.12) unmittelbar die Identität

$$\tilde{G}_{12}^{-1} = \mathbf{G}_{12}^{-1} + \tilde{\Sigma}_{12} \quad (4.13)$$

liefert. Nach Einsetzen der expliziten Form für $\tilde{\Sigma}_{12}$ aus (4.2) und wegen (3.9) gilt

$$\tilde{G}_{12}^{-1} = \mathbf{G}_{12}^{-1} + \frac{g}{2} \int_{34} V_{1234} \mathbf{G}_{34} . \quad (4.14)$$

Bem. Aus (4.2) und (4.14) sieht man, daß $\tilde{\Sigma}_{12}$ und \tilde{G}_{12}^{-1} (und also auch \tilde{G}_{12}) bezüglich der Indexpermutation symmetrisch sind.

Erweitern wir die Gleichung (4.14) mit $\int_{56} G_{51} \tilde{G}_{26}$, so stellen wir weiterhin die folgende Beziehung fest:

$$\tilde{G}_{12} = \mathbf{G}_{12} - \frac{g}{2} \int_{3456} G_{15} V_{5346} \mathbf{G}_{34} \tilde{G}_{62} . \quad (4.15)$$

Um die Aussage dieser wichtigen Beziehung zu verdeutlichen, schreiben wir diese Selbstkonsistenzgleichung diagrammatisch aus in der Form

$$1 \rightsquigarrow 2 = 1 \text{---} 2 + \frac{1}{2} \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \frac{1}{4} \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} 2 + \dots \quad (4.16)$$

Aus dieser Beziehung sehen wir explizit, daß die einfache Linie nur einen von vielen Beiträgen zu der gewellten Linie darstellt, und zwar ist das deren einziger tadpolefreier Beitrag.

An der Definition der ein-Teilchen-irreduziblen Vier-Punkt-Funktion Γ_{1234} braucht nichts mehr geändert zu werden, es ändert sich lediglich deren funktionelle Abhängigkeit. In diesem Kapitel betrachten wir Γ_{1234} als Funktion der neuen Variablen \tilde{G} : $\Gamma_{1234} = \Gamma_{1234}[\tilde{G}, V]$. Um diesen Umstand auch graphisch zum Ausdruck zu bringen, benutzen wir für deren diagrammatische Bezeichnung in diesem Kapitel

$$-\Gamma_{1234} \equiv \text{---} \bigcirc \text{---} \quad , \quad (4.17)$$

wobei wir deren Stümmel als kurze gewellte Linien bezeichnen. Entsprechend bezeichnen wir in diesem Kapitel auch den Vierer-Vertex gemäss

$$-g V_{1234} \equiv \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \quad . \quad (4.18)$$

Da wir in diesem Kapitel mit gewellten Linien als graphischen Elementen arbeiten, werden wir des weiteren auch die Amputation einer solchen antreffen. Diese werden wir entsprechend der zu (1.15) analogen Regel

$$\frac{\delta \tilde{G}_{12}}{\delta \tilde{G}_{34}} \equiv \frac{\delta \text{---} 1 \rightsquigarrow 2}{\delta \text{---} 3 \rightsquigarrow 4} = \frac{1}{2} \{ \delta_{13} \delta_{24} + \delta_{14} \delta_{23} \} \quad (4.19)$$

auswerten.

4.2 Bestimmungsgleichungen für tadpolelose Funktionen

Die Bestimmungsgleichung für die tadpolelose Selbstenergie $\tilde{\Sigma}_{12}$ können wir unmittelbar der Schwinger-Dyson-Gleichung (3.12) mit Hilfe der Definitionsgleichung (4.2) entnehmen:

$$\tilde{\Sigma}_{12} = \frac{g}{6} \int_{345678} V_{1345} \mathbf{G}_{36} \mathbf{G}_{47} \mathbf{G}_{58} \Gamma_{6782} \quad . \quad (4.20)$$

Diagrammatisch lässt sich diese darstellen als

$$1 \rightsquigarrow \bigcirc \rightsquigarrow 2 = \frac{1}{6} \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} 2 \quad . \quad (4.21)$$

Die dabei benötigte zusammenhängende Zwei-Punkt-Funktion \mathbf{G} wird durch die bereits hergeleitete Dyson-Gleichung (4.11) bestimmt, die graphisch durch (4.10) dargestellt wird.

Auch die ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktion steht uns im Prinzip mit der Bestimmungsgleichung (3.35) aus dem letzten Kapitel zur Verfügung, enthält aber einen nach dem

Variablenwechsel nicht mehr wohldefinierten Ausdruck $\int_{567890} V_{1567} \mathbf{G}_{58} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \delta \mathbf{\Gamma}_{8234} / \delta G_{90}$. Um auch diesen Ableitungsterm in eine mit der neuen Variablenwahl verträgliche Form zu bringen, versuchen wir, die Amputation der einfachen Linie durch die Amputation der gewellten Linie auszudrücken. Dazu schreiben wir die folgende Relation an:

$$\int_{34} G_{13} G_{24} \frac{\delta}{\delta G_{34}} = - \frac{\delta}{\delta G_{12}^{-1}} = - \int_{34} \frac{\delta \tilde{G}_{34}}{\delta G_{12}^{-1}} \frac{\delta}{\delta \tilde{G}_{34}}, \quad (4.22)$$

die im ersten Schritt von (1.26) stammt und im zweiten die funktionale Kettenregel darstellt. Führen wir die Funktionalableitung der Gleichung (4.12) nach G_{56}^{-1} durch und erweitern das Ergebnis anschliessend mit $\int_2 \tilde{G}_{24}$, so erhalten wir

$$\frac{\delta \tilde{G}_{34}}{\delta G_{12}^{-1}} = - \int_{56} \frac{\delta \tilde{G}_{56}^{-1}}{\delta G_{12}^{-1}} \tilde{G}_{53} \tilde{G}_{64}. \quad (4.23)$$

Dann gilt also

$$\int_{34} G_{13} G_{24} \frac{\delta}{\delta G_{34}} = \int_{3456} \frac{\delta \tilde{G}_{56}^{-1}}{\delta G_{12}^{-1}} \tilde{G}_{53} \tilde{G}_{64} \frac{\delta}{\delta \tilde{G}_{34}}. \quad (4.24)$$

Mit dem Ausdruck für \tilde{G}_{56}^{-1} aus (4.14) stellen wir weiterhin fest, daß wegen (1.24) und (2.54)

$$\frac{\delta \tilde{G}_{56}^{-1}}{\delta G_{12}^{-1}} = \frac{1}{2} \{ \delta_{15} \delta_{26} + \delta_{16} \delta_{25} \} - \frac{g}{4} \int_{78} V_{5678} \mathbf{G}_{7812}^c - \frac{g}{2} \int_{78} V_{5678} \mathbf{G}_{71} \mathbf{G}_{82} \quad (4.25)$$

gilt. Das ergibt dann, in (4.24) eingesetzt und unter Verwendung von (3.3) umgeschrieben, die angestrebte Umformungsregel

$$\begin{aligned} \int_{34} G_{13} G_{24} \frac{\delta}{\delta G_{34}} &= \int_{34} \tilde{G}_{13} \tilde{G}_{24} \frac{\delta}{\delta \tilde{G}_{34}} - \frac{g}{2} \int_{345678} \mathbf{G}_{13} \mathbf{G}_{24} V_{3456} \tilde{G}_{57} \tilde{G}_{68} \frac{\delta}{\delta \tilde{G}_{78}} \\ &+ \frac{g}{4} \int_{34567890\bar{1}\bar{2}} \mathbf{G}_{13} \mathbf{G}_{24} \mathbf{\Gamma}_{3456} \mathbf{G}_{57} \mathbf{G}_{68} V_{7890} \tilde{G}_{9\bar{1}} \tilde{G}_{0\bar{2}} \frac{\delta}{\delta \tilde{G}_{\bar{1}\bar{2}}}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Mit deren Hilfe lässt sich die Bestimmungsgleichung für die ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktion (3.35) nun auch wohldefiniert mit dem neuen Propagator \tilde{G} umschreiben:


$$\begin{aligned} - \mathbf{\Gamma}_{1234} &= - g V_{1234} \\ &+ \frac{g^2}{12} \int_{567890\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5}\bar{6}\bar{7}\bar{8}} V_{1567} \mathbf{G}_{58} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \mathbf{\Gamma}_{90\bar{1}\bar{2}} \mathbf{G}_{\bar{1}\bar{3}} \mathbf{G}_{\bar{2}\bar{4}} V_{\bar{3}\bar{4}\bar{5}\bar{6}} \tilde{G}_{\bar{5}\bar{7}} \tilde{G}_{\bar{6}\bar{8}} \frac{\delta \mathbf{\Gamma}_{8234}}{\delta \tilde{G}_{\bar{7}\bar{8}}} \\ &- \frac{g^2}{6} \int_{567890\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} V_{1567} \mathbf{G}_{58} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} V_{90\bar{1}\bar{2}} \tilde{G}_{\bar{1}\bar{3}} \tilde{G}_{\bar{2}\bar{4}} \frac{\delta \mathbf{\Gamma}_{8234}}{\delta \tilde{G}_{\bar{3}\bar{4}}} + \frac{g}{3} \int_{567890} V_{1567} \mathbf{G}_{58} \tilde{G}_{69} \tilde{G}_{70} \frac{\delta \mathbf{\Gamma}_{8234}}{\delta \tilde{G}_{90}} \\ &+ \frac{g}{2} \int_{5678} V_{1256} \mathbf{G}_{57} \mathbf{G}_{68} \mathbf{\Gamma}_{7834} + \frac{g}{2} \int_{5678} V_{1356} \mathbf{G}_{57} \mathbf{G}_{68} \mathbf{\Gamma}_{7824} + \frac{g}{2} \int_{5678} V_{1456} \mathbf{G}_{57} \mathbf{G}_{68} \mathbf{\Gamma}_{7823} \\ &- \frac{g}{6} \int_{567890\bar{1}\bar{2}} V_{5167} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \mathbf{\Gamma}_{902\bar{1}} \mathbf{G}_{\bar{1}\bar{2}} \mathbf{\Gamma}_{2348} \mathbf{G}_{85} - \frac{g}{6} \int_{567890\bar{1}\bar{2}} V_{5167} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \mathbf{\Gamma}_{903\bar{1}} \mathbf{G}_{\bar{1}\bar{2}} \mathbf{\Gamma}_{\bar{2}248} \mathbf{G}_{85} \\ &- \frac{g}{6} \int_{567890\bar{1}\bar{2}} V_{5167} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \mathbf{\Gamma}_{904\bar{1}} \mathbf{G}_{\bar{1}\bar{2}} \mathbf{\Gamma}_{\bar{2}238} \mathbf{G}_{85}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

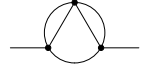
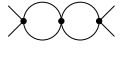

Diese Bestimmungsgleichung lässt sich mit der Zusatzregel

$$-g \int_4 V_{1234} \tilde{G}_{45} \equiv \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ \diagdown \\ 5 \end{array} \equiv \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 5 \end{array} \quad (4.28)$$

natürlich auch graphisch illustrieren:

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} &= \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \frac{1}{12} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 6 \\ \diagdown \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 6 \\ \diagdown \\ 7 \end{array} \\ &+ \frac{1}{6} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 6 \\ \diagdown \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 6 \\ \diagdown \\ 7 \end{array} + \frac{1}{3} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 6 \\ \diagdown \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 6 \\ \diagdown \\ 7 \end{array} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \\ &+ \frac{1}{6} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} + \frac{1}{6} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \frac{1}{6} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} . \end{aligned} \quad (4.29)$$

Mit (4.11), (4.20) und (4.27) steht uns nun ein geschlossenes Gleichungssystem zur Bestimmung tadpoleloser Graphen zur Verfügung (vergleiche auch [24]). Wie wir anschließend zeigen werden, sind die daraus zu generierenden Graphen in der Tat tadpolelos. Man überlegt sich leicht, daß all diese in gewellten Linien ausgedrückt sind. Es stellt sich aber heraus, daß wir für gewisse Fragestellungen eine Vergleichbarkeit der tadpolelosen Diagramme dieses Kapitels mit den Graphen des letzten Kapitels benötigen. Um eine unmittelbare Vergleichbarkeit herzustellen, ist es sinnvoll, neue Funktionen einzuführen, deren Graphen aus normalen Linien bestehen, aber die diagrammatische Struktur der tadpolelosen Graphen dieses Kapitels behalten. Dieselbe diagrammatische Struktur meint dabei die gleichen Knotenpunkte und Kanten, die diese verbinden. So hat z.B. der Graph  dieselbe

diagrammatische Struktur, wie der Graph , und entsprechend erhält  die Struktur vom Graphen . Die neu definierten Funktionen wollen wir $\check{\Sigma}_{12}$, \check{G}_{12} und $\check{\Gamma}_{1234}$ nennen in Analogie zu den entsprechenden Funktionen $\tilde{\Sigma}_{12}$, G_{12} und Γ_{1234} und diese diagrammatisch bezeichnen als

$$\check{\Sigma}_{12} \equiv 1 - \text{loop} - 2 \quad , \quad \check{G}_{12} \equiv 1 - \text{wavy} - 2 \quad , \quad -\check{\Gamma}_{1234} \equiv \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} . \quad (4.30)$$

Diese neue Funktionen sollen durch die Forderung festgelegt werden, daß deren Bestimmungsgleichungen in gewisser Weise ähnlich den Gleichungen (4.11), (4.20) und (4.27) sind. Dies ist erfüllt, wenn wir in den letzten deren jeweilige Elemente ersetzen nach der Vorschrift

$$\tilde{G}_{12} \mapsto G_{12} \quad , \quad G_{12} \mapsto \check{G}_{12} \quad , \quad \tilde{\Sigma}_{12} \mapsto \check{\Sigma}_{12} \quad , \quad \Gamma_{1234} \mapsto \check{\Gamma}_{1234} \quad , \quad (4.31)$$

bzw. deren diagrammatischen Interpretationen nach der Vorschrift

$$\begin{aligned} 1 - \text{wavy} - 2 &\mapsto 1 - \text{straight} - 2 \quad , & 1 - \text{double} - 2 &\mapsto 1 - \text{wavy} - 2 \quad , \\ 1 - \text{loop} - 2 &\mapsto 1 - \text{loop} - 2 \quad , & \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} &\mapsto \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} . \end{aligned} \quad (4.32)$$

Mit diesen Vorschriften erhalten wir aus dem Gleichungssystem (4.10), (4.21), (4.29) ein neues Gleichungssystem zur Bestimmung der Funktionen $\tilde{\Sigma}_{12}$, $\tilde{\mathbf{G}}_{12}$ und $\tilde{\Gamma}_{1234}$:

$$1 \text{---} \text{wavy} \text{---} 2 = 1 \text{---} 2 + 1 \text{---} \text{blob} \text{---} 2, \quad (4.33)$$

$$1 \text{---} \text{blob} \text{---} 2 = \frac{1}{6} 1 \text{---} \text{double-blob} \text{---} 2, \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \text{blob} &= \text{cross} + \frac{1}{12} \frac{\text{blob}_1 \delta_5 \text{blob}_2}{\delta_6 \text{---} 7} + \frac{1}{6} \frac{\text{blob}_1 \delta_5 \text{blob}_2}{\delta_6 \text{---} 7} + \frac{1}{3} \frac{\text{blob}_1 \delta_5 \text{blob}_2}{\delta_6 \text{---} 7} \\ &+ \frac{1}{2} \text{blob}_1 \text{---} \text{blob}_2 + \frac{1}{2} \text{blob}_1 \text{---} \text{blob}_2 + \frac{1}{2} \text{blob}_1 \text{---} \text{blob}_2 \\ &+ \frac{1}{6} \text{blob}_1 \text{---} \text{blob}_2 + \frac{1}{6} \text{blob}_1 \text{---} \text{blob}_2 + \frac{1}{6} \text{blob}_1 \text{---} \text{blob}_2. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Aus der Struktur dieses Gleichungssystems sieht man unmittelbar, daß alle daraus zu bestimmenden Graphen aus einfachen Linien aufgebaut werden, denn die gewellten Linien kommen hier nicht vor. Die unmittelbare Vergleichbarkeit dieser Graphen mit denen des letzten Kapitels ist also gesichert. Dies wird uns im nächsten Abschnitt nützlich sein, wenn wir uns der Frage zuwenden, ob nach unserem Verfahren tatsächlich auch schon alle tadpolelosen Graphen generiert werden.

4.3 Rekursionen für die tadpolefreien Funktionen

Die störungstheoretischen Ansätze für Γ_{1234} und \mathbf{G}_{12} entnehmen wir den entsprechenden Gleichungen aus (2.67) und (3.37). Für die tadpolefreie Selbstenergie machen wir einen analogen Ansatz

$$\tilde{\Sigma}_{12} \equiv \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{\Sigma}_{12}^{(p)}. \quad (4.36)$$

Die dazugehörigen graphischen Interpretationen lauten dann für $\tilde{\Sigma}_{12}$ und Γ_{1234}

$$1 \text{---} \text{blob} \text{---} 2 = \sum_{p=1}^{\infty} 1 \text{---} \text{blob}_p \text{---} 2, \quad \text{blob} = \sum_{p=1}^{\infty} \text{blob}_p \quad (4.37)$$

und für die Korrelationsfunktion \mathbf{G}_{12} wie in (2.68). Mit diesen lassen sich dann die Bestimmungsgleichungen (4.10), (4.21) und (4.29) in Rekursionsbeziehungen überführen. Durch passend erweiterte Anklebevorschriften kann man diese als folgendes Gleichungssystem mit

$p = 1, 2, 3, \dots$ aufschreiben:

$$\begin{aligned}
 1 \xrightarrow{0} 2 &= 1 \text{---} 2, & \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} &= \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \times \\ \diagdown \\ 1 \end{array}, \\
 1 \text{---} \textcircled{p} \text{---} 2 &= \frac{1}{6} \sum_{q=1}^{p-1} \sum_{r=1}^q \sum_{s=1}^r 1 \text{---} \begin{array}{c} p-q-1 \\ \textcircled{q-r} \\ \textcircled{s} \end{array} \text{---} 2, \\
 1 \xrightarrow{p} 2 &= \sum_{q=1}^p 1 \text{---} \textcircled{q} \text{---} 2, \\
 \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{p+1} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} &= \frac{1}{3} \sum_{q=1}^p 1 \text{---} \begin{array}{c} p-q \\ \textcircled{q} \end{array} \text{---} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \delta \\ \diagdown \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 4 \\ \diagdown \\ 7 \end{array} + \frac{1}{12} \sum_{q=3}^p \sum_{r=3}^q \sum_{s=3}^r \sum_{t=3}^s \sum_{k=3}^t \sum_{n=2}^{k-1} \begin{array}{c} 1 \\ \textcircled{t-k} \\ \textcircled{r-s} \\ \textcircled{q-r} \\ \textcircled{s-t} \end{array} \begin{array}{c} p-q \\ \delta \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 4 \\ \diagdown \\ 7 \end{array} \\
 + \frac{1}{6} \sum_{q=2}^p \sum_{r=2}^q \sum_{s=2}^r \begin{array}{c} 1 \\ \textcircled{q-r} \\ \textcircled{r-s} \end{array} \begin{array}{c} p-q \\ \delta \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 4 \\ \diagdown \\ 7 \end{array} + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^p \sum_{r=1}^q \begin{array}{c} 2 \\ \textcircled{q-r} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ 4 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^p \sum_{r=1}^q \begin{array}{c} 4 \\ \textcircled{q-r} \end{array} \begin{array}{c} p-q \\ \diagup \\ 1 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \\
 + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^p \sum_{r=1}^q \begin{array}{c} 3 \\ \textcircled{q-r} \end{array} \begin{array}{c} p-q \\ \diagup \\ 4 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} + \frac{1}{6} \sum_{q=2}^p \sum_{r=2}^q \sum_{s=2}^r \sum_{t=1}^{s-1} \sum_{k=0}^{t-1} \begin{array}{c} 2 \\ \textcircled{t-k} \\ \textcircled{r-s} \\ \textcircled{k} \\ \textcircled{s-t} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ p-q \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \\
 + \frac{1}{6} \sum_{q=2}^p \sum_{r=2}^q \sum_{s=2}^r \sum_{t=1}^{s-1} \sum_{k=0}^{t-1} \begin{array}{c} 4 \\ \textcircled{t-k} \\ \textcircled{r-s} \\ \textcircled{k} \\ \textcircled{s-t} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ p-q \\ \diagdown \\ 3 \end{array} + \frac{1}{6} \sum_{q=2}^p \sum_{r=2}^q \sum_{s=2}^r \sum_{t=1}^{s-1} \sum_{k=0}^{t-1} \begin{array}{c} 3 \\ \textcircled{t-k} \\ \textcircled{r-s} \\ \textcircled{k} \\ \textcircled{s-t} \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ p-q \\ \diagdown \\ 2 \end{array}.
 \end{aligned}$$

(Rek. 9)

Beh.5. Die nach dieser Rekursion konstruierten Graphen der tadpolelosen ein-Teilchen-irreduziblen Zwei- und Vier-Punkt-Funktion und der Paar-Korrelationsfunktion enthalten keine Tadpoles.

Beweisidee:

Tadpoles entstehen durch das Verbinden zweier Stümmel ein und denselben Vertex durch irgendwelche Zwei-Punkt-Funktionsgraphen. Solche Verbindungen kommen weder in der Rekursion der Selbstenergie noch in der für die zusammenhängende Zwei-Punkt-Funktion vor. In der Tat ist das bereits nach deren Konstruktion vorgegeben. Aber auch bei der Rekursion der ein-Teilchen-irreduziblen Vier-Punkt-Funktion Γ_{1234} sind solche Tadpole-erzeugenden Terme nicht vorhanden. Übrigens waren diese in der entsprechender Rekursion für Γ_{1234} aus (Rek. 5) aber auch schon nicht dabei, dort wurden die Tadpoles durch die tadpolebehafteten

Zwei-Punkt-Graphen hervorgerufen. Jetzt sind auch diese tadpolefrei, wie wir es eben festgestellt haben. Beweistechnisch heisst dies, daß wir beim Induktionsschritt bei keiner Ordnung die Gefahr eingehen, einen Tadpole zu bekommen.

Somit sind wir auch schon fertig.

Nebenbei bemerkt sind die Graphen der ein-Teilchen-irreduziblen Funktionen auch hier irreduzibel, was nach Bedarf in völliger Analogie zum vorhergehenden Kapitel bewiesen werden kann.

Eine interessantere und wichtigere Frage ist aber, ob auch schon alle tadpolefreie Graphen von (Rek. 9) geliefert werden. Angenommen (Rek. 9) würde uns nicht alle tadpolefreie Diagramme liefern, so könnten wir die fehlenden Beiträge aus keinen sonstigen Überlegungen wiedergewinnen. Dabei würde wichtige Information verloren gehen. Es wird sich aber herausstellen, daß unsere Befürchtungen unbegründet sind und (Rek. 9) tatsächlich schon alle uns interessierenden tadpolelosen Diagramme liefert. Dies formulieren wir zuerst als eine Behauptung:

Beh.6. Das Gleichungssystem (Rek. 9) liefert bereits alle tadpolefreien Graphen der Funktionen Σ_{12} , G_{12} und Γ_{1234} .

Um das zu sehen, müssen wir jedoch die tadpolefreien Graphen aus (Rek. 9) mit allen aus (Rek. 5) stammenden unmittelbar vergleichen können. Dazu müssen wir (Rek. 9) passend umformulieren und verwenden dazu unser Gleichungssystem (4.33)–(4.35). Mit entsprechenden störungstheoretischen Ansätzen lässt sich dieses in ein rekursives Gleichungssystem mit den Anfangswerten

$$1 \overset{0}{\text{---}} 2 = 1 \text{---} 2, \quad \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad / \\ 1 \quad 4 \end{array} = \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad / \\ 1 \quad 4 \end{array} \quad (4.38)$$

überführen:

$$1 \text{---} \text{---} 2 = \frac{1}{6} \sum_{q=1}^{p-1} \sum_{r=1}^q \sum_{s=1}^r 1 \text{---} \begin{array}{c} p-q-1 \\ \diagdown \quad / \\ q-r \quad s \end{array} \text{---} 2, \quad (4.39)$$

$$1 \overset{p}{\text{---}} 2 = \sum_{q=1}^p 1 \text{---} \begin{array}{c} q \\ \diagdown \quad / \\ p-q \end{array} 2, \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad / \\ 1 \quad 4 \end{array} &= \frac{1}{3} \sum_{q=1}^p 1 \text{---} \begin{array}{c} p-q \\ \diagdown \quad / \\ 5 \quad 6 \end{array} \frac{\delta \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad / \\ q \quad 4 \end{array}}{\delta \begin{array}{c} 5 \quad 6 \\ \diagdown \quad / \\ 7 \end{array}} + \frac{1}{12} \sum_{q=3}^p \sum_{r=3}^q \sum_{s=3}^r \sum_{t=3}^s \sum_{k=3}^t \sum_{n=2}^{k-1} \frac{\delta \begin{array}{c} 1 \quad p-q \\ \diagdown \quad / \\ t-k \quad r-s \end{array}}{\delta \begin{array}{c} 5 \quad 6 \\ \diagdown \quad / \\ s-t \quad q-r \end{array}} \frac{\delta \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad / \\ 1 \quad 4 \end{array}}{\delta \begin{array}{c} 5 \quad 6 \\ \diagdown \quad / \\ 7 \end{array}} \\ + \frac{1}{6} \sum_{q=2}^p \sum_{r=2}^q \sum_{s=2}^r \frac{\delta \begin{array}{c} 1 \quad p-q \\ \diagdown \quad / \\ q-r \quad s \end{array}}{\delta \begin{array}{c} 5 \quad 6 \\ \diagdown \quad / \\ 7 \end{array}} \frac{\delta \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad / \\ s-1 \quad 4 \end{array}}{\delta \begin{array}{c} 5 \quad 6 \\ \diagdown \quad / \\ 7 \end{array}} + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^p \sum_{r=1}^q \frac{\delta \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad / \\ 1 \quad q-r \end{array}}{\delta \begin{array}{c} 5 \quad 6 \\ \diagdown \quad / \\ 4 \end{array}} + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^p \sum_{r=1}^q \frac{\delta \begin{array}{c} 4 \quad p-q \\ \diagdown \quad / \\ 1 \quad q-r \end{array}}{\delta \begin{array}{c} 5 \quad 6 \\ \diagdown \quad / \\ 3 \end{array}} \\ + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^p \sum_{r=1}^q \frac{\delta \begin{array}{c} 3 \quad p-q \\ \diagdown \quad / \\ 1 \quad q-r \end{array}}{\delta \begin{array}{c} 5 \quad 6 \\ \diagdown \quad / \\ 2 \end{array}} + \frac{1}{6} \sum_{q=2}^p \sum_{r=2}^q \sum_{s=2}^r \sum_{t=1}^{s-1} \sum_{k=0}^{t-1} \frac{\delta \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad / \\ t-k \quad r-s \end{array}}{\delta \begin{array}{c} 5 \quad 6 \\ \diagdown \quad / \\ 1 \quad p-q \end{array}} \frac{\delta \begin{array}{c} 4 \quad p-q \\ \diagdown \quad / \\ k \quad s-t \end{array}}{\delta \begin{array}{c} 5 \quad 6 \\ \diagdown \quad / \\ 7 \end{array}} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{6} \sum_{q=2}^p \sum_{r=2}^q \sum_{s=2}^r \sum_{t=1}^{s-1} \sum_{k=0}^{t-1} \text{Diagram 1} + \frac{1}{6} \sum_{q=2}^p \sum_{r=2}^q \sum_{s=2}^r \sum_{t=1}^{s-1} \sum_{k=0}^{t-1} \text{Diagram 2} . \quad (4.41)$$

Offensichtlich haben die nach diesen Rekursionen konstruierten Graphen dieselbe diagrammatische Struktur wie die entsprechenden Graphen aus (Rek. 9). Davon kann man sich auch anhand niedriger Ordnungen überzeugen, was gegebenenfalls dem Leser überlassen sei. Mit den Rekursionen (4.38)–(4.41) können wir dann unsere Behauptung **Beh.6** äquivalent umformulieren:

Beh.6'. Die Funktionen $\check{\Sigma}_{12}$, $\check{\mathbf{G}}_{12}$ und $\check{\Gamma}_{1234}$ beinhalten alle tadpolefreie Beiträge von Σ_{12} , \mathbf{G}_{12} und Γ_{1234} .

Dies werden wir beweisen, indem wir zeigen, daß alle Graphen, die den Unterschied zwischen (Rek. 5) und (4.38)–(4.41) ausmachen, zwangsläufig mindestens einen Tadpole enthalten. Diesen Unterschied werden wir nun desweiteren untersuchen und betrachten dazu die entsprechenden Differenzen

$$\Delta\Sigma_{12} \equiv \Sigma_{12} - \check{\Sigma}_{12} \quad , \quad \Delta\mathbf{G}_{12} \equiv \mathbf{G}_{12} - \check{\mathbf{G}}_{12} \quad , \quad \Delta\Gamma_{1234} \equiv \Gamma_{1234} - \check{\Gamma}_{1234} . \quad (4.42)$$

Diagrammatisch werden diese bezeichnet als

$$\Delta\Sigma_{12} \equiv 1 \text{---} \text{Diagram 1} \text{---} 2 \quad , \quad \Delta\mathbf{G}_{12} \equiv 1 \text{---} \text{Diagram 2} \text{---} 2 \quad , \quad -\Delta\Gamma_{1234} \equiv \text{Diagram 3} . \quad (4.43)$$

Die Gleichungen (4.42) stellen wir dann mit Hilfe folgender Zerlegungen dar:

$$1 \text{---} \text{Diagram 1} \text{---} 2 = 1 \text{---} \text{Diagram 1} \text{---} 2 + 1 \text{---} \text{Diagram 2} \text{---} 2 \quad , \quad 1 \text{---} \text{Diagram 3} \text{---} 2 = 1 \text{---} \text{Diagram 4} \text{---} 2 + 1 \text{---} \text{Diagram 5} \text{---} 2 \quad ,$$

$$\text{Diagram 3} = \text{Diagram 6} + \text{Diagram 7} . \quad (4.44)$$

Die Differenzen kann man sich natürlich auch in Reihen zerlegt denken und die Beziehungen (4.44) auch für jede Ordnung äquivalent aufschreiben. Dabei werden alle Anklebevorschriften in völliger Analogie zu früheren auf diese neuen Objekte ausgeweitet. An dieser Stelle führen wir noch zwei weitere nützliche Funktionen ein: $\Delta\Gamma'_{1234}$, die für die ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktion mit nur einem Tadpole stehen soll und $\Delta\Gamma''_{1234}$ für diejenige mit zwei oder mehr Tadpoles. Diese bekommen auch ihre entsprechende Bezeichnungen:

$$-\Delta\Gamma'_{1234} \equiv \text{Diagram 8} \quad , \quad -\Delta\Gamma''_{1234} \equiv \text{Diagram 9} . \quad (4.45)$$

Deren p -te Vertexordnungen sollten dementsprechend dargestellt werden. Für den Beweis der Behauptung **Beh.6'** werden wir von einer wichtigen charakteristischen Eigenschaft der Funktion $\Delta\Gamma'_{1234}$ Gebrauch machen. Diese lautet:

(*) Die irreduzible Vier-Punkt-Funktion mit nur einem Tadpole, als $\Delta\Gamma'_{1234}$ bezeichnet, kann aus der tadpolefreien Funktion $\check{\Gamma}_{1234}$ gewonnen werden, indem deren Linien auf allen möglichen Wegen durch den Tadpolegraphen (im erweiterten Sinne) Diagram 10 mit

dem Gewicht $1/2$ ersetzt werden. Praktisch wird das erreicht durch eine Linienamputation an den tadpolefreien Graphen von $\check{\Gamma}_{1234}$ und das Schliessen der entstandenen Lücke durch den obigen Graphen, also wie folgt:

$$\Delta\Gamma'_{1234} = -\frac{g}{2} \int_{567890} \mathbf{G}_{56} V_{5678} G_{79} G_{80} \frac{\delta\check{\Gamma}_{1234}}{\delta G_{90}} . \quad (4.46)$$

Daß alle darin enthaltene Graphen ein-Teilchen-irreduzibel sind und genau einen Tadpole tragen, erkennt man unschwer. Man überzeugt sich auch leicht, daß dadurch schon alle Graphen dieser Art erfasst sind.

(**).Durch das Verbinden eines tadpolebehafteten Graphen mit einem anderen entsteht wiederum ein tadpolebehafteter Graph.

Das ist ohne weiteres klar.

Nun sind wir in der Lage, die oben formulierte Behauptung **Beh.6'** durch die vollständige Induktion zu beweisen.

Beweis der Behauptung

Induktionsanfang:

Die Anfangsbedingungen aus (4.38) sind denen aus (Rek. 5) identisch, erfüllen also unsere Behauptung trivialerweise.

Induktionsvoraussetzung:

Die Aussage der Behauptung sei erfüllt für $\check{\Sigma}_{12}$ und $\check{\mathbf{G}}_{12}$ für alle Rekursionsordnungen bis zur $(p-1)$ -ten und für $\check{\Gamma}_{1234}$ bis zur p -ten einschliesslich. D.h. alle Graphen von Differenzen $\Delta\Sigma_{12}^{(q)}$, $\Delta\mathbf{G}_{12}^{(q)}$ und $\Delta\Gamma_{1234}^{(q+1)}$ seien tadpolebehaftet für $q = 1, 2, \dots, p-1$.

Induktionsschritt für $\check{\Sigma}_{12}$:

Wir zeigen, daß $\Delta\Sigma_{12}^{(p)}$ schon manifest tadpolebehaftet ist. Diese Ordnung der Differenz lautet nach (Rek. 5) und (4.39)

$$1 \text{---} \textcircled{p} \text{---} 2 - 1 \text{---} \textcircled{p} \text{---} 2 = \frac{1}{2} 1 \text{---} \textcircled{\textcircled{p-1}} \text{---} 2 + \frac{1}{6} \sum_{q=1}^{p-1} \sum_{r=1}^q \sum_{s=1}^r \left\{ 1 \text{---} \textcircled{\textcircled{\textcircled{p-q-1}}} \text{---} 2 + 1 \text{---} \textcircled{\textcircled{\textcircled{p-q-1}}} \text{---} 2 + 1 \text{---} \textcircled{\textcircled{\textcircled{p-q-1}}} \text{---} 2 + 1 \text{---} \textcircled{\textcircled{\textcircled{p-q-1}}} \text{---} 2 \right\}, \quad (4.47)$$

was wir durch sukzessives Anwenden der Zerlegung (4.44) bekommen konnten. Der erste Term ist der Tadpole selbst. Alle anderen Terme beinhalten als deren Strukturelemente \textcircled{l} oder $\textcircled{\textcircled{l}}$ mit jeweils $l < p$. Diese sind aber nach Induktionsvoraussetzung tadpolebehaftet (bzw. wie beim Induktionsanfang auch schon leer) und machen die letzten vier Terme wegen (**) auch zu solchen, was schon den Induktionsschritt für $\check{\Sigma}_{12}$ beweist.

Induktionsschritt für $\check{\mathbf{G}}_{12}$:

Auch hier werden wir zeigen, daß $\Delta\mathbf{G}_{12}^{(p)}$ nur tadpolebehaftete Graphen enthalten kann und

stellen dazu diese Ordnung der Differenz nach (Rek. 5) und (4.40) dar als

$$1 \xrightarrow{p} 2 - 1 \overset{p}{\sim} 2 = \sum_{q=1}^p \left\{ 1 \text{---} \textcircled{q}^{p-q} 2 + 1 \text{---} \textcircled{q}^{p-q} 2 \right\}. \quad (4.48)$$

Wie man auch hier unschwer erkennt, enthalten beide Summanden lediglich tadpolebehaftete Graphen, so daß wir auch hier schon fertig sind.

Induktionsschritt für $\check{\Gamma}_{1234}$:

Zuerst betrachten wir die Differenz $\textcircled{r}^{p-q}_{q-r} - \textcircled{r}^{p-q}_{q-r}$ und zeigen, daß diese manifest tadpolebehaftet ist. Mit Hilfe von (4.44) sukzessive ausgewertet, lautet diese Differenz

$$\textcircled{r}^{p-q}_{q-r} - \textcircled{r}^{p-q}_{q-r} = \textcircled{r}^{p-q}_{q-r} + \textcircled{r}^{p-q}_{q-r} + \textcircled{r}^{p-q}_{q-r}. \quad (4.49)$$

Alle drei Summanden auf der rechten Seite der Gleichung sind tadpolebehaftet aufgrund von Argumenten, die wir schon bei dem Induktionsschritt für $\check{\Sigma}_{12}$ angeführt haben. Analog dazu argumentieren wir auch bei den letzten drei Termen der Rekursionen für Γ_{1234} und $\check{\Gamma}_{1234}$ in (Rek. 5) und (4.41).

Es bleibt also nur noch, die Ableitungsterme zu untersuchen. Dazu teilen wir $\Delta\Gamma_{1234}^{(q)}$ für $q = 1, 2, \dots, p$, von dem wir bereits nach Induktionsvoraussetzung wissen, daß er nur aus tadpolebehafteten Graphen besteht, in zwei Gruppen auf. Die erste Gruppe besteht aus Graphen mit nur einem Tadpole, unter $\Delta\Gamma_{1234}'^{(q)}$ zusammengefasst, und die zweite aus allen anderen tadpolebehafteten (also mit zwei oder mehr Tadpoles) Vier-Punkt-Graphen, zusammengefasst unter $\Delta\Gamma_{1234}''^{(q)}$. Mit dieser bereits in (4.45) angekündigten Teilung erhalten wir letztlich die Zerlegung $\Gamma_{1234}^{(q)} = \check{\Gamma}_{1234}^{(q)} + \Delta\Gamma_{1234}'^{(q)} + \Delta\Gamma_{1234}''^{(q)}$. Der Ableitungsterm aus (Rek. 5) lässt sich dann darstellen als

$$1 \text{---} \textcircled{q}^{p-q} 2 \overset{\delta}{\delta} \frac{5}{\delta} \frac{6}{\delta} \frac{7}{\delta} = 1 \text{---} \textcircled{q}^{p-q} 2 \overset{\delta}{\delta} \frac{5}{\delta} \frac{6}{\delta} \frac{7}{\delta} + 1 \text{---} \textcircled{q}^{p-q} 2 \overset{\delta}{\delta} \frac{5}{\delta} \frac{6}{\delta} \frac{7}{\delta} + 1 \text{---} \textcircled{q}^{p-q} 2 \overset{\delta}{\delta} \frac{5}{\delta} \frac{6}{\delta} \frac{7}{\delta}. \quad (4.50)$$

Bei dem ersten Term entstehen durch die Amputation und anschliessendes Verkleben der dadurch entstandenen Lücke keine Tadpoles, die einzige Quelle für diese ist hier also die Linie $\underline{p-q}$ selbst. Deren tadpolebehaftete Anteile lassen sich jedoch problemlos abspalten.

Bei dem letzten Term werden Graphen mit zwei oder mehreren Tadpoles amputiert. Diese behalten nach einmaliger Amputation immer noch mindestens einen Tadpole und deswegen ist der letzte Term von (4.50) wegen der Bemerkung (***) manifest tadpolebehaftet. (***)

Bei dem zweiten Term aus (4.50), der die Graphen mit einem einzigen Tadpole behandelt, lässt sich leider keine allgemeine Aussage bezüglich deren Tadpolefreiheit treffen, denn es gilt z.B.

$$1 \text{---} \textcircled{q}^{p-q} 2 \overset{\delta}{\delta} \frac{5}{\delta} \frac{6}{\delta} \frac{7}{\delta} \left\{ \textcircled{q}^{p-q} 2 \right\} = \textcircled{q}^{p-q} 2 + \textcircled{q}^{p-q} 2 + \textcircled{q}^{p-q} 2 + \textcircled{q}^{p-q} 2.$$

Die ersten drei Graphen sind offensichtlich tadpolebehaftet, während der letzte tadpolefrei ist. Hier sehen wir schon, daß wir den zweiten Summanden aus (4.50) etwas genauer untersuchen sollten. Dazu berücksichtigen wir die Bemerkung (*) mit der expliziten Darstellung der Vier-Punkt-Funktion mit nur einem Tadpole (4.46). Mit dieser Form finden wir die folgende Beziehung:

$$\int_{78} G_{57} G_{68} \frac{\delta \Delta \Gamma'_{1234}}{\delta G_{78}} = \frac{g}{2} \int_{7890\bar{1}\bar{2}} \frac{\delta \mathbf{G}_{78}}{\delta G_{56}^{-1}} V_{7890} G_{9\bar{1}} G_{0\bar{2}} \frac{\delta \check{\Gamma}_{1234}}{\delta G_{\bar{1}\bar{2}}} - g \int_{7890\bar{1}\bar{2}} G_{57} G_{68} V_{790\bar{1}} \mathbf{G}_{90} G_{\bar{1}\bar{2}} \frac{\delta \check{\Gamma}_{1234}}{\delta G_{28}} - \frac{g}{2} \int_{7890\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} G_{57} G_{68} \frac{\delta^2 \check{\Gamma}_{1234}}{\delta G_{78} \delta G_{90}} G_{9\bar{1}} G_{0\bar{2}} V_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} \mathbf{G}_{\bar{3}\bar{4}} .$$

Den Ausdruck $\delta \mathbf{G}_{78} / \delta G_{56}^{-1}$ können wir nach (2.54) auswerten und mit (3.3) umformulieren. Das ergibt dann nach einer kurzen Rechnung

$$\begin{aligned} \int_{567890} V_{1567} \mathbf{G}_{58} G_{69} G_{70} \frac{\delta \Delta \Gamma'_{8234}}{\delta G_{90}} &= -\frac{g}{2} \int_{567890\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} V_{1567} \mathbf{G}_{58} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} V_{90\bar{1}\bar{2}} G_{\bar{1}\bar{3}} G_{2\bar{4}} \frac{\delta \check{\Gamma}_{8234}}{\delta G_{\bar{3}\bar{4}}} \\ &+ \frac{g}{4} \int_{567890\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5}\bar{6}\bar{7}\bar{8}} V_{1567} \mathbf{G}_{58} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \Gamma_{90\bar{1}\bar{2}} \mathbf{G}_{\bar{1}\bar{3}} \mathbf{G}_{2\bar{4}} V_{\bar{3}\bar{4}\bar{5}\bar{6}} G_{\bar{5}\bar{7}} G_{\bar{6}\bar{8}} \frac{\delta \check{\Gamma}_{8234}}{\delta G_{\bar{7}\bar{8}}} \\ &- \frac{g}{2} \int_{567890\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5}\bar{6}} V_{1567} \mathbf{G}_{58} G_{69} G_{70} \frac{\delta^2 \check{\Gamma}_{8234}}{\delta G_{90} \delta G_{\bar{1}\bar{2}}} G_{\bar{1}\bar{3}} G_{2\bar{4}} V_{\bar{3}\bar{4}\bar{5}\bar{6}} \mathbf{G}_{\bar{5}\bar{6}} \\ &- g \int_{567890\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} V_{1567} \mathbf{G}_{58} G_{69} G_{70} V_{0\bar{1}\bar{2}\bar{3}} \mathbf{G}_{\bar{1}\bar{2}} G_{\bar{3}\bar{4}} \frac{\delta \check{\Gamma}_{8234}}{\delta G_{49}} . \end{aligned} \quad (4.51)$$

Um etwas Übersicht zu verschaffen, illustrieren wir diese Gleichung diagrammatisch:

$$\begin{aligned} 1 \left(\begin{array}{c} 5 \\ \delta \frac{2 \cdot 3}{5} \\ 6 \\ \delta \frac{4}{6-7} \\ 7 \end{array} \right) &= \frac{1}{4} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 5 \\ \delta \frac{2 \cdot 3}{5} \\ 6 \\ \delta \frac{4}{6-7} \\ 7 \end{array} \right) + \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 5 \\ \delta \frac{2 \cdot 3}{5} \\ 6 \\ \delta \frac{4}{6-7} \\ 7 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 1 \\ 5 \\ \delta \frac{2 \cdot 3}{5} \\ 6 \\ \delta \frac{4}{6-7} \\ 7 \end{array} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 5 \\ \delta \frac{2 \cdot 3}{5} \\ 6 \\ \delta \frac{4}{6-7} \\ 7 \end{array} \right) \frac{9}{\delta_{8-9}} \left(\begin{array}{c} 8 \\ 9 \end{array} \right) . \end{aligned} \quad (4.52)$$

Diese können wir natürlich auch in Form einer Rekursionsgleichung aufschreiben als

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^p 1 \left(\begin{array}{c} p-q \\ \delta \frac{2 \cdot 3}{5} \\ 6 \\ \delta \frac{4}{6-7} \\ 7 \end{array} \right) &= \frac{1}{4} \sum_{q=3}^p \sum_{r=3}^q \sum_{s=3}^r \sum_{t=3}^s \sum_{k=3}^t \sum_{n=2}^{k-1} \left(\begin{array}{c} 1 \\ p-q \\ \delta \frac{2 \cdot 3}{5} \\ 6 \\ \delta \frac{4}{6-7} \\ 7 \end{array} \right) \frac{9}{\delta_{8-9}} \left(\begin{array}{c} 8 \\ 9 \end{array} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{q=2}^p \sum_{r=2}^q \sum_{s=2}^r \left(\begin{array}{c} 1 \\ p-q \\ \delta \frac{2 \cdot 3}{5} \\ 6 \\ \delta \frac{4}{6-7} \\ 7 \end{array} \right) \frac{9}{\delta_{8-9}} \left(\begin{array}{c} 8 \\ 9 \end{array} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{q=2}^p \sum_{r=2}^q \left(\begin{array}{c} 1 \\ p-q \\ \delta \frac{2 \cdot 3}{5} \\ 6 \\ \delta \frac{4}{6-7} \\ 7 \end{array} \right) \frac{9}{\delta_{8-9}} \left(\begin{array}{c} 8 \\ 9 \end{array} \right) . \end{aligned} \quad (4.53)$$

Mit diesem Ergebnis können wir uns der Frage nach der Differenz der Ableitungsterme aus (Rek. 5) und (4.41) zuwenden. Diese ergibt sich durch sukzessive Anwendung der Trennungsvorschrift (4.44) und mit Hilfe (4.50) zu

$$\begin{aligned}
& \sum_{q=1}^p 1 \text{---} \overset{p-q}{\curvearrowright} \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \delta \frac{\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ q \\ 4 \end{array}}{\delta \text{---} 6 \text{---} 7} - \sum_{q=1}^p 1 \text{---} \overset{p-q}{\curvearrowright} \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \delta \frac{\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ q \\ 4 \end{array}}{\delta \text{---} 6 \text{---} 7} - \frac{1}{2} \sum_{q=2}^p \sum_{r=2}^q \sum_{s=2}^r \begin{array}{c} 1 \\ q-r \end{array} \overset{p-q}{\curvearrowright} \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \delta \frac{\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ s-1 \\ 4 \end{array}}{\delta \text{---} 6 \text{---} 7} \\
& - \frac{1}{4} \sum_{q=3}^p \sum_{r=3}^q \sum_{s=3}^r \sum_{t=3}^s \sum_{k=3}^{t-1} \sum_{n=2}^{k-1} \begin{array}{c} 1 \\ t-k \\ k-n \\ q-r \\ s-t \end{array} \overset{p-q}{\curvearrowright} \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \delta \frac{\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ n-1 \\ 4 \end{array}}{\delta \text{---} 6 \text{---} 7} = \\
& = \sum_{q=1}^p 1 \text{---} \overset{p-q}{\curvearrowright} \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \delta \frac{\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ q \\ 4 \end{array}}{\delta \text{---} 6 \text{---} 7} + \sum_{q=1}^p 1 \text{---} \overset{p-q}{\curvearrowright} \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \delta \frac{\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ q \\ 4 \end{array}}{\delta \text{---} 6 \text{---} 7} + \sum_{q=2}^p \sum_{r=2}^q \begin{array}{c} 1 \\ q-r \end{array} \overset{p-q}{\curvearrowright} \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \delta \frac{\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ r-1 \\ 4 \end{array}}{\delta \text{---} 6 \text{---} 7} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{q=2}^p \sum_{r=2}^q \sum_{s=2}^r \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ q-r \end{array} \overset{p-q}{\curvearrowright} \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ q-r \end{array} \overset{p-q}{\curvearrowright} \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ q-r \end{array} \overset{p-q}{\curvearrowright} \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \right\} \delta \frac{\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ s-1 \\ 4 \end{array}}{\delta \text{---} 6 \text{---} 7} \\
& + \frac{1}{4} \sum_{q=3}^p \sum_{r=3}^q \sum_{s=3}^r \sum_{t=3}^s \sum_{k=3}^{t-1} \sum_{n=2}^{k-1} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ t-k \\ k-n \\ q-r \\ s-t \end{array} \overset{p-q}{\curvearrowright} \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ t-k \\ k-n \\ q-r \\ s-t \end{array} \overset{p-q}{\curvearrowright} \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ t-k \\ k-n \\ q-r \\ s-t \end{array} \overset{p-q}{\curvearrowright} \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ t-k \\ k-n \\ q-r \\ s-t \end{array} \overset{p-q}{\curvearrowright} \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \right. \\
& \left. + \begin{array}{c} 1 \\ t-k \\ k-n \\ q-r \\ s-t \end{array} \overset{p-q}{\curvearrowright} \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ t-k \\ k-n \\ q-r \\ s-t \end{array} \overset{p-q}{\curvearrowright} \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \right\} \delta \frac{\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ n-1 \\ 4 \end{array}}{\delta \text{---} 6 \text{---} 7} + \frac{1}{2} \sum_{q=2}^p \sum_{r=2}^q 1 \text{---} \overset{p-q}{\curvearrowright} \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \delta^2 \frac{\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ r-1 \\ 4 \end{array}}{\delta \text{---} 6 \text{---} 7} \delta \frac{\begin{array}{c} 9 \\ 8 \end{array}}{\delta \text{---} 8 \text{---} 9} .
\end{aligned}$$

Daraus kann man leicht sehen, daß in diesem Ausdruck jeder einzelne Term vom tadpolebehafteten Charakter ist. Den zweiten Term auf der rechten Seite der Gleichung haben wir bereits betrachtet und festgestellt, daß er aus lauter tadpolebehafteten Diagrammen besteht (siehe dazu (***)). Der dritte und der letzte Terme enthalten Tadpoles sogar in expliziter Form und sind demnach wegen (**) tadpolebehaftet. Alle anderen Terme beinhalten in der einen oder anderen Form die Teilgraphen $\text{---} \overset{l}{\curvearrowright} \text{---}$ oder $\text{---} \overset{l}{\curvearrowright} \text{---}$ mit jeweils $l < p$, die nach Induktionsvoraussetzung tadpolebehaftet (oder sogar leer) sind. Demnach ist auch die Differenz der Ableitungsterme von (Rek. 5) und (4.41) manifest tadpolebehaftet und das beweist letztlich unsere Aussage.

4.4 Erzeugung der tadpolelosen Graphen

Um einzusehen, wie aus (Rek. 9) in der Praxis alle tadpolefreien Graphen der zusammenhängenden Zwei-Punkt-Funktion sowie auch der ein-Teilchen-irreduziblen Zwei- und Vier-

Punkt-Funktion zu bestimmen sind, rechnen wir die erster Beiträge explizit aus. Für $\tilde{\Sigma}_{12}^{(1)}$ ergibt sich aus (Rek. 9) entsprechend der Summenkonvention das im folgenden sehr wichtige Ergebnis:

$$1 \sim \text{[Diagram: circle with 1 inside]} \sim 2 = 0 . \quad (4.54)$$

Eine unmittelbare Folge daraus ist das Ergebnis für $G_{12}^{(1)}$:

$$1 \xlongequal{1} 2 = 0 , \quad (4.55)$$

was ja letztlich für die drastische Reduzierung der Graphenzahl verantwortlich ist. Zur Berechnung der zweiten Vertexordnung der ein-Teilchen-irreduziblen Vier-Punkt-Funktion $\Gamma_{1234}^{(2)}$ bemerken wir zuerst, daß in völliger Analogie zur Gleichung (3.42)

$$\frac{\delta}{\delta \text{[Diagram: wavy line 6-7]}} \text{[Diagram: circle with 1 inside, lines 2,3,4,5]} = 0 \quad (4.56)$$

gilt. Somit erhalten wir nach (Rek. 9)

$$\begin{aligned} \text{[Diagram: circle with 2 inside, lines 1,2,3,4]} &= \frac{1}{2} \text{[Diagram: two circles with 1 inside, lines 1,2,3,4]} + \frac{1}{2} \text{[Diagram: two circles with 1 inside, lines 1,2,3,4]} + \frac{1}{2} \text{[Diagram: two circles with 1 inside, lines 1,2,3,4]} = \\ &= \frac{1}{2} \text{[Diagram: wavy line 1-4]} + \frac{1}{2} \text{[Diagram: wavy line 1-3]} + \frac{1}{2} \text{[Diagram: wavy line 1-2]} . \end{aligned} \quad (4.57)$$

Jetzt berechnen wir noch Beiträge der nächsthöheren Ordnung. So ergibt sich $\tilde{\Sigma}_{12}^{(2)}$ zu

$$1 \sim \text{[Diagram: circle with 2 inside]} \sim 2 = \frac{1}{6} 1 \sim \text{[Diagram: two circles with 0 and 1 inside]} \sim 2 = \frac{1}{6} 1 \sim \text{[Diagram: wavy line]} \sim 2 \quad (4.58)$$


und der mit Hilfe (4.54) daraus resultierende Beitrag $G_{12}^{(2)}$ als

$$1 \xlongequal{2} 2 = 1 \sim \text{[Diagram: circle with 2 inside]} \xlongequal{0} 2 = \frac{1}{6} 1 \sim \text{[Diagram: wavy line]} \sim 2 . \quad (4.59)$$

Für $\Gamma_{1234}^{(3)}$ ergibt sich aus (Rek. 9) unter Berücksichtigung der Resultate aus (4.55) und (4.56) die folgende Form:

$$\begin{aligned} \text{[Diagram: circle with 3 inside, lines 1,2,3,4]} &= \frac{1}{3} 1 \sim \text{[Diagram: wavy line 5-7]} \frac{\delta}{\delta \text{[Diagram: wavy line 6-7]}} \text{[Diagram: circle with 2 inside, lines 2,3,4,5]} + \frac{1}{2} \left\{ \text{[Diagram: two circles with 2 inside, lines 1,2,3,4]} + \text{[Diagram: two circles with 2 inside, lines 1,2,3,4]} + \text{[Diagram: two circles with 2 inside, lines 1,2,3,4]} \right\} \\ &+ \frac{1}{6} \left\{ \text{[Diagram: two circles with 1 inside, lines 1,2,3,4]} + \text{[Diagram: two circles with 1 inside, lines 1,2,3,4]} + \text{[Diagram: two circles with 1 inside, lines 1,2,3,4]} \right\} . \end{aligned} \quad (4.60)$$

In dem ersten Term auf der rechten Seite werden wir keine explizite Linienamputation durchführen, sondern lediglich eine Linienersetzung, wie wir das schon im letzten Kapitel auf der Seite 55 alternativ vorgeschlagen haben. Das können wir tun, denn auch hier wird

eine Linie (wenn auch eine gewellte anstatt einer einfachen) entfernt und die entstandene Lücke anschliessend mit dem Block  abgedichtet. Der erste Summand in (4.60) ist nach diesem Plan aufzufassen als

$$1 \begin{array}{c} \text{---} 0 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 6 \\ \text{---} 7 \end{array} \delta \frac{\begin{array}{c} 2 \\ \text{---} 3 \\ \text{---} 2 \\ \text{---} 4 \end{array}}{\delta \begin{array}{c} 6 \\ \text{---} 7 \end{array}} = 8 \begin{array}{c} \text{---} 0 \\ \text{---} 5 \end{array} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} 8 \\ \text{---} 6 \\ \text{---} 7 \end{array} \delta \frac{\begin{array}{c} 2 \\ \text{---} 3 \\ \text{---} 2 \\ \text{---} 4 \end{array}}{\delta \begin{array}{c} 6 \\ \text{---} 7 \end{array}} \right\}. \quad (4.61)$$

Mit dem Ersetzungsterm

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} 8 \\ \text{---} 6 \\ \text{---} 7 \end{array} \delta \frac{\begin{array}{c} 2 \\ \text{---} 3 \\ \text{---} 2 \\ \text{---} 4 \end{array}}{\delta \begin{array}{c} 6 \\ \text{---} 7 \end{array}} &= \frac{1}{2} \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} 8 \\ \text{---} 6 \\ \text{---} 7 \end{array} \frac{\delta}{\delta \begin{array}{c} 6 \\ \text{---} 7 \end{array}} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} 3 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 4 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \text{---} 2 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 3 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \text{---} 4 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 2 \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \left\{ \begin{array}{c} 8 \\ \text{---} 1 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 2 \\ \text{---} 3 \\ \text{---} 4 \end{array} + \begin{array}{c} 8 \\ \text{---} 1 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 4 \\ \text{---} 3 \end{array} + \begin{array}{c} 8 \\ \text{---} 1 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 3 \\ \text{---} 2 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (4.62)$$

erhalten wir dann nach dem Verkleben der Stümmel 5 und 8 durch eine Linie

$$1 \begin{array}{c} \text{---} 0 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 6 \\ \text{---} 7 \end{array} \delta \frac{\begin{array}{c} 2 \\ \text{---} 3 \\ \text{---} 2 \\ \text{---} 4 \end{array}}{\delta \begin{array}{c} 6 \\ \text{---} 7 \end{array}} = 1 \begin{array}{c} 3 \\ \text{---} 4 \\ \text{---} 1 \\ \text{---} 2 \end{array} + 1 \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} 3 \\ \text{---} 1 \\ \text{---} 4 \end{array} + 1 \begin{array}{c} 4 \\ \text{---} 2 \\ \text{---} 1 \\ \text{---} 3 \end{array}. \quad (4.63)$$

Die anderen Summanden von (4.60) ergeben sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} 0 \\ \text{---} 1 \\ \text{---} 0 \\ \text{---} 4 \end{array} &= \frac{1}{2} \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} 6 \\ \text{---} 1 \\ \text{---} 5 \end{array} \left\{ \begin{array}{c} 6 \\ \text{---} 3 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 4 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \text{---} 6 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 3 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \text{---} 4 \\ \text{---} 5 \\ \text{---} 6 \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} 3 \\ \text{---} 1 \\ \text{---} 4 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} 2 \\ \text{---} 4 \\ \text{---} 3 \end{array}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{array}{c} 2 \\ \text{---} 0 \\ \text{---} 1 \\ \text{---} 0 \\ \text{---} 1 \\ \text{---} 0 \\ \text{---} 4 \end{array} = 1 \begin{array}{c} 3 \\ \text{---} 4 \\ \text{---} 1 \\ \text{---} 2 \end{array}. \quad (4.65)$$

Alle anderen Beiträge zu (4.60) unterscheiden sich von den gerade betrachteten nur durch deren Indizierung und können deshalb analog zu diesen ausgewertet werden. Zusammenfassend ergibt sich nun das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} 3 \\ \text{---} 1 \\ \text{---} 4 \end{array} &= \frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} 3 \\ \text{---} 1 \\ \text{---} 4 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \text{---} 2 \\ \text{---} 1 \\ \text{---} 3 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \text{---} 4 \\ \text{---} 1 \\ \text{---} 2 \end{array} \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ \text{---} 4 \\ \text{---} 1 \\ \text{---} 2 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} 3 \\ \text{---} 1 \\ \text{---} 4 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \text{---} 2 \\ \text{---} 1 \\ \text{---} 3 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} 2 \\ \text{---} 4 \\ \text{---} 3 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} 4 \\ \text{---} 3 \\ \text{---} 2 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} 3 \\ \text{---} 2 \\ \text{---} 4 \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Um die nächsthöhere Ordnung der tadpolelosen Selbstenergie zu berechnen, machen wir

Gebrauch von den Ergebnissen aus (4.51) und (4.57). Mit diesen ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
 1 \sim \text{[Diagram: circle with 3 inside]} \sim 2 &= \frac{1}{6} 1 \sim \text{[Diagram: circle with 0 and 2 inside]} \sim 2 = \\
 &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} 1 \sim \text{[Diagram: triangle with vertices 3, 4, 5]} \left\{ \begin{array}{l} \text{[Diagram: triangle with vertices 4, 3, 2]} \\ \text{[Diagram: triangle with vertices 5, 4, 2]} \\ \text{[Diagram: triangle with vertices 3, 5, 2]} \end{array} \right\} = \frac{1}{4} 1 \sim \text{[Diagram: triangle with vertices 3, 4, 5]} \sim 2 \quad . \quad (4.67)
 \end{aligned}$$

Nach (4.54) und (4.55) ergibt sich daraus $\mathbf{G}_{12}^{(3)}$ zu

$$1 \overset{3}{=} 2 = 1 \sim \text{[Diagram: circle with 3 inside]} \overset{0}{=} 2 = \frac{1}{4} 1 \sim \text{[Diagram: triangle with vertices 3, 4, 5]} \sim 2 \quad . \quad (4.68)$$

Wir werden an dieser Stelle keine weiteren Graphen erzeugen, bemerken aber, daß zur Erzeugung der Γ_{1234} -Graphen bei höheren Ordnungen auch die beiden weiteren Ableitungsterme von (Rek. 9) herangezogen werden müssen. Es sei hier darauf hingewiesen, daß es sich auch bei diesen nicht lohnt, die Linienamputation explizit auszuführen, statt dessen ersetze man die jeweiligen Linien. Die Ableitungsterme werden dabei wie folgt interpretiert:

$$\begin{array}{c} \text{[Diagram: vertex with lines 1, 5, 6, 7 and loop with s-1]} \end{array} \frac{\delta}{\delta} \frac{\text{[Diagram: vertex with lines 2, 3, 4 and loop with s-1]}}{\delta} = \begin{array}{c} \text{[Diagram: vertex with lines 1, 5, 8, 9 and loop with s-1]} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{[Diagram: vertex with lines 6, 7, 8, 9 and loop with s-1]} \\ \text{[Diagram: vertex with lines 5, 4 and loop with s-1]} \end{array} \right\} , \quad (4.69)$$

$$\begin{array}{c} \text{[Diagram: vertex with lines 1, 5, 6, 7 and loop with r-1]} \end{array} \frac{\delta}{\delta} \frac{\text{[Diagram: vertex with lines 2, 3, 4 and loop with r-1]}}{\delta} = \begin{array}{c} \text{[Diagram: vertex with lines 1, 5, 8, 9 and loop with r-1]} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{[Diagram: vertex with lines 6, 7, 8, 9 and loop with r-1]} \\ \text{[Diagram: vertex with lines 5, 4 and loop with r-1]} \end{array} \right\} . \quad (4.70)$$

Die Resultate (4.54), (4.58) und (4.67) werden in der nachfolgenden Tabelle 6 präsentiert, die aus (4.55), (4.59), (4.68) und aus (4.57), (4.66) entsprechend in den Tabellen 7 und 8. Dort werden auch die Ergebnisse der zwei weiteren Ordnungen dargestellt. Dieselben Diagramme wurden auch schon in [27] und in der Diplomarbeit [26] bestimmt, dort wurden sie allerdings aus allen bekannten zusammenhängenden Zwei- und Vier-Punkt-Funktionen herausgesucht. In diesen Arbeiten findet man ausserdem noch 124 weitere Diagramme der ein-Teilchen-irreduziblen Vier-Punkt-Funktion von der sechsten Vertexordnung, die wir in der Tabelle 6 aus Platzgründen nicht angeben.





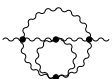

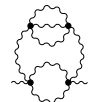
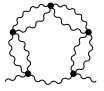
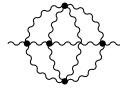
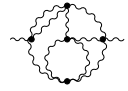
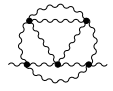
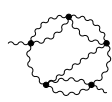
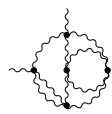
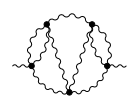
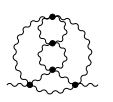
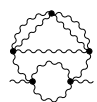
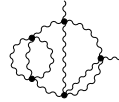
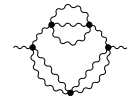



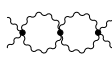



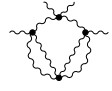
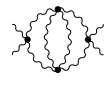

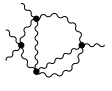


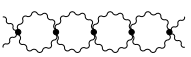
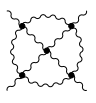
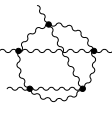
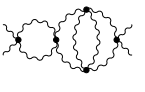
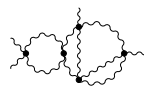
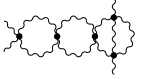
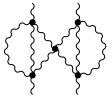
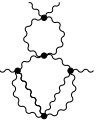
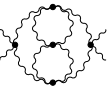
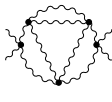
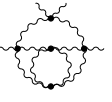
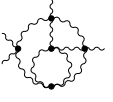
p				
1	0			
2	#2.1 $\frac{1}{6}$  (0,1;2)			
3	#3.1 $\frac{1}{4}$  (2,0;2)			
4	#4.1 $\frac{1}{8}$  (3,0;2)	#4.2 $\frac{1}{4}$  (1,0;2)	#4.3 $\frac{1}{4}$  (2,0;2)	#4.4 $\frac{1}{12}$  (1,1;2)
5	#5.1 $\frac{1}{16}$  (4,0;2)	#5.2 $\frac{1}{6}$  (0,0;2)	#5.3 $\frac{1}{2}$  (2,0;1)	#5.4 $\frac{1}{2}$  (1,0;2)
	#5.5 $\frac{1}{4}$  (3,0;1)	#5.6 $\frac{1}{4}$  (2,0;1)	#5.7 $\frac{1}{4}$  (2,0;2)	#5.8 $\frac{1}{8}$  (2,0;2)
	#5.9 $\frac{1}{8}$  (3,0;2)	#5.10 $\frac{1}{6}$  (1,1;1)	#5.11 $\frac{1}{24}$  (2,1;2)	

Tabelle 6: Diagramme der tadpolefreien Selbstenergie mit deren relativen Gewichten in der ϕ^4 -Theorie bis zur fünften Vertexordnung. Im Dreier-Tupel $(D, T; N)$ sind D, T Zahlen der Doppel- und Tripel-Bindungen, N ist der Symmetriegrad.

p	<u>p</u>	
0	#0.1 1 (0,0;2)	
1	0	
2	#2.1 1/6 (0,1;2)	
3	#3.1 1/4 (2,0;2)	
4	#4.1 1/8 (3,0;2)	
	#4.2 1/4 (1,0;2)	
	#4.3 1/4 (2,0;2)	
	#4.4 1/12 (1,1;2)	
	#4.5 1/36 (0,2;2)	
5	#5.1 1/16 (4,0;2)	
	#5.2 1/6 (0,0;2)	
	#5.3 1/2 (2,0;1)	
	#5.4 1/2 (1,0;2)	
	#5.5 1/4 (3,0;1)	
	#5.6 1/4 (2,0;1)	
	#5.7 1/4 (2,0;2)	
	#5.8 1/8 (2,0;2)	
	#5.9 1/8 (3,0;2)	
	#5.10 1/6 (1,1;1)	
	#5.11 1/24 (2,1;2)	
	#5.12 1/12 (2,1;1)	

Tabelle 7: Diagramme der tadpolefreien zusammenhängenden Zwei-Punkt-Funktion mit deren relativen Gewichten in der ϕ^4 -Theorie bis zur fünften Vertexordnung. Im Dreier-Tupel $(D, T; N)$ sind D, T Zahlen der Doppel- und Tripel-Bindungen, N ist der Symmetriegrad.

p				
1	#1.1 1  (0,0;24)			
2	#2.1 3/2  (1,0;8)			
3	#3.1 3/4  (2,0;8)	#3.2 3  (1,0;4)		
4	#4.1 3/8  (3,0;8)	#4.2 1  (0,0;24)	#4.3 3/2  (2,0;4)	#4.4 3/4  (1,0;8)
	#4.5 3/2  (2,0;4)	#4.6 6  (1,0;2)	#4.7 3/2  (2,0;4)	#4.8 1/2  (0,1;8)
5	#5.1 3/16  (4,0;8)	#5.2 3  (0,0;8)	#5.3 6  (1,0;2)	#5.4 3/4  (2,0;4)
	#5.5 3  (2,0;2)	#5.6 3/4  (3,0;4)	#5.7 3/4  (2,0;8)	#5.8 3/4  (3,0;4)
	#5.9 3/8  (2,0;8)	#5.10 3/2  (1,0;8)	#5.11 3/2  (1,0;4)	#5.12 6  (1,0;2)

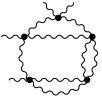
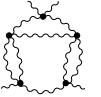
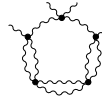
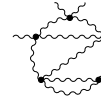
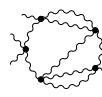
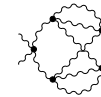
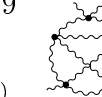

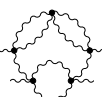
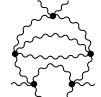
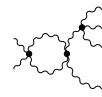
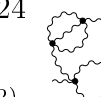
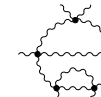
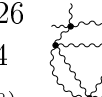
5	#5.13 3 (2,0;2)		#5.14 3/2 (2,0;4)		#5.15 3/4 (3,0;4)		#5.16 6 (1,0;2)	
	#5.17 3 (2,0;2)		#5.18 3/2 (2,0;4)		#5.19 3 (0,0;4)		#5.20 6 (2,0;2)	
	#5.21 3/2 (3,0;4)		#5.22 3/2 (2,0;4)		#5.23 1/2 (1,1;4)		#5.24 1 (1,1;2)	
			#5.25 1 (0,1;4)		#5.26 3/4 (2,0;8)			

Tabelle 8: Diagramme der tadpolefreien ein-Teilchen-irreduziblen Vier-Punkt-Funktion mit deren relativen Gewichten in der ϕ^4 -Theorie bis zur fünften Vertexordnung. Im Dreier-Tupel $(D, T; N)$ sind D und T Zahlen der Doppel- und Tripel-Bindungen, N ist der Symmetriegrad.

4.5 Tadpolelose Vakuumdiagramme

In diesem Abschnitt suchen wir nach einer modifizierten Form der freien Energie, bei deren Graphen keine Tadpoles explizit vorkommen. Anders als bei der ein-Teilchen-irreduziblen Vier-Punkt-Funktion können wir diese Form nicht durch einen einfachen Variablenwechsel erreichen. Definieren wir aber eine neue Funktion $\tilde{W} = \tilde{W}[\tilde{G}, V]$ durch die Forderung

$$\tilde{W} \equiv W - \frac{g}{8} \int_{1234} \mathbf{G}_{12} V_{1234} \mathbf{G}_{34} \quad , \quad (4.71)$$

so werden wir feststellen, daß deren Graphen schon alle tadpolefreie Vakuumdiagramme darstellen. Die Funktion \tilde{W} bezeichnen wir deswegen als die tadpolelose freie Energie. Zu bemerken sei zunächst, daß dies nur eine Feststellung ist, die keiner einfachen Überlegung zu entnehmen ist. So scheint z.B. die Vorzeichenwahl in der Gleichung (4.71) nicht zwingend logisch zu sein. Wir versuchen nun, eine Rekursion für die Funktion \tilde{W} zu finden. Dazu schreiben wir zuerst die unmittelbar aus (4.71) folgende Gleichung

$$\int_3 \tilde{G}_{13}^{-1} \frac{\delta \tilde{W}}{\delta \tilde{G}_{32}^{-1}} = \int_3 \tilde{G}_{13}^{-1} \frac{\delta W}{\delta \tilde{G}_{32}^{-1}} - \frac{g}{4} \int_{34567} \tilde{G}_{13}^{-1} \frac{\delta \mathbf{G}_{45}}{\delta \tilde{G}_{32}^{-1}} V_{4567} \mathbf{G}_{67} \quad (4.72)$$

an. Den ersten Summanden betrachten wir etwas eingehender und verwenden dazu die funktionale Kettenregel

$$\frac{\delta}{\delta \tilde{G}_{12}} = \int_{34} \frac{\delta \mathbf{G}_{34}}{\delta \tilde{G}_{12}} \frac{\delta}{\delta \mathbf{G}_{34}} \quad . \quad (4.73)$$

Mit dieser ergibt sich unter Berücksichtigung der Relation (2.51)

$$\int_3 \tilde{G}_{13}^{-1} \frac{\delta W}{\delta \tilde{G}_{32}^{-1}} = -\frac{1}{2} \int_{345} \tilde{G}_{13}^{-1} \frac{\delta \mathbf{G}_{45}^{-1}}{\delta \tilde{G}_{32}^{-1}} \mathbf{G}_{45} \quad . \quad (4.74)$$

Erinnern wir uns noch an die Gleichung (4.14), so können wir dafür auch

$$\int_3 \tilde{G}_{13}^{-1} \frac{\delta W}{\delta \tilde{G}_{32}^{-1}} = -\frac{1}{2} \int_3 \tilde{G}_{13}^{-1} \mathbf{G}_{32} + \frac{g}{4} \int_{34567} \tilde{G}_{13}^{-1} \frac{\delta \mathbf{G}_{45}}{\delta \tilde{G}_{32}^{-1}} V_{4567} \mathbf{G}_{67} \quad (4.75)$$

schreiben. In (4.72) eingesetzt, liefert uns das die folgende Relation:

$$\int_3 \tilde{G}_{13}^{-1} \frac{\delta \tilde{W}}{\delta \tilde{G}_{32}^{-1}} = -\frac{1}{2} \delta_{12} - \frac{1}{2} \int_3 \tilde{\Sigma}_{13} \mathbf{G}_{32} \quad , \quad (4.76)$$

wobei wir noch für dieses Resultat die Zerlegung (4.13) verwendet haben. Unter Berücksichtigung der Schwinger-Dyson-Gleichung (4.20) lässt sich (4.76) zu einer äquivalenten Form umschreiben:

$$\int_3 \tilde{G}_{13}^{-1} \frac{\delta \tilde{W}}{\delta \tilde{G}_{32}^{-1}} = -\frac{1}{2} \delta_{12} - \frac{g}{12} \int_{3456789} V_{1456} \mathbf{G}_{47} \mathbf{G}_{58} \mathbf{G}_{69} \mathbf{\Gamma}_{7893} \mathbf{G}_{32} \quad . \quad (4.77)$$

Als nächstes betrachten wir den Spezialfall mit $g = 0$ und $\tilde{W} = \tilde{W}^{(0)}$. Damit reduziert sich die Gleichung (4.77) zu

$$\int_3 \tilde{G}_{13}^{-1} \frac{\delta \tilde{W}^{(0)}}{\delta \tilde{G}_{32}^{-1}} = -\frac{1}{2} \delta_{12} \quad . \quad (4.78)$$

Deren Lösung finden wir in Analogie zur bereits in (2.8) angegebenen Lösung des Problems (2.7), und diese ist bis auf eine additive Konstante gegeben durch

$$\tilde{W}^{(0)} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \tilde{G}^{-1} \quad , \quad (4.79)$$

wobei wir hier noch die abkürzende Schreibweise

$$\text{Tr} \ln \tilde{G}^{-1} \equiv -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{1\dots n} (\delta_{12} - \tilde{G}_{12}^{-1}) \dots (\delta_{n-1,n} - \tilde{G}_{n-1,n}^{-1}) (\delta_{n1} - \tilde{G}_{n1}^{-1}) \quad (4.80)$$

verwandten. Diese Lösung kann auch graphisch dargestellt werden:

$$\tilde{W}^{(0)} \equiv \frac{1}{2} \text{ (diagramm) } \quad . \quad (4.81)$$

Mit der Reihendarstellung

$$\tilde{G}_{12} = \delta_{12} + (\delta_{12} - \tilde{G}_{12}^{-1}) + \sum_{n=3}^{\infty} \int_{3\dots n} (\delta_{13} - \tilde{G}_{13}^{-1}) \dots (\delta_{n-1,n} - \tilde{G}_{n-1,n}^{-1}) (\delta_{n2} - \tilde{G}_{n2}^{-1}) \quad (4.82)$$

ergibt sich weiterhin

$$\frac{\delta \tilde{W}^{(0)}}{\delta \tilde{G}_{12}^{-1}} = -\frac{1}{2} \tilde{G}_{12} \quad , \quad (4.83)$$

woraus unmittelbar (4.78) folgt. Für den allgemeinen Fall zerlegen wir die tadpolelose freie Energie \tilde{W} entsprechend der Gleichung

$$\tilde{W} = \tilde{W}^{(0)} + \tilde{W}^{(\text{int})} \quad . \quad (4.84)$$

Für den Wechselwirkungsanteil der tadpolelosen freien Energie $\tilde{W}^{(\text{int})}$ lässt sich aus (4.77) nach Erweitern mit $\int_{12} \tilde{G}_{12}^{-1}$ die folgende Bestimmungsgleichung angeben:

$$\int_{12} \tilde{G}_{12} \frac{\delta \tilde{W}^{(\text{int})}}{\delta \tilde{G}_{12}^{-1}} = \frac{g}{12} \int_{12345678} V_{1234} \mathbf{G}_{15} \mathbf{G}_{26} \mathbf{G}_{37} \mathbf{G}_{48} \mathbf{\Gamma}_{5678} \quad . \quad (4.85)$$

Dabei haben wir noch von der Umformung

$$\frac{\delta}{\delta \tilde{G}_{12}^{-1}} = -\int_{34} \tilde{G}_{13} \tilde{G}_{24} \frac{\delta}{\delta \tilde{G}_{34}^{-1}} \quad (4.86)$$

Gebrauch gemacht, die wir in völliger Analogie zu (1.26) herleiten können. Mit einer weiteren diagrammatischen Darstellung

$$\tilde{W}^{(\text{int})} \equiv \text{ (diagramm) } \quad (4.87)$$

lässt sich die Bestimmungsgleichung (4.85) graphisch illustrieren als

$$\begin{array}{c} 1 \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \delta \\ 2 \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \frac{1}{12} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad (4.88)$$

Um diese Gleichung störungstheoretisch zu lösen, schreiben wir die Störungsreihe

$$\tilde{W}^{(\text{int})} = \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{W}^{(p)} \quad (4.89)$$

und die dazugehörige graphische Darstellung

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \sum_{p=1}^{\infty} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad (4.90)$$

auf. Hierbei wird über die Beiträge der tadpolelosen freien Energie der p -ten Ordnungen in der Kopplungskonstante g bzw. in der p -ten Vertexordnung summiert.

Um die Gleichung (4.88) in eine Rekursion umzuwandeln, bemerken wir noch, daß die Operation

$$\hat{L}' \equiv \int_{12} \tilde{G}_{12} \frac{\delta}{\delta \tilde{G}_{12}} \quad (4.91)$$

lediglich die gewellten Linien zählt. Das lässt sich in Analogie zur Linienzähloperation \hat{L} des ersten Kapitels (siehe Seite 11) leicht einsehen.

Damit sind wir in der Lage, den folgenden wichtigen Zusammenhang herzuleiten:

$$\int_{12} \tilde{G}_{12} \frac{\delta \tilde{W}^{(\text{int})}}{\delta \tilde{G}_{12}} = \sum_{p=0}^{\infty} \int_{12} \tilde{G}_{12} \frac{\delta \tilde{W}^{(p+1)}}{\delta \tilde{G}_{12}} = \sum_{p=0}^{\infty} 2(p+1) \tilde{W}^{(p+1)} \quad (4.92)$$

Der letzte Schritt ist dabei als Ausführung der Linienzähloperation an einem $\tilde{W}^{(p+1)}$ -Graphen mit $2(p+1)$ -Linien zu verstehen. Mit den Störungsreien aus (2.68) und (3.38) können wir nun die aus (4.88) folgende Rekursionsgleichung für $p = 0, 1, 2, \dots$ herleiten:

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}^{p+1} = \frac{1}{24(p+1)} \sum_{q=1}^p \sum_{r=1}^q \sum_{s=1}^r \sum_{t=1}^s \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad (4.93)$$

(Rek. 10)

Bem. Diese Rekursion lässt einige wichtige Schlussfolgerungen zu:

Beh.7. Alle Graphen der tadpolelosen freien Energie enthalten keine Tadpoles.

Beweisidee.

In der Konstruktion von (Rek. 10) sind keine expliziten Tadpoles vorhanden und die obere

Behauptung ist somit bewiesen, sobald wir wissen, daß die graphischen Elemente $\underline{\underline{l}}$ mit $l=0, 1, 2, \dots$ und \textcircled{t} mit $t = 1, 2, 3, \dots$, in gewellten Linien diese Kapitels ausgedrückt, selbst keine Tadpoles enthalten. Das war aber genau die Aussage der Behauptung **Beh.5** des letzten Abschnittes auf Seite 70.

Somit sind wir auch schon fertig.

Eine weitere wichtige Beobachtung formulieren wir wie folgt:

Beh.8. Die tadpolelosen Graphen des Wechselwirkungsanteils der freien Energie $W^{(\text{int})}$ sind allesamt den Beiträgen der Funktion $\check{W}^{(\text{int})}$ zu entnehmen.

Um auch diese wichtige Aussage beweisen zu können, müssen wir die Graphen der freien Energie $W^{(\text{int})}$ mit denen der Funktion $\check{W}^{(\text{int})}$ direkt vergleichen können. Das bedeutet, daß auch die letzteren aus einfachen Linien aufgebaut werden müssen. Um zu garantieren, daß solche die graphische Struktur der $\check{W}^{(\text{int})}$ -Diagramme dieses Kapitels erhalten, müssen wir uns der Ersetzungen (4.32) bedienen. Der wechselwirkende Anteil der tadpolelosen freien Energie $\check{W}^{(\text{int})}$ müsste dabei auch ersetzt werden durch eine entsprechende Funktion $\check{\check{W}}^{(\text{int})}$. Graphisch können wir diese darstellen z.B. als

$$\check{\check{W}}^{(\text{int})} \equiv \textcircled{\textcircled{p+1}} \quad (4.93)$$

und entsprechend auch deren Reihenzerlegung. Mit diesen lässt sich dann (Rek. 10) umschreiben als

$$\textcircled{\textcircled{p+1}} = \frac{1}{24(p+1)} \sum_{q=1}^p \sum_{r=1}^q \sum_{s=1}^r \sum_{t=1}^s \textcircled{\textcircled{\textcircled{\textcircled{p+1}}}} \quad (4.94)$$

Aus dieser sehen wir, daß die daraus resultierenden Graphen dieselbe graphische Struktur aufweisen, wie diejenigen aus (Rek. 10), aber nun in einfachen Linien ausgedrückt werden. Hiermit können wir die Aussage von **Beh.8** etwas umformulieren:

Beh.8' Die Graphen der Funktion $\check{\check{W}}^{(\text{int})}$ sind bereits alle tadpolelose Beiträge der freien Energie $W^{(\text{int})}$.

Beweis.

Diese Aussage werden wir indirekt beweisen, indem wir zeigen, daß die Differenz $W^{(\text{int})} - \check{\check{W}}^{(\text{int})}$ durch lauter tadpolebehaftete Diagramme dargestellt wird. Dazu stellen wir fest, daß wegen (Rek. 8) und (4.94) nach sukzessivem Anwenden der Zerlegung (4.44)

$$\begin{aligned} \textcircled{p+1} - \textcircled{\textcircled{p+1}} &= \frac{1}{8(p+1)} \sum_{q=0}^p q \textcircled{\textcircled{p-q}} + \frac{1}{24(p+1)} \sum_{q=1}^p \sum_{r=1}^q \sum_{s=1}^r \sum_{t=1}^s \left\{ \textcircled{\textcircled{\textcircled{\textcircled{p+1}}}} \right. \\ &\quad \left. + \textcircled{\textcircled{\textcircled{\textcircled{p+1}}}} + \textcircled{\textcircled{\textcircled{\textcircled{p+1}}}} + \textcircled{\textcircled{\textcircled{\textcircled{p+1}}}} \right\} \quad (4.95) \end{aligned}$$

gilt. Der erste Term auf der rechten Seite ist dabei explizit tadpolebehaftet und die daraus

entstehenden Diagramme sind es dementsprechend auch. Alle anderen Terme enthalten Elemente $\text{---}\overset{l}{\text{---}}$ mit $l=0, 1, 2, \dots$ und $\text{---}\text{---}\overset{t}{\text{---}}$ mit $t=1, 2, 3, \dots$. Wie wir aber in der Behauptung **Beh.6'** festgestellt haben, enthalten all diese mindestens einen Tadpole. Deswegen liefern alle Terme obiger Gleichung lauter tadpolebehaftete Graphen. Somit sind wir schon fertig.

Jetzt können wir uns weiter mit der Rekursionsgleichung für die tadpolelose freie Energie beschäftigen und geben eine weitere Rekursion an, die zu der bereits besprochenen (Rek. 10) in gewisser Weise äquivalent ist. Dazu bemerken wir, daß nach (4.76) mit (4.84) laut (4.78) und (4.86)

$$\int_{12} \tilde{G}_{12} \frac{\delta \tilde{W}^{(\text{int})}}{\delta \tilde{G}_{12}} = \frac{1}{2} \int_{12} \tilde{\Sigma}_{12} \mathbf{G}_{12} \quad (4.96)$$

gilt. Mit der aus (4.92) abzulesenden Identität

$$\int_{12} \tilde{G}_{12} \frac{\delta \tilde{W}^{(\text{int})}}{\delta \tilde{G}_{12}} = \sum_{p=1}^{\infty} 2 p \tilde{W}^{(p)} \quad (4.97)$$

ergibt sich dann durch die Reihendarstellungen (2.67), (4.36) die endgültige Rekursionsformel

$$\tilde{W}^{(p)} = \frac{1}{4p} \sum_{q=1}^p \int_{12} \tilde{\Sigma}_{12}^{(q)} \mathbf{G}_{12}^{(p-q)} . \quad (4.98)$$

Graphisch dargestellt, lautet diese dann

$$\text{---}\overset{p}{\text{---}} = \frac{1}{4p} \sum_{q=1}^p \text{---}\overset{q}{\text{---}} \text{---}\overset{p-q}{\text{---}} .$$

(Rek. 11)

Wie wir unschwer erkennen, setzt diese Rekursion nur die Kenntnis der tadpolelosen Zwei-Punkt-Funktionen voraus, während für (Rek. 10) auch die Vier-Punkt-Funktionsgraphen benötigt werden. Bei (Rek. 10) wird aber die etwas umständlichere Ausrechnung durch die höhere Ordnung der Ergebnisse ($p+1$ -te anstatt p -ter) wettgemacht.

Ausgehend von den bereits bekannten tadpolelosen Zwei- und Vier-Punkt-Funktionsgraphen, können wir nun die ersten Ordnungen der tadpolelosen freien Energie ausrechnen. So ergibt sich für die erste Ordnung nach (Rek. 11)

$$\text{---}\overset{1}{\text{---}} = \frac{1}{4} \text{---}\overset{1}{\text{---}} \text{---}\overset{0}{\text{---}} = 0 , \quad (4.99)$$

wobei wir hier das Ergebnis aus (4.50) explizit eingesetzt haben. Übrigens ergibt sich dieses Resultat aus (Rek. 10) trivialerweise wegen der Summenkonvention. Für die nächste Ordnung ergibt sich unter Berücksichtigung von (4.50) und (4.58)

$$\text{---}\overset{2}{\text{---}} = \frac{1}{8} \text{---}\overset{2}{\text{---}} \text{---}\overset{0}{\text{---}} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{6} \text{---}\overset{1}{\text{---}} \text{---}\overset{2}{\text{---}} \text{---}\overset{1}{\text{---}} = \frac{1}{48} \text{---}\overset{2}{\text{---}} . \quad (4.100)$$

Analog dazu erhalten wir wegen (4.50), (4.51) und (4.67)

$$\textcircled{3} = \frac{1}{12} \textcircled{\textcircled{3}}_0 = \frac{1}{12} \times \frac{1}{4} \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{1} \textcircled{2} = \frac{1}{48} \textcircled{\textcircled{\textcircled{3}}} \quad (4.101)$$

Die nächste Ordnung berechnen wir mit Hilfe von (Rek. 10) und benutzen dazu wir Ergebnisse aus (4.51), (4.59), (4.66) und den Rekursionsanfang $\Gamma_{1234}^{(1)}$ aus (Rek. 9):

$$\begin{aligned} \textcircled{4} &= \frac{1}{96} \textcircled{\textcircled{\textcircled{3}}}_0 + \frac{1}{24} \textcircled{\textcircled{\textcircled{1}}}_2 = \\ &= \frac{1}{96} \textcircled{\textcircled{\textcircled{1}}}_2 \textcircled{\textcircled{\textcircled{4}}}_3 \left\{ \frac{3}{4} \textcircled{\textcircled{\textcircled{4}}}_3 \textcircled{\textcircled{\textcircled{1}}}_2 + 3 \textcircled{\textcircled{\textcircled{3}}}_1 \textcircled{\textcircled{\textcircled{4}}}_2 \right\} + \frac{1}{144} \textcircled{\textcircled{\textcircled{2}}}_1 \textcircled{\textcircled{\textcircled{4}}}_3 \textcircled{\textcircled{\textcircled{1}}}_4 \textcircled{\textcircled{\textcircled{2}}}_1 \quad (4.102) \end{aligned}$$

Hierbei wurde bei den ersten zwei Summanden auf die Symmetrisierung der Indizes verzichtet, weil der bindende Graph schon totalsymmetrisch ist. Das Ergebnis lautet nach Ausführung der Anklebevorschriften

$$\textcircled{4} = \frac{1}{128} \textcircled{\textcircled{\textcircled{\textcircled{4}}}} + \frac{1}{32} \textcircled{\textcircled{\textcircled{\textcircled{4}}}} + \frac{1}{144} \textcircled{\textcircled{\textcircled{\textcircled{4}}}} \quad (4.103)$$




















Vergleichen wir dieses Ergebnis mit dem in der nachfolgenden Tabelle 9 aufgeführten, so bemerken wir, daß der erste Graph mit dem Diagramm #4.1 übereinstimmt und der letzte mit #4.3. Den zweiten Graph aus (4.103) finden wir jedoch nicht wieder und statt dessen taucht ein anderer Graph #4.2 auf. Sieht man sich diese jedoch genauer an, so stellt man fest, daß sie gleich oder genauer gesagt isomorph sind. Dies können wir auch zeigen, indem wir die Knotenpunkte dieser Diagramme entsprechend nummerieren oder färben:

$$\textcircled{\textcircled{\textcircled{\textcircled{4}}}} = \textcircled{\textcircled{\textcircled{\textcircled{4}}}} \quad (4.104)$$

Auch der erste Graph aus (4.103) kann in einer anderen Form dargestellt werden, z.B. als ein Kreis mit eingeschriebener Kette aus drei Kreisen. Diese Isomorphie zeigen wir wiederum mit Hilfe der Knotennummerierung:

$$\textcircled{\textcircled{\textcircled{\textcircled{4}}}} = \textcircled{\textcircled{\textcircled{\textcircled{4}}}} \quad (4.105)$$

Wie wir sehen können, ist die Darstellung eines Graphen keineswegs eindeutig. Das ist auch kein typischer Sachverhalt für Vakuumpdiagramme und kann uns auch bei den Zwei- und Vier-Funktionen in den höheren Ordnungen begegnen. Mit der Vertexzahl wächst auch die Anzahl der möglichen Darstellungen und das Problem der Graphenunterscheidung ist dann nicht zu vernachlässigen. Übrigens ist dieses Problem auch keinesfalls trivial und ist als ein Forschungsobjekt der Graphentheorie immer noch aktuell.

p				
1	0			
2	#2.1 $1/48$  $(0,0,1;2)$			
3	#3.1 $1/48$  $(3,0,0;6)$			
4	#4.1 $1/128$ $(4,0,0;8)$ 	#4.2 $1/32$ $(2,0,0;8)$ 	#4.3 $1/144$ $(0,2,0;4)$ 	
5	#5.1 $1/320$ $(5,0,0;10)$ 	#5.2 $1/120$ $(0,0,0;120)$ 	#5.3 $1/16$ $(2,0,0;4)$ 	
		#5.4 $1/32$ $(3,0,0;4)$ 	#5.5 $1/48$ $(2,1,0;2)$ 	
6	#6.1 $1/768$ $(6,0,0;12)$ 	#6.2 $1/48$ $(0,0,0;48)$ 	#6.3 $1/64$ $(4,0,0;4)$ 	#6.4 $1/8$ $(2,0,0;2)$ 
	#6.5 $1/16$ $(3,0,0;2)$ 	#6.6 $1/32$ $(3,0,0;4)$ 	#6.7 $1/96$ $(3,0,0;12)$ 	#6.8 $1/128$ $(4,0,0;8)$ 

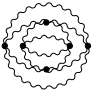
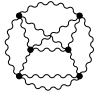
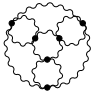
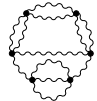
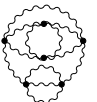
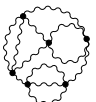
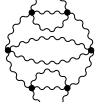
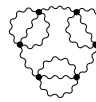

6	#6.9 1/64 (2,0,0;16)		#6.10 1/16 (1,0,0;8)		#6.11 1/96 (3,0,0;12)		#6.12 1/96 (3,1,0;2)	
	#6.13 1/48 (1,1,0;4)		#6.14 1/48 (2,1,0;2)		#6.15 1/288 (1,2,0;4)			
	#6.16 1/1296 (0,3,0;6)		#6.17 1/64 (4,0,0;4)					

Tabelle 9: Tadpolelose Vakuumbdiagramme mit deren relativen Gewichten in der ϕ^4 -Theorie. Jedes Diagramm wird charakterisiert durch den Vierer-Tupel $(D, T, V; P)$, wobei D , T und V die jeweiligen Zahlen der Doppel-, Tripel- und Quadrupel-Bindungen sind und P ist die Zahl der formerhaltenden Knotenpermutationen.

Kapitel 5

Linien-Legendre-Transformation

In den ersten drei Kapiteln hatten wir zwei unabhängige Variablen: den bilokalen Kern G_{12}^{-1} (bzw. dessen Umkehrung G_{12}) und die Vierer-Wechselwirkung V_{1234} . Die negative freie Energie W , die zusammenhängenden Korrelationsfunktionen \mathbf{G}_{12} , \mathbf{G}_{1234}^c und die ein-Teilchen-irreduziblen Funktionen Σ_{12} und Γ_{1234} wurden als Funktionale dieser Variablen aufgefasst. In diesem Kapitel wollen wir den freien Propagator G_{12} in seiner Rolle als unabhängige Variable durch die volle Korrelationsfunktion \mathbf{G}_{12} ersetzen. Zugegebenerweise lassen sich die mit diesem Baustein aufgebaute Graphen so nicht mehr ausrechnen, weil die Funktion \mathbf{G}_{12} nicht geschlossen darstellbar ist, wie es bei der Variablen G_{12} so der Fall war. Von diesem Variablenwechsel versprechen wir uns aber eine drastische Reduzierung der Graphenanzahl und somit eine übersichtlichere Gestaltung des Generierungsprozesses. Dabei erzeugen wir die Graphen der Selbstenergie Σ_{12} und der ein-Teilchen-irreduziblen Vier-Punkt-Funktion Γ_{1234} ausgedrückt in der Variablen \mathbf{G}_{12} . Anschliessend sind wir dann in der Lage, aus diesen Diagrammen die bereits bekannten Graphen der ein-Teilchen-irreduziblen und tadpolefreien Funktionen wieder zu erhalten.

5.1 Definitionen

Die Selbstenergie Σ_{12} und die ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktion Γ_{1234} brauchen nicht umdefiniert zu werden, wechseln aber ihre funktionelle Abhängigkeit. Das heisst, wir betrachten in diesem Kapitel die Funktionale $\Sigma_{12} = \Sigma_{12}[\mathbf{G}, V]$ und $\Gamma_{1234} = \Gamma_{1234}[\mathbf{G}, V]$. Um diesen Umstand auch diagrammatisch zum Ausdruck zu bringen, stellen wir alle Stümmel als kurze Doppellinien dar. Unsere neuen Bezeichnungen lauten also

$$\Sigma_{12} \equiv \text{---} \bigcirc \text{---} \quad , \quad -\Gamma_{1234} \equiv \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bigcirc \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 4 \end{array} \quad . \quad (5.1)$$

Konsequenterweise ändern wir auch geringfügig die Darstellung des Vierer-Vertex:

$$-g V_{1234} \equiv \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 4 \end{array} \quad . \quad (5.2)$$

Neben der Selbstenergie und der ein-Teilchen-irreduziblen Vier-Punkt-Funktion werden wir uns in diesem Kapitel auch für die freie Energie interessieren. Hier müssen wir allerdings darauf hinweisen, daß es sich um ein Funktional handelt, das die Legendre-Transformierte der ursprünglichen freien Energie W darstellt. Diese Grösse wird von uns Φ genannt und muss folgender Legendre-Identität genügen:

$$\Phi[\mathbf{G}, V] \equiv W[G^{-1}[\mathbf{G}, V], V] - \int_{12} \frac{\delta W[G^{-1}[\mathbf{G}, V], V]}{\delta G_{12}^{-1}[\mathbf{G}, V]} G_{12}^{-1}[\mathbf{G}, V] . \quad (5.3)$$

Erinnern wir uns noch an die Identität (2.51), so können wir diese Gleichung umformen zu

$$\Phi[\mathbf{G}, V] = W[G^{-1}[\mathbf{G}, V], V] + \frac{1}{2} \int_{12} \mathbf{G}_{12} G_{12}^{-1}[\mathbf{G}, V] . \quad (5.4)$$

Der Variablenwechsel bringt auch eine neue Amputationsvorschrift mit sich: die Amputation einer vollen Linie, später auch einfachheitshalber Linienamputation genannt. Dem wird die funktionale Identität

$$\frac{\delta \mathbf{G}_{12}}{\delta \mathbf{G}_{34}} \equiv \frac{\delta \text{1} \text{---} \text{2}}{\delta \text{3} \text{---} \text{4}} = \frac{1}{2} \{ \delta_{13} \delta_{24} + \delta_{14} \delta_{23} \} . \quad (5.5)$$

zugrunde gelegt. Durch diese Operation wird also die volle Linie eines Graphen entfernt, und zwar auf symmetrische Weise.

5.2 Bestimmungsgleichungen für Σ_{12} und Γ_{1234}

Die Bestimmungsgleichung für die Selbstenergie Σ_{12} kann unmittelbar der Schwinger-Dyson-Gleichung (3.12) entnommen werden und lautet

$$\Sigma_{12} = -\frac{g}{2} \int_{34} V_{1234} \mathbf{G}_{34} + \frac{g}{6} \int_{345678} V_{1345} \mathbf{G}_{36} \mathbf{G}_{47} \mathbf{G}_{58} \Gamma_{6782} . \quad (5.6)$$

Deren graphische Darstellung lautet dann in Analogie zu (3.14)

$$1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 = \frac{1}{2} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \frac{1}{6} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 . \quad (5.7)$$

Im Unterschied zu den Gleichungen (3.12) und (3.14) tritt hier die Paarkorrelationsfunktion \mathbf{G} als unabhängige Variable auf und die vollen Linien sind als elementare graphische Einheiten zu verstehen. Wie wir später sehen werden, sind alle auf diese Weise entstandenen Graphen der Selbstenergie sogar zwei-Teilchen-irreduzibel, d.h. sie zerfallen auch durch eine zweifache Linienamputation nicht in ihre Bestandteile.

Zur Herleitung der Bestimmungsgleichung für die ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktion Γ_{1234} gibt es zwei verschiedene Zugänge, die zu verschiedenen Bestimmungsgleichungen führen. In diesem Abschnitt präsentieren wir beide Möglichkeiten und stellen anschliessend fest, daß deren Ergebnisse in der Tat äquivalent sind. Bei dem ersten Zugang nehmen wir

die Gleichung (3.23) als Ausgangspunkt. Der darin vorkommende Ausdruck $\delta/\delta G_{56}^{-1}$ ist jetzt so nicht zu gebrauchen, aber er lässt sich mit Hilfe der funktionalen Kettenregel

$$\frac{\delta}{\delta G_{56}^{-1}} = \int_{78} \frac{\delta \mathbf{G}_{78}}{\delta G_{56}^{-1}} \frac{\delta}{\delta \mathbf{G}_{78}} \quad (5.8)$$

umformen. Der Term $\delta \mathbf{G}_{78}/\delta G_{56}^{-1}$ wird mit Hilfe von (2.54) und (3.3) ausgewertet. Es ergibt sich dabei die folgende Identität:

$$\frac{\delta}{\delta G_{56}^{-1}} = - \int_{78} \mathbf{G}_{57} \mathbf{G}_{68} \frac{\delta}{\delta \mathbf{G}_{78}} + \frac{1}{2} \int_{7890\bar{1}\bar{2}} \mathbf{G}_{59} \mathbf{G}_{60} \Gamma_{90\bar{1}\bar{2}} \mathbf{G}_{\bar{1}7} \mathbf{G}_{\bar{2}8} \frac{\delta}{\delta \mathbf{G}_{78}} \quad (5.9)$$

Setzen wir dieses Ergebnis in unsere Ausgangsgleichung (3.23) ein, so erhalten wir mit (3.4) auch schon die erste gesuchte Bestimmungsgleichung

$$-\Gamma_{1234} = 2 \frac{\delta \Sigma_{12}}{\delta \mathbf{G}_{34}} - \int_{5678} \Gamma_{3456} \mathbf{G}_{57} \mathbf{G}_{68} \frac{\delta \Sigma_{12}}{\delta \mathbf{G}_{78}} \quad (5.10)$$

Deren diagrammatische Interpretation lautet

$$\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} = 2 \frac{\delta \begin{array}{c} 1 \text{---} \text{---} 2 \\ \text{---} \\ 3 \text{---} \text{---} 4 \end{array}}{\delta \begin{array}{c} 3 \text{---} \text{---} 4 \end{array}} + \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 6 \end{array} \frac{\delta \begin{array}{c} 1 \text{---} \text{---} 2 \\ \text{---} \\ 5 \text{---} \text{---} 6 \end{array}}{\delta \begin{array}{c} 5 \text{---} \text{---} 6 \end{array}} \quad (5.11)$$

An dieser Stelle sei bemerkt, daß im Unterschied zur Identität (3.23) diese Gleichung schon effizient ist, denn alle daraus erzeugten Graphen sind positiv und können sich gegenseitig nicht auslöschen. Deswegen ist diese Gleichung direkt anzuwenden. Zum ersten mal wurde diese Gleichung von H. Kleinert hergeleitet [8]. Gleichungen (5.7) und (5.11) stellen das geschlossene Gleichungssystem zur Bestimmung der Legendre-transformierten Funktionen Σ_{12} und Γ_{1234} dar. Die Besonderheit dabei ist, daß sich die Vier-Punkt-Funktion Γ mit Hilfe der Selbstenergie Σ effizient berechnen lässt.

Es gibt jedoch auch noch die Möglichkeit, bei der Bestimmung von Γ lediglich mit Γ selbst auszukommen. Um eine solche selbstkonsistente Gleichung zu erhalten, gehen wir von der Gleichung (3.35) aus. Auch hier haben wir es mit dem Ausdruck $\int_{90} G_{69} G_{70} \delta/\delta G_{90} = -\delta/\delta G_{67}^{-1}$ zu tun. Diesen formen wir wiederum mit Hilfe von (5.9) um und stellen fest, daß

$$\begin{aligned} \int_{567890} V_{1567} \mathbf{G}_{58} G_{69} G_{70} \frac{\delta \Gamma_{8234}}{\delta G_{90}} &= \int_{567890} V_{1567} \mathbf{G}_{58} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \frac{\delta \Gamma_{8234}}{\delta \mathbf{G}_{90}} \\ &- \frac{1}{2} \int_{567890\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} V_{1567} \mathbf{G}_{58} \mathbf{G}_{6\bar{1}} \mathbf{G}_{7\bar{2}} \Gamma_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} \mathbf{G}_{\bar{3}9} \mathbf{G}_{\bar{4}0} \frac{\delta \Gamma_{8234}}{\delta \mathbf{G}_{90}} \end{aligned} \quad (5.12)$$

gilt. Setzen wir dieses Ergebnis in die Gleichung (3.35) ein, so erhalten wir die folgende Bestimmungsgleichung für Γ_{1234} :

$$\begin{aligned}
-\Gamma_{1234} &= -g V_{1234} + \frac{g}{3} \int_{567890} V_{1567} \mathbf{G}_{58} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \frac{\delta \Gamma_{8234}}{\delta \mathbf{G}_{90}} \\
&\quad - \frac{g}{6} \int_{567890\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} V_{1567} \mathbf{G}_{58} \mathbf{G}_{6\bar{1}} \mathbf{G}_{7\bar{2}} \Gamma_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} \mathbf{G}_{\bar{3}9} \mathbf{G}_{\bar{4}0} \frac{\delta \Gamma_{8234}}{\delta \mathbf{G}_{90}} \\
&\quad + \frac{g}{2} \int_{5678} V_{1256} \mathbf{G}_{57} \mathbf{G}_{68} \Gamma_{7834} + \frac{g}{2} \int_{5678} V_{1356} \mathbf{G}_{57} \mathbf{G}_{68} \Gamma_{7824} + \frac{g}{2} \int_{5678} V_{1456} \mathbf{G}_{57} \mathbf{G}_{68} \Gamma_{7823} \\
&\quad - \frac{g}{6} \int_{567890\bar{1}\bar{2}} V_{5167} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \Gamma_{90\bar{1}} \mathbf{G}_{\bar{1}\bar{2}} \Gamma_{\bar{2}348} \mathbf{G}_{85} - \frac{g}{6} \int_{567890\bar{1}\bar{2}} V_{5167} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \Gamma_{90\bar{1}} \mathbf{G}_{\bar{1}\bar{2}} \Gamma_{\bar{2}248} \mathbf{G}_{85} \\
&\quad - \frac{g}{6} \int_{567890\bar{1}\bar{2}} V_{5167} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \Gamma_{90\bar{1}} \mathbf{G}_{\bar{1}\bar{2}} \Gamma_{\bar{2}238} \mathbf{G}_{85} \quad . \quad (5.13)
\end{aligned}$$

Sie lässt sich graphisch dargestellt als

$$\begin{aligned}
\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} &= \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \frac{1}{3} \begin{array}{c} 5 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} 7 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \frac{1}{6} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} \\
&\quad + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 3 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} \\
&\quad + \frac{1}{6} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 3 \end{array} + \frac{1}{6} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \end{array} + \frac{1}{6} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} \quad . \quad (5.14)
\end{aligned}$$

Wie wir sehen, bietet uns diese Gleichung die Möglichkeit, die ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktion ohne Linienamputation der Selbstenergie zu berechnen. Technisch gesehen hat diese Gleichung gegenüber der (5.11) gewisse Vorteile, denn hier kommt die Linienamputation immer in einer Kombination mit anschliessender Verklebung der entstandenen Lücke vor. Das erlaubt uns, die betroffenen Summande als Linienersetzungsterme zu verstehen. Bei der Gleichung (5.11) ist uns diese Möglichkeit nicht gegeben. Mathematisch gesehen sind die beiden Bestimmungsgleichungen (5.11) und (5.14) bzw. (5.10) und (5.13) jedoch äquivalent zueinander.

Um das zu zeigen, schreiben wir die Identität (5.10) in einer Form um, bei der Σ nicht explizit vorkommt, und dazu setzen wir Σ aus (5.6) unmittelbar in (5.10) ein. Mit Hilfe der Amputationsvorschrift (5.5) liefert uns diese Einsetzung die Gleichung

$$\begin{aligned}
-\Gamma_{1234} &= -g V_{1234} + \frac{g}{3} \int_{567890} V_{1567} \mathbf{G}_{58} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \frac{\delta \Gamma_{8902}}{\delta \mathbf{G}_{34}} \\
&\quad - \frac{g}{6} \int_{567890\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} V_{1567} \mathbf{G}_{58} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \frac{\delta \Gamma_{8902}}{\delta \mathbf{G}_{34}} \mathbf{G}_{\bar{3}\bar{1}} \mathbf{G}_{\bar{4}\bar{2}} \Gamma_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} + \frac{g}{2} \int_{5678} V_{1256} \mathbf{G}_{57} \mathbf{G}_{68} \Gamma_{7834} \\
&\quad + \frac{g}{2} \int_{5678} V_{1356} \mathbf{G}_{57} \mathbf{G}_{68} \Gamma_{7824} + \frac{g}{2} \int_{5678} V_{1456} \mathbf{G}_{57} \mathbf{G}_{68} \Gamma_{7823}
\end{aligned}$$

$$- \frac{g}{2} \int_{567890\bar{1}\bar{2}} V_{5167} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \Gamma_{902\bar{1}} \mathbf{G}_{\bar{1}\bar{2}} \Gamma_{\bar{2}348} \mathbf{G}_{85} \quad . \quad (5.15)$$

Wie man unschwer erkennen kann, stimmt diese Identität mit (5.13) noch nicht überein und die Äquivalenz dieser beiden Gleichungen ist nicht unmittelbar einzusehen. In erster Linie gibt es eine Diskrepanz bei den beiden Ableitungstermen. Diese lassen sich jedoch mit Hilfe einer weiteren Kommutatorbeziehung ineinander überführen, die wir der bereits bekannten Kommutatorregel (3.31) entnehmen. Um diese Regel in der Sprache dieses Kapitels formulieren zu können, formen wir diese entsprechend der Identität (5.9) um. So bekommen wir aus (3.31) unmittelbar das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma_{1234}}{\delta \mathbf{G}_{56}} - \frac{1}{2} \int_{7890} \Gamma_{5678} \mathbf{G}_{79} \mathbf{G}_{80} \frac{\delta \Gamma_{1234}}{\delta \mathbf{G}_{90}} &= \frac{\delta \Gamma_{1256}}{\delta \mathbf{G}_{34}} - \frac{1}{2} \int_{7890} \Gamma_{3478} \mathbf{G}_{79} \mathbf{G}_{80} \frac{\delta \Gamma_{1256}}{\delta \mathbf{G}_{90}} \\ &- \frac{1}{2} \int_{78} \Gamma_{3457} \mathbf{G}_{78} \Gamma_{8126} - \frac{1}{2} \int_{78} \Gamma_{3467} \mathbf{G}_{78} \Gamma_{8125} + \frac{1}{2} \int_{78} \Gamma_{5637} \mathbf{G}_{78} \Gamma_{8124} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{78} \Gamma_{5647} \mathbf{G}_{78} \Gamma_{8123} \quad . \quad (5.16) \end{aligned}$$

Aus dieser Kommutatorrelation können wir dann nach einer kurzen Rechnung die folgende Identität ablesen:

$$\begin{aligned} \frac{g}{3} \int_{567890} V_{1567} \mathbf{G}_{58} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \frac{\delta \Gamma_{8902}}{\delta \mathbf{G}_{34}} - \frac{g}{6} \int_{567890\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} V_{1567} \mathbf{G}_{58} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \frac{\delta \Gamma_{8902}}{\delta \mathbf{G}_{\bar{3}\bar{4}}} \mathbf{G}_{\bar{3}\bar{1}} \mathbf{G}_{\bar{4}\bar{2}} \Gamma_{\bar{1}\bar{2}34} &= \\ = \frac{g}{3} \int_{567890} V_{1567} \mathbf{G}_{58} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \frac{\delta \Gamma_{8234}}{\delta \mathbf{G}_{90}} - \frac{g}{6} \int_{567890\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} V_{1567} \mathbf{G}_{58} \mathbf{G}_{\bar{6}\bar{1}} \mathbf{G}_{\bar{7}\bar{2}} \Gamma_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} \mathbf{G}_{\bar{3}\bar{9}} \mathbf{G}_{\bar{4}\bar{0}} \frac{\delta \Gamma_{8234}}{\delta \mathbf{G}_{90}} \\ - \frac{g}{6} \int_{567890\bar{1}\bar{2}} V_{5167} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \Gamma_{903\bar{1}} \mathbf{G}_{\bar{1}\bar{2}} \Gamma_{\bar{2}428} \mathbf{G}_{85} - \frac{g}{6} \int_{567890\bar{1}\bar{2}} V_{5167} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \Gamma_{904\bar{1}} \mathbf{G}_{\bar{1}\bar{2}} \Gamma_{\bar{2}238} \mathbf{G}_{85} \\ + \frac{g}{3} \int_{567890\bar{1}\bar{2}} V_{5167} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \Gamma_{902\bar{1}} \mathbf{G}_{\bar{1}\bar{2}} \Gamma_{\bar{2}348} \mathbf{G}_{85} \quad . \quad (5.17) \end{aligned}$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (5.15) ein, so erhalten wir in der Tat schon die Gleichung (5.13). Mit anderen Worten, die Beziehung (5.17) zeigt die Äquivalenz der Bestimmungsgleichung (5.13) zu der Gleichung (5.15) und somit letztlich auch zu (5.10).

5.3 Rekursionsgleichungen

In diesem Kapitel haben wir zwei Möglichkeiten, ein geschlossenes Rekursionsgleichungssystem aufzustellen. Die erste wird von den Bestimmungsgleichungen (5.7) und (5.11) geliefert und die zweite von (5.7) in Verbindung mit (5.14). Als Ausgangspunkt unserer Rekursionen nehmen wir die Störungsreihen (3.38). Die Besonderheit dieses Kapitels besteht nun darin, daß die volle Linie die Rolle einer elementaren Struktureinheit übernimmt und, anders als

in den früheren Kapiteln, keiner weiteren Bedingung genügen muss. Diese Überlegungen erlauben es uns, das folgende Gleichungssystem mit $p=1, 2, 3\dots$ aufzustellen:

$$\begin{aligned}
 1 \text{---} \textcircled{1} \text{---} 2 &= \frac{1}{2} 1 \text{---} \textcircled{\textcircled{1}} \text{---} 2 \quad , \\
 \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{p} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} &= 2 \frac{\delta 1 \text{---} \textcircled{p} \text{---} 2}{\delta 3 \text{---} 4} + \sum_{q=1}^{p-1} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \textcircled{q} \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ \diagdown \\ 6 \end{array} \frac{\delta 1 \text{---} \textcircled{p-q} \text{---} 2}{\delta 5 \text{---} 6} \quad , \\
 1 \text{---} \textcircled{p+1} \text{---} 2 &= \frac{1}{6} 1 \text{---} \textcircled{\textcircled{p}} \text{---} 2 \quad .
 \end{aligned}$$

(Rek. 12)

Alternativ dazu erhalten wir für $p=1, 2, 3\dots$ als zweites Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 1 \text{---} \textcircled{1} \text{---} 2 &= \frac{1}{2} 1 \text{---} \textcircled{\textcircled{1}} \text{---} 2 \quad , \quad \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{1} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} = \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \times \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \quad , \\
 1 \text{---} \textcircled{p+1} \text{---} 2 &= \frac{1}{6} 1 \text{---} \textcircled{\textcircled{p}} \text{---} 2 \quad , \\
 \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{p+1} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} &= \frac{1}{3} 1 \text{---} \textcircled{\textcircled{p}} \text{---} 2 \frac{\delta 2 \text{---} \textcircled{p} \text{---} 3}{\delta 5 \text{---} 4} + \frac{1}{6} \sum_{q=1}^{p-1} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \textcircled{p-q} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ \diagdown \\ 6 \end{array} \frac{\delta 2 \text{---} \textcircled{q} \text{---} 3}{\delta 5 \text{---} 4} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{\textcircled{p}} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \\
 &+ \frac{1}{2} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \textcircled{\textcircled{p}} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{\textcircled{p}} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} + \frac{1}{6} \sum_{q=1}^{p-1} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{p-q} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \\
 &+ \frac{1}{6} \sum_{q=1}^{p-1} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \textcircled{p-q} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ 3 \end{array} + \frac{1}{6} \sum_{q=1}^{p-1} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{p-q} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \quad .
 \end{aligned}$$

(Rek. 13)

Beh.6. Alle nach diesen Rekursionen entstehenden Graphen der Selbstenergie sind zwei-Teilchen-irreduzibel.

Mit anderen Worten, die Graphen der Selbstenergie zerfallen sogar nicht nach einer zweifachen Linienamputation. Linienamputation meint hier selbstverständlich die Amputation einer vollen Linie. Das zeigen wir z.B. anhand der Rekursion (Rek. 13). Zuerst formulieren wir jedoch zwei wichtige Hilfsaussagen:

(*). Zwei (endlich viele) zusammenhängende Graphen ergeben zusammengeklebt einen zu-

sammenhängenden Graph.

(**). Alle Graphen der Vier-Punkt-Funktion Γ_{1234} sind ein-Teilchen-irreduzibel.

Das zeigt man völlig analog dazu, wie wir es auch schon beim Beweis der Behauptung **Beh.4** auf Seite 51 gemacht haben.

Nun können wir zum Beweis der obigen Aussage übergehen.

Beweis:

Die Anfangsbedingung ist in diesem Fall der Tadpole und der ist trivialerweise zwei-Teilchen-irreduzibel. Für alle anderen Selbstenergiegraphen zeigen wir das nach Konstruktion, indem wir uns die Ergebnisse der zweifachen Linienamputation genauer ansehen. Wir können dabei drei Fälle unterscheiden.

Fall 1:

Der Teilgraph $\text{---} \circlearrowleft (p) \text{---}$ ist von den Linienamputationen unberührt (und somit unter anderem zusammenhängend) geblieben und zwei der drei Verbindungslinien zwischen diesem Teilgraph und dem Vertex wurden entfernt. Dabei ist aber eine Verbindungslinie übriggeblieben und wegen (*) erhalten wir nur zusammenhängende Restgraphen zurück.

Fall 2:

In dem Teilgraph $\text{---} \circlearrowleft (p) \text{---}$ wurde eine Linie entfernt. Wegen (**) blieb dabei jedoch ein zusammenhängender Rest übrig. Ausserdem wurde eine der drei Verbindungslinien amputiert, die zwei anderen halten aber den zusammenhängenden Rest mit dem Vierer-Vertex zusammen und das stellt nach (*) wiederum ein zusammenhängendes Gebilde dar.

Fall 3:

Alle drei Verbindungslinien sind geblieben und beide Linienamputationen wirkten auf den Teilgraph $\text{---} \circlearrowleft (p) \text{---}$. Da dessen Graphen nach einmaliger Linienamputation wegen (**) noch zusammenhängend sind, können sie jetzt höchstens in zwei zusammenhängende Teilstücke zerfallen. Wir nehmen an, daß dies tatsächlich der Fall ist, da wir andernfalls nichts mehr zu zeigen haben. Den Graphen, der nach der ersten Linienamputation entsteht, nennen wir A . Dieser ist ein Sechs-Punkt-Graph, und alle sechs seiner Aussenbeine sind reine Stümmel. Die zwei Teilstücke, in die A zerfällt, bezeichnen wir mit B und C . Diese untersuchen wir nun etwas genauer. Diese zwei sollten nach unserer Annahme einen nichtzusammenhängenden Acht-Punkt-Graphen darstellen, es besteht also die Möglichkeit, daß B und C beide irgendwelche Vier-Punkt-Graphen sind oder daß einer von beiden ein Sechs-Punkt- und der andere ein Zwei-Punkt-Graph ist. Die letzte Möglichkeit darf aber tatsächlich nicht vorkommen, denn sonst würde das bedeuten, daß beide Teile durch die Linienamputation an einem der Aussenbeine von A stammen. Das ist aber nicht möglich, da all diese reine Stümmel sind und daher keine weitere Amputation zulassen. Wir wissen also über B und C , daß sie beide zusammenhängende Vier-Punkt-Graphen sind. Ausserdem ist klar, daß jeweils zwei deren Aussenstümmel die Indizes 3, 4, 5 und 2 tragen. Denn nur so können sie, an je zwei anderen Beinen miteinander verknüpft, den ursprünglichen ein-Teilchen-irreduziblen Graphen gebildet haben. Daraus schliessen wir, daß jeder der Graphen B und C mindestens einen der

Indizes 3, 4 und 5 trägt. Deswegen werden beide durch den Graphen $1 \begin{matrix} \curvearrowright^3 \\ \text{---} \\ \curvearrowleft^5 \end{matrix} 2$ gebunden. Da aber B und C auch noch zusammenhängend sind, ergibt sich dabei laut (*) ein zusammenhängendes Gebilde.

In allen drei möglichen Fällen ergaben sich nach zweifacher Linienamputation von Σ_{12} lauter zusammenhängende Graphen, die Selbstenergie Σ_{12} wird demnach nur durch Graphen dargestellt, die selbst zwei-Teilchen-irreduzibel sind. Wir sind dann also fertig.

5.4 Erzeugung der Graphen für Σ_{12} und Γ_{1234}

In der Praxis erweist sich die Graphengenerierung nach (Rek. 12) oder (Rek. 13) als besonders einfach und das zeigen wir am Beispiel der ersten drei Ordnungen. Der Rekursionsanfang $\Sigma_{12}^{(1)}$ ist durch beide Rekursionen explizit als Tadpole mit dem Gewicht $1/2$ vorgegeben. Für Γ_{1234} lässt sich der Rekursionsanfang aus (Rek. 13) direkt ablesen und mit (Rek. 12) auf eine einfache Weise gewinnen, denn wegen (5.5) gilt

$$\frac{\delta \text{---} 1 \text{---} \textcircled{1} \text{---} 2}{\delta \text{---} 3 \text{---} 4} = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \text{---} 3 \text{---} 4} \left\{ 1 \text{---} \textcircled{\text{---}} 2 \right\} = \frac{1}{2} \begin{matrix} 2 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 4 \end{matrix} . \tag{5.18}$$

Diese Ergebnisse brauchen wir nun, um die Graphen höherer Ordnungen zu generieren. So gilt z.B. für $\Sigma_{12}^{(2)}$

$$1 \text{---} \textcircled{2} \text{---} 2 = \frac{1}{6} 1 \text{---} \textcircled{\text{---}} 2 . \tag{5.19}$$

Die Graphen von $\Gamma_{1234}^{(2)}$ generieren wir beispielsweise nach (Rek. 12), wozu wir noch das Zwischenergebnis

$$\frac{\delta \text{---} 1 \text{---} \textcircled{2} \text{---} 2}{\delta \text{---} 3 \text{---} 4} = \frac{1}{4} \begin{matrix} 3 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} 4 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 2 \end{matrix} + \frac{1}{4} \begin{matrix} 4 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 2 \end{matrix} \tag{5.20}$$

brauchen, das wir mit (5.5) erhalten können. Somit gilt laut (Rek. 12)

$$\begin{aligned} \begin{matrix} 2 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 4 \end{matrix} &= 2 \frac{\delta \text{---} 1 \text{---} \textcircled{2} \text{---} 2}{\delta \text{---} 3 \text{---} 4} + \begin{matrix} 2 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} 5 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 6 \end{matrix} \frac{\delta \text{---} 5 \text{---} \textcircled{1} \text{---} 6}{\delta \text{---} 3 \text{---} 4} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{matrix} 2 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 4 \end{matrix} + \frac{1}{2} \begin{matrix} 3 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} 4 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 2 \end{matrix} + \frac{1}{2} \begin{matrix} 4 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 3 \end{matrix} . \end{aligned} \tag{5.21}$$

Daraus ergibt sich dann für $\Sigma_{12}^{(3)}$

$$1 \text{---} \textcircled{3} \text{---} 2 = \frac{1}{4} 1 \text{---} \textcircled{\text{---}} 2 . \tag{5.22}$$

Zur Generierung von $\Gamma_{1234}^{(3)}$ nach (Rek. 12) stellen wir noch fest, daß nach diesem Resultat

$$\begin{aligned} \frac{\delta \text{1-}\bigcirc\text{3-}2}{\delta \text{3-}4} &= \frac{1}{4} \text{2-}\bigcirc\text{3-}4 + \frac{1}{4} \text{2-}\bigcirc\text{4-}3 + \frac{1}{4} \text{1-}\bigcirc\text{3-}4 + \frac{1}{4} \text{1-}\bigcirc\text{4-}3 \\ &+ \frac{1}{8} \text{1-}\bigcirc\text{3-}4 + \frac{1}{8} \text{1-}\bigcirc\text{4-}3 \end{aligned} \quad (5.23)$$

gilt. Weiterhin können wir schreiben

$$\text{1-}\bigcirc\text{3-}4 = 2 \frac{\delta \text{1-}\bigcirc\text{3-}2}{\delta \text{3-}4} + \text{1-}\bigcirc\text{5-}6 \frac{\delta \text{5-}\bigcirc\text{2-}6}{\delta \text{3-}4} + \text{1-}\bigcirc\text{5-}6 \frac{\delta \text{5-}\bigcirc\text{1-}6}{\delta \text{3-}4}, \quad (5.24)$$

und wegen (5.18), (5.20) und (5.21) ergibt sich das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned} \text{1-}\bigcirc\text{3-}4 &= \frac{1}{2} \left\{ \text{1-}\bigcirc\text{3-}4 + \text{1-}\bigcirc\text{3-}4 + \text{1-}\bigcirc\text{3-}4 + \text{4-}\bigcirc\text{1-}2 + \text{3-}\bigcirc\text{1-}4 + \text{2-}\bigcirc\text{1-}4 \right\} \\ &+ \frac{1}{4} \left\{ \text{1-}\bigcirc\text{3-}4 + \text{1-}\bigcirc\text{3-}4 + \text{1-}\bigcirc\text{3-}4 \right\}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Für $\Sigma_{12}^{(4)}$ ergibt sich daraus

$$\text{1-}\bigcirc\text{4-}2 = \frac{1}{4} \text{1-}\bigcirc\text{4-}2 + \frac{1}{4} \text{1-}\bigcirc\text{4-}2 + \frac{1}{8} \text{1-}\bigcirc\text{4-}2. \quad (5.26)$$

Natürlich würden wir nach (Rek. 13) dieselben Graphen bekommen. Dabei ist die Vorgehensweise für die Vier-Punkt-Funktion analog zu der aus dem letzten Kapitel und braucht deswegen nicht weiter erläutert zu werden. Zu beachten ist aber auch hier, daß die Linienamputation an den Vier-Punkt-Graphen sinnvollerweise als Linienersetzung zu interpretieren ist. Die betroffenen Terme sind also in zwei Schritten auszuwerten, und zwar als

$$\begin{aligned} \text{1-}\bigcirc\text{5-}6 &= 8 \text{5-}6 \left\{ \text{6-}\bigcirc\text{7-}8 \frac{\delta \text{2-}\bigcirc\text{p-}4}{\delta \text{5-}4} \right\}, \\ \text{1-}\bigcirc\text{5-}6 &= 1 \text{5-}6 \left\{ \text{6-}\bigcirc\text{7-}8 \frac{\delta \text{2-}\bigcirc\text{q-}4}{\delta \text{5-}4} \right\}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Wie auch schon früher, werden die Rechnungen bei höheren Ordnungen arbeits- und platzintensiver. Deswegen verzichten wir hier auf deren Ausführung und verweisen statt dessen auf deren Ergebnisse in den nachfolgenden Tabellen 10 und 11.









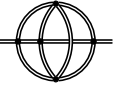


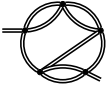
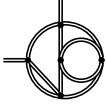


p								
1	#1.1 $\frac{1}{2}$  (0,0;2)							
2	#2.1 $\frac{1}{6}$  (0,1;2)							
3	#3.1 $\frac{1}{4}$  (2,0;2)							
4	#4.1 $\frac{1}{8}$ (3,0;2)		#4.2 $\frac{1}{4}$ (1,0;2)		#4.3 $\frac{1}{4}$ (2,0;2)			
5	#5.1 $\frac{1}{16}$ (4,0;2)		#5.2 $\frac{1}{6}$ (0,0;2)		#5.3 $\frac{1}{2}$ (2,0;1)		#5.4 $\frac{1}{2}$ (1,0;2)	
	#5.5 $\frac{1}{4}$ (3,0;1)		#5.6 $\frac{1}{4}$ (2,0;1)		#5.7 $\frac{1}{4}$ (2,0;2)		#5.8 $\frac{1}{8}$ (2,0;2)	

Tabelle 10: Zwei-Teilchen-irreduzible Diagramme der Linien-Legendre-transformierten Selbstenergie mit deren relativen Gewichten in der ϕ^4 -Theorie bis zur fünften Vertexordnung. In dem Dreier-Tupel $(D, T; N)$ entsprechen D und T der Anzahl der Doppel- und Tripel-Bindungen und N dem Symmetriegrad.

p				
1	#1.1 1 (0,0;24)			
2	#2.1 3/2 (1,0;8)			
3	#3.1 3/4 (2,0;8)	#3.2 3 (1,0;4)		
4	#4.1 3/8 (3,0;8)	#4.2 1 (0,0;24)	#4.3 3/2 (2,0;4)	#4.4 3/4 (1,0;8)
	#4.5 3/2 (2,0;4)	#4.6 6 (1,0;2)	#4.7 3/2 (2,0;4)	
5	#5.1 3/16 (4,0;8)	#5.2 3 (0,0;8)	#5.3 6 (1,0;2)	#5.4 3/4 (2,0;4)
	#5.5 3 (2,0;2)	#5.6 3/4 (3,0;4)	#5.7 3/4 (2,0;8)	#5.8 3/4 (3,0;4)

5	#5.9 3/8 (2,0;8)		#5.10 3/2 (1,0;8)		#5.11 3/2 (1,0;4)		#5.12 6 (1,0;2)	
	#5.13 3 (2,0;2)		#5.14 3/2 (2,0;4)		#5.15 3/4 (3,0;4)		#5.16 6 (1,0;2)	
	#5.17 3 (2,0;2)		#5.18 3/2 (2,0;4)		#5.19 3 (0,0;4)		#5.20 6 (2,0;2)	
			#5.21 3/2 (3,0;4)		#5.22 3/2 (2,0;4)			

Tabelle 11: Diagramme der Linien-Legendre-transformierten ein-Teilchen-irreduziblen Vier-Punkt-Funktion mit deren relativen Gewichten in der ϕ^4 -Theorie bis zur fünften Vertexordnung. Im Dreier-Tupel $(D, T; N)$ sind D und T entsprechende Zahlen der Doppel- und Tripel-Bindungen und N ist der Symmetriegrad.

5.5 Vakuumdiagramme

Hier erzeugen wir die Graphen der Linien-Legendre-transformierten freien Energie Φ . Als Ausgangspunkt dient uns die Definitionsgleichung (5.4). Bei festgehaltener Vierer-Wechselwirkung V können wir unter Verwendung der Relation (2.51) die folgende Identität erhalten:

$$\frac{\delta\Phi[\mathbf{G}, V]}{\delta\mathbf{G}_{12}} \Big|_V = \frac{1}{2} G_{12}^{-1}[\mathbf{G}, V] . \quad (5.28)$$

Demnach gilt per Definition für Σ_{12} aus (3.9) und nach (3.4)

$$\int_3 \mathbf{G}_{13} \frac{\delta\Phi}{\delta\mathbf{G}_{23}} = \frac{1}{2} \delta_{12} + \frac{1}{2} \int_3 \mathbf{G}_{13} \Sigma_{32} , \quad (5.29)$$

wobei wir ab hier die funktionelle Abhängigkeit nicht mehr explizit ausschreiben. Weiterhin schreiben wir diese Identität entsprechend (5.6) in der Form

$$\int_3 \mathbf{G}_{13} \frac{\delta\Phi}{\delta\mathbf{G}_{23}} = \frac{1}{2} \delta_{12} - \frac{g}{4} \int_{345} \mathbf{G}_{13} V_{3245} \mathbf{G}_{45} + \frac{g}{12} \int_{3456789} \mathbf{G}_{13} V_{3456} \mathbf{G}_{47} \mathbf{G}_{58} \mathbf{G}_{69} \Gamma_{7892} \quad (5.30)$$

Zuerst betrachten wir das ungestörte Problem mit $g = 0$ und suchen dessen Lösung in der Form $\Phi = \Phi^{(0)}$. Es sollte dabei gelten

$$\int_3 \mathbf{G}_{13} \frac{\delta\Phi^{(0)}}{\delta\mathbf{G}_{23}} = \frac{1}{2} \delta_{12} . \quad (5.31)$$

Die Lösung dieser Gleichung finden wir bis auf eine additive Konstante als

$$\Phi^{(0)} = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathbf{G} \quad (5.32)$$

mit der abkürzenden Schreibweise

$$\text{Tr} \ln \mathbf{G} \equiv - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{1\dots n} (\delta_{12} - \mathbf{G}_{12}) \dots (\delta_{n-1,n} - \mathbf{G}_{n-1,n}) (\delta_{n1} - \mathbf{G}_{n1}) . \quad (5.33)$$

Die Reihendarstellung von \mathbf{G}^{-1} als Funktionalumkehrung von \mathbf{G} lautet

$$\mathbf{G}_{12}^{-1} = \delta_{12} + (\delta_{12} - \mathbf{G}_{12}) + \sum_{n=3}^{\infty} \int_{3\dots n} (\delta_{13} - \mathbf{G}_{13}) \dots (\delta_{n-1,n} - \mathbf{G}_{n-1,n}) (\delta_{n2} - \mathbf{G}_{n2}) , \quad (5.34)$$

und wir können feststellen, daß

$$\frac{\delta\Phi^{(0)}}{\delta\mathbf{G}_{12}} = \frac{1}{2} \mathbf{G}_{12}^{-1} \quad (5.35)$$

gilt. Aus dieser Identität sehen wir, daß $\Phi^{(0)}$ aus (5.32) tatsächlich der Bedingung (5.31) genügt.

Zur Lösung des allgemeinen Problems (5.30) spalten wir das Funktional Φ in seinen ungestörten Anteil $\Phi^{(0)}$ und den Wechselwirkungsanteil $\Phi^{(\text{int})}$ auf:

$$\Phi = \Phi^{(0)} + \Phi^{(\text{int})} . \quad (5.36)$$

Demnach können wir (5.30) unter Berücksichtigung von (5.31) umschreiben zu

$$\int_{12} \mathbf{G}_{12} \frac{\delta \Phi^{(\text{int})}}{\delta \mathbf{G}_{12}} = -\frac{g}{4} \int_{1234} \mathbf{G}_{12} V_{1234} \mathbf{G}_{34} + \frac{g}{12} \int_{12345678} V_{1234} \mathbf{G}_{15} \mathbf{G}_{26} \mathbf{G}_{37} \mathbf{G}_{48} \Gamma_{5678} . \quad (5.37)$$

Alternativ zu dieser Bestimmungsgleichung können wir noch eine weitere herleiten, indem wir (5.31) in (5.29) einsetzen. Das liefert uns dann

$$\int_{12} \mathbf{G}_{12} \frac{\delta \Phi^{(\text{int})}}{\delta \mathbf{G}_{12}} = \frac{1}{2} \int_{12} \mathbf{G}_{12} \Sigma_{21} . \quad (5.38)$$

Nun können wir zu den entsprechenden diagrammatischen Gleichungen übergehen. Hierzu führen wir noch zwei neue Bezeichnungen ein:

$$\Phi^{(0)} \equiv \frac{1}{2} \bigcirc \quad , \quad \Phi^{(\text{int})} \equiv \bigcirc \quad . \quad (5.39)$$

Die Bestimmungsgleichung (5.37) für $\Phi^{(\text{int})}$ fassen wir dann diagrammatisch auf als

$$\bigcirc_2^1 \frac{\delta \bigcirc}{\delta_{1=2}} = \frac{1}{4} \bigcirc \bigcirc + \frac{1}{12} \bigcirc \bigcirc \bigcirc \quad (5.40)$$

und die Bestimmungsgleichung (5.38) als

$$\bigcirc_2^1 \frac{\delta \bigcirc}{\delta_{1=2}} = \frac{1}{2} \bigcirc \bigcirc \quad . \quad (5.41)$$

Zur Lösung dieser Gleichungen machen wir den störungstheoretischen Ansatz

$$\Phi^{(\text{int})} = \sum_{p=1}^{\infty} \Phi^{(p)} , \quad (5.42)$$

der sich graphisch darstellen lässt als

$$\bigcirc = \sum_{p=1}^{\infty} \bigcirc_p \quad . \quad (5.43)$$

Die einzelnen Beiträge $\Phi^{(p)}$ enthalten dabei alle Diagramme der Linien-Legendre-transformierten freien Energie Φ in der p -ten Störungsordnung. Mit diesem Ansatz lassen sich die Ausdrücke auf der linken Seite von (5.40) und (5.41) leicht interpretieren. Es gilt nämlich, daß durch die Linienamputation und das anschließende Verkleben der entstandenen Lücke durch die gleiche Linie bei einem Diagramm lediglich dessen Linien gezählt werden, was wir auch

schon im ersten Kapitel für die einfachen Linien festgestellt haben. Diese Linienzahl N hängt aber auch hier von der Störungsordnung p ab und unterliegt bei den Vakuumdiagrammen der einfachen Regel $N = 2p$. Es gilt also

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right) \frac{\delta}{\delta_{1=2}} \text{ (Diagramm) } = \sum_{p=1}^{\infty} 2p \text{ (Diagramm } p \text{)} \quad (5.44)$$

und wir können (5.40) und (5.41) in Rekursionsgleichungen umformen. Diese lauten dann für $p = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{ (Diagramm } 1 \text{) } = \frac{1}{8} \text{ (Diagramm) } , \quad \text{ (Diagramm } p+1 \text{) } = \frac{1}{24(p+1)} \text{ (Diagramm } p \text{) }$$

(Rek. 14)

und alternativ dazu

$$\text{ (Diagramm } p \text{) } = \frac{1}{4p} \text{ (Diagramm) } .$$

(Rek. 15)

Beh. Alle Diagramme der freien Energie $\Phi^{(\text{int})}$ sind drei-Teilchen-irreduzibel.

Das bedeutet, ein nach (Rek. 14) oder (Rek. 15) gebildetes Vakuumdiagramm muss man schon vier mal aufschneiden, damit es zerfällt. Um diese Eigenschaft zu beweisen, erinnern wir uns noch an zwei Tatsachen:

- (*) Zwei (endlich viele) zusammenhängende Graphen ergeben zusammengeklebt einen zusammenhängenden Graph.
- (**). Alle Graphen der Selbstenergie $\Sigma_{12} = \Sigma_{12}[\mathbf{G}]$ sind zwei-Teilchen-irreduzibel (siehe Behauptung letzten Abschnittes **Beh.6**).

Beweis.

Die obige Behauptung beweisen wir nun nach Konstruktion mit Hilfe von (Rek. 15), indem wir das Ergebnis der dreifachen Linienamputation untersuchen. Nach (Rek. 15) entstehen Vakuumdiagramme durch das Schliessen beider Aussenstümmel der Selbstenergie mit einer vollen Linie. Bei den dreifachen Amputationen unterscheiden wir dabei zwischen zwei verschiedenen Fällen.

Fall 1.

Durch eine der Linienamputationen wird die Verbindungslinie zwischen den beiden Aussenstümmel der Selbstenergie entfernt. Zwei andere betreffen die Selbstenergie selbst. Nach (**) wissen wir aber, daß die zweifache Linienamputation auf dieser noch einen zusammenhängenden Rest hinterlässt. Der gesamte Ausdruck wird also ebenfalls zusammenhän-

gend sein.

Fall 2.

Die Verbindungslinie der beiden Selbstenergie-Aussenstümmel bleibt unberührt und dafür wird an der Selbstenergie $1 \text{---} \textcircled{p} \text{---} 2$ dreifach amputiert. Wir nehmen an, dass ein nach zweifacher Linienamputation wegen (**) noch zusammenhängender Graph A nun in zwei zusammenhängende Teilgraphen B und C zerfällt, da wir andernfalls nichts mehr zu zeigen hätten. Der Graph A ist ein Sechs-Punkt-Graph mit sechs Aussenstümmel. Somit sind B und C beide irgendwelche Vier-Punkt-Graphen, da der Fall, dass einer von denen ein Sechs- und der andere ein Zwei-Punkt-Graph sind, nicht auftreten kann. Sonst müsste mindestens einer der Aussenbeine von A kein echter Stümmel sein. Im ursprünglichen Graphen waren aber die B und C durch drei Linien miteinander verbunden, weil dieser zwei-Teilchen-irreduzibel war. Deswegen sollten B und C beide jeweils einen der Indizes 1 und 2 erhalten und durch den Graphen $1 \text{---} 2$ zu einer wegen (*) zusammenhängenden Einheit gebunden werden.

Beide möglichen Fälle führen also auf einen zusammenhängenden Rest, der durch dreifache Linienamputation der Φ -Graphen entsteht. Die letzteren sind also drei-Teilchen-irreduzibel. Somit sind wir fertig.

Jetzt versuchen wir, die ersten Vakuumdiagramme zu erzeugen. Aus (Rek. 14) können wir den einzigen Graph von $\Phi^{(1)}$ sofort ablesen:

$$\textcircled{1} = \frac{1}{8} \textcircled{\textcircled{\textcircled{}}} \quad (5.45)$$

Auch nach (Rek. 15) liesse sich dieses Resultat einfach bekommen. Weiterhin liefert uns (Rek. 15) mit dem Ergebnis aus (5.19) den Graphen von $\Phi^{(2)}$:

$$\textcircled{2} = \frac{1}{8} \textcircled{\textcircled{2}} = \frac{1}{48} 1 \text{---} 2 \text{---} 2 \text{---} 1 = \frac{1}{48} \textcircled{\textcircled{\textcircled{}}} \quad (5.46)$$

$\Phi^{(3)}$ erhalten wir analog dazu mit (5.22):

$$\textcircled{3} = \frac{1}{12} \textcircled{\textcircled{3}} = \frac{1}{48} \textcircled{\textcircled{\textcircled{\textcircled{}}}} \quad (5.47)$$















So könnten wir auch weiterhin verfahren, hier wenden wir jedoch (Rek. 14) an, um die Vakuumdiagramme für die nächste Ordnung zu erzeugen:

$$\textcircled{4} = \frac{1}{96} \textcircled{\textcircled{\textcircled{\textcircled{}}}} = \frac{1}{96} \begin{matrix} 1 & & 4 \\ & \text{---} & \\ 2 & & 3 \end{matrix} \left\{ \frac{3}{4} \begin{matrix} 4 & & 1 \\ & \text{---} & \\ 3 & & 2 \end{matrix} + 3 \begin{matrix} 1 & & 2 \\ & \text{---} & \\ 4 & & 3 \end{matrix} \right\} \quad (5.48)$$

Aufgrund der Anordnungssymmetrie konnten wir dabei die unsymmetrisierte Form für das Ergebnis (5.25) verwenden. Nach ausgeführter Anklebung lautet dann das Resultat

$$\textcircled{4} = \frac{1}{128} \textcircled{\textcircled{\textcircled{\textcircled{\textcircled{}}}}} + \frac{1}{32} \textcircled{\textcircled{\textcircled{\textcircled{\textcircled{\textcircled{}}}}} \quad (5.49)$$

Die Vakuumdiagramme aus (5.45)–(5.49) und die Resultate für zwei weitere Ordnungen werden in der nachfolgenden Tabelle 12 dargestellt. Auch hier sind die Darstellungen allerdings nicht eindeutig und liessen sich bis auf die Graphenisomorphie verändern.

p				
1	#1.1 $1/8$  $(0,0,0;1)$			
2	#2.1 $1/48$  $(0,0,1;2)$			
3	#3.1 $1/48$  $(3,0,0;6)$			
4	#4.1 $1/128$  $(4,0,0;8)$	#4.2 $1/32$  $(2,0,0;8)$		
5	#5.1 $1/320$  $(5,0,0;10)$	#5.2 $1/120$  $(0,0,0;120)$	#5.3 $1/16$  $(2,0,0;4)$	#5.4 $1/32$  $(3,0,0;4)$
6	#6.1 $1/768$  $(6,0,0;12)$	#6.2 $1/48$  $(0,0,0;48)$	#6.3 $1/64$  $(4,0,0;4)$	#6.4 $1/8$  $(2,0,0;2)$








6	#6.5 1/16 (3,0,0;2)		#6.6 1/32 (3,0,0;4)		#6.7 1/96 (3,0,0;12)		#6.8 1/128 (4,0,0;8)	
	#6.9 1/64 (2,0,0;16)		#6.10 1/16 (1,0,0;8)		#6.11 1/96 (3,0,0;12)			

Tabelle 12: Graphen der Linien-Legendre-transformierten freien Energie mit deren relativen Gewichten in der ϕ^4 -Theorie. Jedes Diagramm wird charakterisiert durch den Vierer-Tupel $(D, T, V; P)$, wobei D , T und V die jeweiligen Zahlen der Doppel-, Tripel- und Quadrupel-Bindungen sind und P die Zahl der formerhaltenden Vertex-Permutationen.

5.6 Rücktransformation für Σ_{12} und Γ_{1234}

In den vorherigen Abschnitten wurde die volle Zwei-Punkt-Funktion \mathbf{G}_{12} als eine elementare Struktureinheit angesehen. Als Resultat ergaben sich nur relativ wenige Graphen, was uns eine gewisse Übersichtlichkeit verschafft hat. Wir haben allerdings auch schon darauf aufmerksam gemacht, daß uns solche Graphen in Anwendungen wenig nützen, da man den geschlossenen Ausdruck für das Funktional \mathbf{G}_{12} nicht kennt. Man kann dieses aber störungstheoretisch angeben, wie wir schon im Kapitel 3 für ein-Teilchen-irreduzible und im Kapitel 4 für tadpolefreie Funktionen gesehen haben. Diese Darstellungen von \mathbf{G}_{12} sind aber schon ausreichend, um die ausrechenbaren Graphen der Funktionen $\Sigma_{12} = \Sigma_{12}[G, V]$ und $\Gamma_{1234} = \Gamma_{1234}[G, V]$ bzw. $\tilde{\Sigma}_{12} = \tilde{\Sigma}_{12}[\tilde{G}, V]$ und $\Gamma_{1234} = \Gamma_{1234}[\tilde{G}, V]$ aus deren Legendre-transformierten Partner zu gewinnen. Wichtig ist dabei, daß wir die störungstheoretische Darstellung für \mathbf{G}_{12} keineswegs a-priori kennen müssen, sondern diese wie im Kapitel 3 bzw. 4 mit Hilfe entsprechender Dyson-Gleichungen (3.19) bzw. (4.10) aus den bereits bekannten Selbstenergie-Graphen bestimmen können.

Wir versuchen nun, dieses Konzept Ordnung für Ordnung umzusetzen, und fangen zuerst mit den ein-Teilchen-irreduziblen Funktionen an. Für die erste Ordnung brauchen wir dabei, die volle Zwei-Punkt-Funktion \mathbf{G}_{12} nur bis zur nullten Ordnung zu kennen. Nach der Reihendarstellung für \mathbf{G}_{12} aus (2.68) mit dem Anfangswert $\mathbf{G}_{12}^{(0)}$ aus (Rek. 2) oder auch gleich nach (3.19) schreiben wir diese somit in der Form

$$1 \equiv 2 = 1 \text{---} 2 + \dots \quad (5.50)$$

Die Selbstenergie, explizit bis zur ersten Ordnung ausgeschrieben, lautet nach (3.38)

$$1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 = \frac{1}{2} \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \dots \quad (5.51)$$

und nach Einsetzen von (5.50) in diese

$$1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 = \frac{1}{2} \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \dots, \quad (5.52)$$

wobei wir hier noch die vollen und die einfachen Stümmel miteinander identifiziert haben. Setzen wir nun das Ergebnis aus (5.52) in die Gleichung (3.19) ein, so erhalten wir den folgenden Ausdruck:

$$1 \equiv 2 = 1 \text{---} 2 + \frac{1}{2} \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \dots \quad (5.53)$$

Zu bemerken sei hier, daß die volle Linie am Tadpole tatsächlich eine Linie ist und nicht mit einer einfachen zu identifizieren ist, wie das etwa bei einem Stümmel der Fall wäre. Der Ausdruck dafür wird der Gleichung (5.50) entnommen und ist bis zu dieser Genauigkeit tatsächlich eine einfache Linie. Das gilt aber nicht mehr für höhere Ordnungen. Hier stellen wir nun das folgende Ergebnis fest:

$$1 \equiv 2 = 1 \text{---} 2 + \frac{1}{2} \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \dots \quad (5.54)$$

Um die Selbstenergie bis zur zweiten Ordnung auszuwerten, schreiben wir das Ergebnis für die Legendre-transformierte Selbstenergie bis zu dieser Ordnung explizit an:

$$1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 = \frac{1}{2} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \frac{1}{6} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \dots, \quad (5.55)$$

und ersetzen nacheinander jede volle Linie durch den Ausdruck rechts in (5.54), wobei wir alle Graphen ab der zweiten Ordnung weglassen. Damit ergibt sich dann

$$\begin{aligned} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 &= \frac{1}{2} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \frac{1}{4} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \frac{1}{6} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \dots = \\ &= \frac{1}{2} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \frac{1}{4} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \frac{1}{6} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \dots. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Für die nächste Ordnung der vollen Zwei-Punkt-Funktion setzen wir (5.56) in (3.19) ein. Es ergibt sich somit

$$1 \text{---} \text{---} 2 = 1 \text{---} \text{---} 2 + \frac{1}{2} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \frac{1}{4} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \frac{1}{6} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \dots. \quad (5.57)$$

Nach Einsetzen des Resultates aus (5.54) und nach Weglassen der Graphen höherer als zweiter Ordnungen erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 \text{---} \text{---} 2 &= 1 \text{---} \text{---} 2 + \frac{1}{2} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \frac{1}{4} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 \\ &+ \frac{1}{4} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \frac{1}{6} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \dots. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Schreiben wir weiterhin Σ_{12} bis zur dritten Ordnung in der Form

$$1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 = \frac{1}{2} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \frac{1}{6} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \frac{1}{4} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \dots \quad (5.59)$$

aus, so liefert das sukzessive Ersetzen der vollen Linien durch deren Entwicklung (5.58)

$$\begin{aligned} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 &= \frac{1}{2} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \frac{1}{4} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \frac{1}{8} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \frac{1}{8} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \frac{1}{12} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 \\ &+ \frac{1}{6} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \frac{1}{12} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \frac{1}{4} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \dots = \\ &= \frac{1}{2} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \frac{1}{4} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \frac{1}{6} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \frac{1}{8} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \frac{1}{8} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 \\ &+ \frac{1}{12} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \frac{1}{4} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \frac{1}{4} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 + \dots. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Das Ergebnis aus (5.56) findet man auch hier wieder als einen Bestandteil. Diagramme aus (5.60) sind ihrerseits ein Bestandteil der Tabelle 4, wobei dort nach verschiedenen Ordnungen sortiert wurde. So ist es auch mit dem Ergebnis (5.58), der z.B. die Graphen von (5.54) beinhaltet und selbst in der Tabelle 2 wiederzufinden ist. Bei Γ_{1234} können wir auch bis zur dritten Ordnung gehen und schreiben dazu unsere Ergebnisse bis zu dieser Ordnung zusammenfassend als

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} &= \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} \right\} \\
 + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} \right\} \\
 + \frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \end{array} \right\} + \dots \quad (5.61)
 \end{aligned}$$

Nun können wir auch hier alle vollen Linien nacheinander durch den Ausdruck aus (5.54) ersetzen. Wir schreiben gleich das Ergebnis an:

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} &= \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} \right\} \\
 + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \end{array} \right\} + \frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \end{array} \right\} \\
 + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} \right\} + \dots \quad (5.62)
 \end{aligned}$$

Auf diese Graphen trafen wir auch schon nach verschiedenen Vertexordnungen vorsortiert in der Tabelle 5.

In völlig analoger Weise verfahren wir auch im Falle der tadpolefreien Funktionen $\tilde{\Sigma}_{12} = \tilde{\Sigma}_{12}[\tilde{G}, V]$ und $\Gamma_{1234} = \Gamma_{1234}[\tilde{G}, V]$. Sinngemäß gibt es hier aber einen Unterschied, nämlich sollte man hier anstatt Σ_{12} die modifizierte Funktion $\tilde{\Sigma}_{12}$ rücktransformieren. Für die letzte gilt mit der im Kapitel 4 verwendeten Bezeichnung

$$\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \equiv \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 2 \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \quad (5.63)$$

wobei wir uns hier an die Definitionsgleichung (4.4) erinnerten und der Form halber die Stümmel in volle Stümmeln umwandelten. Für die volle Zwei-Punkt-Funktion $\mathbf{G}_{12} = \mathbf{G}_{12}[\tilde{G}, V]$ verwenden wir jetzt die Darstellung (4.10), die in der nullten Ordnung ausgeschrieben lautet

$$\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 2 \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 2 \end{array} + \dots \quad (5.64)$$

Die Selbstenergie $\tilde{\Sigma}_{12}$, in der niedrigsten Ordnung explizit angegeben, lautet nun nach dem Wegfahlen des Tadpoles wegen (5.63)

$$1 \text{---} \text{flower} \text{---} 2 = \frac{1}{6} 1 \text{---} \text{circle} \text{---} 2 + \dots \quad (5.65)$$

Nach sukzessivem Einsetzen von (5.64) bekommen wir daraus

$$1 \text{---} \text{flower} \text{---} 2 = \frac{1}{6} 1 \text{---} \text{cloud} \text{---} 2 + \dots \quad (5.66)$$

Daraus resultiert sich dann nach (4.10) die volle Zwei-Punkt-Funktion als

$$1 \text{---} \text{line} \text{---} 2 = 1 \text{---} \text{wavy} \text{---} 2 + \frac{1}{6} 1 \text{---} \text{cloud} \text{---} 2 + \dots = 1 \text{---} \text{wavy} \text{---} 2 + \frac{1}{6} 1 \text{---} \text{cloud} \text{---} 2 + \dots \quad (5.67)$$

Berücksichtigen wir auch die nächste Ordnung, so können wir die Selbstenergie schreiben als

$$1 \text{---} \text{flower} \text{---} 2 = \frac{1}{6} 1 \text{---} \text{circle} \text{---} 2 + \frac{1}{4} 1 \text{---} \text{triangle} \text{---} 2 + \dots \quad (5.68)$$

Nach dem Ersetzen der vollen Linien durch deren Entwicklung aus (5.67) und nach dem Weglassen aller Graphen ab der dritten Ordnung gilt dann

$$1 \text{---} \text{flower} \text{---} 2 = \frac{1}{6} 1 \text{---} \text{cloud} \text{---} 2 + \frac{1}{4} 1 \text{---} \text{cloud} \text{---} 2 + \dots \quad (5.69)$$

Wie man sieht, tauchen hier noch keine neue Diagramme auf. Daß dies aber nicht immer so ist, können wir bei der nächsten Ordnung feststellen. Zunächst erwähnen wir jedoch noch vollständigkeithalber das Ergebnis der Zwei-Punkt-Funktion \mathbf{G}_{12} bis zur dritten Ordnung:

$$\begin{aligned} 1 \text{---} \text{line} \text{---} 2 &= 1 \text{---} \text{wavy} \text{---} 2 + \frac{1}{6} 1 \text{---} \text{cloud} \text{---} 2 + \frac{1}{4} 1 \text{---} \text{cloud} \text{---} 2 + \dots = \\ &= 1 \text{---} \text{wavy} \text{---} 2 + \frac{1}{6} 1 \text{---} \text{cloud} \text{---} 2 + \frac{1}{4} 1 \text{---} \text{cloud} \text{---} 2 + \dots \end{aligned} \quad (5.70)$$

Die Selbstenergie wird bis einschliesslich vierter Ordnung dargestellt als

$$\begin{aligned} 1 \text{---} \text{flower} \text{---} 2 &= \frac{1}{6} 1 \text{---} \text{circle} \text{---} 2 + \frac{1}{4} 1 \text{---} \text{triangle} \text{---} 2 + \frac{1}{4} 1 \text{---} \text{circle} \text{---} 2 \\ &+ \frac{1}{4} 1 \text{---} \text{circle} \text{---} 2 + \frac{1}{8} 1 \text{---} \text{circle} \text{---} 2 + \dots \end{aligned} \quad (5.71)$$

Das Einsetzen von (5.70) ergibt nach dem Fortlassen der Graphen ab der fünften Ordnungen das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned} 1 \text{---} \text{flower} \text{---} 2 &= \frac{1}{6} 1 \text{---} \text{cloud} \text{---} 2 + \frac{1}{4} 1 \text{---} \text{cloud} \text{---} 2 + \frac{1}{12} 1 \text{---} \text{cloud} \text{---} 2 + \frac{1}{4} 1 \text{---} \text{cloud} \text{---} 2 \\ &+ \frac{1}{4} 1 \text{---} \text{cloud} \text{---} 2 + \frac{1}{8} 1 \text{---} \text{cloud} \text{---} 2 + \dots \end{aligned} \quad (5.72)$$

Wie wir sehen, ist hier ein einziger Graph neu dazugekommen, bei höheren Ordnungen treten noch mehr neue Graphen auf. Nicht viel anders sieht es auch bei der ein-Teilchen-irreduziblen Vier-Punkt-Funktion Γ_{1234} aus. Bis zur dritten Vertexordnung haben wir diese bereits mit (5.61) ausgeschrieben. Das Ersetzen aller vollen Linien durch deren störungstheoretische Darstellung aus (5.70) und aller vollen Stümmel durch die gewellten (es gibt ja keinen Unterschied) würde uns die Entwicklung

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \diagup \\ 4 \end{array} &= \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} \right\} \\
 &+ \frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \end{array} \right\} \\
 &+ \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} \right\} + \dots \quad (5.73)
 \end{aligned}$$

liefern, wobei wir hier alle Graphen ab der vierten Ordnung weggelassen haben. Bei den Graphen bis zur dritten Ordnung gibt es strukturell also noch keinen Unterschied zu den Legendre-transformierten Graphen festzustellen. Diese Situation ändert sich erst bei der nächsthöheren vierten Vertexordnung, aus Platzgründen verzichten wir jedoch in diesem Fall auf die explizite Ausführung des Generierungsprozesses. Statt dessen verweisen wir auf das in der Tabelle 8 aufgeführte Ergebnis und auf den Vergleich mit Diagrammen aus der Tabelle 10. Die Resultate aus (5.70) und (5.72) sind entsprechend in den Tabellen 7 und 6 wiederzufinden.

Abschliessend müssen wir noch einige Bemerkungen machen. In der eben beschriebenen Ausführung kamen Ergebnisse niedriger Ordnungen in denen der höheren Ordnungen vor, so waren z.B. zwei von sechs Diagrammen aus (5.72) auch schon aus (5.69) bekannt. Bei den höheren Ordnungen könnte diese Ergebniswiederholung sogar noch lästiger werden und es empfiehlt sich, nur die Graphen der interessierenden Ordnungen zu berücksichtigen.

Um die Bedeutung der Legendre-transformierten Funktionen zu verdeutlichen, bemerken wir noch, daß deren Graphen strukturell wirklich neu sind. Alle anderen, und das sind letztlich die meisten, sind aus diesen auf eine relativ einfache Weise zu bekommen, und zwar durch Ersetzen deren Linien durch etwas kompliziertere Zwei-Punkt-Graphen.

5.7 Rücktransformation für die freie Energie

In diesem Abschnitt werden wir versuchen, die Vakuumdiagramme der negativen freien Energie W aus denen der Funktion Φ zu gewinnen. Dazu bemerken wir, daß nach (5.4) zusammen mit (5.36) gilt

$$W = \Phi^{(0)} + \Phi^{(\text{int})} - \frac{1}{2} \int_{12} G_{12}^{-1} \mathbf{G}_{21} \quad . \quad (5.74)$$

Zuerst müssen wir den Term $\Phi^{(0)}$ etwas eingehender untersuchen und stellen dazu mit Hilfe von (3.16) die Identität

$$\mathbf{G}_{12} = \int_3 G_{13} \left\{ \delta_{32} + \int_4 \Sigma_{34} \mathbf{G}_{42} \right\} \quad (5.75)$$

fest. Demnach faktorisiert die volle Zwei-Punkt-Funktion \mathbf{G} in den freien Propagator G und einen Rest und wir können somit eine wichtige Reihendarstellung herleiten:

$$\text{Tr} \ln \mathbf{G} = \text{Tr} \ln G - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \int_{12\dots 2n} \Sigma_{12} \mathbf{G}_{23} \Sigma_{34} \dots \mathbf{G}_{2n,1} \quad (5.76)$$

Diese dient uns gleichzeitig als eine Umformungsregel. Dazu erinnern wir uns noch an die Gleichung $\ln G = -\ln G^{-1}$ und an (2.8) mit (5.32) und schreiben (5.76) um zu

$$\Phi^{(0)} = W^{(0)} + \frac{1}{2} \int_{12} \Sigma_{12} \mathbf{G}_{21} - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \int_{12\dots 2n} \Sigma_{12} \mathbf{G}_{23} \Sigma_{34} \dots \mathbf{G}_{2n,1} \quad (5.77)$$

Bei dem letzten Term aus (5.74) erinnern wir uns an (3.4) und (3.9) und schreiben dafür

$$\int_{12} G_{12}^{-1} \mathbf{G}_{21} = \int_1 \delta_{11} + \int_{12} \Sigma_{12} \mathbf{G}_{21} \quad (5.78)$$

Wir bemerken, daß der erste Summand lediglich eine additive Konstante darstellt. Deshalb wird er im folgenden ausser Acht gelassen, wie es auch schon bei den additiven Konstanten in den Lösungsansätzen (2.8) und (5.32) geschehen ist. Demnach können wir aus (5.74) unter Berücksichtigung (5.77) die Gleichung

$$W^{(\text{int})} = \Phi^{(\text{int})} - \Delta W^{(\text{int})} \quad (5.79)$$

mit der Abkürzung

$$\Delta W^{(\text{int})} \equiv \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \int_{12\dots 2n} \Sigma_{12} \mathbf{G}_{23} \Sigma_{34} \dots \mathbf{G}_{2n,1} \quad (5.80)$$

ablesen, wobei $W^{(\text{int})}$ den Wechselwirkungsanteil der negativen freien Energie aus der Definitionsgleichung (2.12) bedeuten soll. Mit Hilfe dieser Identität versuchen wir nun, Diagramme von $W^{(\text{int})}$ z.B. bis zur dritten Ordnung zu erhalten. Die $\Phi^{(\text{int})}$ -Anteile sind dabei aus der Kenntnis deren Graphen bis zu dieser Ordnung zu bestimmen, in diesem Fall also aus

$$\bigcirc = \frac{1}{8} \bigcirc\bigcirc + \frac{1}{48} \bigcirc\bigcirc\bigcirc + \frac{1}{48} \bigcirc\bigcirc\bigcirc + \dots \quad (5.81)$$

Durch sukzessives Ersetzen der vollen Linien durch deren Darstellung aus (5.58) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} &= \frac{1}{8} \text{Diagram} + \frac{1}{16} \text{Diagram} + \frac{1}{32} \text{Diagram} + \frac{1}{32} \text{Diagram} \\
 &+ \frac{1}{48} \text{Diagram} + \frac{1}{48} \text{Diagram} + \frac{1}{96} \text{Diagram} + \frac{1}{48} \text{Diagram} + \dots = \\
 &= \frac{1}{8} \text{Diagram} + \frac{1}{8} \text{Diagram} + \frac{1}{48} \text{Diagram} + \frac{3}{32} \text{Diagram} \\
 &+ \frac{1}{16} \text{Diagram} + \frac{1}{12} \text{Diagram} + \frac{1}{48} \text{Diagram} + \dots . \tag{5.82}
 \end{aligned}$$

Wie man durch Vergleich mit der Tabelle 1 unschwer erkennt, sind das schon alle richtige Vakuumdiagramme bis zur dritten Ordnung, sie treten aber mit falschen Gewichten auf. Für deren Korrektur ist der zweite Term von (5.79) verantwortlich. Bis zur dritten Ordnung ausgeschrieben lautet dieser

$$\Delta W^{(\text{int})} = \frac{1}{4} \int_{1234} \Sigma_{12} \mathbf{G}_{23} \Sigma_{34} \mathbf{G}_{41} - \frac{1}{6} \int_{123456} \Sigma_{12} \mathbf{G}_{23} \Sigma_{34} \mathbf{G}_{45} \Sigma_{56} \mathbf{G}_{61} + \dots . \tag{5.83}$$

Hierbei berücksichtigen wir, daß die Selbstenergie mit der ersten Ordnung anfängt, deswegen würden alle weiteren Terme nur zu höheren als dritter Ordnung beitragen. Diese Gleichung kann man diagrammatisch illustrieren als

$$\Delta \text{Diagram} = \frac{1}{4} \text{Diagram} - \frac{1}{6} \text{Diagram} + \dots . \tag{5.84}$$

Das sukzessive Ersetzen der vollen Linien und der Selbstenergie durch die jeweiligen Reihendarstellungen liefert dann

$$\begin{aligned}
 \Delta \text{Diagram} &= \frac{1}{4} \text{Diagram} + \frac{1}{4} \text{Diagram} - \frac{1}{6} \text{Diagram} + \dots = \\
 &= \frac{1}{8} \text{Diagram} + \frac{1}{16} \text{Diagram} + \frac{1}{24} \text{Diagram} + \frac{1}{8} \text{Diagram} - \frac{1}{12} \text{Diagram} + \dots = \\
 &= \frac{1}{16} \text{Diagram} + \frac{1}{16} \text{Diagram} + \frac{1}{24} \text{Diagram} + \frac{1}{24} \text{Diagram} + \dots . \tag{5.85}
 \end{aligned}$$

Durch (5.79) zusammengefasst, ergibt sich dann mit den Ergebnissen (5.82) und (5.85)

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} &= \frac{1}{8} \text{Diagram} + \frac{1}{16} \text{Diagram} + \frac{1}{48} \text{Diagram} + \frac{1}{32} \text{Diagram} \\
 &+ \frac{1}{48} \text{Diagram} + \frac{1}{24} \text{Diagram} + \frac{1}{48} \text{Diagram} + \dots . \tag{5.86}
 \end{aligned}$$

Dieses Resultat steht nun in völliger Übereinstimmung mit denen aus früheren Rechnungen und ist so auch in der Tabelle 1 festgehalten worden. Die Wiederherstellung der W -Graphen aus denen der Legendre-transformierten freien Energie Φ ist, wie man sehen konnte, wohl nicht die bequemste Art, diese zu erzeugen, ist aber trotzdem möglich. Erfreulicher erscheint da der Umstand, daß man aus denselben Φ -Graphen auch die tadpolefreien Vakuumdiagramme erhalten kann.

Dazu müssen wir jedoch etwas Vorarbeit leisten. Das entsprechende Funktional ist in diesem Fall \tilde{W} und ist mit (4.71) definiert. Nach (5.74) ergibt sich dieses Funktional zu

$$\tilde{W} = \Phi^{(0)} + \Phi^{(\text{int})} - \frac{1}{2} \int_{12} G_{12}^{-1} \mathbf{G}_{21} - \frac{g}{8} \int_{1234} \mathbf{G}_{12} V_{1234} \mathbf{G}_{34} . \quad (5.87)$$

Mit Hilfe der Dyson-Gleichung (4.11) stellen wir zuerst die Identität

$$\mathbf{G}_{12} = \int_3 \tilde{G}_{13} \left\{ \delta_{32} + \int_4 \tilde{\Sigma}_{34} \mathbf{G}_{42} \right\} \quad (5.88)$$

fest und erhalten daraus die Reihenentwicklung

$$\text{Tr} \ln \mathbf{G} = \text{Tr} \ln \tilde{G} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \int_{12\dots 2n} \tilde{\Sigma}_{12} \mathbf{G}_{23} \tilde{\Sigma}_{34} \dots \mathbf{G}_{2n,1} . \quad (5.89)$$

Durch den Vergleich mit Resultaten aus (4.79) und (5.32) können wir dafür auch schreiben

$$\Phi^{(0)} = \tilde{W}^{(0)} + \frac{1}{2} \int_{12} \tilde{\Sigma}_{12} \mathbf{G}_{21} - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \int_{12\dots 2n} \tilde{\Sigma}_{12} \mathbf{G}_{23} \tilde{\Sigma}_{34} \dots \mathbf{G}_{2n,1} . \quad (5.90)$$

Der zweite Summand auf der rechten Seite lässt sich laut (4.2) auch schreiben als

$$\frac{1}{2} \int_{12} \tilde{\Sigma}_{12} \mathbf{G}_{21} = \frac{1}{2} \int_{12} \Sigma_{12} \mathbf{G}_{21} + \frac{g}{4} \int_{1234} \mathbf{G}_{12} V_{1234} \mathbf{G}_{34} . \quad (5.91)$$

Daraus ergibt sich dann zusammen mit (5.78) nach Fortlassen der hier unwichtigen additiven Konstante $\int_1 \delta_{11}$

$$\frac{1}{2} \int_{12} \tilde{\Sigma}_{12} \mathbf{G}_{21} - \frac{1}{2} \int_{12} G_{12}^{-1} \mathbf{G}_{21} = \frac{g}{4} \int_{1234} \mathbf{G}_{12} V_{1234} \mathbf{G}_{34} . \quad (5.92)$$

Direktes Einsetzen von (5.90) und (5.92) in (5.87) ergibt dann zusammen mit der Zerlegung (4.84) die endgültige Bestimmungsgleichung für die tadpoleleose freie Energie

$$\tilde{W}^{(\text{int})} = \check{\Phi}^{(\text{int})} - \Delta \tilde{W}^{(\text{int})} , \quad (5.93)$$

wobei wir an dieser Stelle noch die beiden Abkürzungen

$$\Delta \tilde{W}^{(\text{int})} \equiv \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \int_{12\dots 2n} \tilde{\Sigma}_{12} \mathbf{G}_{23} \tilde{\Sigma}_{34} \dots \mathbf{G}_{2n,1} \quad (5.94)$$

und

$$\tilde{\Phi}^{(\text{int})} \equiv \Phi^{(\text{int})} + \frac{g}{8} \int_{1234} \mathbf{G}_{12} V_{1234} \mathbf{G}_{34} \quad (5.95)$$

verwendeten. Die letzteren bezeichnen wir diagrammatisch z.B. als

$$\Delta \tilde{W}^{(\text{int})} \equiv \Delta \text{ (diagram) } , \quad \tilde{\Phi}^{(\text{int})} \equiv \text{ (diagram) } . \quad (5.96)$$

Nun sind wir auch tatsächlich in der Lage, die tadpoleleose Vakuumdiagramme aus den Φ -Diagrammen wiederzugewinnen, was wir explizit bis zur vierten Vertexordnung zeigen. Mit der Definition (5.95) entnehmen wir den Ergebnissen aus dem letzten Abschnitt die $\tilde{\Phi}^{(\text{int})}$ -Darstellung in der Form

$$\begin{aligned} & \text{ (diagram) } \equiv \text{ (diagram) } - \frac{1}{8} \text{ (diagram) } = \\ & = \frac{1}{48} \text{ (diagram) } + \frac{1}{48} \text{ (diagram) } + \frac{1}{128} \text{ (diagram) } + \frac{1}{32} \text{ (diagram) } + \dots \end{aligned} \quad (5.97)$$

Ersetzen wir die vollen Linien durch die störungstheoretische Variante (5.70) und schreiben nur Graphen bis zu vierter Ordnung aus, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \text{ (diagram) } = \frac{1}{48} \text{ (diagram) } + \frac{1}{72} \text{ (diagram) } + \frac{1}{48} \text{ (diagram) } \\ & + \frac{1}{128} \text{ (diagram) } + \frac{1}{32} \text{ (diagram) } + \dots \end{aligned} \quad (5.98)$$

Für den Korrekturterm $\Delta \tilde{W}^{(\text{int})}$ schreiben wir wegen (5.94)

$$\Delta \text{ (diagram) } = \frac{1}{4} \text{ (diagram) } - \dots , \quad (5.99)$$

wobei wir hier berücksichtigten, daß die tadpolefreie Selbstenergie $\tilde{\Sigma}_{12}$ mit der zweiten Vertexordnung beginnt und alle weiteren Entwicklungsterme von (5.94) deswegen mindestens von der sechsten Ordnung sein müssen. Der Korrekturterm wird mit Hilfe von (5.70) und (5.72) bis zur vierten Ordnung ausgewertet mit dem Ergebnis

$$\Delta \text{ (diagram) } = \frac{1}{144} \text{ (diagram) } + \dots \quad (5.100)$$

Die tadpoleleose freie Energie ergibt sich anschliessend aus (5.93) mit (5.98) und (5.100) zu

$$\begin{aligned} & \text{ (diagram) } = \frac{1}{48} \text{ (diagram) } + \frac{1}{48} \text{ (diagram) } + \frac{1}{144} \text{ (diagram) } \\ & + \frac{1}{128} \text{ (diagram) } + \frac{1}{32} \text{ (diagram) } + \dots \end{aligned} \quad (5.101)$$

Dieses Resultat stimmt nun auch mit dem aus dem vorhergehenden Kapitel überein (siehe Tabelle 9 auf Seite 91).

Zusammenfassend stellen wir noch mittels der Ergebnisse aus (5.86) und (5.101) fest, daß die Graphen der Funktion $\Phi^{(\text{int})}$ bzw. $\tilde{\Phi}^{(\text{int})}$ die wirklich neuen Graphen von $W^{(\text{int})}$ bzw. $\tilde{W}^{(\text{int})}$ in den jeweiligen Ordnungen darstellen. Diese bedürfen auch keiner anschließenden Korrektur deren Gewichte. Die restlichen Vakuumdiagramme können aus Φ -Graphen niedrigerer Ordnungen gewonnen werden, für diese reicht aber die reine Linienersetzung durch kompliziertere Zwei-Punkt-Graphen in der Regel noch nicht aus. Deren Gewichte müssen anschließend noch korrigiert werden. Dies ist eine neue Situation, die erst durch die Legendre-Rücktransformation in Bezug auf die Vakuumdiagramme ins Spiel kommt.

Kapitel 6

Vertex-Legendre-Transformation

Im vorangegangenen Kapitel haben wir im Rahmen der Linien-Legendre-Transformation den freien Propagator G_{12} in seiner Rolle als unabhängige Variable durch die volle Paar-Korrelationsfunktion \mathbf{G}_{12} ersetzt. Dies führte zur deutlichen Reduzierung der Graphenzahl. Der Vierer-Vertex V_{1234} behielt jedoch dort seine Bedeutung als unabhängige Variable. Eine weitere Fortsetzung unseres Bestrebens nach Reduktion der Graphenzahl ist nun konsequenterweise die Ablösung dieses Vierer-Vertex V_{1234} durch die volle ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktion $\mathbf{\Gamma}_{1234}$. In diesem Kapitel werden wir die diagrammatische Darstellung der Funktion $\mathbf{\Gamma}_{1234}$, manchmal auch als der volle Vertex bezeichnet, als eine elementare graphische Einheit betrachten. Dabei werden wir versuchen, die Graphen der Selbstenergie, des Vierer-Vertex und der Vakuumenergie mit vollen Linien und vollen Vertizes aufzubauen. Es wird sich zeigen, daß sich die so konstruierten Graphen in zwei Gruppen unterteilen lassen. Die Graphen der ersten Gruppe enthalten keine Linien- und keine Vertexkorrekturen mehr und werden deshalb auch Skelett-Diagramme genannt. Die Graphen der zweiten Gruppe sind keine Skelett-Diagramme im eigentlichen Sinne und haben im Falle der Selbstenergie und der Vakuumenergie eine gewisse Ringstruktur und im Falle des Vierer-Vertex eine kettenähnliche Form. Eine Besonderheit dieses Kapitels besteht darin, daß die Graphen der ersten Gruppe mit negativen Vorzeichen auftreten werden und die der zweiten Gruppe ihr Vorzeichen von einer Ordnung zur anderen wechseln. Dieser letzte Umstand wirkt sich äusserst negativ auf unserer Vorgehensweise aus und ist letztlich auch dafür verantwortlich, daß wir in diesem Kapitel keine effizienten graphischen Rekursionen erhalten werden.

6.1 Definitionen

Die Definition der Selbstenergie braucht auch in diesem Kapitel nicht geändert zu werden, es wird sich jedoch als sinnvoll herausstellen, anstatt der Selbstenergie Σ_{12} deren tadpolelose Modifikation $\tilde{\Sigma}_{12}$ zu verwenden. Diese ist durch (4.2) bereits eingeführt und wird in diesem Kapitel in der Form $\tilde{\Sigma}_{12} = \tilde{\Sigma}_{12}[\mathbf{G}, \mathbf{\Gamma}]$ behandelt. Der Vierer-Vertex wird nun als eine Funktion des vollen Vertex und der vollen Linie aufgefasst, ist also durch $V_{1234} = V_{1234}[\mathbf{G}, \mathbf{\Gamma}]$

gegeben. Im weiteren Verlauf wird oft eine Funktion $\gamma_{1234} = \gamma_{1234}[\mathbf{G}, \mathbf{\Gamma}]$ verwendet, die mit der Gleichung

$$-\gamma_{1234} \equiv -g V_{1234} + \mathbf{\Gamma}_{1234} \quad (6.1)$$

definiert ist und graphisch wie folgt dargestellt wird:

$$-\gamma_{1234} \equiv \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 4 \end{array} . \quad (6.2)$$

Die Vakuumenergie wird in diesem Kapitel durch ein Funktional $\Lambda = \Lambda[\mathbf{G}, \mathbf{\Gamma}]$ repräsentiert, das sich als eine Legendre-Transformierte des Funktionals Φ aus dem letzten Kapitel bezüglich des Vertex ergibt. Diese genügt dann der Legendre-Identität

$$\Lambda[\mathbf{G}, \mathbf{\Gamma}] \equiv \Phi[\mathbf{G}, V[\mathbf{G}, \mathbf{\Gamma}]] - \int_{1234} \frac{\delta\Phi[\mathbf{G}, V[\mathbf{G}, \mathbf{\Gamma}]]}{\delta V_{1234}[\mathbf{G}, \mathbf{\Gamma}]} V_{1234}[\mathbf{G}, \mathbf{\Gamma}] . \quad (6.3)$$

Um den Ableitungsterm im letzten Summanden auszuwerten, benutzen wir den folgenden Zusammenhang:

$$\left. \frac{\delta\Phi[\mathbf{G}, V]}{\delta V_{1234}} \right|_{\mathbf{G}} = \left. \frac{\delta W[G^{-1}, V]}{\delta V_{1234}} \right|_{G^{-1}} , \quad (6.4)$$

der sich aus (5.4) unter Verwendung der Relation (2.51) ergibt. Um die Vertexableitung der freien Energie W berechnen zu können, erinnern wir uns an deren Definition (2.5). Mit der Zustandssumme (2.3) und mit dem Energiefunktional (1.2) ergibt sich

$$\frac{\delta W}{\delta V_{1234}} = -\frac{g}{24} \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 e^{-E[\phi]} . \quad (6.5)$$

Nach (2.34), (2.48) und (3.3) lässt sich dieses Ergebnis umschreiben als

$$\frac{\delta W}{\delta V_{1234}} = -\frac{g}{24} \{ \mathbf{G}_{12} \mathbf{G}_{34} + \mathbf{G}_{13} \mathbf{G}_{24} + \mathbf{G}_{14} \mathbf{G}_{23} \} + \frac{g}{24} \int_{5678} \mathbf{G}_{15} \mathbf{G}_{26} \mathbf{G}_{37} \mathbf{G}_{48} \mathbf{\Gamma}_{5678} . \quad (6.6)$$

Setzen wir dieses Resultat unter Berücksichtigung von (6.4) in (6.3) ein, so erhalten wir für das gesuchte Funktional der Vertex-Legendre-transformierten freien Energie

$$\begin{aligned} \Lambda[\mathbf{G}, \mathbf{\Gamma}] &= \Phi[\mathbf{G}, V[\mathbf{G}, \mathbf{\Gamma}]] + \frac{g}{8} \int_{1234} \mathbf{G}_{12} V_{1234}[\mathbf{G}, \mathbf{\Gamma}] \mathbf{G}_{34} \\ &\quad - \frac{g}{24} \int_{12345678} V_{1234}[\mathbf{G}, \mathbf{\Gamma}] \mathbf{G}_{15} \mathbf{G}_{26} \mathbf{G}_{37} \mathbf{G}_{48} \mathbf{\Gamma}_{5678} . \end{aligned} \quad (6.7)$$

Eine weitere Besonderheit dieses Kapitels besteht darin, daß hier ausser einer bereits bekannten Amputation einer vollen Linie auch eine Vertexamputation vorkommt. Diese basiert auf der Funktionalidentität

$$\frac{\delta \mathbf{\Gamma}_{1234}}{\delta \mathbf{\Gamma}_{5678}} = \frac{1}{24} \{ \delta_{15} \delta_{26} \delta_{37} \delta_{48} + 23 \text{ Permutationen} \} . \quad (6.8)$$

Dies ist eine symmetrisierte Form, für die $4! = 24$ verschiedenen Kombinationen von Delta-Produkten nötig sind, was wir ja in der oberen Gleichung in einer abgekürzten Form zum Ausdruck gebracht haben.

6.2 Bestimmungsgleichungen

Die Selbstenergie in seiner tadpolelosen Variante $\tilde{\Sigma}_{12}$ lässt sich unmittelbar der Gleichung (4.20) entnehmen. Der einzige Unterschied besteht darin, daß die Vierer-Wechselwirkung V_{1234} nun nicht mehr eine freie Variable darstellt, sondern eine Funktion $V_{1234} = V_{1234}[\mathbf{G}, \mathbf{\Gamma}]$ ist. Das können wir auch in der expliziten Form

$$\tilde{\Sigma}_{12}[\mathbf{G}, \mathbf{\Gamma}] = \frac{g}{6} \int_{345678} V_{1345}[\mathbf{G}, \mathbf{\Gamma}] \mathbf{G}_{36} \mathbf{G}_{47} \mathbf{G}_{58} \mathbf{\Gamma}_{6782} \quad (6.9)$$

auschreiben. Unter Berücksichtigung der Zerlegung (6.1) können wir diese Gleichung weiterhin umformen und erhalten so

$$\tilde{\Sigma}_{12}[\mathbf{G}, \mathbf{\Gamma}] = \frac{1}{6} \int_{345678} \mathbf{\Gamma}_{1345} \mathbf{G}_{36} \mathbf{G}_{47} \mathbf{G}_{58} \mathbf{\Gamma}_{6782} + \frac{1}{6} \int_{345678} \gamma_{1345} \mathbf{G}_{36} \mathbf{G}_{47} \mathbf{G}_{58} \mathbf{\Gamma}_{6782} \quad (6.10)$$

Die graphische Darstellung dieser Gleichung lautet

$$1 \text{---} \text{---} 2 = \frac{1}{6} 1 \text{---} \text{---} 2 + \frac{1}{6} 1 \text{---} \text{---} 2 \quad (6.11)$$

Aus dieser Schreibweise wird der Unterschied zu der analogen Gleichung (4.21) deutlich. Für die Gleichung (6.11) ist die Vierer-Wechselwirkung V_{1234} nicht mehr als elementare Einheit zu betrachten. Um diese zu bestimmen, können wir z.B. die Gleichung (5.13) heranziehen. Die dort vorkommenden Ableitungsterme $\delta\mathbf{\Gamma}_{8234}/\delta\mathbf{G}_{90}|_V$ gehen jedoch von der Kenntnis der $\mathbf{\Gamma}$ -Graphen aus, die mit den vollen Linien \mathbf{G} und mit den V -Vertizes aufgebaut sind. Solche Ableitungsterme können in diesem Kapitel nicht in dieser Form verwendet werden und bedürfen einer gesonderten Behandlung. Zuerst führen wir für diese Terme eine Sechspunkt-Funktion $\alpha_{1234,56}$ mit

$$\alpha_{1234,56} \equiv - \frac{\delta\mathbf{\Gamma}_{1234}[\mathbf{G}, V]}{\delta\mathbf{G}_{56}} \Big|_V \quad (6.12)$$

ein und bezeichnen diese diagrammatisch als

$$\alpha_{1234,56} \equiv \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \quad (6.13)$$

Bem. Bei diesen Bezeichnungen ist darauf zu achten, daß die Funktion $\alpha_{1234,56}$ nicht bezüglich aller Indizes symmetrisch ist. So liegt hier eine Symmetrie der Indizes 1, 2, 3 und 4 und ebenfalls der Indizes 5 und 6 vor, aber die Indizes 5 und 1 sind keinesfalls gleichzusetzen. Bei den Bezeichnungen der Funktion α berücksichtigen wir dies durch die Komma-Trennung des Indexpaares (5,6) von den Indizes (1,2,3,4).

Für eine eingehende Untersuchung der Funktion $\alpha_{1234,56}$ machen wir auf die Doppelrolle der Vierer-Wechselwirkung aufmerksam, die wir wie folgt zum Ausdruck bringen:

$$g V_{1234} = g V_{1234}[\mathbf{G}, \mathbf{\Gamma}[\mathbf{G}, V]] \quad (6.14)$$

Das können wir auch als eine implizite Gleichung für die volle ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktion Γ lesen. Es lassen sich aus dieser Gleichung weiterrreichende Informationen gewinnen, wenn wir die obere Gleichung nach der Paarkorrelationsfunktion ableiten und dabei die Vierer-Wechselwirkung V selbst festhalten. So ergibt sich die folgende Beziehung:

$$0 = g \frac{\delta V_{1234}[\mathbf{G}, \Gamma]}{\delta \mathbf{G}_{56}} \Big|_{\Gamma} + g \int_{7890} \frac{\delta V_{1234}[\mathbf{G}, \Gamma]}{\delta \Gamma_{7890}} \Big|_{\mathbf{G}} \frac{\delta \Gamma_{7890}[\mathbf{G}, V]}{\delta \mathbf{G}_{56}} \Big|_V . \quad (6.15)$$

Erinnern wir uns noch dabei an (6.1) und an die Funktionalableitung (6.8), so erhalten wir als Zwischenergebnisse

$$g \frac{\delta V_{1234}[\mathbf{G}, \Gamma]}{\delta \mathbf{G}_{56}} \Big|_{\Gamma} = \frac{\delta \gamma_{1234}[\mathbf{G}, \Gamma]}{\delta \mathbf{G}_{56}} \Big|_{\Gamma} , \quad (6.16)$$

$$g \frac{\delta V_{1234}[\mathbf{G}, \Gamma]}{\delta \Gamma_{7890}} \Big|_{\mathbf{G}} = \frac{\delta \gamma_{1234}[\mathbf{G}, \Gamma]}{\delta \Gamma_{7890}} \Big|_{\mathbf{G}} + \frac{1}{24} \{ \delta_{15} \delta_{26} \delta_{37} \delta_{48} + 23 \text{ Permutationen} \} \quad (6.17)$$

Mit diesen können wir die Gleichung (6.15) umformulieren als

$$- \frac{\delta \Gamma_{1234}[\mathbf{G}, V]}{\delta \mathbf{G}_{56}} \Big|_V = \frac{\delta \gamma_{1234}[\mathbf{G}, \Gamma]}{\delta \mathbf{G}_{56}} \Big|_{\Gamma} + \int_{7890} \frac{\delta \gamma_{1234}[\mathbf{G}, \Gamma]}{\delta \Gamma_{7890}} \Big|_{\mathbf{G}} \frac{\delta \Gamma_{7890}[\mathbf{G}, \Gamma]}{\delta \mathbf{G}_{56}} \Big|_V . \quad (6.18)$$

Nach der Definitionsgleichung (6.12) lässt sich (6.18) in der Form

$$\alpha_{1234,56} = \frac{\delta \gamma_{1234}}{\delta \mathbf{G}_{56}} \Big|_{\Gamma} - \int_{7890} \frac{\delta \gamma_{1234}}{\delta \Gamma_{7890}} \Big|_{\mathbf{G}} \alpha_{7890,56} \quad (6.19)$$

schreiben oder diagrammatisch auch als

$$\begin{array}{c} 4 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \quad \bigcirc \quad 5 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad \quad \quad 6 \\ | \\ 1 \end{array} = - \frac{\delta_1 \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagdown \quad \diagup \\ 4 \\ \hline 5 = 6 \end{array}}{\delta_5 = 6} - \frac{\delta_1 \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagdown \quad \diagup \\ 4 \\ \hline 9 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 8 \quad 0 \\ \hline 7 \end{array}}{\delta_8 \begin{array}{c} 9 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \quad \diagup \\ 8 \\ \hline 7 \end{array}} \begin{array}{c} 0 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 9 \quad \bigcirc \quad 5 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 8 \quad \quad \quad 6 \\ | \\ 7 \end{array} . \quad (6.20)$$

Diese Gleichung fassen wir nun als eine Selbstkonsistenzgleichung für die Funktion $\alpha_{1234,56}$ auf. Um zu zeigen, daß die Identität (6.19) bzw. (6.20) auch schon unseren Vorgaben hinsichtlich des Graphenaufbau genügt, greifen wir etwas vor und bemerken, daß der zweite Summand erst Beiträge ab der dritten Ordnung liefern kann, während der erste bereits mit der zweiten Ordnung beginnt. D.h. für die niederste (zweite) Ordnung der Funktion $\alpha_{1234,56}$ ist ausschliesslich der erste Term verantwortlich. Die dabei entstehenden Graphen sind aus vollen Linien und vollen Vertizes aufgebaut, haben also die richtige Form und können so für weitere Untersuchungen verwendet werden. Auch bei der nächsten (dritten) Ordnung ergeben sich aus dem ersten Summanden Graphen der richtigen Form. Dasselbe kann man auch über die von dem Term $\delta \gamma_{1234} / \delta \Gamma_{7890} \Big|_{\mathbf{G}}$ stammenden Graphen sagen. Die Graphen von $\alpha_{7890,56}$, die in der rechten Seite einzusetzen sind, sind diejenigen der zweiten Ordnung, die wir gerade auf der linken Seite von (6.19) erhalten haben und sind auch von der richtigen Form. Diese Argumentation kann man natürlich entsprechend fortsetzen. Die Quintessenz ist also, daß wir für die Funktion $\alpha_{1234,56}$ aufgrund des selbstkonsistenten Charakters der

Gleichung (6.19) stets legitim aufgebaute Diagramme erhalten. Diese können wir dann verwenden, um die Graphen der Vierer-Wechselwirkung V_{1234} zu bestimmen.

Dazu müssen wir die Bestimmungsgleichung (5.13) nach der Vierer-Wechselwirkung V auflösen und schreiben dazu unter Berücksichtigung der Definition (6.12)

$$\begin{aligned}
-g V_{1234} &= -\Gamma_{1234} + \frac{g}{3} \int_{567890} V_{1567} \mathbf{G}_{58} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \alpha_{8234,90} \\
&\quad - \frac{g}{6} \int_{567890\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} V_{1567} \mathbf{G}_{58} \mathbf{G}_{6\bar{1}} \mathbf{G}_{7\bar{2}} \Gamma_{\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}} \mathbf{G}_{\bar{3}9} \mathbf{G}_{\bar{4}0} \alpha_{8234,90} \\
&\quad - \frac{g}{2} \int_{5678} V_{1256} \mathbf{G}_{57} \mathbf{G}_{68} \Gamma_{7834} - \frac{g}{2} \int_{5678} V_{1356} \mathbf{G}_{57} \mathbf{G}_{68} \Gamma_{7824} - \frac{g}{2} \int_{5678} V_{1456} \mathbf{G}_{57} \mathbf{G}_{68} \Gamma_{7823} \\
&\quad + \frac{g}{6} \int_{567890\bar{1}\bar{2}} V_{5167} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \Gamma_{902\bar{1}} \mathbf{G}_{\bar{1}\bar{2}} \Gamma_{\bar{2}348} \mathbf{G}_{85} + \frac{g}{6} \int_{567890\bar{1}\bar{2}} V_{5167} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \Gamma_{903\bar{1}} \mathbf{G}_{\bar{1}\bar{2}} \Gamma_{\bar{2}248} \mathbf{G}_{85} \\
&\quad + \frac{g}{6} \int_{567890\bar{1}\bar{2}} V_{5167} \mathbf{G}_{69} \mathbf{G}_{70} \Gamma_{904\bar{1}} \mathbf{G}_{\bar{1}\bar{2}} \Gamma_{\bar{2}238} \mathbf{G}_{85} \quad . \quad (6.21)
\end{aligned}$$

Diese Identität können wir auch graphisch darstellen, tun dies aber nicht für die Vierer-Wechselwirkung V_{1234} selbst, sondern gleich für die Funktion γ_{1234} , die wir mit der Zerlegung (6.1) eingeführt haben. Mit den Bezeichnungen (6.2) und (6.13) erhalten wir dann aus (6.21)

$$\begin{aligned}
\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 4 \end{array} &= -\frac{1}{2} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 4 \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} - \frac{1}{3} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 4 \end{array} \\
&\quad - \frac{1}{6} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 4 \end{array} - \frac{1}{6} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} - \frac{1}{6} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} - \frac{1}{6} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \\
&\quad - \frac{1}{2} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 4 \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} - \frac{1}{3} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \\
&\quad - \frac{1}{6} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 4 \end{array} - \frac{1}{6} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} - \frac{1}{6} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} - \frac{1}{6} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \end{array} \quad . \quad (6.22)
\end{aligned}$$

Gekoppelt mit (6.20), stellt diese Gleichung ein geschlossenes Gleichungssystem zur Bestimmung der Funktionen $\alpha_{1234,56}$ und γ_{1234} dar. Allerdings ist dieses Gleichungssystem, wie bereits erwähnt, nicht effizient. Das wird sich daran zu erkennen geben, daß Graphen, die aus den Termen der vorletzten Zeile von (6.22) entstehen, teilweise von denjenigen aus der letzten Zeile weggehoben werden. Die vorliegende Gleichung könnte man dahingehend verbessern, daß zu einer fest vorgegebenen Ordnung solche Weghebungen vermieden wären. Dies ist z.B. möglich, wenn wir den γ -Ausdruck aus der linken Seite von (6.22) in der rechten Seite einsetzen. Eine solche Verbesserung würde allerdings durch deutlich kompliziertere Bestimmungsgleichungen erkaufte. Hinzu käme noch, daß auf diese Weise die Effizienzprobleme nicht behoben, sondern lediglich auf die höheren Ordnungen verlagert würden. Als eine Kompromisslösung können wir auch schon das Gleichungssystem aus (6.20) und (6.22) verwenden, um die Graphen dieses Kapitels zu erzeugen.

6.3 Rekursionsgleichungen

Das uns vorliegende Gleichungssystem wollen wir nun etwas eingehender untersuchen und machen zu deren Lösung die folgenden störungstheoretischen Ansätze:

$$\gamma_{1234} = \sum_{p=2}^{\infty} \gamma_{1234}^{(p)} \quad , \quad \alpha_{1234,56} = \sum_{p=2}^{\infty} \alpha_{1234,56}^{(p)} \quad , \quad (6.23)$$

die wir auch graphisch entsprechend zum Ausdruck bringen können:

$$\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ 4 \end{array} = \sum_{p=2}^{\infty} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 6 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 3 \end{array} = \sum_{p=2}^{\infty} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 6 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 3 \end{array} \quad . \quad (6.24)$$

Mit Hilfe dieser Störungsreihen und der Reihe für die tadpolelose Selbstenergie (4.37) können wir das Gleichungssystem aus (6.11), (6.20) und (6.22) in eine Rekursion überführen. Mit $p = 2, 3, 4, \dots$ lautet diese

$$\begin{array}{c} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 = \frac{1}{6} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 \quad , \\ \\ \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} = -\frac{1}{2} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 2 \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 3 \end{array} \quad , \\ \\ 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 = \frac{1}{6} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 \quad , \\ \\ \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 6 \end{array} = -\frac{\delta'_{1,4}}{\delta_{5,6}} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} - \sum_{q=1}^{p-2} \frac{\delta'_{1,4}}{\delta_{7,0}} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 9 \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} 6 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 7 \end{array} \quad , \\ \\ \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} = -\frac{\delta'_{3,p}}{6} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} - \frac{\delta'_{3,p}}{6} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 2 \end{array} - \frac{\delta'_{3,p}}{6} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 3 \end{array} - \frac{1}{3} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 \\ \\ -\frac{1}{6} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 3 \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 2 \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 3 \end{array} - \frac{1}{3} \sum_{q=1}^{p-2} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 \\ \\ -\frac{1}{6} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 2 - \frac{1}{6} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 3 - \frac{1}{6} 1 \text{---} \bigcirc \text{---} 4 - \frac{1}{6} \sum_{q=2}^{p-2} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ q \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ p-q \end{array} \end{array} \quad .$$

(Rek. 16)

Hierbei steht $\delta'_{3,p}$ für das gewöhnliche Kronecker-Symbol und ist gleich eins für $p = 3$ und null

sonst. Im nächsten Abschnitt wollen wir diese Rekursion iterieren, um die ersten Ordnungen für die Vierer-Wechselwirkung und die tadpolelose Selbstenergie zu bestimmen.

6.4 Erzeugung der Graphen für $\tilde{\Sigma}_{12}$ und γ_{1234}

Die zweite Ordnung der Vierer-Wechselwirkung $\gamma_{1234}^{(2)}$ ist als Induktionsanfang in (Rek. 16) bereits vorgegeben. Aus diesem lassen sich die Beiträge von $\alpha_{1234,56}^{(2)}$ bestimmen, und zwar ist das

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} 4 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 4 \\ \text{---} \\ 6 \end{array} &= - \frac{\delta}{\delta \text{---} 5=6} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 4 \\ \text{---} \\ 6 \end{array} = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \text{---} 5=6} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 4 \\ \text{---} \\ 6 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 3 \\ \text{---} \\ 6 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 4 \\ \text{---} \\ 6 \end{array} \right\} = \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 4 \\ \text{---} \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 3 \\ \text{---} \\ 5 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 4 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 3 \\ \text{---} \\ 5 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 2 \\ \text{---} \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 4 \\ \text{---} \\ 5 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 2 \\ \text{---} \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 4 \\ \text{---} \\ 5 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 3 \\ \text{---} \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 4 \\ \text{---} \\ 5 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 3 \\ \text{---} \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 4 \\ \text{---} \\ 5 \end{array} \right\}. \quad (6.25)
 \end{aligned}$$

Dieses Resultat verwenden wir, um den Beitrag $\gamma_{1234}^{(3)}$ zu berechnen. Aus (Rek. 16) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \textcircled{3} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ | \\ \textcircled{3} \\ | \\ 4 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} &= -\frac{1}{6} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \textcircled{3} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ | \\ \textcircled{3} \\ | \\ 4 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} - \frac{1}{6} \begin{array}{c} 3 \\ | \\ \textcircled{3} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ | \\ \textcircled{3} \\ | \\ 3 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} - \frac{1}{6} \begin{array}{c} 4 \\ | \\ \textcircled{3} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \textcircled{3} \\ | \\ 4 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} - \frac{1}{3} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \textcircled{3} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \textcircled{3} \\ | \\ 4 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} \\
 &- \frac{1}{2} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 4 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{c} 3 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 3 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{c} 4 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 4 \\ \text{---} \\ 2 \end{array}. \quad (6.26)
 \end{aligned}$$

Der vierte Summand ergibt sich mit dem Ergebnis aus (6.25) zu

$$\begin{array}{c} 2 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 4 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} = \begin{array}{c} 7 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 6 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 5 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} + \begin{array}{c} 7 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 6 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 5 \\ \text{---} \\ 4 \end{array} = \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 4 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 3 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 4 \\ \text{---} \\ 2 \end{array}. \quad (6.27)$$

Die letzten drei Summanden von (6.26) betrachten wir am Beispiel des fünften Summanden. Dieser ergibt sich unmittelbar aus dem Rekursionsanfang von (Rek. 16) als

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 4 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} &= -\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 6 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} + \begin{array}{c} 5 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 6 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 6 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} + \begin{array}{c} 6 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 6 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} \right\} \begin{array}{c} 6 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 5 \\ \text{---} \\ 4 \end{array} = \\
 &= -\frac{1}{2} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 4 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} - \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ 4 \\ \text{---} \\ 2 \end{array}. \quad (6.28)
 \end{aligned}$$

Setzen wir dieses Resultat und die dazu äquivalenten Resultate für die letzten zwei Terme aus (6.26) zusammen mit dem Ergebnis aus (6.27) in die Gleichung (6.26) ein, so erhalten wir insgesamt

$$\begin{array}{c} 2 \\ | \\ \textcircled{3} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ | \\ \textcircled{3} \\ | \\ 4 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} = \frac{1}{4} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \textcircled{3} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ | \\ \textcircled{3} \\ | \\ 4 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} + \frac{1}{4} \begin{array}{c} 3 \\ | \\ \textcircled{3} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ | \\ \textcircled{3} \\ | \\ 3 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} + \frac{1}{4} \begin{array}{c} 4 \\ | \\ \textcircled{3} \\ | \\ 1 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ | \\ \textcircled{3} \\ | \\ 4 \\ \text{---} \\ 2 \end{array}. \quad (6.29)$$

Zu bemerken sei bei diesem Ergebnis, daß wir es in allen Zwischenrechnungen auch noch mit anderen Graphen zu tun hatten, die sich aber gegenseitig kompensiert haben. Darin spiegelt sich die bereits angesprochene Ineffizienz unseres Verfahrens wieder. Diese Kompensationen treten bei allen höheren Rechnungen in noch viel stärkeren Masse auf. So auch bei der Berechnung der nächsthöheren Ordnung der Vierer-Wechselwirkung $\gamma_{1234}^{(4)}$. Dazu bedarf es aber der Kenntnis der Sechs-Punkt-Graphen von $\alpha_{1234,56}^{(3)}$. Nach (Rek. 16) gilt für diese

$$\begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 6 \end{array} = - \frac{\delta \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 4 \end{array}}{\delta \begin{array}{c} 8 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} 9 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 0 \end{array}} \begin{array}{c} 9 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 6 \end{array} . \quad (6.30)$$

Bei dem ersten Summanden wird an allen drei Graphen aus dem bereits bekannten Resultat (6.29) eine Linienamputation durchgeführt. Wir führen diese explizit an einem deren Repräsentanten durch. Dabei erhalten wir

$$\frac{\delta}{\delta \begin{array}{c} 8 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} 9 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 0 \end{array}} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \right\} = \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 5 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 6 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 6 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 5 \end{array} . \quad (6.31)$$

In dem zweiten Summanden werden Graphen der zweiten Ordnung der Vierer-Wechselwirkung umgeformt. Diese werden durch drei identische Graphen repräsentiert. Demnach reicht es schon, diese Umformungen an einem einzigen dieser Graphen durchzuführen. Das machen wir wie folgt:

$$\frac{\delta \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 4 \end{array}}{\delta \begin{array}{c} 8 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} 9 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 0 \end{array}} \begin{array}{c} 9 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 6 \end{array} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} \delta_{28} \\ \delta_{17} \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 9 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 0 \end{array} + \begin{array}{c} \delta_{37} \\ \delta_{48} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 9 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 9 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 6 \end{array} + \begin{array}{c} 9 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} 6 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 5 \end{array} + \begin{array}{c} 9 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 6 \end{array} + \begin{array}{c} 9 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} 6 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 5 \end{array} \right\} . \quad (6.32)$$

Hierbei sei noch zu bemerken, daß sowohl die Funktionalableitung $\delta/\delta\Gamma_{7890}$ als auch die Sechs-Punkt-Funktion $\alpha_{7890,56}^{(2)}$ symmetrisch bezüglich der Indizes 7, 8, 9 und 0 sind. Deswegen brauchten wir diese Symmetrie nur bei einem dieser Ausdrücke explizit zu berücksichtigen. In unserem Beispiel haben wir die symmetrische Form der Sechs-Punkt-Funktion $\alpha_{7890,56}^{(2)}$ verwendet und brauchten bei dem Ableitungsterm auf die Symmetrie nicht zu achten. Auf diese Weise konnte die Regel (6.8) in einer vereinfachten Form angewandt werden. Aus der Gleichung (6.32) erhalten wir nach Ausführung der Anklebevorschriften

$$\frac{\delta \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 4 \end{array}}{\delta \begin{array}{c} 8 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} 9 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 0 \end{array}} \begin{array}{c} 9 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ \diagup \\ \textcircled{2} \\ \diagdown \\ 6 \end{array} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 5 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 6 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 6 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 5 \end{array} \right\} \\
 + \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 5 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \textcircled{3} \\ \diagdown \\ 5 \end{array} \right\} . \quad (6.33)$$

Die Ergebnisse aus (6.32) und (6.33) fassen wir in der Form

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4} \frac{\delta \text{ (Diagram 1)}}{\delta \text{ (Diagram 2)}} + \frac{1}{2} \frac{\delta \text{ (Diagram 3)}}{\delta \text{ (Diagram 4)}} \frac{\text{ (Diagram 5)}}{\text{ (Diagram 6)}} = \\
 & = \frac{1}{2} \left\{ \text{ (Diagram 7)} + \text{ (Diagram 8)} + \text{ (Diagram 9)} + \text{ (Diagram 10)} \right\}. \tag{6.34}
 \end{aligned}$$

zusammen, mit deren Hilfe wir dann nach (6.30) und mit den Ergebnissen für $\gamma_{1234}^{(2)}$ und $\gamma_{1234}^{(3)}$ die Sechs-Punkt-Funktion $\alpha_{1234,56}^{(3)}$ erhalten als

$$\begin{aligned}
 \text{ (Diagram 11)} & = \frac{1}{2} \left\{ \text{ (Diagram 12)} + \text{ (Diagram 13)} + \text{ (Diagram 14)} + \text{ (Diagram 15)} \right. \\
 & + \text{ (Diagram 16)} + \text{ (Diagram 17)} + \text{ (Diagram 18)} + \text{ (Diagram 19)} \\
 & \left. + \text{ (Diagram 20)} + \text{ (Diagram 21)} + \text{ (Diagram 22)} + \text{ (Diagram 23)} \right\}. \tag{6.35}
 \end{aligned}$$

Mit diesem Resultat können wir nun die Vierer-Wechselwirkung in der vierten Ordnung bestimmen. Dazu verwenden wir die Rekursion (Rek. 16), wonach sich die Gleichung

$$\begin{aligned}
 \text{ (Diagram 24)} & = -\frac{1}{3} \text{ (Diagram 25)} - \frac{1}{6} \text{ (Diagram 26)} - \frac{1}{2} \text{ (Diagram 27)} - \frac{1}{2} \text{ (Diagram 28)} - \frac{1}{2} \text{ (Diagram 29)} \\
 & - \frac{1}{3} \text{ (Diagram 30)} - \frac{1}{6} \text{ (Diagram 31)} - \frac{1}{6} \text{ (Diagram 32)} - \frac{1}{6} \text{ (Diagram 33)}. \tag{6.36}
 \end{aligned}$$

herleiten lässt. Mit Resultaten aus (6.25), (6.29) und (6.35) bekommen wir nach mehrmaliger Anwendung der Anklebevorschriften das folgende Endergebnis für diese Ordnung der Vierer-Wechselwirkung:

$$\text{ (Diagram 34)} = -\frac{1}{8} \text{ (Diagram 35)} - \frac{1}{8} \text{ (Diagram 36)} - \frac{1}{8} \text{ (Diagram 37)} - \text{ (Diagram 38)}. \tag{6.37}$$

Auch auf dem Wege zu diesem Resultat mussten mehrere Graphen erzeugt werden, die in (6.37) nicht mehr vorkommen. Genau genommen, nur der erste Term und die Terme drei bis fünf lieferten die im endgültigen Resultat vorkommenden Graphen, aber eben nicht nur solche. Interessant ist auch zu bemerken, daß auch bei der Erzeugung der Graphen für die Sechs-Punkt-Funktion $\alpha_{1234,56}$ ähnliche Weghebungen einzelner Graphen nicht zu vermeiden waren.

Etwas erfreulicher gestaltet sich der Erzeugungsprozess für Graphen der Selbstenergie $\tilde{\Sigma}_{12}$.

Aufgrund der Einfachheit deren Rekursionsbeziehung kommt es hier zu keinen Weghebungen. Demnach ist das Verfahren in diesem Fall effizient. Die einzelnen $\tilde{\Sigma}_{12}$ -Graphen lassen sich mit den bereits bekannten Diagrammen der Vierer-Wechselwirkung leicht berechnen. Der Beitrag niedrigster Ordnung ist in (Rek. 16) als Induktionsanfang explizit vorgegeben. Für die nächste Ordnung ergibt sich nach (Rek. 16) mit $p = 2$

$$1 \text{---} \textcircled{3} \text{---} 2 = \frac{1}{6} 1 \text{---} \textcircled{2} \text{---} 2 = -\frac{1}{4} 1 \text{---} \text{---} 2 \quad . \quad (6.38)$$

Die vierte Ordnung erhalten wir mit Hilfe (Rek. 16) und (6.29) zu

$$1 \text{---} \textcircled{4} \text{---} 2 = \frac{1}{6} 1 \text{---} \textcircled{3} \text{---} 2 = \frac{1}{8} 1 \text{---} \text{---} 2 \quad . \quad (6.39)$$

Zum Schluss berechnen wir noch aus dem Ergebnis (6.37) den Beitrag der nächsten Ordnung $\tilde{\Sigma}_{12}^{(5)}$:

$$1 \text{---} \textcircled{5} \text{---} 2 = \frac{1}{6} 1 \text{---} \textcircled{4} \text{---} 2 = -\frac{1}{16} 1 \text{---} \text{---} 2 - \frac{1}{6} 1 \text{---} \text{---} 2 \quad . \quad (6.40)$$

Die Ergebnisse (6.38)–(6.40) bzw. (6.29), (6.37) für die tadpolelelose Selbstenergie bzw. die Vierer-Wechselwirkung fassen wir in den nachfolgenden Tabellen 13 und 14 zusammen, die wir noch um zwei weitere Ordnungen vervollständigen.

p					
2	#2.1 $1/6$ (0,1;2)				
3	#3.1 $-1/4$ (2,0;2)				
4	#4.1 $1/8$ (3,0;2)				
5	#5.1 $-1/16$ (4,0;2)	#5.2 $-1/6$ (0,0;2)			
6	#6.1 $1/32$ (5,0;2)	#6.2 $-1/2$ (0,0;2)			
7	#7.1 $-1/64$ (6,0;2)	#7.2 -1 (0,0;1)	#7.3 -1 (0,0;2)	#7.4 $-1/12$ (0,0;2)	#7.5 $-1/2$ (0,0;1)

Tabelle 13: Diagramme der Vertex-Legendre-transformierten tadpolelosen Selbstenergie mit deren relativen Gewichten in der ϕ^4 -Theorie bis zur siebten Ordnung. Im Dreier-Tupel $(D, T; N)$ sind D und T entsprechende Zahlen der Doppel- und Tripel-Bindungen und N ist der Symmetriegrad.



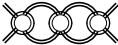
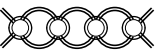

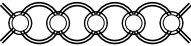


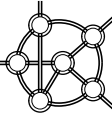
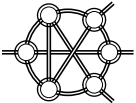
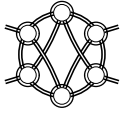
p			
2	#2.1 $-3/2$  $(1,0;8)$		
3	#3.1 $3/4$  $(2,0;8)$		
4	#4.1 $-3/8$  $(3,0;8)$	#4.2 -1  $(0,0;24)$	
5	#5.1 $3/16$  $(4,0;8)$	#5.2 -3  $(0,0;8)$	
6	#6.1 $-3/32$  $(5,0;8)$	#6.2 -12  $(0,0;2)$	#6.3 -2  $(0,0;6)$
	#6.4 $-3/2$  $(0,0;8)$		

Tabelle 14: Diagramme der Vertex-Legendre-transformierten Vierer-Wechselwirkung mit deren relativen Gewichten in der ϕ^4 -Theorie bis zur sechsten Ordnung. Im Dreier-Tupel $(D, T; N)$ sind D und T entsprechende Zahlen der Doppel- und Tripel-Bindungen und N ist der Symmetriegrad.

6.5 Vakuumdiagramme

Der Gegenstand dieses Abschnittes ist die mit (6.7) eingeführte Vertex-Legendre-transformierte freie Energie $\Lambda = \Lambda[\mathbf{G}, \Gamma]$. Wir werden nun versuchen, diese Funktion durch die im letzten Abschnitt eingehend untersuchte tadpolelose Selbstenergie $\tilde{\Sigma}_{12} = \tilde{\Sigma}_{12}[\mathbf{G}, \Gamma]$ und die Vierer-Wechselwirkung $V_{1234} = V_{1234}[\mathbf{G}, \Gamma]$ auszudrücken. Dazu berechnen wir zuerst die Funktionalableitung $\delta\Lambda/\delta\mathbf{G}_{12}$ bei festgehaltener ein-Teilchen-irreduzibler Vier-Punkt-Funktion Γ . Für diese gilt wegen (6.7) unter Benutzung der Vorschrift (5.5)

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Lambda}{\delta\mathbf{G}_{12}} \Big|_{\Gamma} &= \frac{\delta\Phi}{\delta\mathbf{G}_{12}} \Big|_V + \int_{3456} \frac{\delta\Phi}{\delta V_{3456}} \Big|_{\mathbf{G}} \frac{\delta V_{3456}}{\delta\mathbf{G}_{12}} \Big|_{\Gamma} + \frac{g}{4} \int_{34} V_{1234} \mathbf{G}_{34} \\ &+ \frac{g}{8} \int_{3456} \mathbf{G}_{34} \frac{\delta V_{3456}}{\delta\mathbf{G}_{12}} \Big|_{\Gamma} \mathbf{G}_{56} - \frac{g}{24} \int_{34567890} \frac{\delta V_{3456}}{\delta\mathbf{G}_{12}} \Big|_{\Gamma} \mathbf{G}_{37} \mathbf{G}_{48} \mathbf{G}_{59} \mathbf{G}_{60} \Gamma_{7890} \\ &- \frac{g}{12} \int_{345678} V_{1345} \mathbf{G}_{36} \mathbf{G}_{47} \mathbf{G}_{58} \Gamma_{6782} - \frac{g}{12} \int_{345678} V_{2345} \mathbf{G}_{36} \mathbf{G}_{47} \mathbf{G}_{58} \Gamma_{6781} . \end{aligned} \quad (6.41)$$

Die hierbei vorkommenden Funktionalableitungen der Funktion Φ lassen sich nach der Gleichung (5.4) bestimmen. Für $\delta\Phi/\delta\mathbf{G}_{12}$ ergibt sich dann mit Hilfe (3.9) und (5.6)

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\mathbf{G}_{12}} \Big|_V = \frac{1}{2} G_{12}^{-1} = \frac{1}{2} \mathbf{G}_{12}^{-1} - \frac{g}{4} \int_{34} V_{1234} \mathbf{G}_{34} + \frac{g}{12} \int_{345678} V_{1345} \mathbf{G}_{36} \mathbf{G}_{47} \mathbf{G}_{58} \Gamma_{6782} \quad (6.42)$$

und für $\delta\Phi/\delta V_{3456}$ wegen (2.51) und (6.6)

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Phi}{\delta V_{3456}} \Big|_{\mathbf{G}} &= \frac{\delta W}{\delta V_{3456}} \Big|_{G^{-1}} = -\frac{g}{24} \{ \mathbf{G}_{34} \mathbf{G}_{56} + \mathbf{G}_{35} \mathbf{G}_{46} + \mathbf{G}_{36} \mathbf{G}_{45} \} \\ &+ \frac{g}{24} \int_{7890} \mathbf{G}_{37} \mathbf{G}_{48} \mathbf{G}_{59} \mathbf{G}_{60} \Gamma_{7890} . \end{aligned} \quad (6.43)$$

Setzen wir die Ergebnisse (6.42) und (6.43) in (6.41) ein, so erhalten wir den folgenden Ausdruck für die gesuchte Funktionalableitung der Vertex-Legendre-transformierten freien Energie:

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta\mathbf{G}_{12}} \Big|_{\Gamma} = \frac{1}{2} \mathbf{G}_{12}^{-1} - \frac{g}{12} \int_{345678} V_{2345} \mathbf{G}_{36} \mathbf{G}_{47} \mathbf{G}_{58} \Gamma_{6781} . \quad (6.44)$$

Mit diesem Resultat stellen wir weiterhin fest, daß

$$\int_3 \mathbf{G}_{13} \frac{\delta\Lambda}{\delta\mathbf{G}_{23}} = \frac{1}{2} \delta_{12} - \frac{g}{12} \int_{34567890} \mathbf{G}_{13} V_{3456} \mathbf{G}_{47} \mathbf{G}_{58} \mathbf{G}_{69} \Gamma_{7892} . \quad (6.45)$$

Hieraus erkennen wir unter anderem, daß für das ungestörte Problem mit $g = 0$ und $\Lambda = \Lambda^{(0)}$ gilt

$$\int_3 \mathbf{G}_{13} \frac{\delta\Lambda^{(0)}}{\delta\mathbf{G}_{23}} = \frac{1}{2} \delta_{12} . \quad (6.46)$$

Durch Vergleich dieser Gleichung mit (5.31) stellen wir fest, daß die Lösung von (6.46) bis auf eine additive Konstante mit dem Funktional $\Phi^{(0)}$ zusammenfällt und durch

$$\Lambda^{(0)} = \Phi^{(0)} = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathbf{G} \quad (6.47)$$

gegeben ist. Ebenfalls gilt auch die Gleichung

$$\frac{\delta \Lambda^{(0)}}{\delta \mathbf{G}_{12}} = \frac{1}{2} \mathbf{G}_{12}^{-1} , \quad (6.48)$$

mit der wir sofort die Bedingung (6.46) nachprüfen können. Zu bemerken sei noch, daß wir z.B. die Gleichung (6.47) auch sofort erhalten könnten, da die Vertex-Legendre-Transformation lediglich die Rolle der Vierer-Vertizes betrifft. Weil diese aber im ungestörten Funktional $\Phi^{(0)}$ nicht explizit vorkommen, kann dieses Funktional nach der Vertex-Legendre-Transformation ungeändert übernommen werden.

Zur Lösung des allgemeinen Problems separieren wir von dem Funktional Λ seinen ungestörten Anteil entsprechend der Zerlegung

$$\Lambda = \Lambda^{(0)} + \Lambda^{(\text{int})} . \quad (6.49)$$

Die Gleichung (6.45) läßt sich dann mit Hilfe (6.48) in eine Bestimmungsgleichung für den Wechselwirkungsanteil der Vertex-Legendre-transformierten freien Energie $\Lambda^{(\text{int})}$ umschreiben. Diese schreiben wir in der Form

$$\int_{12} \mathbf{G}_{12} \frac{\delta \Lambda^{(\text{int})}}{\delta \mathbf{G}_{12}} = - \frac{g}{12} \int_{12345678} V_{1234} \mathbf{G}_{15} \mathbf{G}_{26} \mathbf{G}_{37} \mathbf{G}_{48} \Gamma_{5678} \quad (6.50)$$

auf, oder mit Hilfe (3.5) umgeformt

$$\begin{aligned} \int_{12} \mathbf{G}_{12} \frac{\delta \Lambda^{(\text{int})}}{\delta \mathbf{G}_{12}} &= - \frac{1}{12} \int_{12345678} \Gamma_{1234} \mathbf{G}_{15} \mathbf{G}_{26} \mathbf{G}_{37} \mathbf{G}_{48} \Gamma_{5678} \\ &\quad - \frac{1}{12} \int_{12345678} \gamma_{1234} \mathbf{G}_{15} \mathbf{G}_{26} \mathbf{G}_{37} \mathbf{G}_{48} \Gamma_{5678} . \end{aligned} \quad (6.51)$$

Erinnern wir uns ausserdem noch an (6.9), so können wir die Identität (6.50) auch anders umformulieren:

$$\int_{12} \mathbf{G}_{12} \frac{\delta \Lambda^{(\text{int})}}{\delta \mathbf{G}_{12}} = - \frac{1}{2} \int_{12} \mathbf{G}_{12} \tilde{\Sigma}_{21} . \quad (6.52)$$

Mit einer weiteren diagrammatischen Bezeichnung

$$\Lambda^{(\text{int})} \equiv \bigcirc \quad (6.53)$$

können wir die Bestimmungsgleichungen (6.51) und (6.52) graphisch illustrieren:

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \delta \bigcirc \\ 2 \end{array} \right) \frac{\delta}{\delta \text{---} 1 \text{---} 2} = - \frac{1}{12} \text{---} \bigcirc \text{---} - \frac{1}{12} \text{---} \bigcirc \text{---} , \quad (6.54)$$

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \delta \\ 2 \end{array} \right) \frac{\delta \bigcirc}{\delta_{1=2}} = -\frac{1}{2} \bigcirc \quad (6.55)$$

Diese beiden Bestimmungsgleichungen können wir auch in Rekursionsbeziehungen überführen. Dazu verwenden wir die Störungsreihe

$$\Lambda^{(\text{int})} = \sum_{p=1}^{\infty} \Lambda^{(p)} \quad , \quad \bigcirc = \sum_{p=1}^{\infty} \bigcirc_p \quad (6.56)$$

Überlegen wir uns noch, daß hier in völliger Analogie zur Gleichung (5.44) gilt

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \delta \\ 2 \end{array} \right) \frac{\delta \bigcirc}{\delta_{1=2}} = \sum_{p=1}^{\infty} 2p \bigcirc_p \quad , \quad (6.57)$$

so können wir folgende Rekursionsgleichungen mit $p = 2, 3, 4, \dots$ herleiten:

$$\boxed{\bigcirc_1 = 0 \quad , \quad \bigcirc_2 = -\frac{1}{48} \bigcirc_{2,2} \quad , \quad \bigcirc_{p+1} = -\frac{1}{24(p+1)} \bigcirc_{p,2} \quad ,}$$

(Rek. 17)

$$\boxed{\bigcirc_1 = 0 \quad , \quad \bigcirc_p = -\frac{1}{4p} \bigcirc_p^{\text{ring}} \quad .}$$

(Rek. 18)

Um die Graphen der Vertex-Legendre-transformierten freien Energie für die ersten Ordnungen zu erzeugen, verwenden wir beispielsweise die Rekursionsbeziehung (Rek. 18). Für die zweite Ordnung erhalten wir mit dem Resultat für die zweite Ordnung der Selbstenergie $\tilde{\Sigma}_{12}^{(2)}$ aus (Rek. 16)

$$\bigcirc_2 = -\frac{1}{8} \bigcirc_2^{\text{ring}} = -\frac{1}{48} \bigcirc_{1=2} \bigcirc_{2=1} = -\frac{1}{48} \bigcirc_{2,2} \quad (6.58)$$

Dieses Ergebnis ist in (Rek. 17) auch explizit angegeben. Für die dritte Ordnung ergibt sich dann mit dem Resultat (6.38)

$$\bigcirc_3 = -\frac{1}{12} \bigcirc_3^{\text{ring}} = \frac{1}{48} \bigcirc_{3,2} \quad (6.59)$$

und für die nächsten zwei Ordnungen wegen (6.39) und (6.40)

$$\bigcirc_4 = -\frac{1}{16} \bigcirc_4^{\text{ring}} = -\frac{1}{128} \bigcirc_{4,2} \quad , \quad (6.60)$$

$$\bigcirc_5 = -\frac{1}{20} \bigcirc_5^{\text{ring}} = \frac{1}{320} \bigcirc_{5,2} + \frac{1}{120} \bigcirc_{5,3} \quad (6.61)$$

Die Ergebnisse (6.58)–(6.61) werden in der nachfolgenden Tabelle zusammengefasst und noch um zwei weitere Ordnungen vervollständigt.







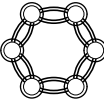
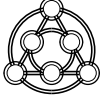
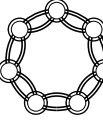
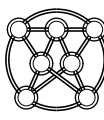
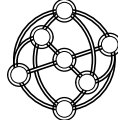
p						
2	#2.1 $- 1/48$ (0,0,1;2)					
3	#3.1 $1/48$ (3,0,0;6)					
4	#4.1 $- 1/128$ (4,0,0;8)					
5	#5.1 $1/320$ (5,0,0;10)		#5.2 $1/120$ (0,0,0;120)			
6	#6.1 $- 1/768$ (6,0,0;12)		#6.2 $1/48$ (0,0,0;48)			
7	#7.1 $- 1/1792$ (7,0,0;14)		#7.2 $- 1/14$ (0,0,0;14)		#7.3 $- 1/48$ (0,0,0;48)	

Tabelle 15: Graphen der Vertex-Legendre-transformierten freien Energie mit deren relativen Gewichten in der ϕ^4 -Theorie. Jedes Diagramm wird charakterisiert durch den Vierer-Tupel $(D, T, V; P)$, wobei D , T und V die jeweiligen Zahlen der Doppel-, Tripel- und Quadrupel-Bindungen sind und P die Zahl der formerhaltenden Knotenpermutationen.

6.6 Vertex-Legendre-Rücktransformation

Im vorherigen Kapitel haben wir im Rahmen der Linien-Legendre-Transformation bereits die Graphen ohne Linienkorrekturen erzeugen können. All diese können aus keinen anderen Graphen erzeugt werden durch Ersetzung deren Linien gegen die komplizierteren Zwei-Punkt-Graphen. Diese Legendre-Transformation führt uns in Verbindung mit der anschließenden Vertex-Legendre-Transformation zu den sogenannten Skelett-Diagrammen. Dies sind all diejenigen Graphen, die keinerlei Linien- oder Vertex-Korrekturen enthalten, und die also in diesem Sinne topologisch elementar sind. Die Vier-Punkt-Skelett-Diagramme wurden erzeugt, indem die ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktion Γ_{1234} als eine unabhängige Variable und die Vierer-Wechselwirkung V_{1234} als eine Funktion dieser Variablen aufgefasst wurden.

Wie man der Tabelle 11 auf Seite 104 ansieht, sind die meisten Diagramme keine Skelett-Graphen. Diese können wir jedoch auf eine relativ einfache Weise mit Hilfe der inversen Vertex-Legendre-Transformation wiedergewinnen. Hierbei wird versucht, die ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktion Γ durch die Vierer-Wechselwirkung V auszudrücken. Als Ausgangspunkt dient uns die Definitionsgleichung für die Funktion γ (6.1), die wir nun als eine Zerlegung der Funktion Γ ansehen:

$$\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} = \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \times \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \times \\ \diagup \\ 4 \end{array} - \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 4 \end{array} . \quad (6.62)$$

Da die Funktion γ die Beiträge mindestens zweiter Ordnung enthält, spielt sie bei der ersten Ordnung noch keine Rolle, und wir können die ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktion bis zur ersten Ordnung in der Form

$$\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} = \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \times \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \times \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \dots \quad (6.63)$$

ausschreiben. Bei der nächsten Ordnung sind die γ -Beiträge zweiter Ordnung zu berücksichtigen. Somit ergibt sich dann aus (6.62)

$$\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} = \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \times \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \times \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 2 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 3 \end{array} + \dots . \quad (6.64)$$

Setzen wir den Γ -Ausdruck aus (6.63) in der rechten Seite der Gleichung (6.64) ein, so ergibt sich

$$\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} = \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \times \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \times \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 2 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 3 \end{array} + \dots . \quad (6.65)$$

Als nächstes berücksichtigen wir noch die dritte Ordnung der Funktion γ , die wir aus (6.29) kennen, und schreiben die Zerlegung (6.62) in der Form


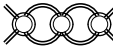

$$\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} = \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \times \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \times \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 2 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 3 \end{array} \\ - \frac{1}{4} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 4 \end{array} - \frac{1}{4} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 2 \end{array} - \frac{1}{4} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \bigcirc \\ \diagup \\ 3 \end{array} + \dots \quad (6.66)$$

aus. Das Ersetzen der vollen Vertizes auf der rechten Seite dieser Gleichung durch deren Reihendarstellung aus (6.65) ergibt dann im ersten Schritt bei ausser Acht lassen aller Beiträge höherer als dritter Ordnung

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} &= \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} \\
 &+ \frac{1}{2} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} + \frac{1}{4} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} \\
 &+ \frac{1}{2} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \frac{1}{4} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} + \frac{1}{4} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} \\
 &- \frac{1}{4} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} - \frac{1}{4} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} - \frac{1}{4} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} + \dots \quad (6.67)
 \end{aligned}$$

Das endgültige Resultat erhalten wir nach weiteren Ersetzungsschritten ebenfalls bei ausser Acht lassen der Graphen höherer als der dritten Ordnung:

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} &= \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} \right. \\
 &+ \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} \right\} \\
 &+ \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} \right. \\
 &+ \frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 4 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right\} + \dots \quad (6.68)
 \end{aligned}$$

Hier entstand aufgrund der Vertex-Legendre-Rücktransformation ein neuer Graph, den wir aus der Tabelle 11 auf Seite 104 als den Graphen #3.2 kennen. Dieser Graph ist also kein Skelett-Diagramm. Interessant ist an dieser Stelle zu bemerken, daß aus dieser Rechnung der Kettengraph  sowohl aus dem Graphen  als auch aus dem Graphen niederer Ordnung  hervorgeht. Hiermit wird offensichtlich, daß dies auch kein Skelett-Graph ist. Um sein Gewicht richtig bestimmen zu können, brauchte man allerdings die beiden oben genannten Graphen als seine Quellen. Das ist auch bei den höheren Ordnungen nicht anders. Die Kettendiagramme übernehmen auch dort die Rolle der Korrekturgraphen. Die Diagramme #4.2, #5.2 und #6.2-4 der Tabelle 14 auf Seite 132 sind von einer anderen Sorte. Diese sind echte Skelett-Diagramme und sind ausserdem im Gegenteil zu den Kettengraphen allesamt zwei-Teilchen-irreduzibel. Auch alle Graphen, die aus diesen durch die Vertex-Legendre-Rücktransformation hervorgehen, sind zwei-Teilchen-irreduzibel. So entsteht beispielsweise der zwei-Teilchen-irreduzible Graph #5.3 der Tabelle 11 aus dem Skelett-Diagramm #5.2 aus der Tabelle 14, was man ja unschwer nachprüfen kann. Auch bei den höheren Ordnungen scheint sich der Trend zu bestätigen, lässt sich aber mit unseren Mitteln nicht allgemein beweisen.

Nach unseren Untersuchungen der Vier-Punkt-Funktionen sind wir in der Lage, die Vertex-Legendre-Transformation auch für die Selbstenergie zu invertieren. Dazu schreiben wir zuerst die tadpolelose Selbstenergie in eine Reihe zerlegt aus:

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 2 \end{array} = \frac{1}{6} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 2 \end{array} - \frac{1}{4} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 2 \end{array} + \frac{1}{8} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 2 \end{array} + \dots \quad (6.69)$$

Durch Ersetzen eines der vollen Vertizes durch den Ausdruck auf der rechten Seite von (6.68) ergibt sich unter Berücksichtigung der Graphen nur bis vierter Ordnung

$$\begin{aligned}
 1 \text{---} \text{---} 2 &= \frac{1}{6} 1 \text{---} \text{---} 2 + \frac{3}{12} 1 \text{---} \text{---} 2 + \frac{1}{12} \left\{ 3 \text{---} \text{---} 2 + 3 \text{---} \text{---} 2 \right\} \\
 &+ \frac{3}{24} 1 \text{---} \text{---} 2 - \frac{1}{4} 1 \text{---} \text{---} 2 - \frac{1}{8} \left\{ 1 \text{---} \text{---} 2 + 2 \text{---} \text{---} 2 \right\} \\
 &+ \frac{1}{8} 1 \text{---} \text{---} 2 + \dots \quad (6.70)
 \end{aligned}$$

Weitere Ersetzungen der vollen Vertizes durch deren Reihendarstellungen ergeben nach längeren Rechnungen das folgende Resultat:

$$\begin{aligned}
 1 \text{---} \text{---} 2 &= \frac{1}{6} 1 \text{---} \text{---} 2 + \frac{1}{4} 1 \text{---} \text{---} 2 + \frac{1}{4} 1 \text{---} \text{---} 2 \\
 &+ \frac{1}{4} 1 \text{---} \text{---} 2 + \frac{1}{8} 1 \text{---} \text{---} 2 + \dots \quad (6.71)
 \end{aligned}$$

Aus dieser Rechnung erkennt man unschwer, daß die Ringgraphen #3.1, #4.1 der Tabelle 13 keine Skelett-Diagramme sind. Diese werden in jeder Ordnung durch jeweils einen Ringgraphen repräsentiert und sind in der Tabelle 13 die Graphen #5.1, #6.1 und #7.1.

Die Vertex-Legendre-Rücktransformation können wir in einer analogen Weise auch auf die Vakuumdiagramme ausweiten. Dabei werden die Graphen der Funktion Φ bestimmt. Zuerst bemerken wir jedoch, daß das Funktional der Vakuumenergie Λ in diesem Fall eine Legendre-Transformierte des Funktionals Φ ist. Diese lassen sich aber vermittels der Identität (6.7) miteinander verknüpfen. Erinnern wir uns an dieser Stelle noch an die Gleichung (6.47), so erhalten wir aus (6.7) mit den Zerlegungen (5.36) und (6.49)

$$\begin{aligned}
 \Phi^{(\text{int})} &= \Lambda^{(\text{int})} - \frac{g}{8} \int_{1234} \mathbf{G}_{12} V_{1234}[\mathbf{G}, \mathbf{\Gamma}] \mathbf{G}_{34} \\
 &+ \frac{g}{24} \int_{12345678} V_{1234}[\mathbf{G}, \mathbf{\Gamma}] \mathbf{G}_{15} \mathbf{G}_{26} \mathbf{G}_{37} \mathbf{G}_{48} \mathbf{\Gamma}_{5678} \quad (6.72)
 \end{aligned}$$

Diese Umformung lässt sich auch graphisch darstellen:

$$\text{---} \text{---} = \frac{1}{8} \text{---} \text{---} + \frac{1}{24} \text{---} \text{---} + \text{---} \quad (6.73)$$

Mit Hilfe (6.58)–(6.61) können wir das Funktional $\Phi^{(\text{int})}$ demnach als die folgende Reihenzerlegung darstellen:

$$\text{---} \text{---} = \frac{1}{8} \text{---} \text{---} + \frac{1}{24} \text{---} \text{---} - \frac{1}{48} \text{---} \text{---} + \frac{1}{48} \text{---} \text{---} - \frac{1}{128} \text{---} \text{---} + \dots \quad (6.74)$$

Nun können wir die vollen Vertizes durch den Ausdruck (6.68) sukzessive ersetzen. Im ersten Schritt ergibt sich dabei

$$\begin{aligned}
 \bigcirc &= \frac{1}{8} \bigcirc\bigcirc + \frac{1}{48} \text{ (circle with two internal arcs) } - \frac{3}{96} \text{ (circle with triangle) } - \frac{3}{48} \text{ (circle with two overlapping circles) } - \frac{3}{192} \text{ (circle with square) } \\
 &+ \frac{1}{48} \text{ (circle with triangle and two arcs) } + \frac{1}{96} \left\{ \text{ (circle with square and two arcs) } + 2 \text{ (circle with two overlapping circles and two arcs) } \right\} - \frac{1}{128} \text{ (circle with square and two arcs) } + \dots \quad (6.75)
 \end{aligned}$$

Setzen wir den Ersetzungsprozess der vollen Vertizes fort, so erhalten wir das folgende Ergebnis:

$$\bigcirc = \frac{1}{8} \bigcirc\bigcirc + \frac{1}{48} \text{ (circle with two internal arcs) } + \frac{1}{48} \text{ (circle with triangle) } + \frac{1}{128} \text{ (circle with square) } + \frac{1}{32} \text{ (circle with two overlapping circles) } + \dots \quad (6.76)$$

Auch hier sind die sogenannten Ringgraphen #3.1, #4.1 u.s.w. keine echten Skelett-Diagramme und können topologisch aus den Graphen niedrigerer Ordnungen erzeugt werden. Sie werden jedoch zur Bestimmung der richtigen Gewichtsfaktoren benötigt.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel der vorliegenden Diplomarbeit bestand darin, effiziente Algorithmen zur rekursiven graphischen Generierung von Feynman-Diagrammen und ihrer Gewichte am Beispiel der ϕ^4 -Theorie zu entwickeln. Mit Hilfe von Linien- und Vertex-Amputationen konnten die Schwinger-Dyson-Gleichungen der ϕ^4 -Theorie zu geschlossenen Gleichungssystemen ausgebaut werden. Dabei wurden verschiedene Funktionaldifferentialgleichungen abgeleitet, deren rekursive graphische Lösung auf die zusammenhängenden, die ein-Teilchen-irreduziblen und die tadpolelosen Feynman-Diagramme der Zwei- und Vier-Punkt-Funktionen führten. Ausserdem konnte durch die Linien- und Vertex-Legendre-Transformation gezeigt werden, wie die Skelett-Diagramme der ϕ^4 -Theorie graphisch rekursiv generiert werden können.

Der Einfachheit halber beschränkte sich die Diplomarbeit darauf, eine eng umrissene Problemstellung zu behandeln. Dabei ergaben sich interessante Fragestellungen, die erst im Rahmen künftiger Studien behandelt werden können. Dazu gehören beispielsweise die folgenden drei Problemfelder:

AUTOMATISIERUNG DURCH COMPUTERALGEBRA:

Die Lösung der graphischen Rekursionsbeziehungen wird zu höheren Ordnungen hin immer komplizierter, da die Zahl der auftretenden Feynman-Diagramme stark zunimmt. Es liegt deshalb nahe, dieses Verfahren mit Hilfe von Computeralgebra zu automatisieren. In der Arbeit [12] wurde am Beispiel der graphischen Rekursion für die Vakuumdiagramme (Gleichung (Rek. 1) auf der Seite 17 dieser Diplomarbeit) gezeigt, daß eine solche Automatisierung mit einem MATHEMATICA-Programm prinzipiell möglich ist. Zunächst wurde in Anlehnung an die Diplomarbeit [26] eine Darstellung der Feynman-Diagramme in einer Matrizenform verwandt, bei der die ganzzahligen Einträge die Anzahl der Kanten zwischen den entsprechenden Knotenpunkten darstellen¹. Dabei wurde aus allen möglichen Matrix-Darstellungen für ein einzelnes Feynman-Diagramm eine Zahl abgeleitet, die die Topologie eines gegebenen Diagramms charakterisiert. Anschliessend wurde gezeigt, daß sich die jeweiligen Elementarvorgänge, die bei der Iteration der graphischen Rekursionsgleichung (Rek. 1) auftreten, in die Matrixdarstellung umsetzen lassen. Hierzu zählen die Amputation einer Linie in einem

¹In der Graphentheorie spricht man dabei von den sogenannten Adjazenzmatrizen (siehe z.B. [39])

Feynman-Diagramm, das Zusammenkleben einzelner Teilgraphen und die Verbindung zweier äusserer Linien zu einer internen. Ausserdem konnte in dieses MATHEMATICA-Programm die Generierung der zusammenhängenden Zwei- und Vier-Punkt-Funktionsgraphen integriert werden. Die Iteration entsprechender Feynman-Diagramme konnte bis zur störungstheoretischen Ordnung $p = 6$ durchgeführt werden.

Auf der Grundlage der in [12] gewonnenen Erfahrungen könnten auch die in der vorliegenden Diplomarbeit abgeleiteten graphischen Rekursionsbeziehungen entsprechend automatisiert werden. Dadurch könnten gerade die für die Renormierung der ϕ^4 -Theorie notwendigen tadpolelosen ein-Teilchen-irreduziblen Feynman-Diagramme effizient generiert werden. Zunächst sind die Diagramme, die bisher bei der Regularisierung in $D = 4 - \varepsilon$ [26, 27] und in $D = 3$ [29, 30] Dimensionen bis zu 5 bzw. 7 Schleifen verwandt wurden, samt ihrer Gewichte zu überprüfen. Anschliessend könnten auch die Graphen der darauffolgenden Schleifenordnungen generiert werden, um höhere Schleifenrechnungen vorzubereiten.

BERECHNUNG VON FEYNMAN-INTEGRALEN:

Es ist zu untersuchen, ob die in der vorliegenden Diplomarbeit verwandten Methoden zur rekursiven graphischen Generierung von Diagrammen in der ϕ^4 -Theorie auch bei der Berechnung der entsprechenden Feynman-Integrale herangezogen werden können. Hierbei sind beispielsweise die beiden folgenden Ansätze erfolgversprechend:

- Im Anschluss an die automatische Generierung der Feynman-Graphen könnte ein weiteres Computerprogramm deren numerische Auswertung z.B. in $D = 3$ Dimensionen durchführen. Hierzu wurde in den Arbeiten [31, 32] ein effizienter Algorithmus vorgeschlagen, bei dem für jedes Feynman-Integral eine Störungsreihe bis zu hohen Ordnungen berechenbar ist. Es fehlen allerdings noch weitergehende Untersuchungen zum Hochordnungsverhalten und zur Resummation dieser Störungsreihen, um damit kritische Exponenten mit der erforderlichen Genauigkeit berechnen zu können. Ausserdem ist momentan noch unklar, inwieweit dieser Algorithmus auch in der Lage ist, die bei manchen Feynman-Integralen in $D = 3$ Dimensionen auftretenden Unendlichkeiten adäquat zu behandeln. Es ist auf jeden Fall eine lohnenswerte Aufgabe, die 6- bzw. 7-Schleifenrechnungen von Nickel et al. [29, 30] zu wiederholen, da deren Ergebnisse unzureichend dokumentiert und nicht in Fachjournalen publiziert sind.
- Die in dieser Diplomarbeit abgeleiteten geschlossenen Schwinger-Dyson-Gleichungen könnten auch zur Entwicklung nichtperturbativer Näherungsverfahren herangezogen werden. So wird beispielsweise in der Arbeit [33] eine selbstkonsistente Lösung der Dyson-Gleichung vorgeschlagen. Hierzu wird die Existenz eines Phasenübergangs angenommen, um für die Korrelationsfunktionen einen einfachen Skalierungsansatz machen zu können. Analoge Überlegungen in der Ginzburg-Landau-Theorie ermöglichten in der Arbeit [34], den Einfluss thermischer Fluktuationen des Ordnungsparameters und des Vektorpotentials auf den Phasenübergang Normalleitung-Supraleitung in guter Näherung zu beschreiben. Um entsprechend die geschlossenen Schwinger-Dyson-Gleichungen aus der vorliegenden Diplomarbeit selbstkonsistent lösen zu können, benötigt man nicht nur für die Paarkorrelationsfunktion, sondern auch für die ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktion einen brauchbaren phänomenologischen Ansatz. Dabei ist zunächst unklar, wie man im Rahmen eines solchen

Ansatzes die Linienamputation operationalisiert, die in der Schwinger-Dyson-Gleichung für die ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktion (5.13) auftritt. Man könnte auch einen anderen Weg einschlagen, bei dem man mit Hilfe solcher phänomenologischen Ansätze für die Paarkorrelationsfunktion und die ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktion die Skelett-Vakuumdiagramme der ϕ^4 -Theorie berechnet. Fasst man die noch unbekanntenen Größen dieser Ansätze als Variationsparameter auf, so könnte man diese dadurch festlegen, daß diese die Vakuumenergie extremalisieren. Setzt man dann die so optimierten Variationsparameter wieder in den phänomenologischen Ansatz ein, müssten sich brauchbare Näherungswerte für die kritischen Exponenten ergeben.

UNTERSUCHUNG ANDERER FELDTHEORIEN:

Die in dieser Diplomarbeit gelungene funktionale Schliessung der Schwinger-Dyson-Gleichungen in der ϕ^4 -Theorie könnte in entsprechender Weise auch in anderen Feldtheorien durchgeführt werden. Es liegt nahe, zunächst das fermionische Analogon zum Energiefunktional (1.2) der ϕ^4 -Theorie

$$E[\phi] = \int_{12} G_{12}^{-1} \bar{\psi}_1 \psi_2 + \frac{g}{4} \int_{1234} V_{1234} \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 \psi_3 \psi_4 \quad (7.1)$$

mit den Grassmann-Feldern $\bar{\psi}$ und ψ zu betrachten. Es stellt beispielsweise das zweidimensionale Hubbard-Modell dar, das in der Festkörperphysik herangezogen wird, um die ferromagnetischen und supraleitenden Eigenschaften stark korrelierter Elektronen zu untersuchen. Aufgrund der formalen Ähnlichkeit der beiden Energiefunktionale (1.2) und (7.1) besitzen die Feynman-Diagramme des Hubbard-Modells dieselbe Topologie, wie die der ϕ^4 -Theorie. Da aber nun die Kanten als gerichtete Linien aufzufassen sind, treten andere Gewichte auf. Vermutlich wird sich das methodische Vorgehen bei der ϕ^4 -Theorie direkt auf das Hubbard-Modell übertragen lassen. Das gilt wahrscheinlich insbesondere auch für die Kommutationsbeziehungen (2.64) und (3.31), die für die Herleitung eines geschlossenen Satzes von graphischen Rekursionsgleichungen in dieser Diplomarbeit von grundsätzlicher Bedeutung waren. Es ist deshalb zu erwarten, daß beispielsweise die Selbstenergie und die ein-Teilchen-irreduzible Vier-Punkt-Funktion einem geschlossenen Gleichungssystem genügt, das strukturell dem zu der ϕ^4 -Theorie angegebenen ähnelt (siehe (3.12), (3.16) und (3.35)).

Eine wichtige Frage ist nun, ob dieses Gleichungssystem dazu verwandt werden kann, die etablierten Näherungsverfahren zur Lösung des Hubbard-Modells weiter zu entwickeln. Beispielsweise ist heutzutage die sogenannte FLEX-Näherung ("fluktuating exchange approximation") weit verbreitet [35], die von Bickers, Scalapino und White [36] auf der Grundlage der Arbeiten von Kadanoff und Baym [37, 38] entwickelt wurde. Es handelt sich hierbei um eine Näherung, die die mikroskopischen Erhaltungssätze für Teilchenzahl, Energie und Impuls erfüllt und die die Dichte- bzw. Spinfluktuationen stark korrelierter Elektronen jenseits der Hartree-Fock-Näherung beschreibt. Technisch gesehen beruht die FLEX-Näherung darauf, daß die Vakuumenergie durch die sogenannten Ringdiagramme mit Kanten aus vollen Zwei-Punkt-Funktionen und mit Vierer-Vertizes als Knoten angenähert wird. Würde man mit den in dieser Diplomarbeit verwandten Methoden die Schwinger-Dyson-Gleichungen des Hubbard-Modells schliessen, so könnte man daraus ableiten, welche Vertexkorrekturen auf-

treten, wenn die freie Energie durch die Skelett-Ringdiagramme genähert wird. Es ist zu untersuchen, inwieweit die Berücksichtigung solcher Vertexkorrekturen einen Einfluss auf die ferromagnetischen und supraleitenden Eigenschaften hat.

Bei der ϕ^4 -Theorie bzw. dem Hubbard-Modell handelt es sich um die einfachst mögliche Feldtheorie, da deren Feynman-Diagramme nur aus einer Kanten- und einer Knotenart aufgebaut sind. Kompliziertere Verhältnisse liegen in der Quantenelektrodynamik [25] mit zwei Kanten- und einer Knotenart, in der $\phi^3\phi^4$ -Theorie [13, 14] mit einer Kanten- und zwei Knotenarten oder in der skalaren Quantenelektrodynamik [17] mit zwei Kanten- und drei Knotenarten vor. Die bisher für diese Feldtheorien abgeleiteten graphischen Rekursionsbeziehungen für die Vakuumdiagramme zeigen, daß beim Vorliegen mehrerer Knotenarten neben den Linienamputationen auch die Amputationen von Knoten benötigt werden [14, 17]. Nur dann ist man in der Lage, für die freie Energie bzw. die effektive Energie eine einzelne Funktionaldifferentialgleichung abzuleiten, deren rekursive graphische Lösung die zusammenhängenden bzw. ein-Teilchen-irreduziblen Vakuumdiagramme ergeben. Die funktionale Schließung der Schwinger-Dyson-Gleichungen wurde schon erfolgreich in der Quantenelektrodynamik durchgeführt [25], entsprechende Untersuchungen zur $\phi^3\phi^4$ -Theorie und der skalaren Quantenelektrodynamik stehen aber noch aus.

Literaturverzeichnis

- [1] J. Külbeck, M. Böhm, and A. Denner, *Comp. Phys. Comm.* **60**, 165 (1991).
- [2] T. Hahn, hep-ph/9905354.
- [3] <http://www-itp.physik.uni-karlsruhe.de/feynarts>.
- [4] P. Nogueira, *J. Comput. Phys.* **105**, 279 (1993).
- [5] <ftp://gtae2.ist.utl.pt/pub/qgraf>.
- [6] B.R. Heap, *J. Math. Phys.* **7**, 1582 (1966).
- [7] J.F. Nagle, *J. Math. Phys.* **7**, 1588 (1966).
- [8] H. Kleinert, *Fortschr. Phys.* **30**, 187 and 351 (1982).
- [9] A.N. Vasiliev, *Functional Methods in Quantum Field Theory and Statistical Physics* (Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1998); translation from the Russian edition (St. Petersburg University Press, St. Petersburg, 1976).
- [10] R.F. Streater and A.S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and all that* (W.A. Benjamin, Reading, Massachusetts, 1964).
- [11] J. Schwinger, *Particles, Sources, and Fields*, Vol. I and II (Addison-Wesley, Reading, 1973).
- [12] H. Kleinert, A. Pelster, B. Kastening, and M. Bachmann, *Phys. Rev.* **E 62**, 1537 (2000).
- [13] B. Kastening, *Phys. Rev.* **E 61**, 3501 (2000).
- [14] H. Kleinert and A. Pelster, eprint: hep-th/0006153.
- [15] S. Schelstraete and H. Verschelde, *Z. Phys.* **C 67**, 343 (1995).
- [16] M. Bachmann, H. Kleinert, and A. Pelster, *Phys. Rev.* **D 61**, 085017 (2000).
- [17] H. Kleinert, A. Pelster, and B. Van den Bossche, eprint: hep-th/0107017.

- [18] J.D. Bjorken and S.D. Drell, Vol. I: *Relativistic Quantum Mechanics*, Vol. II: *Relativistic Quantum Fields* (McGraw-Hill, New York, 1965).
- [19] D.J. Amit, *Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena* (McGraw-Hill, New York, 1978).
- [20] C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1985).
- [21] M. Le Bellac, *Quantum and Statistical Field Theory* (Oxford Science Publications, Oxford, 1991).
- [22] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Third Edition (Oxford Science Publications, Oxford, 1996).
- [23] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1995).
- [24] A. Pelster and K. Glaum, *Recursive Graphical Construction of Tadpole-Free Feynman Diagrams and Their Weights in ϕ^4 -Theory*; in W. Janke, A. Pelster, H.-J. Schmidt, and M. Bachmann (Editors), *Fluctuating Paths and Fields – Dedicated to Hagen Kleinert on the Occasion of His 60th Birthday* (World Scientific, Singapore, 2001), 269-280.
- [25] A. Pelster, H. Kleinert, and M. Bachmann, *Funktional Closure of Schwinger-Dyson Equation in Quantum Electrodynamics, Part 1: Generation of Connected and One-Particle Irreducible Feynman Diagrams*, hep-th/0109014.
- [26] J. Neu, *Computergestützte Erzeugung der Feynmangraphen mit bis zu sechs Schleifen und Berechnung ihrer Gruppen- und Gewichtsfaktoren für die ϕ_α^4 -Theorien mit sphärischer und kubischer Symmetrie*, Diplomarbeit an der FU-Berlin, 1991).
- [27] H. Kleinert and V. Schulte-Frohlinde, *Critical Properties of ϕ^4 -Theories* (World Scientific, Singapore, 2001).
- [28] H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter*, Vol. I, *Superflow and Vortex Lines* (World Scientific, Singapore, 1989).
- [29] B. G. Nickel, D. I. Meiron, and G. B. Baker, University of Guelph preprint, 1977, ([http://www.physik.fu-berlin/~kleinert\(b8\)program/programs.html](http://www.physik.fu-berlin/~kleinert(b8)program/programs.html)).
- [30] D. B. Murray and B. G. Nickel, University of Guelph preprint, 1998, ([http://www.physik.fu-berlin/~kleinert\(b8\)program/programs.html](http://www.physik.fu-berlin/~kleinert(b8)program/programs.html)).
- [31] H. Kleinert, Phys. Lett. **B 465**, 235 (1999).
- [32] B. Kastening and H. Kleinert, Phys. Lett. **A 269**, 50 (2000).
- [33] A. J. Bray, Phys. Rev. Lett. **32**, 1413 (1974).
- [34] L. Radzikovsky, Europhys. Lett. **29**, 227 (1995).

- [35] D. Manske, *Phonons, Electronic Correlations, and Self-Energy Effects in High-Tc Superconductors*, Doktorarbeit an der Universität Hamburg, Shaker-Verlag, 1998.
- [36] N. E. Bickers, D. J. Scalapino, and S. R. White, Phys. Rev. Lett. **62**, 961 (1989).
- [37] G. Baym and L. P. Kadanoff, The Physical Review **124**, 287 (1961).
- [38] G. Baym, The Physical Review **127**, 1391 (1962).
- [39] H. Sachs, *Einführung in die Theorie der endlichen Graphen* (Carl Hanser Verlag, München, 1971).

Danksagung

Prof. Dr. Hagen Kleinert danke ich für das interessante Diplomarbeitsthema und für die wohlwollende Unterstützung während der gesamten Diplomarbeit. Sein stetes Interesse und seine motivierende Diskussionsbereitschaft haben wesentlich zum Gelingen der Diplomarbeit beigetragen. Ausserdem möchte ich sein persönliches Engagement auch ausserhalb der akademischen Angelegenheiten hervorheben.

Ein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Dr. Axel Pelster, der mich durch die gesamte Arbeit geleitet hat. Besonders dankbar bin ich für seine zahlreichen Aufgabestellungen, die stets lösbar waren und auch das Fundament dieser Diplomarbeit bilden. Bei komplizierteren mathematischen Problemen stand er mir stets mit seinem grossen Erfahrungsschatz und seiner bedingungslosen Hilfsbereitschaft zur Seite. Ich bin ihm auch für seine äusserst wertvollen Korrekturen bei der Durchsicht der Diplomarbeit zutiefst zu Dank verpflichtet.

Bei Dr. Michael Bachmann bedanke ich mich dafür, daß er mir freundlicherweise dabei half, auftretende Probleme mit dem Graphikprogramm FEYNTEX zu beseitigen.

Ausserdem danke ich meinem Zimmerkollegen Florian Weißbach für seine wertvolle Hilfe in linguistischen Angelegenheiten und für die angenehme Arbeitsatmosphäre.