

Selbstorganisation zwischen Mannigfaltigkeiten euklidischer und nichteuklidischer Geometrie durch Kooperation und Konkurrenz

Von der Fakultät Mathematik und Physik der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktors der
Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Martin Güßmann

aus Stuttgart

Hauptberichter: Prof. Dr. G. Wunner

Mitberichter: Prof. Dr. R. Friedrich

Tag der mündlichen Prüfung:

Institut für Theoretische Physik I
Universität Stuttgart

2006

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	8
1 Einleitung	11
I Modell	15
2 Biologische Grundlagen	17
2.1 Somatotopie	17
2.2 Tonotopie	18
2.3 Sehsystem und Retinotopie	19
2.3.1 Retina	19
2.3.2 Thalamus	20
2.3.3 Visueller Cortex	22
2.3.4 Retino-Tectales System	23
2.3.5 Hypothesen und Modelle	23
2.3.6 Experimentelle Ergebnisse	25
2.3.7 Feineinstellung durch sensorische Erfahrung	26
2.3.8 Kooperations- und Konkurrenzprozesse	27
3 Modellierung	29
3.1 Modell von Willshaw und von der Malsburg	29
3.2 Exkurs: Populationsdynamik	32
3.2.1 Einfaches System	32
3.2.2 Verallgemeinerung	33
3.3 Evolutionsgleichungen der linearen Kette	34
3.3.1 Aktivitäten in Retina und Tectum	35
3.3.2 Hebb-Plastizität	36

3.3.3	Kooperationskoeffizienten	37
3.3.4	Häussler-Gleichungen	38
4	Synergetik	39
4.1	Einführung	39
4.2	Evolutionsgleichung	41
4.3	Stationärer Zustand	42
4.4	Lineare Stabilitätsanalyse	42
4.5	Nichtlineare Bewegungsgleichungen	43
4.6	Versklavungsprinzip	46
4.7	Ordnungsparametergleichungen	47
II	Synergetische Systemanalyse	49
5	Modell	51
5.1	Verallgemeinerte Häussler-Gleichungen	51
5.2	Kooperationsfunktionen	54
5.3	Untere Schranke	56
5.4	Summenregeln	57
6	Lineare Stabilitätsanalyse	59
6.1	Stationäre Lösung	59
6.2	Abweichung von der stationären Lösung	60
6.3	Vollständiges Orthonormalsystem	60
6.4	Eigenfunktionen und Eigenwerte	63
7	Nichtlineare Analyse	65
7.1	Zerlegung in stabile und instabile Moden	65
7.2	Beiträge der instabilen Moden	67
7.3	Beiträge der zentralen Mannigfaltigkeit	69
7.4	Bestimmung der zentralen Mannigfaltigkeit	70
7.5	Ordnungsparametergleichungen	72

III Anwendungen 75

8 Saite 77

8.1 Eigenfunktionen 77

8.2 Lineare Analyse 79

8.3 Nichtlineare Analyse 80

8.4 Ordnungsparametergleichungen 82

 8.4.1 Berechnung von $K_{1,\lambda_T^u \lambda_R^u}$ 82

 8.4.2 Berechnung von $K_{2,\lambda_T^u \lambda_R^u}$ 83

 8.4.3 Berechnung von $K_{3,\lambda_T^u \lambda_R^u}$ 85

 8.4.4 Ordnungsparametergleichungen der Saite 85

 8.4.5 Einführen reeller Moden 86

8.5 Potentialdynamik 87

 8.5.1 Potentialbedingungen im Komplexen 87

 8.5.2 Anwendung auf die Saite 89

 8.5.3 Komplexes Potential 90

 8.5.4 Reelles Potential 91

 8.5.5 Konstante Phasenwinkel 92

8.6 Monotone Kooperationsfunktionen 94

 8.6.1 Entwicklungskoeffizienten 94

 8.6.2 Instabile Moden 97

 8.6.3 Potentialeigenschaften 97

8.7 1-1-Retinotopie 99

 8.7.1 Rekursionsgleichungen 99

 8.7.2 Spezielle Kooperationsfunktionen 101

 8.7.3 Erzeugende Funktion 102

 8.7.4 Grenzfälle 103

8.8 Vergleich mit der linearen Kette 105

9 Ebene 107

9.1 Vollständige Entkopplung 107

9.2 Eigenfunktionen 108

9.3 Integrale 111

9.4 Nichtlineare Terme 112

9.5 Instabile Moden 113

9.5.1	Instabilitätspunkt	114
9.5.2	Kooperationsfunktionen	114
9.6	Ordnungsparametergleichungen	115
9.7	Transformation auf reelle Variablen	118
9.8	Retinotope Abbildungen	119
9.8.1	Eine nichtverschwindende Mode	119
9.8.2	Zwei nichtverschwindende Moden	120
9.8.3	Zentrale Mannigfaltigkeit	123
10	Kugeloberfläche	127
10.1	Laplace-Beltrami-Operator	128
10.1.1	Einbettungsraum	128
10.1.2	Einheitskugel	129
10.2	Eigenfunktionen	129
10.3	Lineare Analyse	131
10.3.1	Kooperationsfunktionen	131
10.3.2	Eigenwerte	131
10.4	Integrale	133
10.5	Ordnungsparametergleichungen	136
10.5.1	Kubische Beiträge	136
10.5.2	Symmetrien	137
10.5.3	Auswahlregeln	139
10.5.4	Berechnung von U^{00}	139
10.5.5	Gleichungssystem	141
10.6	Reelle Variablen	143
10.7	Potential	145
10.8	Stationäre Zustände	146
10.9	1-1-Retinotopie	148
10.9.1	Rekursionsgleichungen	149
10.9.2	Spezielle Kooperationsfunktionen	150
10.9.3	Erzeugende Funktion	151
10.9.4	Zerlegung der Erzeugenden	152
10.9.5	Randbedingungen	153
10.9.6	Lösung	154
10.9.7	Grenzfälle	155

11 Zusammenfassung und Ausblick	159
12 Summary	165
12.1 Introduction	165
12.2 Model	166
12.3 Synergetic System Analysis	167
12.3.1 Linear Analysis	167
12.3.2 Nonlinear Analysis	167
12.4 Applications	168
12.4.1 String	168
12.4.2 Plane	170
12.4.3 Sphere	171
12.5 Outlook	172
A Clebsch-Gordan-Koeffizienten	173
Literaturverzeichnis	175
Danksagung	181

Abbildungsverzeichnis

1.1	Retinotopie Ordnung	12
2.1	Retinotopie Karten im CGL	20
2.2	Sehbahn beim Menschen	21
2.3	Manipulationen der retino-tectalen Entwicklung	24
3.1	Synaptische Wechselwirkungen	31
4.1	Instabilitätspunkt	44
4.2	Kontrollparameterraum	45
5.1	Mannigfaltigkeiten	52
5.2	Kooperation und Konkurrenz	53
8.1	Diagonalmoden	92
8.2	Sinusfunktionen	96
8.3	Potential	98
8.4	Höhere Diagonalmoden	100
8.5	Übergang in eine Delta-Funktion	104
8.6	Bifurkation	105
9.1	Zellschichten als Tori	109
9.2	Kooperationsfunktionen	115
9.3	Spezielle Kooperationsfunktionen	122
9.4	Potential im Koexistenzfall	123
9.5	Einfluss der zentralen Mannigfaltigkeit	124
10.1	Legendre-Polynome	154
10.2	Kontrollparameter	155

10.3 Verbindungsgewicht	156
11.1 Pseudosphäre	160
12.1 Circular causality	169

Kapitel 1

Einleitung

Die Frage, wie hochgeordnete komplexe Strukturen und Funktionen in der Natur entstehen und aufrechterhalten werden, war immer wieder Gegenstand naturwissenschaftlicher Forschung. Insbesondere die beeindruckende Komplexität, wie sie sich in der belebten Natur in mannigfacher Weise zeigt, inspirierte zu dem Versuch, solche Selbstorganisationsprozesse aus physikalischer Perspektive zu beschreiben. Es sei hier nur an Schrödingers mittlerweile zum Klassiker avancierte Abhandlung *Was ist Leben?* erinnert, die unter anderem die Thermodynamik lebender Systeme zum Gegenstand hat [1, 2].

Lebewesen sind offene Systeme fern vom thermodynamischen Gleichgewicht. Das Entropiekonzept der phänomenologischen Thermodynamik erweist sich deshalb als ungeeignet, da die entsprechenden Begriffsbildungen wie Entropie, Temperatur usw. ausschließlich für Gleichgewichtszustände definiert sind. Eine universelle Theorie der Selbstorganisation solcher Nichtgleichgewichtssysteme wird durch die 1969 von H. Haken begründete *Synergetik* gegeben [3–8]. Sie liefert den mathematischen Rahmen, der es erlaubt, den makroskopischen Zustand komplexer Systeme in der Umgebung von Instabilitätspunkten durch nur wenige Ordnungsparameter vollständig zu beschreiben, obgleich das System aus einer großen Anzahl miteinander wechselwirkender Untersysteme aufgebaut ist. Die vorliegende Arbeit widmet sich mit Hilfe der Methoden der Synergetik einem grundlegenden Problem biologischer Musterbildung.

Voraussetzung für eine korrekte Funktion des Nervensystems ist eine sinnvolle Verschaltung zwischen den verschiedenen Zellschichten. Ein sowohl theoretisch als auch experimentell gut untersuchtes Beispiel eines solchen neuronalen Verschaltungsmusters ist das zwischen der Netzhaut des Auges (Retina) und dem Mittelhirndach (Tectum). Betrachten wir hierzu Abbildung 1.1: In einer frühen Phase der embryonalen Entwicklung von Wirbeltieren sind die von den retinalen Ganglienzellen auf dem Tectum geknüpften synaptischen Kontakte noch ungeordnet und zufällig verteilt. Im weiteren Verlauf der Ontogenese kommt es dann via Selbstorganisation zu einem geordneten Zustand. Benachbarte Zellen der Retina sind nun mit benachbarten Zellen des Tectums verbunden. Eine solche Erhaltung von Nachbarschaftsbeziehungen im Sehsystem bezeichnet man als *Retinotopie*.

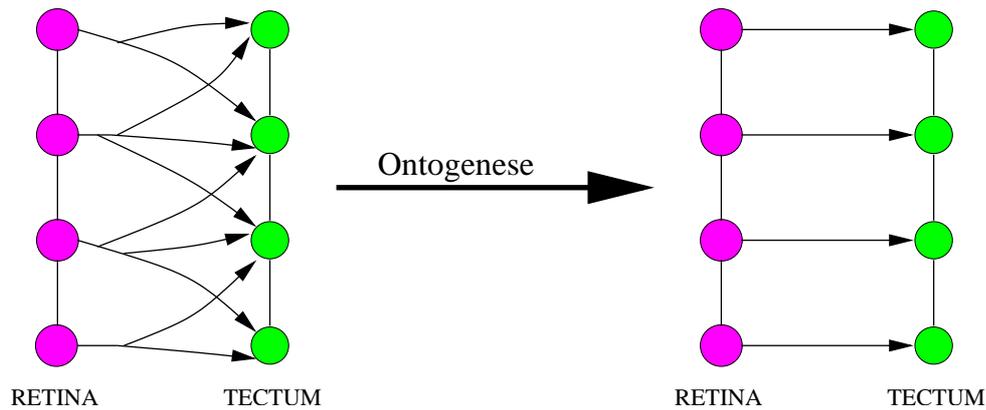


Abbildung 1.1: Entstehung einer retinotopen Ordnung im Verlauf der Ontogenese (schematisch). Durch Prozesse der Selbstorganisation werden die anfänglich zufällig verteilten synaptischen Kontakte derart verändert, dass benachbarte Zellen der Retina mit benachbarten Zellen des Tectums verbunden sind.

Wie lässt sich die selbstorganisierte Entstehung einer solchen retinotopen Ordnung erklären und modellieren?

Schon vor über zwanzig Jahren lieferten Häussler und von der Malsburg eine detaillierte analytische Behandlung für den Modellfall, dass die beiden Zellschichten als lineare Ketten mit jeweils derselben Anzahl von Zellen vorliegen [9]. Die Generierung einer retinotopen Ordnung wurde dabei – basierend auf experimentellen Ergebnissen – als das Resultat des Wechselspiels aus Kooperation und Konkurrenz zwischen den einzelnen synaptischen Kontakten betrachtet. Die Veränderung synaptischer Verbindungsgewichte durch solche Kooperations- und Konkurrenzprozesse wird durch die Häussler-Gleichungen beschrieben. Eine entsprechende Modifizierung dieser Gleichungen für den Fall, dass die Zellschichten von Retina und Tectum als Kontinua mit homogener Zelldichte auf Kugeloberflächen betrachtet werden, wurde von Wagner und von der Malsburg vorgeschlagen [10]. Erste analytische Untersuchungen zeigten, dass auch für diesen Fall die Entstehung einer retinotopen Ordnung möglich ist.

Diese Ergebnisse motivieren die Frage, ob es nicht möglich ist, ein *allgemeingültiges* Modell zu entwickeln, mit welchem sich dieses Problem unabhängig von Geometrie und Dimension behandeln lässt. Ein solch allgemeines Modell muss natürlich die obigen Fälle (lineare Kette, Kugeloberfläche) enthalten. Insbesondere aber soll dieses Modell das Allgemeingültige bzw. *Generische* des Problems aufzeigen. Ein Vergleich der Ergebnisse bei Spezifizierung von Geometrie und Dimension soll dann weiterhin klären, welche Signaturen von dem jeweils gewählten Fall abhängig sind: Welche qualitativen und quantitativen Unterschiede treten beispielsweise auf, wenn man von der Ebene (konstanter Krümmung 0) zur Kugel (konstanter Krümmung +1) übergeht? Welchen Einfluss hat die Wahl der Dimension bei verschiedenen euklidischen Geometrien? Die Beantwortung dieser Fragen ist das Ziel unserer analytischen Untersuchungen.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in drei Teile. In Teil I werden die biologischen

und physikalischen Grundlagen erläutert, die zum Verständnis des vorliegenden Problems notwendig sind. Dazu wird in Kapitel 2 die Bedeutung topographischer Ordnungen in der Biologie beschrieben, die weit über die oben erwähnte retino-tectale Ordnung hinausgeht. In Kapitel 3 werden dann die den Häussler-Gleichungen zugrundeliegenden Annahmen dargelegt, und Kapitel 4 gibt einen Überblick über die Methoden der Synergetik. In Teil II werden die zugrundeliegenden Modellgleichungen theoretisch analysiert. Hierzu werden in Kapitel 5 die Häussler-Gleichungen auf Mannigfaltigkeiten beliebiger Geometrie verallgemeinert. Anschließend leiten wir in den Kapiteln 6 und 7 unter Verwendung synergetischer Methoden die universelle Struktur der Ordnungsparametergleichungen ab. Diese bilden den Ausgangspunkt zur Behandlung spezieller Geometrien in Teil III. Als einfachstes Beispiel untersuchen wir in Kapitel 8 die Saite, die alle wesentlichen Eigenschaften der linearen Kette aufweist [9]. In Kapitel 9 betrachten wir die Ebene, wobei wir feststellen werden, dass dieses System nicht in trivialer Weise in zwei Dimensionen entkoppelt. Schließlich betrachten wir in Kapitel 10 als ein Beispiel nichteuklidischer zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten sphärische Geometrien, wobei wir die vorläufigen Untersuchungen von Wagner und von der Malsburg [10] erstmals um eine vollständige nichtlineare Analyse erweitern, indem wir die Ordnungsparametergleichungen explizit berechnen und daraus die Emergenz retinotoper Projektionen nachweisen.

Teil I
Modell

Kapitel 2

Biologische Grundlagen

Die topographische Ordnung zwischen Retina und Tectum stellt keinen außergewöhnlichen Fall in der Bildung neuronaler Strukturen dar. Vielmehr manifestiert sich darin ein grundlegendes biologisches Organisationsprinzip des Nervensystems. Mit Ausnahme der chemischen Sinne, d. h. des Geschmacks- und Geruchssinnes, sind die sensorischen Bahnen anatomisch so organisiert, dass die räumlichen Beziehungen zwischen den Sinnesrezeptoren erhalten bleiben. Das heißt, dass die Axone von benachbarten primären Sinneszellen Verbindungen mit benachbarten Neuronen der Zielstruktur bilden. Diese Erhaltung von Nachbarschaftsbeziehungen bezeichnet man im somatosensorischen System als *Somatotopie*, im visuellen System als *Retinotopie* und im auditorischen System als *Tonotopie*. Da die Topographie der Schicht aus Sinneszellen auf die Zielstruktur im Nervensystem abgebildet wird, spricht man ganz allgemein auch von *neuronalen Karten* [11]. Zur Verdeutlichung der enormen Bedeutung dieser neuronalen Karten werden im Folgenden Beispiele aus verschiedenen Sinnessystemen behandelt, wobei naturgemäß vor allem das visuelle System detaillierter betrachtet werden soll [11–13].

2.1 Somatotopie

Die somatosensorischen Areale im Cortex empfangen Signale von der Haut und dem übrigen Körper über Druck-, Berührungs- und Schmerzreize sowie über die Temperatur. Die von den entsprechenden Körperoberflächen stammenden Fasern enden dabei im Cortex in einer geordneten geometrischen Reihenfolge derart, dass die Lagebeziehungen an der Körperoberfläche auch im Cortex erhalten bleiben. Diese topographische Ordnung bezeichnet man, wie oben erwähnt, als *Somatotopie*. Auch im Thalamus, der als Zwischenstation der somatosensorischen Fasern auf dem Cortex fungiert, ist diese somatotopie Ordnung vorhanden. Die Körperoberfläche ist auf dem Cortex stückweise repräsentiert, sodass sich auf ihm ein „Homunkulus“, ein kleiner Mensch, abbildet. Die relativen Dimensionen sind allerdings im Vergleich zur tatsächlichen Größe der entsprechenden Oberfläche

stark modifiziert. Dabei ist die Dichte der Rezeptoren in einer bestimmten Region der Körperoberfläche der Größe des zugehörigen Bereichs des somatosensorischen Cortex proportional [14]. Die Rezeptordichte wiederum korreliert mit der Einsatzhäufigkeit und Empfindlichkeit der betreffenden Region. Beim Menschen sind die Bereiche für Gesicht, Lippen, Zunge und Hände auffallend groß. Beim Klammeraffen nimmt unter anderem der Schwanz ein besonders großes Gebiet im Cortex ein, bei Nagetieren die Schnurrhaare.

2.2 Tonotopie

Bei der auditorischen Wahrnehmung treffen Schallwellen auf das Trommelfell am Ende des äußeren Gehörganges und versetzen es in Schwingungen. Diese werden dann an die Gehörknöchelchen des Mittelohres, d. h. Hammer, Amboss und Steigbügel übertragen. Der Steigbügel leitet die Schwingungen durch Druck auf eine Membran weiter, die das *ovale Fenster* unter der Steigbügel Fußplatte abdeckt. Dort sitzt die flüssigkeitsgefüllte schneckenförmige *Cochlea*, die von der *Reißner-* und *Basilarmembran* in ihrer ganzen Länge in drei Flüssigkeitsräume aufgeteilt wird. Die Basilarmembran trägt das *Cortische Organ* mit den Haarzellen, die die eigentlichen Schallrezeptoren sind. Durch die Schwingungen wird das Cortische Organ in eine Relativbewegung versetzt, sodass die Stereozilien („Sinneshärchen“) der Haarzellen abwechselnd in beide Richtungen ausgelenkt werden. Dabei werden Neurotransmitter ausgeschüttet, was in den Fasern des Hörnervs Entladungen auslöst.

Die Frequenzen der Schallwellen werden sowohl örtlich als auch zeitlich codiert. Hier soll der Einfachheit halber nur die örtliche Codierung betrachtet werden. Dabei zeigt sich, dass die unterschiedlichen Frequenzen entlang der gesamten Länge der Cochlea regelmäßig angeordnet sind. Tiefe Frequenzen stimulieren das Gebiet nahe des Apex der Cochlea maximal, hohe Frequenzen die Basis am Steigbügel. Man erhält also auf diese Weise eine *tonotope Karte*.

Diese räumliche Ordnung nach verschiedenen Frequenzen beruht auf den einzelnen Eigenschaften der Basilarmembran und der Haarzellen. Die Basilarmembran, die die gesamte Cochlea durchzieht, hat für jede Frequenz an einem anderen Ort ihr Schwingungsmaximum: das Maximum für tiefe Frequenzen liegt am Apex der Basilarmembran, dasjenige hoher Frequenzen liegt nahe des Steigbügels. Dadurch werden zum Beispiel die Haarzellen am Apex durch tiefe Frequenzen stärker angeregt. Zum zweiten konnte gezeigt werden, dass die Haarzellen nur auf einen sehr schmalen Frequenzbereich ansprechen. Beispielsweise sind die Haarzellen am Apex nicht nur wegen der Eigenschaften der Basilarmembran besonders empfindlich für tiefe Frequenzen, sondern auch, weil die Haarzellen dieses Bereichs optimal auf tiefe Frequenzen abgestimmt sind.

Über den Hörnerv laufen die Signale von der Cochlea über mehrere Zwischenstufen zum *Corpus geniculatum mediale* und von dort zum primären *auditorischen*

Cortex. Dabei bleibt die Ortsinformation durch die frequenzbezogenen bzw. tonotopen Karten erhalten. In der Hörrinde der Katze zum Beispiel sind die Neuronen in folgender Weise angeordnet: Links befinden sich solche Neuronen, die optimal auf hohe Frequenzen abgestimmt sind, nach rechts sinkt die Frequenz, auf welche die Neuronen mit einer maximalen Entladungsrate reagieren. Solche tonotopen Karten wiederholen sich auf allen Zwischenstationen, auf welchen die Information von der Cochlea zum auditorischen Cortex hin weitergeleitet wird.

Eine weitere bemerkenswerte neuronale Karte des auditorischen Systems wurde bei der Schleiereule entdeckt. In einer bestimmten Hirnstruktur, dem *Nucleus mesencephalicus lateralis dorsalis (MLD)*, finden sich Neuronen, die nur dann aktiv sind, wenn eine Schallquelle in einem bestimmten Raumgebiet relativ zum Kopf des Tieres liegt [15–17]. Benachbarte Zellen des MLD reagieren auf benachbarte Raumgebiete. Diese Neuronen bilden somit eine Karte des die Eule umgebenden Raumes. So wie jeder Punkt der Cochlea durch einen kleinen Bereich des auditorischen Cortex repräsentiert wird, so wird jeder Punkt des Raumes durch einen kleinen Bereich des MLD repräsentiert.

2.3 Sehsystem und Retinotopie

Die folgenden Abschnitte haben das Ziel, die große Bedeutung topographisch korrekter Verbindungen im Sehsystem hervorzuheben. Damit soll die Wichtigkeit der mathematischen Modellierung solcher Ordnungszustände unterstrichen werden, die weit über das retino-tectale System hinausgeht.

2.3.1 Retina

Die Retina (Netzhaut) ist eine Zellschicht, die die Rückseite des Augapfels auskleidet und unter anderem die lichtempfindlichen *Photorezeptoren* enthält. Diese lassen sich schon aufgrund ihrer äußeren Form in *Stäbchen* und *Zapfen* unterteilen. In ihren Außensegmenten enthalten sie die lichtempfindlichen Sehpigmente. Eine bestimmte Struktur dieser Moleküle, nämlich das an das Protein Opsin gebundene *Retinal*, verändert bei Lichtabsorption seine Konfiguration durch eine *cis-trans-Isomerisierung* [18]. Dadurch wird eine chemische Kettenreaktion ausgelöst, die schließlich ein elektrisches Signal in den Photorezeptoren auslöst. Dieses Signal wird über ein Neuronennetzwerk aus *Bipolarzellen*, *Horizontalzellen* und *Amakrinzellen* an die *Ganglienzellen* weitergeleitet. Die Axone der retinalen Ganglienzellen ziehen als Sehnerv (*Nervus opticus*) zum Gehirn. Bei niederen Wirbeltieren projiziert der Sehnerv vor allem in das Tectum. Bei Säugetieren hingegen ziehen zusätzlich Fasern in den Thalamus zum seitlichen Kniehöcker (*Corpus geniculatum laterale*; CGL) [12].

Um die Bedeutung topographischer Ordnungen im Sehsystem zu verdeutlichen, sei im Folgenden die Verarbeitung visueller Information im Gehirn des Menschen

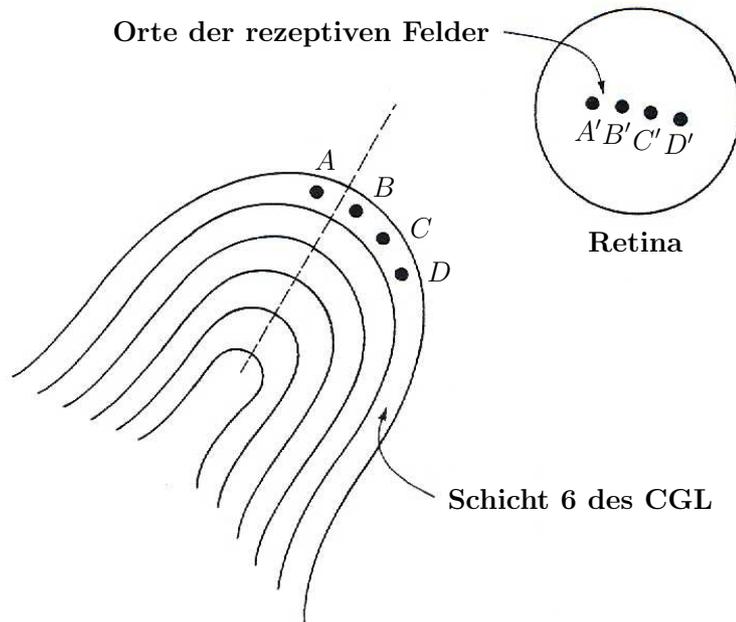


Abbildung 2.1: Retinotopie neuronale Karten im CGL. Die Neuronen des CGL bei A , B , C und D der Schicht 6 besitzen rezeptive Felder bei A' , B' , C' und D' auf der Retina. Benachbarte Orte im CGL entsprechen also benachbarten Orten der Retina. Auch die anderen fünf Schichten zeigen diese retinotopie Ordnung. Führt man entlang der gestrichelten Linie eine Elektrode in das CGL ein, so stößt man nur auf Neuronen, deren rezeptive Felder am selben Ort der Retina liegen (aus [13]).

betrachtet, wobei insbesondere die strukturelle Organisation der am Sehen beteiligten Hirnstrukturen ausführlicher diskutiert wird [13].

2.3.2 Thalamus

Das CGL ist eine bohnenförmige Struktur, die sich innerhalb des Thalamus befindet, also räumlich zwischen der Retina und dem visuellen Cortex. Es kommt sowohl auf der linken als auch auf der rechten Seite des Gehirns vor. Das CGL ist in sechs Schichten gegliedert, wobei jede Schicht nur Signale von jeweils einem Auge erhält: die Schichten 2, 3 und 5 vom *ipsilateralen* Auge, d. h. dem Auge derselben Seite wie das betrachtete CGL, und die Schichten 1, 4 und 6 vom *kontralateralen* Auge, also von demjenigen Auge, das auf der dem betrachteten CGL gegenüberliegenden Seite liegt. Jede Schicht ist mit der Retina derart verbunden, dass benachbarte Orte im CGL von benachbarten Orten der Retina innerviert werden. Das CGL besteht also aus sechs geschichteten retinotopen Karten (siehe Abbildung 2.1). Eine senkrecht in das CGL eingeführte Elektrode trifft somit nur auf Neuronen, die alle Reize aus etwa derselben Region der Retina erhalten. Diesen Bereich, aus dem ein Neuron Informationen erhält, bezeichnet man als rezeptives Feld.

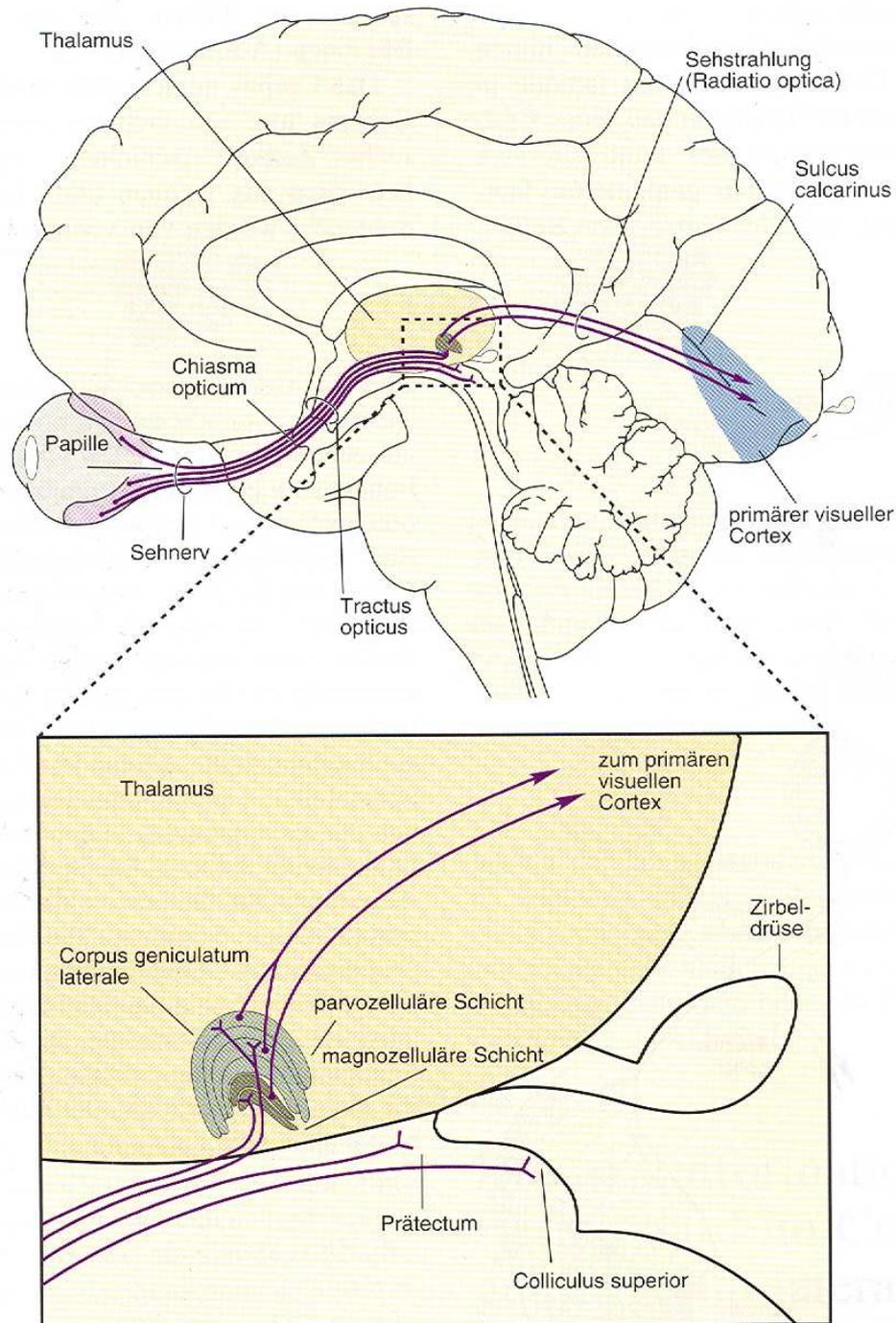


Abbildung 2.2: Sehbahn beim Menschen. Die Axone der Ganglienzellen verlassen die Retina durch die Papille, von wo aus sie als Sehnerv gebündelt unter anderem zum CGL im Thalamus ziehen. Von dort ziehen Fasern zum primären visuellen Cortex. Außerdem projizieren die retinalen Ganglienzellen noch zum Prätectum und zum Colliculus superior. Diese Projektionen sind wichtig für Pupillenreflexe und die Vermittlung visuell gesteuerter Augenbewegungen. Dabei bleibt die retinotopie Ordnung bei allen Projektionen zwischen den verschiedenen Zellschichten weitgehend erhalten (aus [11]).

Das CGL reguliert offensichtlich den Informationsfluss von der Retina zum visuellen Cortex. So werden beispielsweise für zehn Nervenimpulse, die das CGL von der Retina erreichen, nur vier an den visuellen Cortex geleitet.

2.3.3 Visueller Cortex

Die visuelle Information aus dem CGL wird über ca. anderthalb Millionen Axone weiter an den primären visuellen Cortex im Hinterhauptlappen geleitet, der etwa 250 Millionen Neuronen umfasst (siehe Abbildung 2.2). Der visuelle Cortex wird auch als *Area striata* bezeichnet. Er ist in mehrere Schichten gegliedert, wobei die Fasern des CGL zur Schicht 4C ziehen. Auch hier bleibt die topographische Ordnung erhalten, d. h. es existiert eine retinotopie Karte im visuellen Cortex.

In ihren Forschungsarbeiten über die rezeptiven Felder der corticalen Neuronen Anfang der fünfziger Jahre identifizierten Hubel und Wiesel drei Haupttypen von Zellen des visuellen Cortex: *einfache Zellen*, *komplexe Zellen* und *endinhibierte Zellen* [19].

Die rezeptiven Felder der einfachen Zellen sind wie diejenigen der retinalen Ganglienzellen und der Zellen des CGL in eine erregende und eine hemmende Zone unterteilt. Allerdings sind diese Zonen nun parallel nebeneinander statt konzentrisch angeordnet. Eine einfache Zelle hat eine maximale Entladungsrate für einen parallel zur Ausrichtung des rezeptiven Feldes orientierten Lichtstreifen. Mit zunehmender Neigung des Streifens fällt sie ab, bis sie bei senkrechter Orientierung überhaupt nicht mehr reagiert. Die Ausrichtung des rezeptiven Feldes kann verschiedene Orientierungen annehmen. Hubel und Wiesel fanden sowohl Zellen, die auf senkrechte als auch solche, die auf waagrechte oder diagonale Streifen am besten reagierten.

Komplexe Zellen reagieren wie die einfachen Zellen bevorzugt auf eine bestimmte Orientierung von Lichtstreifen, aber die meisten nur dann, wenn sich dieser über das rezeptive Feld *bewegt*. Weiterhin sprechen viele komplexe Zellen vor allem auf eine bestimmte *Bewegungsrichtung* an.

Endinhibierte Zellen reagieren auf bewegte Linien bestimmter Länge oder auf sich bewegende Ecken und Winkel. Im Gegensatz zu komplexen Zellen reagieren endinhibierte Zellen nicht mehr, wenn eine bestimmte Reizdauer überschritten wird.

Die Neuronen des visuellen Cortex sind in *Positionssäulen* organisiert. Damit ist gemeint, dass die rezeptiven Felder der Neuronen innerhalb einer Säule senkrecht zur Cortex-Oberfläche alle übereinander oder sehr dicht beieinander liegen. Die rezeptiven Felder von Neuronen, die von einer schräg in den Cortex eingeführten Elektrode getroffen werden, verschieben sich systematisch, wobei benachbarte Neuronen auch benachbarte rezeptive Felder auf der Retina haben. Ebenso wie im Tectum und im CGL findet sich also auch im visuellen Cortex eine retinotopie Karte der Netzhaut.

Hubel und Wiesel wiesen noch weitere Organisationsprinzipien des visuellen Cortex nach. Eine senkrecht in den Cortex eingeführte Elektrode stößt auf alle drei Zelltypen, die aber alle ähnliche Reizorientierungen bevorzugen. Zusätzlich zur Organisation in Positionssäulen ist der Cortex also auch in Orientierungssäulen organisiert, wobei jede Säule Zellen enthält, die sowohl gleiche rezeptive Felder besitzen als auch auf ähnliche Orientierungen optimal ansprechen. Benachbarte Säulen haben ähnliche, aber leicht abweichende Orientierungspräferenzen. Diese bevorzugten Reizorientierungen ändern sich beim Fortschreiten von Säule zu Säule regelmäßig in der Weise, dass innerhalb eines Millimeters quer zur Cortex-Oberfläche alle Orientierungen von Null bis 180 Grad durchlaufen werden.

Außerdem sind die corticalen Neuronen noch nach dem Auge, auf das sie reagieren, in *Augendominanzsäulen* organisiert. Die meisten Neuronen reagieren zwar auf die Reizung sowohl des linken als auch des rechten Auges, sprechen jedoch optimal auf eines der beiden Augen an. Im Abstand von 0.25 bis 0.5 mm wechselt diese okulare Dominanz.

Die bisher erwähnten Säulen bilden gemeinsam sogenannte *Hypersäulen*. Diese etwa einen Millimeter breiten Verarbeitungsmodule bestehen aus je einer Augendominanzsäule für das linke und das rechte Auge, die ihren Input vom selben Ort auf der Retina erhalten. Jede Augendominanzsäule enthält wiederum einen vollständigen Satz von Orientierungssäulen. Der visuelle Cortex besteht aus Tausenden solcher Hypersäulen. Ein Lichtstreifen mit einer Neigung von 45 Grad auf einem bestimmten Ort der Retina des linken Auges aktiviert die Neuronen derjenigen Hypersäule, die diesem Ort der Retina zugeordnet ist, wobei in dieser Säule wiederum die Neuronen in den Orientierungssäulen der linken Augendominanzsäule mit einer Orientierungspräferenz von etwa 45 Grad erregt werden.

2.3.4 Retino-Tectales System

Das *Tectum opticum*, meist einfach als Tectum bezeichnet, findet sich auf beiden Seiten des Gehirns. Es ist bei allen Wirbeltieren (*Vertebraten*) vorhanden und besitzt eine ovale Form. Bei Säugetieren ist es lediglich eine von zwei Zwischenstationen visueller Informationsverarbeitung, wobei der größere Teil der Axone der retinalen Ganglienzellen zum CGL führt. Beim Menschen z. B. enden rund neunzig Prozent der Sehnervenfasern im CGL [14]. Hingegen fungiert das Tectum bei Fischen, Amphibien, Reptilien und Vögeln als Hauptsehzentrum [20]. Es spielt unter anderem die entscheidende Rolle bei der Steuerung des Beutefangverhaltens von Amphibien [21].

2.3.5 Hypothesen und Modelle

Wie bereits in der Einleitung beschrieben, bildet sich im Verlauf der Ontogenese zwischen der Retina und dem Tectum eine retinotopie Ordnung aus (siehe

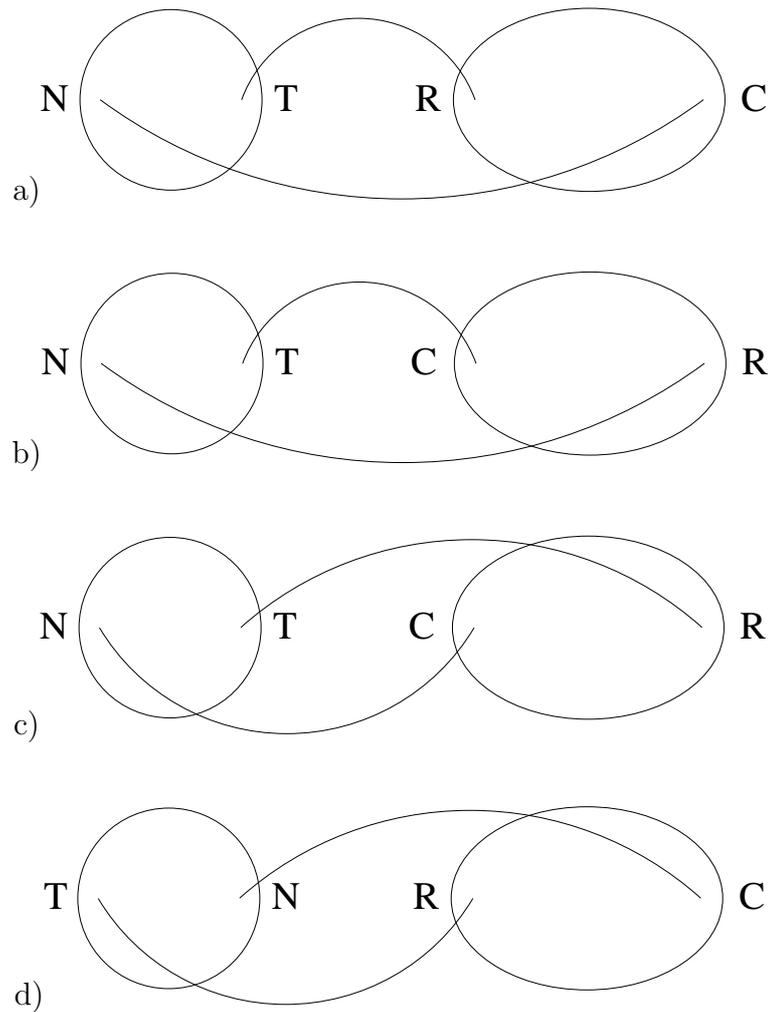


Abbildung 2.3: Ungestörte (a) und manipulierte Entwicklungen: Rotation des Tectums in einem frühen Entwicklungsstadium (b) und in einem späteren Stadium (c) sowie bei einer Rotation des Auges (d). Die relative Lage von Retina und Tectum ist durch die Großbuchstaben angegeben: N = nasal (nasennah), T = temporal (schlāfennah), R = rostral (in Richtung Schnauze gelegen), C = caudal (in Richtung Schwanz gelegen). (Nach [28].)

Abbildung 1.1). Die Vorstellungen darüber, wie sich die Entstehung solcher hochgeordneten neuronalen Strukturen erklären lässt, wurden nachdrücklich von den Arbeiten von Sperry [22–24] beeinflusst, in denen die retino-tectalen Verbindungen bei Amphibien untersucht werden. Im Gegensatz zu Säugetieren, Vögeln und Reptilien sind Fische und teilweise auch Amphibien in der Lage, verletzte oder durchtrennte Sehnervenfasern zu regenerieren und so ihre Sehfähigkeit zurückzugewinnen [25, 26]. In einer Serie von Experimenten durchtrennte Sperry den Sehnerv narkotisierter Molche und drehte das Auge um 180 Grad zur optischen Achse. Die Axone regenerierten sich und das Sehsystem blieb funktionsfähig. In Verhaltenstests zeigten sich aber Auffälligkeiten. Die Tiere verhielten sich nun so, als sei ihre visuelle Welt umgekehrt. Ein dem Tier links oben dargebotener

visueller Reiz z. B. führte zu einer motorischen Reaktion, die in das untere rechte Sehfeld zielte. Sperry folgerte daraus, dass die Axone der durchtrennten Sehnerven wieder Kontakt mit ihrem ursprünglichen Zielort im Tectum aufgenommen haben, was sich später auch durch anatomische Untersuchungen bestätigte. Aufbauend auf diesen Ergebnissen postulierte Sperry, dass die einzelnen retinalen Axone und die entsprechenden Zielneuronen im Tectum durch molekulare Marker, also Erkennungsmoleküle, gekennzeichnet sind. Die Entstehung der richtigen Verknüpfungen würde demnach davon abhängen, ob die Moleküle auf den Oberflächen der prä- und postsynaptischen Neuronen zueinander passen. Diese *Chemoaffinitäts-Hypothese* erklärt nach Sperry nicht nur die Wiederherstellung gekappter optischer Verbindungen, sondern auch deren erstmalige Entstehung während der Ontogenese [27].

2.3.6 Experimentelle Ergebnisse

Zahlreiche Experimente haben gezeigt, dass die Ideen von Sperry in der Tat eine wichtige Rolle bei der Generierung der retinotopen Ordnung spielen. Allerdings haben manche Ergebnisse auch deren Grenzen aufgezeigt und deutlich gemacht, dass *zusätzliche* Mechanismen erforderlich sind, um topographisch korrekte Verbindungen zu ermöglichen [28]. Einige dieser Experimente, die immer in künstlichen Manipulationen der normalen, ungestörten Entwicklung bestehen, werden im Folgenden kurz erläutert.

- Ungestörte Entwicklung:

Bei der normalen Entwicklung projizieren die retinalen Ganglienzellen der nasalen Gebiete der Retina auf die caudalen Bereiche des Tectums, die Zellen der temporalen Retina dagegen auf rostrale Tectum-Gebiete (siehe Abbildung 2.3 a).

- Rotation des Tectums:

Dreht man das Tectum des Krallenfrosches (*Xenopus*) in einem sehr frühen Entwicklungsstadium um 180 Grad, so entwickelt sich eine normale retinotope Karte (siehe Abbildung 2.3 b). Erfolgt die Rotation hingegen zu einem späteren Zeitpunkt, so ergibt sich eine entsprechend rotierte Projektion (siehe Abbildung 2.3 c).

- Rotation des Auges:

Bei der Rotation des Auges um 180 Grad ergibt sich, wie bereits oben beschrieben, eine rotierte Projektion (siehe Abbildung 2.3 d). Bemerkenswerterweise ändert sich daran auch nichts, wenn man die Rotation in einem sehr frühen Stadium ausführt. Es gibt also nicht den zur Rotation des Tectums analogen Fall einer normalen retinotopen Karte.

2.3.7 Feineinstellung durch sensorische Erfahrung

Die Bildung synaptischer Kontakte zwischen der Retina und den betreffenden Hirnstrukturen lassen sich in drei Schritte einteilen [11]. Im ersten Schritt wählt das Axon der Ganglienzelle der Retina eine ganz bestimmte Bahn, entlang der es wächst. Als zweites wächst das Axon in das Zielgebiet des Gehirns ein, z. B. in das Tectum oder das CGL. Der dritte Schritt besteht in einer Feinabstimmung der Kontakte: Nun entsteht die exakte topographische Ordnung, die man als Retinotopie bezeichnet. Für die ersten beiden Schritte sind molekulare Erkennungsmechanismen von entscheidender Bedeutung. So werden die Axone der retinalen Ganglienzellen durch molekulare Signale von der Retina zum Sehnerv und von dort zum CGL geleitet. Ist das Axon einmal in sein Zielgebiet hineingewachsen, dann geschieht die Feinabstimmung durch aktivitätsabhängige Mechanismen. Bei Stimulation von Retina-Zellen wird jedes Axon zu seinem spezifischen Zielneuron innerhalb der entsprechenden Hirnstruktur geleitet und stellt so eine Punkt-zu-Punkt-Ordnung in der Karte der Zielregion her.

Am Beispiel der bereits in Abschnitt 2.3.3 eingeführten Augendominanzsäulen soll im Folgenden gezeigt werden, durch welche Mechanismen eine solche Feineinstellung bewirkt werden kann. Hierzu analysierte man zahlreiche Experimente, in denen die normale Entwicklung dieser Säulen durch Deprivation gestört wurde, wie z. B. durch Verschließen eines Auges nach der Geburt. Jede Faser, die vom CGL aus den visuellen Cortex innerviert, verzweigt sich zunächst in Gebiete, in denen sich später mehrere solcher Augendominanzsäulen beider Augen befinden. Mit der Zeit werden dann einige Verbindungen eingestellt, andere dagegen verstärkt. Am Ende bleiben fast nur noch Verbindungen an solchen Zellen übrig, die ausschließlich Eingangssignale von nur einem Auge erhalten. Man bezeichnet diesen im Nervensystem weit verbreiteten Prozess als *Synapsenretraktion*.

Ursache für diese Neuordnung ist möglicherweise, dass bei der Geburt des Tieres kleine Unterschiede in der Zahl der Kontakte von links- und rechtsseitigem Auge an alternierenden Zellgruppen im visuellen Cortex bestehen. Diese Unterschiede sind das Ergebnis genetischer und eventuell zufälliger Entwicklungsprozesse. Benachbarte Axone, die vom selben Auge stammen, sind in der Regel gleichzeitig aktiv und kooperieren dadurch bei der Erregung der Zielzelle. Höchstwahrscheinlich haben die in einer Region etwas zahlreicheren Axone einen Vorteil, da durch die kooperativen Effekte zusätzliche Verbindungen mit den Zellen dieser Region entstehen, und zwar aufgrund von Konkurrenzprozessen auf Kosten der Axone, die vom anderen Auge stammen. Im Ergebnis entstehen zwei Populationen von Axonen, die ein gemeinsames Gebiet innervieren, ohne sich zu überschneiden. Für die Ausbildung einer topographischen Ordnung sind also Kooperations- und Konkurrenzprozesse nötig.

2.3.8 Kooperations- und Konkurrenzprozesse

Die Kooperation zwischen benachbarten Axonen desselben Auges und die Konkurrenz zwischen Axonen von verschiedenen Augen scheint durch neuronale Aktivität reguliert zu werden. Durch die Injektion von Tetrodotoxin (TTX), dem Gift des Kugelfisches, in die retinalen Ganglienzellen junger Katzen kann deren Aktivität unterbunden werden [29–31]. Es zeigt sich, dass dann die Bildung von Augendominanzsäulen ausbleibt. Reizt man allerdings *asynchron* die beiden Sehnerven, deren Aktivität durch TTX nicht blockiert wird, durch implantierte Elektroden, so bilden sie sich aus, bei *synchroner* Reizung hingegen nicht. Neben der synchronen Aktivität benachbarter Axone des einen Auges ist also auch eine asynchrone Aktivität der Axone beider Sehnervenfasern zur Ausbildung der Augendominanzsäulen erforderlich.

Wie bereits in Abschnitt 2.3.2 erläutert, sind auch im CGL die Eingänge aus den beiden Augen in verschiedenen Schichten angeordnet. Hier ist die Trennung nach den einzelnen Augen bereits vor der Geburt abgeschlossen. Diese Trennung kann irreversibel unterbrochen werden, wenn man TTX in das Chiasma opticum (Sehnervenkreuzung) des Fetus injiziert. Dadurch wird die Generierung von Aktionspotentialen zu einem Zeitpunkt verhindert, zu welchem sich die Axone im CGL noch überlappen. Auch hier ist also die neuronale Aktivität von entscheidender Bedeutung, damit sich eine topographische Ordnung etablieren kann. Da diese Ordnung aber beim CGL bereits vorgeburtlich abgeschlossen ist, kann die neuronale Aktivität nicht durch visuelle Erfahrung ausgelöst worden sein. Stattdessen hat sich herausgestellt, dass im Uterus die Axone des Sehnervs unabhängig von visueller Information *spontan* aktiv sind [29]. Benachbarte Zellen der fetalen Retina feuern synchrone Impulsfolgen ab, die mehrere Sekunden andauern und nur von ein- bis zweiminütigen Ruhepausen unterbrochen werden. Die daraus folgende synchrone Erregung der Zielzelle scheint die Synapsen der gleichzeitig aktiven Axone zu verstärken (Kooperation), diejenigen, deren zugehörigen Axone inaktiv sind oder asynchron feuern, dagegen abzuschwächen (Konkurrenz). Dies erinnert stark an das von Hebb eingeführte Konzept [32]: Gleichzeitige Aktivität in den prä- und postsynaptischen Elementen einer Synapse verstärkt die Verbindung. Diese Idee spielt auch eine zentrale Rolle bei Lernprozessen und der Gedächtnisbildung [33].

Es ist noch nicht genau bekannt, welche molekularen Mechanismen dazu führen, dass synchrone Aktivität kooperierende Synapsen verstärkt und konkurrierende Fasern abschwächt. Eine mögliche Antwort besteht darin, dass die Neuronen in Schicht 4C des visuellen Cortex einen Wachstumsfaktor freisetzen. Dieser Wachstumsfaktor könnte in so geringer Konzentration vorhanden sein, dass sich die überlappenden Fasern über die gesamte Zielstruktur ausbreiten müssen, während sie um den Faktor konkurrieren. Sind zwei Synapsen gleichzeitig aktiv und mit demselben Zielneuron verbunden, steigern sie dadurch die Menge des freigesetzten Wachstumsfaktors. Synchrone Aktivität tritt besonders häufig zwischen solchen Axonen auf, die Informationen aus benachbarten Bereichen der Retina desselben

Auges übertragen. Axone von verschiedenen Augen oder Axone desselben Auges, aber aus entfernteren Gebieten der Retina, haben keine erhöhte Freisetzung des Wachstumsfaktors zur Folge. Der Wachstumsfaktor wird also nur dann ausgeschüttet, wenn synchron feuernde Axone die postsynaptische Zelle, d. h. das Neuron des visuellen Cortex, in ausreichendem Maße erregen. Ein entscheidender Punkt besteht darin, dass der Wachstumsfaktor nur von den gerade aktiven präsynaptischen Endigungen aufgenommen wird, und zwar dann, wenn diese soeben Neurotransmitter freigesetzt haben. Entsprechend nehmen die Endigungen derjenigen Axone, die von entfernteren Regionen der Retina bzw. vom anderen Auge Informationen übermitteln, und damit im allgemeinen nicht synchron mit diesen aktiv sind, zu diesem Zeitpunkt keinen Wachstumsfaktor auf. Folglich bilden die aktiven Axone zusätzliche Endigungen auf der Zielzelle aus. Der Speicher an Wachstumsfaktor wird so auf Kosten der inaktiven Endigungen geleert. Dadurch schrumpfen die inaktiven Endigungen und ziehen sich zurück. Sind zwei Axonenden zu verschiedenen Zeiten aktiv, konkurrieren sie um den begrenzten Vorrat an Wachstumsfaktor. Grosse Endigungen nehmen mehr Wachstumsfaktoren auf, wodurch sie noch größer werden – auf Kosten kleinerer Endigungen. Somit hängt das Ergebnis solcher Kooperations- und Konkurrenzprozesse von geringen Größenunterschieden dieser synaptischen Endigungen ab.

Kapitel 3

Modellierung

In diesem Kapitel werden wir die auf der Grundlage der Marker-Theorie von Willshaw, Häussler und von der Malsburg entwickelten Vorstellungen darlegen. Dabei werden wir zunächst aufzeigen, wie sich durch Modellvorstellungen auf zellulärer und biochemischer Ebene die Generierung einer retinotopen Ordnung durch Kooperations- und Konkurrenzprozesse verstehen lässt. Danach folgt ein kurzer Abriss über einfache Modelle aus der Populationsdynamik, da diese einige auffällige formale Analogien zu unserem neuronalen System erkennen lassen. Im letzten Abschnitt folgt eine Herleitung der Häussler-Gleichungen zur Ausbildung einer retinotopen Ordnung, die auf experimentell begründeten Modellvorstellungen beruht.

3.1 Modell von Willshaw und von der Malsburg

Die von Sperry entwickelte Idee von Markern beruht darauf, dass es zwei Sätze von Markern gibt, die den beiden Zellschichten zugeordnet sind. Innerhalb einer Zellschicht unterscheiden die Marker die verschiedenen Zellen. Beide Sätze von Markern korrespondieren in einer feststehenden Weise, was schließlich dazu führt, dass bestimmte Zellen der ersten Schicht, z. B. der Retina, mit bestimmten Zellen der zweiten Schicht, z. B. des Tectum, verbunden werden. Die Vorstellungen von Sperry kann man als *direkte Paarung* bezeichnen [34]: Jede Zelle hat eine charakteristische Affinität für jede der Zellen der Zielstruktur, wobei die höchste Affinität zwischen solchen Zellen besteht, deren Marker sich am ähnlichsten sind.

In den siebziger Jahren wurde die auf Sperry zurückgehende Marker-Theorie von Willshaw und von der Malsburg aufgenommen und weiterentwickelt [35]. Sie gehen davon aus, dass die Marker auf den Zellen veränderlich sind. Zwischen den Zellen findet ein ständiger Informationsaustausch mittels Molekülen statt. Diese werden innerhalb der präsynaptischen Schicht produziert und durch die synaptischen Kontakte zur postsynaptischen Schicht transportiert. Dabei gibt es verschiedene Typen von Molekülen, mindestens aber einen für jede Raumrichtung. Jede Molekülsorte wird mit einer konstanten Rate in einem einzelnen Gebiet der

präsynaptischen Schicht synthetisiert. Die Moleküle haben eine begrenzte Lebensdauer und können innerhalb der präsynaptischen Schicht diffundieren, d. h. sie werden zwischen benachbarten Zellen ausgetauscht. Die Konzentration der entsprechenden Molekülsorte hat an der Quelle einen Maximalwert und fällt mit zunehmender Distanz von dieser ab. Die Stärke dieses Abfalls ist durch die Diffusionsrate sowie die Zerfallskonstante des Moleküls gegeben.

Auf diese Art ist jede präsynaptische Zelle markiert. Jede der Zellen trägt mehrere verschiedene Moleküle, deren Konzentrationen von einer zur nächsten Zelle leicht variieren. Man kann dies veranschaulichen, indem man jeder Zelle einen Vektor zuordnet, dessen Komponenten die einzelnen Molekülkonzentrationen wiedergeben. Diese Vektoren können nicht die Position der Zelle codieren, wenn die Orte der Quellen für die betreffenden Moleküle unbekannt sind. Sie sind jedoch im Prinzip dazu geeignet, die präsynaptischen Endigungen, d. h. die Axonenden, nach ihren Ursprungszellen zu ordnen. Die Vektoren können also *Nachbarschaftsbeziehungen* codieren.

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Axone die postsynaptische Schicht bereits erreicht haben und dort gewissermaßen versuchsweise zufällige, ungeordnete synaptische Verbindungen geknüpft haben. Durch diese synaptischen Kontakte werden nun kontinuierlich Moleküle der entsprechenden präsynaptischen Zelle in die durch sie innervierten postsynaptischen Zellen übertragen. In welchen Verhältnissen die verschiedenen Moleküle dabei übertragen werden, ist durch den Konzentrations-Vektor der präsynaptischen Zelle gegeben. Die Moleküle werden dann auch innerhalb der postsynaptischen Schicht ausgetauscht, sodass auch sie auf diese Weise markiert sind.

Jede Synapse ist durch zwei Größen charakterisiert. Zum einen spielt die *Stärke* der synaptischen Verbindung, und zum anderen deren *Fitness* eine Rolle. Die Stärke ist durch die Rate der übertragenden Moleküle von der Faser auf die nachgeschaltete Zelle gegeben. Die Fitness hingegen ist durch die *Ähnlichkeit* zwischen den beiden beteiligten Zellen bestimmt. Diese Ähnlichkeit ist eine Funktion der Konzentrationen der beiden Zellen gemeinsamen Molekülsorten. Sie hat den Wert 1, wenn diese Anteile der entsprechenden Konzentrationen in beiden Zellen gleich sind. Falls die Zellen keine gemeinsamen Moleküle besitzen, ist die Ähnlichkeit Null.

Die stetige Modifizierung der synaptischen Verbindungsstärken verläuft dabei nach folgenden Regeln:

1. Die Stärke jeder Synapse wächst entsprechend ihrer Fitness. Je größer diese ist, desto größer ist die zugehörige Wachstumsrate der Verbindungsstärke.
2. Die erste Regel würde für sich allein genommen zu unbeschränktem Wachstum der Verbindung führen. Deshalb gilt zusätzlich noch eine *Summenregel*, die die gesamten Verbindungsstärken aller Synapsen eines Axons auf einem konstanten Wert hält. Die Verstärkung einiger Synapsen führt entsprechend zur Abschwächung anderer.

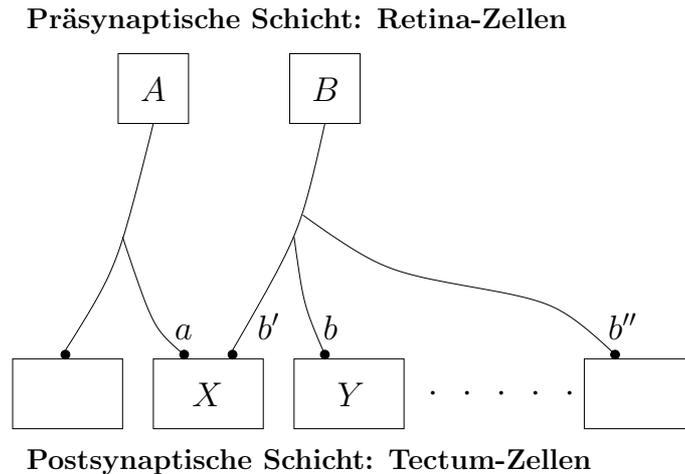


Abbildung 3.1: Wechselwirkung zwischen synaptischen Kontakten (nach [35]). In dieser schematischen Darstellung sind die Zellkörper der Neuronen mit A , B , X , Y und die Synapsen mit a , b , b' , b'' bezeichnet.

3. Die Axone verzweigen sich und knüpfen in der Nachbarschaft der bereits existierenden Synapse weitere Kontakte, wobei solche Synapsen abgebaut werden, die unterhalb einer bestimmten Grenze geschrumpft sind.

Es soll nun gezeigt werden, wie diese Mechanismen zu einer Um- und Neuordnung der synaptischen Kontakte führen können. Dazu werden die Prozesse betrachtet, bei denen Synapsen miteinander wechselwirken. Die grundlegendste Form einer solchen Wechselwirkung ist die einer Synapse mit sich selbst. Das Axon der präsynaptischen Zelle A (vgl. Abbildung 3.1) überträgt durch die Synapse a Moleküle in die Zelle X , wobei die Anteile der verschiedenen Molekülsorten gleich denen von A sind. Folglich nähern sich die chemischen Markierungen der beiden Zellen an, was gemäß der ersten Regel eine Verstärkung der Verbindung zur Folge hat. Ob die Synapse dann auch tatsächlich verstärkt wird, hängt von den Wechselwirkungen zwischen den Synapsen ab. Dabei gibt es drei Arten von Wechselwirkungen. Zwischen den synaptischen Kontakten, die demselben Axon und damit derselben präsynaptischen Zelle entspringen, herrscht *Konkurrenz*, was eine direkte Konsequenz der obigen Summenregel ist: Synapsen hoher Fitness werden auf Kosten der anderen Synapsen verstärkt. In Abbildung 3.1 konkurrieren die Synapsen b , b' und b'' miteinander.

Die anderen beiden Arten von Wechselwirkungen werden durch postsynaptische Konzentrationen vermittelt. Man betrachte die beiden Synapsen a und b in Abbildung 3.1, die zwei benachbarte Zellen der postsynaptischen Seite innervieren. Wenn A und B auf der präsynaptischen Seite Nachbarn sind, werden sie ähnliche Mischungen von Molekülen auf die Zellen X und Y übertragen. Da die Moleküle auch auf der postsynaptischen Seite ausgetauscht werden, wird die Wachstumstendenz der beiden Synapsen noch durch die Moleküle verstärkt, die auf die benachbarte Zelle der postsynaptischen Seite übertragen wurden. Man hat hier also einen *kooperativen* Effekt vorliegen. Sind A und B weiter voneinander entfernt,

so unterscheiden sich die Mischungen von übertragenen Molekülen an den beiden Synapsen. Sie werden zwar gleicher Art sein, aber in verschiedenen Anteilen. Die Molekülkonzentrationen in dieser postsynaptischen Region können dann nicht gleichzeitig denen in A und denen in B ähneln. Folglich wird entweder A oder B begünstigt, d. h. eine Synapse wird verstärkt und die andere abgeschwächt. Man hat eine *Interferenz* vorliegen. Wenn A und B *sehr* weit voneinander entfernt sind und keine gemeinsamen Moleküle besitzen, wirken sie unabhängig voneinander. Der Grad dieser beiden Wechselwirkungen hängt von der verwendeten Form der weiter oben erwähnten Ähnlichkeitsfunktion ab. Ist diese vorgegeben, hängt die Reichweite der Wechselwirkungen von den molekularen Gradienten ab.

Die Konsequenzen der drei Regeln kann man qualitativ wie folgt beschreiben: Von den postsynaptischen Zellen, die durch eine präsynaptische Zelle innerviert sind, werden diejenigen mit der geringsten Ähnlichkeit zu dieser Zelle eliminiert (Konkurrenz). Da benachbarte Zellen ähnliche Konzentrations-Vektoren haben, werden die Zellen hoher Ähnlichkeit zusammen angeordnet sein. Die präsynaptischen Zellen, die ein bestimmtes Gebiet in der postsynaptischen Zellschicht innervieren, werden benachbart sein (Kooperation). Ferner werden die meisten postsynaptischen Zellen Eingänge von genau einer präsynaptischen Region erhalten (Interferenz).

3.2 Exkurs: Populationsdynamik

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, beruht die Ausbildung einer retinotopen Ordnung wesentlich auf dem Wechselspiel von Kooperation und Konkurrenz. Bevor wir uns der mathematischen Beschreibung der Retinotopie zuwenden, wollen wir uns einfachen Modellen der Populationsdynamik zuwenden [36]. Es zeigt sich nämlich, dass zwischen der Wechselwirkung der Populationen verschiedener Spezies und derjenigen zwischen den retino-tectalen Verbindungen einige Analogien bestehen.

3.2.1 Einfaches System

Wir betrachten ein Ökosystem mit N verschiedenen Spezies, deren Populationsgrößen durch $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, N$ gegeben sind. Jeder Spezies wird eine Fitness $F_i > 0$ zugeordnet. Die Entwicklung des Ökosystems werde durch

$$\dot{x}_i = F_i x_i - x_i \frac{1}{N} \sum_j F_j x_j \quad (3.1)$$

beschrieben. Der erste Term $F_i x_i$ repräsentiert die Wachstums- bzw. Geburtenrate der Spezies i . Die Summe in (3.1) berücksichtigt zum einen die Konkurrenz zwischen den verschiedenen Spezies, zum anderen die Konkurrenz innerhalb einer Spezies. Man beachte hierbei, dass die Summe über die Wachstumsraten aller

Spezies j geht. Bei Anwachsen der anderen Spezies verstärkt sich die Konkurrenz um Nahrung, Lebensraum usw. Der Fall $j = i$ trägt der Tatsache Rechnung, dass auch die Individuen der gleichen Spezies i untereinander konkurrieren. Wir summieren in Gleichung (3.1) über alle Spezies i auf und dividieren durch N . Das führt auf

$$\frac{1}{N} \sum_i \dot{x}_i = \left(1 - \frac{1}{N} \sum_i x_i \right) \frac{1}{N} \sum_j F_j x_j. \quad (3.2)$$

Die zweite Summe in (3.2) ist mit Ausnahme des uninteressanten Sonderfalls, dass sämtliche Populationen $x_i = 0$ sind, positiv. Daraus folgt

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_i x_i(t) = 1. \quad (3.3)$$

Die durchschnittliche Populationsgröße konvergiert also gegen 1. Mit der durchschnittlichen Fitness

$$F(t) = \frac{1}{N} \sum_j x_j F_j \quad (3.4)$$

können wir schreiben

$$\dot{x}_i = x_i(F_i - F). \quad (3.5)$$

Daraus folgt

$$\dot{x}_i = \begin{cases} > 0; & F_i > F \\ < 0; & F_i < F. \end{cases} \quad (3.6)$$

Diejenigen Spezies mit einer Fitness, die über der aktuellen durchschnittlichen Fitness $F(t)$ liegt, wachsen also, während die Populationsgrößen der anderen Spezies abnehmen. Dadurch steigt $F(t)$ weiter an. Schliesslich sterben alle Spezies mit Ausnahme derjenigen mit der größten Fitness aus (*survival of the fittest*). Die allgemeine Lösung dieses Systems gekoppelter Differentialgleichungen lautet

$$x_i(t) = \frac{x_i(0)e^{F_i t}}{\frac{1}{N} \sum_j x_j(0)e^{F_j t}}. \quad (3.7)$$

3.2.2 Verallgemeinerung

Eine allgemeinere Form der Gleichungen (3.1) ist durch

$$\dot{x}_i = x_i^\mu F_i - x_i \frac{1}{N} \sum_j x_j^\mu F_j \quad (3.8)$$

mit einem variablen Exponenten μ gegeben. In dieser Form finden wir somit

$$\frac{1}{N} \sum_i \dot{x}_i = \left(1 - \frac{1}{N} \sum_i x_i \right) \frac{1}{N} \sum_j x_j^\mu F_j. \quad (3.9)$$

Im Langzeitverhalten folgt wiederum:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_i x_i(t) = 1. \quad (3.10)$$

Im letzten Abschnitt haben wir den Fall $\mu = 1$ behandelt. Im Hinblick auf die in den folgenden Abschnitten einzuführenden Evolutionsgleichungen für die Verbindungsgewichte synaptischer Kontakte betrachten wir noch den Fall $\mu = 2$. Hier erhalten wir

$$\dot{x}_i = x_i^2 F_i - x_i \frac{1}{N} \sum_j x_j^2 F_j, \quad (3.11)$$

was sich mit der Abkürzung $f_i = x_i F_i$ auf die Form (3.1) bringen lässt:

$$\dot{x}_i = x_i f_i - x_i \frac{1}{N} \sum_j x_j f_j. \quad (3.12)$$

Dieses System zeigt eine starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Diejenigen Spezies, die bereits am Beginn der Entwicklung eine hohe Populationsstärke aufweisen, werden entsprechend stärker wachsen.

3.3 Evolutionsgleichungen der linearen Kette

Wie in Kapitel 2 erläutert, erfordert die Feinabstimmung der synaptischen Kontakte zwischen den retinalen Ganglienzellen und den Neuronen im Tectum Aktivität in den Zellen der Netzhaut. Die Häussler-Gleichungen, die im Folgenden abgeleitet werden sollen, berücksichtigen diese Forderung. Dem Modell liegen die folgenden Annahmen zugrunde [36]:

1. Spontane Aktivität in der Retina, d. h. eine lichtunabhängige Aktivität;
2. Exzitatorische Verbindungen zwischen den retinalen Ganglienzellen führen zu Korrelationen zwischen der Aktivität dieser Zellen;
3. Anregung der Zellen im Tectum durch die Ganglienzellen;
4. Hebb-Plastizität: Korrelationen in der Aktivität zwischen zwei Zellen der prä- und postsynaptischen Seite führen zu einer Verstärkung der betreffenden Synapse;
5. Konkurrenzprozesse zwischen Synapsen, die von derselben Ganglienzelle gebildet werden und ebenso zwischen Synapsen, die mit demselben Neuron der Tectum-Zelle Kontakte knüpfen.

Retina und Tectum werden im Modell von Häussler und von der Malsburg als eindimensionale Ketten mit periodischen Randbedingungen angenommen. Das

heißt, man betrachtet Ringe aus jeweils N Zellen. Das Verbindungsgewicht zwischen einer retinalen Ganglienzelle r und einer Zelle des Tectum t wird mit $w(t, r)$ bezeichnet, wobei $t, r = 0, 1, \dots, N - 1$ gilt. Ziel ist nun eine mathematische Modellierung des Problems, die in der Lage ist, die Generierung einer retinotopen Ordnung aus einem homogenen Anfangszustand heraus zu beschreiben (siehe Abbildung 1.1). Die zeitliche Entwicklung der Verbindungsgewichte sei durch folgende gewöhnliche Differentialgleichung gegeben:

$$\dot{w}(t, r) = \alpha + F(t, r)w(t, r) - w(t, r)\hat{B}(t, r, \alpha + Fw). \quad (3.13)$$

Die positive Größe α steht für die homogene Neubildung von Synapsen der retinalen Ganglienzellen auf dem Tectum. Die Größen $F(t, r)$ bezeichnen die Fitness der betreffenden Synapse. Die gesamte Wachstumsrate ist somit durch $\alpha + F(t, r)w(t, r)$ gegeben. Der Operator \hat{B} für eine Funktion $X(t, r)$ ist durch

$$\hat{B}(t, r, X) := \frac{1}{2N} \left(\sum_{t'} X(t', r) + \sum_{r'} X(t, r') \right) \quad (3.14)$$

definiert. Man beachte die Analogie zur Populationsdynamik von Abschnitt 3.2. Die beiden Gleichungen (3.1) und (3.13) wären einander völlig äquivalent, wenn man in letzterer nur *eine* der beiden Summen aus (3.14) berücksichtigen würde. Das Auftreten zweier Summen trägt der oben erwähnten Tatsache Rechnung, dass zwei Konkurrenzprozesse zwischen den synaptischen Kontakten existieren.

In Gleichung (3.13) sind noch die Größen $F(t, r)$ zu bestimmen. Dies geschieht durch die Betrachtung der neuronalen Aktivitäten der Zellen der Retina und des Tectum.

3.3.1 Aktivitäten in Retina und Tectum

Die Aktivität $\sigma_R(r)$ einer Zelle r der Retina sei durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\dot{\sigma}_R(r) = -a\sigma_R(r) + \sum_{r'} R^R(r, r')\sigma_R(r') + q(r, \tau). \quad (3.15)$$

Um Verwechslungen mit der Indizierung der Tectum-Zellen t zu vermeiden, wurde die Zeit hier mit τ bezeichnet. Die Größen $R^R(r, r')$ geben die Verbindungsstärken der synaptischen Kontakte *innerhalb* der Retina zwischen den beiden Zellen r und r' an. Die spontane Aktivität wird durch $q(r, \tau)$ beschrieben, die eine Zufallsgröße darstellt. Wir nehmen an, dass $q(r, \tau)$ verglichen mit der Zeitkonstanten $1/a$ langsam veränderlich sein soll. Außerdem sollen die spontanen Aktivitäten zweier Ganglienzellen keinerlei Korrelation zeigen:

$$\langle q(r, \tau), q(r', \tau) \rangle_\tau = \delta_{rr'} = \begin{cases} 1 & , \quad r = r' \\ 0 & , \quad r \neq r' \end{cases} \quad (3.16)$$

In Matrix-Schreibweise lautet (3.15) mit den Vektoren σ_R und \mathbf{q} sowie der Matrix R^R der Verbindungsstärken

$$\dot{\sigma}_R = -a\sigma_R + R^R\sigma_R + \mathbf{q}(\tau). \quad (3.17)$$

Für den stationären Fall erhält man daraus

$$(R^R - a\mathbf{1})\sigma_R + \mathbf{q} = 0. \quad (3.18)$$

Die Lösung von (3.18) ist durch

$$\sigma_R = C^R \mathbf{q}(\tau) \quad (3.19)$$

mit

$$C^R = \frac{1}{a} \left[1 + \frac{1}{a}R^R + \left(\frac{1}{a}R^R\right)^2 + \left(\frac{1}{a}R^R\right)^3 + \dots \right] \quad (3.20)$$

gegeben.

Die durch die synaptischen Kontakte auf der Tectum-Zelle t induzierte neuronale Aktivität $I(t)$ sei

$$I(t) = \sum_{r'} w(t, r') \sigma_R(r') = \sum_{r' r''} w(t, r') C^R(r', r'') q(r''). \quad (3.21)$$

Die gesamte Aktivität $\sigma_T(t)$ der Zelle t wird in Analogie zu (3.15) durch

$$\dot{\sigma}_T(t) = -a\sigma_T(t) + \sum_{t'} R^T(t, t') \sigma_T(t') + I(t) \quad (3.22)$$

beschrieben. Für den stationären Fall $\dot{\sigma}_T(t) = 0$ erhält man dann in gleicher Weise

$$\sigma_T = C^T \mathbf{I}(t) \quad (3.23)$$

mit

$$C^T = \frac{1}{a} \left[1 + \frac{1}{a}R^T + \left(\frac{1}{a}R^T\right)^2 + \left(\frac{1}{a}R^T\right)^3 + \dots \right]. \quad (3.24)$$

Mit (3.21) und der Notation $c_T(t, t')$ für die Elemente der Matrix (3.24) lautet (3.23) in Komponentenschreibweise

$$\sigma_T(t) = \sum_{t'} c_T(t, t') I(t') = \sum_{t' r' r''} c_T(t, t') w(t', r') C^R(r', r'') q(r''). \quad (3.25)$$

3.3.2 Hebb-Plastizität

Nach der Hebbschen Lernregel wird eine synaptische Verbindung dann verstärkt, wenn die beiden Neuronen, d. h. prä- und postsynaptisches Neuron, gleichzeitig aktiv sind [32]. Mathematisch lässt sich diese koinzidente Aktivität zweier Zellen t und r durch die Korrelation

$$F(t, r) = \langle \sigma_T(t), \sigma_R(r) \rangle \quad (3.26)$$

beschreiben. Mit Hilfe von (3.19) und (3.25) erhalten wir

$$F(t, r) = \sum_{t' r' r'' r'''} c_T(t, t') w(t', r') C^R(r', r'') C^R(r, r''') \langle q(r'', \tau), q(r''', \tau) \rangle. \quad (3.27)$$

Mit (3.16) und der Definition

$$c_R(r', r) := \sum_{r''} C^R(r', r'') C^R(r, r'') \quad (3.28)$$

ergibt sich

$$F(t, r) = \sum_{t' r'} c_T(t, t') c_R(r, r') w(t', r'). \quad (3.29)$$

Nach (3.29) ist die Fitness $F(t, r)$ somit eine Funktion sämtlicher Verbindungsgewichte $w(t, r)$.

3.3.3 Kooperationskoeffizienten

Die Größen $c_R(r, r')$ und $c_T(t, t')$ werden als Kooperationskoeffizienten bezeichnet. Sie sind über (3.20), (3.28) bzw. (3.24) durch $R^R(r, r')$, $R^T(t, t')$ festgelegt. Die Eigenschaften dieser Verbindungsstärken innerhalb der jeweiligen Zellschicht übertragen sich somit auf die Kooperationskoeffizienten. Da es sich um exzitatorische Verbindungen handelt, gilt

$$R^R(r, r') \geq 0, \quad R^T(t, t') \geq 0. \quad (3.30)$$

Weiterhin sind die Verbindungsstärken nur vom Abstand zwischen den Zellen abhängig:

$$R^R(r, r') = R^R(|r - r'|), \quad R^T(t, t') = R^T(|t - t'|). \quad (3.31)$$

Somit gilt auch

$$c_R(r, r') \geq 0, \quad c_T(t, t') \geq 0 \quad (3.32)$$

und

$$c_R(r, r') = c_R(|r - r'|), \quad c_T(t, t') = c_T(|t - t'|). \quad (3.33)$$

Weiterhin liegt es nahe, die lateralen Verbindungsstärken zwischen zwei Zellen mit zunehmendem Abstand als monoton fallend anzunehmen, sodass für die Kooperationskoeffizienten folgt

$$c_R(r, r') > c_R(r, r'') \quad \text{falls} \quad |r - r'| < |r - r''|, \quad (3.34)$$

$$c_T(t, t') > c_T(t, t'') \quad \text{falls} \quad |t - t'| < |t - t''|. \quad (3.35)$$

Schließlich können die Größen $c_T(t, t')$ und $c_R(r, r')$ als normiert angenommen werden:

$$\sum_{r'} c_R(r, r') = \sum_{t'} c_T(t, t') = 1. \quad (3.36)$$

Dies lässt sich durch geeignete Umskalierung der Verbindungsgewichte immer erreichen.

3.3.4 Häussler-Gleichungen

Setzt man $F(t, r)$ gemäß (3.29) in die Gleichung (3.13) ein und berücksichtigt man (3.14), so erhält man schließlich die *Häussler-Gleichungen* [9] für den diskreten Fall der linearen Kette:

$$\begin{aligned}
 \dot{w}(t, r) = & \alpha + w(t, r) \sum_{t'} \sum_{r'} c_T(t, t') c_R(r, r') w(t', r') \\
 & - \frac{w(t, r)}{2N} \left\{ \sum_{t'} \left[\alpha + w(t', r) \sum_{t''} \sum_{r'} c_T(t', t'') c_R(r, r') w(t'', r') \right] \right. \\
 & \left. + \sum_{r'} \left[\alpha + w(t, r') \sum_{t'} \sum_{r''} c_T(t, t') c_R(r', r'') w(t', r'') \right] \right\}. \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

Diese Modellgleichungen werden in Ref. [9] mit Methoden der Synergetik untersucht. Gleichzeitig bilden sie den Ausgangspunkt unserer Erweiterung der Analyse auf beliebige euklidische und nichteuklidische Geometrien höherer Dimension. Der erste Schritt dazu besteht in der Verallgemeinerung der Häussler-Gleichungen (3.37) auf beliebige Geometrien in Kapitel 5. Doch zuvor erfolgt im nächsten Kapitel ein Überblick über die Methoden der Synergetik.

Kapitel 4

Synergetik

Zur Beschreibung und Analyse komplexer nichtlinearer Vielteilchensysteme haben sich synergetische Methoden bestens bewährt. In diesem Kapitel geben wir einen Überblick über die physikalischen Grundideen und mathematischen Verfahren der Synergetik.

4.1 Einführung

Der Terminus Synergetik stammt aus dem Griechischen und bedeutet soviel wie *Lehre vom Zusammenwirken*. Er wurde 1969 von Hermann Haken als Bezeichnung eines neuen Wissensgebietes eingeführt, das sich ein grundlegendes Verständnis der spontanen Entstehung räumlicher, zeitlicher, raumzeitlicher und funktionaler Muster und Strukturen zum Ziel gesetzt hat [3–8]. Solche Selbstorganisationsprozesse zeigen sich in mannigfaltiger Weise in Natur und Technik. Ein Beispiel hierfür bildet der Laser [37–39]. Ab einem bestimmten kritischen Wert der Leistungszufuhr, der sogenannten Laserschwelle, kommt es zu einer charakteristischen Änderung im makroskopischen Verhalten des Systems. Unterhalb dieser Schwelle strahlen die lichtemittierenden Atome in unkorrelierter Weise Lichtwellenzüge ab. Bei Erreichen der Schwelle ordnen die Atome ihr Verhalten auf einem makroskopischen Maßstab und erzeugen gemeinsam kohärentes Laserlicht. Der Laser kann als Paradigma der Synergetik angesehen werden, da er als relativ einfaches System, ausgehend von den mikroskopischen semiklassischen Grundgleichungen, eine detaillierte synergetische Analyse sowie den Vergleich der Ergebnisse mit dem Experiment ermöglicht. Weitere Beispiele für Selbstorganisationsprozesse finden sich in der Hydrodynamik. Bei der Bénard-Instabilität wird eine Flüssigkeit von unten her erwärmt. Wird eine bestimmte Temperaturdifferenz zwischen unterer und oberer Flüssigkeitsschicht überschritten, so setzt eine makroskopische Wärmebewegung ein, z. B. in Form von Rollen [40]. Solche und ähnliche Phänomene haben unter anderem große Bedeutung in der Meteorologie [41]. Weitere physikalische Anwendungsgebiete der Synergetik finden sich in der Plasmaphysik, der Festkörperphysik und der nichtlinearen Optik.

Räumliche, zeitliche und raumzeitliche Muster können auch bei chemischen Reaktionen auftreten. Das bekannteste Beispiel hierfür ist die Belousov-Zhabotinsky-Reaktion [42]. Nach Mischung der Reaktanten kann es dabei zu zeitlichen Oszillationen in Form von periodischen Farbwechseln kommen. Auch räumliche bzw. raumzeitliche Muster in Form von konzentrischen Kreisen und Spiralen sind möglich [4, 7].

Besonders zahlreiche und vielfältige Beispiele selbstorganisierter hochgeordneter Strukturen finden sich in der belebten Natur. Man denke nur an die Ontogenese, während der sich aus einer einzelnen Zelle nach und nach Gewebe und Organe bilden. Diese wiederum wirken in sinnvoller Weise zusammen, um komplexe Lebensvorgänge wie Bewegung, Stoffwechsel usw. hervorzubringen. Auch die einzelne Zelle selbst ist ein hochkomplexes System, bestehend aus einer Vielzahl verschiedener Strukturen und Moleküle wie Zellkern, Mitochondrien, DNA, Enzyme etc. Synergetische Konzepte haben auch bei biologischen Fragestellungen neue Einsichten eröffnet. Als Beispiele seien hier nur Untersuchungen zur Morphogenese [4, 43] sowie die Analyse von EEG- und MEG-Daten des Gehirns während epileptischer Anfälle bzw. in Koordinationsexperimenten angeführt [44–51].

Auch in Gebieten außerhalb der Naturwissenschaft wie Soziologie und Ökonomie wurden mit Erfolg synergetische Methoden angewandt, so z. B. in Modellen zur Migration [52, 53].

Die Synergetik hat den Anspruch, eine *universelle* Theorie der Selbstorganisation komplexer Systeme zu sein. Wir werden deshalb im Folgenden die gemeinsamen Kennzeichen der im Rahmen der Synergetik betrachteten Systeme herausstellen und *allgemeingültige* Prinzipien und Aussagen formulieren.

Synergetische Systeme sind Vielteilchensysteme. Die betrachteten Systeme bestehen aus zahlreichen Untersystemen. Diese können je nach System ganz unterschiedlicher Art sein: Atome beim Laser, Moleküle bei Systemen der Hydrodynamik oder Chemie, Neuronen oder Neuronenpopulationen in biologischen Systemen, Tier- und Pflanzenpopulationen in der Ökologie, Sterne in Galaxien, Menschen in sozialen und ökonomischen Systemen. Weiterhin können die Untersysteme eines bestimmten Systems identisch oder verschieden sein. Ein Beispiel für identische Untersysteme liegt bei den Chrom-Ionen eines Rubinlasers vor, während hingegen bei chemischen Reaktionen verschiedene Molekülsorten zu betrachten sind. Welche Bestandteile des Systems man im Rahmen der synergetischen Analyse als Untersysteme definiert, ist letztlich nicht vorgegeben. Andererseits ist deren Wahl aber auch nicht willkürlich, da sie durch eine sinnvolle Beschreibungsebene wesentlich mitbestimmt wird. So können beispielsweise bei Fragestellungen aus der Neurobiologie oder Neuroinformatik sowohl einzelne (Modell-)Neuronen als auch Neuronenpopulationen als Untersysteme fungieren. Hingegen macht es offensichtlich keinen Sinn, hier einzelne Atome als Untersysteme zu betrachten.

Ein synergetisches System ist offen. Es steht in engem Kontakt zu seiner Umwelt durch den Austausch von Energie und/oder Materie und/oder Information.

Dies bedeutet insbesondere, dass die selbstorganisierte Entstehung hochgeordneter Strukturen nicht im Widerspruch zum zweiten Hauptsatz der Thermodynamik steht, der bekanntermaßen für *abgeschlossene* Systeme gilt. Das System ist in einem Zustand fern vom thermodynamischen Gleichgewicht. Den Einfluss der Umwelt auf das System beschreibt man durch einen Satz von *Kontrollparametern* $\{\sigma_i\}$. Durch eine Änderung dieser Kontrollparameter kann der Zustand des Systems instabil werden und durch einen neuen stabilen Zustand ersetzt werden. Man spricht von einem *Nichtgleichgewichtsphasenübergang*. Beim Laser wäre der Kontrollparameter die durch die zugeführte Pumpleistung bewirkte Besetzungsinversion, beim Bénard-Problem die Temperaturdifferenz zwischen den beiden Flüssigkeitsschichten. In biologischen Systemen können das z. B. die Konzentrationen bestimmter Substanzen (Aktivatoren, Inhibitoren, Hormone, Neurotransmitter, Drogen etc.), Wachstumsraten synaptischer Kontakte oder die Energiezufuhr in Form von Licht oder Wärme sein.

Synergetische Systeme sind nichtlinear. Die Fähigkeit zur spontanen Selbstorganisation auf makroskopischem Maßstab setzt eine nichtlineare Dynamik voraus. Das heißt, dass die Untersysteme und/oder die Wechselwirkungen der Untersysteme untereinander nichtlinear sind.

Wie ist nun die Vorgehensweise der Synergetik bei der Analyse eines komplexen Systems? Ganz offensichtlich ist es nicht möglich, das Verhalten jedes Untersystems mathematisch zu beschreiben. Dazu müsste man z. B. beim Festkörperlaser ein System aus 10^{18} nichtlinearen gekoppelten Differentialgleichungen lösen. Wie wir jedoch in den folgenden Abschnitten darlegen werden, kann das System in der Nähe von Instabilitätspunkten durch nur wenige *Ordnungsparameter* beschrieben werden. Diese legen den makroskopischen Zustand des Systems vollständig fest. Das Ziel einer synergetischen Analyse besteht somit letztlich in der Identifizierung der Ordnungsparameter und dem Auffinden der Ordnungsparametergleichungen.

4.2 Evolutionsgleichung

Der erste Schritt besteht im Aufstellen der Evolutionsgleichungen für die Untersysteme. Man fasst die Variablen der Untersysteme zu einem n -dimensionalen Zustandsvektor q zusammen, der den Zustandsraum Γ aufspannt. Die Evolutionsgleichung lautet dann im allgemeinen Fall

$$\frac{\partial}{\partial t} q(x, t) = \hat{N}(q(x, t), x, t, \nabla, \{\sigma_i\}) + F(q(x, t), t). \quad (4.1)$$

Die zeitliche Entwicklung des Zustandsvektors q ist also zum einen durch einen nichtlinearen Operator \hat{N} gegeben, der von q selbst sowie den Kontrollparametern $\{\sigma_i\}$ abhängt. Zum anderen kann \hat{N} noch explizit von Ort und Zeit abhängen. Der Nabla-Operator ∇ steht für die Abhängigkeit von räumlichen Inhomogenitäten wie z. B. Diffusionsterme $\nabla^2 q(x, t)$. Desweiteren kann das System noch von Zufallskräften F beeinflusst werden. Gleichung (4.1) stellt somit einen Satz

von gekoppelten, nichtlinearen, partiellen stochastischen Differentialgleichungen dar.

Um die Darstellung nicht zu überfrachten, werden wir uns im Folgenden auf Gleichungen vom Typ der Häussler-Gleichungen (3.37) beschränken. Hier haben wir den Fall einer autonomen deterministischen Gleichung ohne explizite Ortsabhängigkeit vorliegen. Wir betrachten somit die Evolutionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} q(x, t) = \hat{N}(q(x, t), \{\sigma_i\}). \quad (4.2)$$

Zur synergetischen Analyse der allgemeineren Gleichung (4.1) verweisen wir den Leser auf [4]. Eine Erweiterung der Synergetik auf Systeme mit zeitlicher Verzögerung, die durch sogenannte Delay-Differentialgleichungen beschrieben werden, findet sich in [54–57].

4.3 Stationärer Zustand

Eine vollständige globale Analyse des durch (4.2) beschriebenen Systems ist nur in den seltensten Fällen möglich. Mit analytischen mathematischen Methoden kommt man nur dann weiter, wenn man sich auf die lokale Umgebung eines stationären Referenzzustandes q_0 beschränkt. Dieser Zustand kann im Allgemeinen zeitabhängig sein. Dies ist z. B. bei Grenzzyklen der Fall, die zeitlich periodische stationäre Zustände darstellen. Daneben gibt es quasiperiodische Zustände, bei denen sich die Trajektorie im Phasenraum auf der Oberfläche eines Torus bewegt. Wir beschränken uns im Folgenden der Einfachheit halber auf zeitunabhängige stationäre Zustände $q_0(x)$, weisen aber darauf hin, dass der synergetische Formalismus nicht auf diese beschränkt ist. Zeitunabhängige Zustände erhält man aus der impliziten Gleichung

$$\hat{N}(q_0(x), \{\sigma_i\}) = 0. \quad (4.3)$$

4.4 Lineare Stabilitätsanalyse

Um Aussagen über die Stabilität der stationären Lösung machen zu können, untersucht man das Verhalten des Systems in der lokalen Umgebung von q_0 . Dazu führt man kleine Auslenkungen $v(x, t)$ gemäß

$$q(x, t) = q_0(x) + v(x, t) \quad (4.4)$$

ein. Man erhält somit aus der Ausgangsgleichung (4.2) die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x, t) = \hat{N}(q_0(x) + v(x, t), \{\sigma_i\}). \quad (4.5)$$

Entwickeln wir den nichtlinearen Term nach Potenzen in v , so erhalten wir unter Verwendung von Gleichung (4.3)

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x, t) = \hat{L}(v(x, t), \{\sigma_i\}) + \hat{N}_{NL}(v(x, t), \{\sigma_i\}). \quad (4.6)$$

Der erste Term in (4.6) beschreibt den linearen Anteil der rechten Seite mit dem linearen Operator \hat{L} . Der nichtlineare Anteil \hat{N}_{NL} beinhaltet alle höheren Potenzen in v , es ist also

$$\hat{N}_{NL}(v(x, t), \{\sigma_i\}) = \hat{Q}(v(x, t), \{\sigma_i\}) + \hat{K}(v(x, t), \{\sigma_i\}) + \dots, \quad (4.7)$$

mit dem quadratischen Beitrag \hat{Q} , dem kubischen Beitrag \hat{K} usw. In einer linearen Stabilitätsanalyse untersuchen wir die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x, t) = \hat{L}(v(x, t), \{\sigma_i\}). \quad (4.8)$$

Mit dem Ansatz

$$v(x, t) = v_\lambda(x) \exp(\Lambda_\lambda t) \quad (4.9)$$

erhalten wir das Eigenwertproblem

$$\hat{L}(v_\lambda(x), \{\sigma_i\}) = \Lambda_\lambda v_\lambda(x). \quad (4.10)$$

Die Indizes λ nummerieren hierbei die Eigenfunktionen durch. Die Abhängigkeit von den Kontrollparametern $\{\sigma_i\}$ ist in den Eigenwerten enthalten:

$$\Lambda_\lambda = \Lambda_\lambda(\{\sigma_i\}). \quad (4.11)$$

Der Zustand q_0 ist stabil, wenn alle Störungen $v(x, t)$ im Laufe der Zeit wieder abklingen. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Realteile sämtlicher Eigenwerte negativ sind:

$$\operatorname{Re}[\Lambda_\lambda(\{\sigma_i\})] < 0 \quad \forall \lambda. \quad (4.12)$$

4.5 Nichtlineare Bewegungsgleichungen

Es sollen nun die vollständigen nichtlinearen Bewegungsgleichungen in der Basis aus Eigenfunktionen $v_\lambda(x)$ abgeleitet werden. Wir setzen o. B. d. A. voraus, dass diese ein vollständiges Orthonormalsystem bilden:

$$\int_x dx v_\lambda^*(x) v_{\lambda'}(x) = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (4.13)$$

$$\sum_\lambda v_\lambda(x) v_\lambda^*(x') = \delta(x - x'). \quad (4.14)$$

Dann lässt sich $v(x, t)$ nach den Basisfunktionen $v_\lambda(x)$ gemäß

$$v(x, t) = \sum_\lambda V_\lambda(t) v_\lambda(x) \quad (4.15)$$

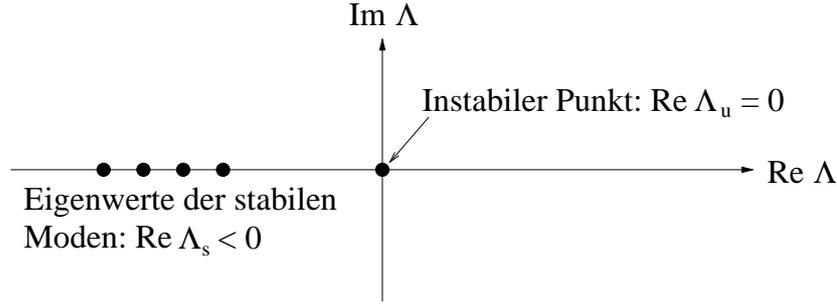


Abbildung 4.1: Situation am Instabilitätspunkt: Ausgehend von einem stabilen Zustand (4.12) kann durch Variation der Kontrollparameter $\{\sigma_i\}$ nach $\{\sigma_i\}_{\text{crit}}$ ein Eigenwert den Wert Null annehmen. Die zugehörige Mode wird instabil, während die anderen Moden weiterhin gedämpft werden.

entwickeln. Einsetzen von (4.15) in (4.5) liefert zunächst

$$\sum_{\lambda} \dot{V}_{\lambda}(t)v_{\lambda}(x) = \hat{N} \left(q_0(x) + \sum_{\lambda} V_{\lambda}(t)v_{\lambda}(x), \{\sigma_i\} \right). \quad (4.16)$$

Dies ergibt weiter mit (4.6) und (4.10)

$$\sum_{\lambda} \dot{V}_{\lambda}(t)v_{\lambda}(x) = \sum_{\lambda} \Lambda_{\lambda} V_{\lambda}(t)v_{\lambda}(x) + \hat{N}_{NL} \left(\sum_{\lambda} V_{\lambda}(t)v_{\lambda}(x), \{\sigma_i\} \right). \quad (4.17)$$

Multiplikation mit $v_{\lambda}^*(x)$ und Integration über x führt unter Ausnutzung der Orthonormalitätsrelationen (4.13) auf

$$\dot{V}_{\lambda}(t) = \Lambda_{\lambda} V_{\lambda}(t) + \hat{G}_{\lambda} \left(\sum_{\lambda'} V_{\lambda'}(t)v_{\lambda'}(x), \{\sigma_i\} \right), \quad (4.18)$$

wobei der nichtlineare Anteil durch

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\lambda} \left(\sum_{\lambda'} V_{\lambda'}(t)v_{\lambda'}(x), \{\sigma_i\} \right) &= \int_x dx v_{\lambda}^*(x) \hat{N}_{NL} \left(\sum_{\lambda'} V_{\lambda'}(t)v_{\lambda'}(x), \{\sigma_i\} \right) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} G_{\lambda, j_1 \dots j_k}^{(k)} V_{j_1}(t) \cdots V_{j_k}(t) \end{aligned} \quad (4.19)$$

gegeben ist. Dabei repräsentieren $G^{(k)}$ die Vorfaktoren zu den Termen k -ter Ordnung. Wir haben hier die Einsteinsche Summenkonvention verwendet, d. h. es ist über alle doppelt auftretenden Indizes aufzusummieren, wobei j_i jeweils über alle möglichen Indizes λ gemäß (4.15) läuft. Gleichung (4.18) ist exakt und äquivalent zur Ausgangsgleichung (4.2).

Wenden wir uns nun der Frage zu, wann ein ursprünglich stabiler stationärer Zustand $q_0(x)$ instabil wird. Wir gehen aus von einem Satz von Kontrollparametern, für den die Stabilitätsbedingung (4.12) erfüllt ist. Durch eine Änderung

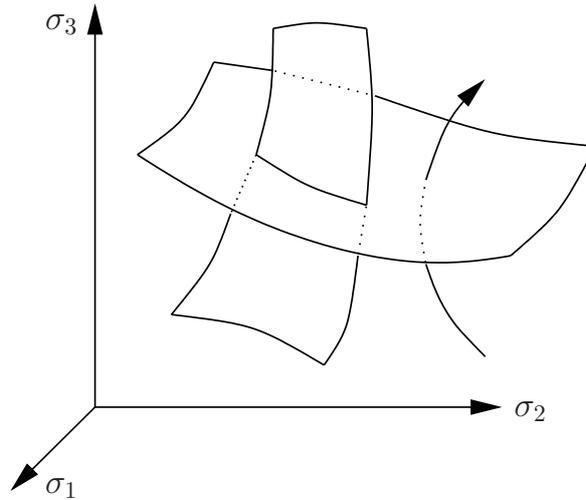


Abbildung 4.2: Kontrollparameterraum am Beispiel der Dimension $n = 3$. Bei Änderung der Kontrollparameter längs einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit wird eine durch (4.20) bestimmte Fläche durchstoßen. Sollen gleichzeitig zwei Eigenwerte instabil werden, muss der Durchstoßpunkt auf der Schnittlinie der beiden Flächen liegen.

der Kontrollparameter $\{\sigma_i\}$ kann der Realteil eines oder mehrerer Eigenwerte verschwinden. Die zugehörigen Moden können infolgedessen exponentiell anwachsen, d. h. die Lösung wird instabil. Ein Instabilitätspunkt ist also durch

$$\operatorname{Re} [\Lambda_{\lambda^u}(\{\sigma_i\}_{\text{crit}})] = 0, \quad (4.20)$$

$$\operatorname{Re} [\Lambda_{\lambda^s}(\{\sigma_i\}_{\text{crit}})] < 0, \quad (4.21)$$

charakterisiert. In Abbildung 4.1 ist das für den Fall reeller Eigenwerte illustriert. Dementsprechend kann man eine Einteilung gemäß

$$V_\lambda(t) \begin{cases} \nearrow U_{\lambda^u}(t) \\ \searrow S_{\lambda^s}(t) \end{cases} \quad (4.22)$$

in instabile ($u = \text{unstable}$) und stabile ($s = \text{stable}$) Modenamplituden vornehmen. Dabei werden in aller Regel nur sehr wenige Eigenwerte instabil. Diese Erfahrungstatsache kann man sich wie folgt veranschaulichen (vgl. Abbildung 4.2). Jede Bedingung (4.20) legt im Raum der Kontrollparameter $\{\sigma_i\} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ eine Hyperfläche der Dimension $n - 1$ fest. Ändern wir die Kontrollparameter längs einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit, so bedeutet das Erreichen des Instabilitätspunktes das Durchstoßen der entsprechenden Hyperfläche. Sollen gleichzeitig mehrere Moden instabil werden, so muss der gemeinsame Schnitt all dieser durch (4.20) bestimmten Hyperflächen durchstoßen werden. Die Modenamplituden der instabilen Moden sind die in der Einführung erwähnten

Ordnungsparameter. Die gesamten instabilen und stabilen Anteile lauten dann

$$U(x, t) = \sum_{\lambda^u} U_{\lambda^u}(t) v_{\lambda^u}(x), \quad (4.23)$$

$$S(x, t) = \sum_{\lambda^s} S_{\lambda^s}(t) v_{\lambda^s}(x). \quad (4.24)$$

Mit der Aufteilung (4.22) gehen die Gleichungen (4.18) in ein System gekoppelter Modenamplitudengleichungen

$$\dot{U}_{\lambda^u}(t) = \Lambda_{\lambda^u} U_{\lambda^u}(t) + \hat{G}_{\lambda^u}(U, S, \{\sigma_i\}), \quad (4.25)$$

$$\dot{S}_{\lambda^s}(t) = \Lambda_{\lambda^s} S_{\lambda^s}(t) + \hat{G}_{\lambda^s}(U, S, \{\sigma_i\}), \quad (4.26)$$

über.

4.6 Versklavungsprinzip

In der Nähe des Instabilitätspunktes gilt wegen (4.20), (4.21)

$$|\operatorname{Re}(\Lambda_{\lambda^u})| \ll |\operatorname{Re}(\Lambda_{\lambda^s})|. \quad (4.27)$$

Die Realteile der Eigenwerte lassen sich als Dämpfungskonstanten der entsprechenden Moden interpretieren. Somit kann man die Kehrwerte als Relaxationszeiten τ_u, τ_s einführen, und es gilt

$$\tau_u = \frac{1}{|\operatorname{Re}(\Lambda_{\lambda^u})|} \gg \tau_s = \frac{1}{|\operatorname{Re}(\Lambda_{\lambda^s})|}. \quad (4.28)$$

Das System generiert in der Nähe der Instabilität eine *Zeitskalenhierarchie*. Mit anderen Worten, die Dynamik der stabilen Moden verläuft auf einer schnelleren Zeitskala als die der instabilen Moden. Die instabilen Moden ändern sich nur sehr langsam, während die stabilen Moden relativ rasch gedämpft werden. Die stabilen Moden werden somit nach einer kurzen Einschwingphase einen Gleichgewichtszustand erreicht haben, der durch die instabilen Moden vorgegeben wird. Die stabilen Moden werden von den Ordnungsparametern gewissermaßen versklavt. Mathematisch drückt sich dieses *Versklavungsprinzip* durch die Relation

$$S(x, t) = h(U(x, t)) \quad (4.29)$$

aus. Eine Bestimmungsgleichung für die zentrale Mannigfaltigkeit h erhalten wir, indem wir (4.29) in die Modenamplitudengleichung (4.26) einsetzen. Dies führt mit der Kettenregel und (4.25) auf

$$\sum_{\lambda^u} \frac{\partial h_{\lambda^s}(U)}{\partial U_{\lambda^u}} [\Lambda_{\lambda^u} U_{\lambda^u} + \hat{G}_{\lambda^u}(U, h(U), \{\sigma_i\})] = \Lambda_{\lambda^s} h_{\lambda^s}(U) + \hat{G}_{\lambda^s}(U, h(U), \{\sigma_i\}). \quad (4.30)$$

Wir bestimmen nun die zentrale Mannigfaltigkeit in niedrigster Ordnung mit Hilfe einer adiabatischen Elimination der stabilen Moden [54]. Hierzu nehmen wir an, dass der nichtlineare Anteil (4.19) in (4.30) mit Termen der Ordnung r beginnt. Dann gilt näherungsweise

$$\hat{G}_{\lambda^u}(U, h(U), \{\sigma_i\}) \approx G_{\lambda^u, \lambda_1^u \dots \lambda_r^u}^{(r)} U_{\lambda_1^u} \cdots U_{\lambda_r^u}, \quad (4.31)$$

$$\hat{G}_{\lambda^s}(U, h(U), \{\sigma_i\}) \approx G_{\lambda^s, \lambda_1^u \dots \lambda_r^u}^{(r)} U_{\lambda_1^u} \cdots U_{\lambda_r^u}. \quad (4.32)$$

Für die zentrale Mannigfaltigkeit setzen wir

$$h_{\lambda^s}(U) \approx H_{\lambda^s, \lambda_1^u \dots \lambda_r^u} U_{\lambda_1^u} \cdots U_{\lambda_r^u}. \quad (4.33)$$

Die Koeffizienten $H_{\lambda^s, \lambda_1^u \dots \lambda_r^u}$ erhält man durch Einsetzen von (4.33) in (4.30) zu

$$H_{\lambda^s, \lambda_1^u \dots \lambda_r^u} = \left[\sum_{j=1}^r \Lambda_{\lambda_j^u} - \Lambda_{\lambda^s} \right]^{-1} G_{\lambda^s, \lambda_1^u \dots \lambda_r^u}^{(r)}. \quad (4.34)$$

Wir wollen abschließend den Fall untersuchen, dass nur reelle Eigenwerte auftreten. Dann geht die Beziehung (4.20) in $\Lambda_{\lambda^u} \approx 0$ über. Daraus folgt mit (4.34) für die Komponenten der zentralen Mannigfaltigkeit (4.33)

$$h_{\lambda^s}(U) \approx -\Lambda_{\lambda^s}^{-1} G_{\lambda^s, \lambda_1^u \dots \lambda_r^u}^{(r)} U_{\lambda_1^u} \cdots U_{\lambda_r^u}. \quad (4.35)$$

Dieses Ergebnis lässt sich auch auf eine pragmatischere Weise gewinnen, indem man die linke Seite von (4.30) Null setzt und die rechte Seite nach $h(U)$ auflöst. Man bestimmt die zentrale Mannigfaltigkeit also aus der Gleichung

$$\dot{S} = 0. \quad (4.36)$$

Dann erhält man

$$h_{\lambda^s}^{(\dot{S}=0)}(U) = -\Lambda_{\lambda^s}^{-1} \hat{G}_{\lambda^s}(U, h(U), \{\sigma_i\}). \quad (4.37)$$

Berücksichtigt man gemäß (4.32) nur die Beiträge niedrigster Ordnung, so geht dieses Ergebnis in das von (4.35) über.

4.7 Ordnungsparemetergleichungen

Mit der Bestimmung der zentralen Mannigfaltigkeit ist es nun möglich, die Amplituden der stabilen Moden in den Gleichungen (4.25) zu eliminieren. Somit erhält man Gleichungen für die instabilen Moden alleine, also die Ordnungsparemetergleichungen

$$\dot{U}_{\lambda^u}(t) = \Lambda_{\lambda^u} U_{\lambda^u}(t) + \hat{G}_{\lambda^u}(U, h(U), \{\sigma_i\}). \quad (4.38)$$

Fassen wir unser Vorgehen noch einmal zusammen. Die Transformation unserer Ausgangsgleichung (4.2) auf die Eigenfunktionen bzw. Moden $v_\lambda(x)$ des linearen

Eigenwertproblems (4.10) führt zunächst auf die Gleichungen (4.18). In der Nähe der Instabilität kann man diese in instabile und stabile Moden einteilen und erhält so die Modenamplitudengleichungen (4.25), (4.26). Dabei werden nur sehr wenige Moden instabil. Aufgrund des Versklavungsprinzips (4.29) bestimmen diese instabilen Modenamplituden, die Ordnungsparameter, das Verhalten der stabilen Modenamplituden. Im Instabilitätsgebiet, d. h. bei einem Nichtgleichgewichtsphasenübergang, kommt es also zu einer drastischen *Reduktion der Freiheitsgrade*. Die wenigen Ordnungsparameter reichen nun aus, um das makroskopische Verhalten des Systems vollständig zu beschreiben. Beim Einmodenlaser z. B. reduziert sich so am Instabilitätspunkt die Zahl der Freiheitsgrade von etwa 10^{18} auf einen einzigen Ordnungsparameter, nämlich die Amplitude der instabil gewordenen Lasermode.

Teil II

Synergetische Systemanalyse

Kapitel 5

Modell

Neuronen einer Zellschicht bilden in aller Regel keine eindimensionalen Anordnungen, sondern zwei- oder dreidimensionale Netzwerke. Deshalb kann die in Kapitel 3 betrachtete lineare Kette nur ein sehr idealisiertes Modellbeispiel darstellen. Um zu einer allgemeineren Betrachtung zu gelangen, übertragen wir die Häussler-Gleichungen aus Abschnitt 3.3.4 auf kontinuierliche Mannigfaltigkeiten höherer Dimension und beliebiger Geometrie. Hierbei gehen wir in phänomenologischer Weise vor, d. h. wir verzichten auf eine mikroskopische Ableitung. Der Übergang auf Kontinua bedeutet, dass wir den diskreten Charakter der Neuronen vernachlässigen und stattdessen eine homogene Zelldichte voraussetzen. Dadurch wird insbesondere die Betrachtung von Mannigfaltigkeiten unterschiedlicher Größe ermöglicht.

5.1 Verallgemeinerte Häussler-Gleichungen

Wir repräsentieren Retina (R) und Tectum (T) durch Mannigfaltigkeiten \mathcal{M}_R bzw. \mathcal{M}_T [58]. Diese sollen jeweils im D -dimensionalen euklidischen Einbettungsraum \mathbb{R}^D liegen (vgl. Abbildung 5.1). Die Koordinaten der entsprechenden Zellen sind durch

$$r = (r_1, r_2, \dots, r_D), \quad r \in \mathcal{M}_R, \quad (5.1)$$

bzw.

$$t = (t_1, t_2, \dots, t_D), \quad t \in \mathcal{M}_T \quad (5.2)$$

gegeben. Man definiert eine Abbildung w , die jedem geordneten Paar (t, r) eine positive reelle Zahl $w(t, r)$ zuordnet:

$$\begin{aligned} w : \mathcal{M}_T \times \mathcal{M}_R &\rightarrow \mathbb{R}^+, \\ (t, r) &\rightarrow w(t, r). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Diese Zahl identifizieren wir mit dem Verbindungsgewicht zwischen der Retina-Zelle r und der Tectum-Zelle t . Zur Beschreibung der Mächtigkeit der Mannigfalt-

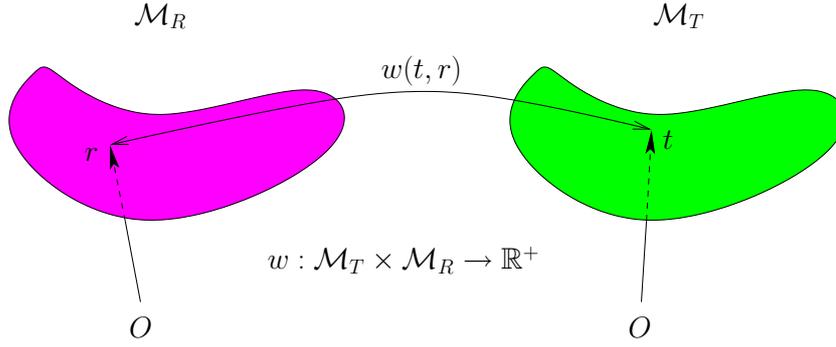


Abbildung 5.1: Retina und Tectum als Mannigfaltigkeiten \mathcal{M}_R und \mathcal{M}_T . Jedem geordneten Paar (t, r) wird ein Verbindungsgewicht $w(t, r)$ zugeordnet.

tigkeiten definiert man ein Maß M_T bzw. M_R , indem man über alle Punkte der Mannigfaltigkeit integriert:

$$M_T = \int_t dt, \quad M_R = \int_r dr. \quad (5.4)$$

Die zeitliche Entwicklung von $w(t, r)$ sei – in Verallgemeinerung der Häussler-Gleichungen (3.37) – durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} \dot{w}(t, r) = & \alpha + w(t, r) \int_{t'} dt' \int_{r'} dr' c_T(t, t') c_R(r, r') w(t', r') \\ & - \frac{w(t, r)}{2M_T} \int_{t'} dt' \left[\alpha + w(t', r) \int_{t''} dt'' \int_{r'} dr' c_T(t', t'') c_R(r, r') w(t'', r') \right] \\ & - \frac{w(t, r)}{2M_R} \int_{r'} dr' \left[\alpha + w(t, r') \int_{t'} dt' \int_{r''} dr'' c_T(t, t') c_R(r', r'') w(t', r'') \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

bestimmt. Mit der Definition der Wachstumsraten

$$f(t, r, w) = \alpha + w(t, r) \int_{t'} dt' \int_{r'} dr' c_T(t, t') c_R(r, r') w(t', r') \quad (5.6)$$

lässt sich die Gleichung (5.5) auch schreiben als

$$\dot{w}(t, r) = f(t, r, w) - \frac{w(t, r)}{2M_T} \int_{t'} dt' f(t', r, w) - \frac{w(t, r)}{2M_R} \int_{r'} dr' f(t, r', w). \quad (5.7)$$

Zum besseren Verständnis soll diese Gleichung genauer betrachtet werden (vgl. Abbildung 5.2). Der erste Term in (5.7) ist die Wachstumsrate für das Verbindungsgewicht $w(t, r)$, die durch (5.6) gegeben ist. Darin steht $\alpha \geq 0$ für eine undifferenzierte, homogene Neubildung von Synapsen auf dem Tectum. Der zweite

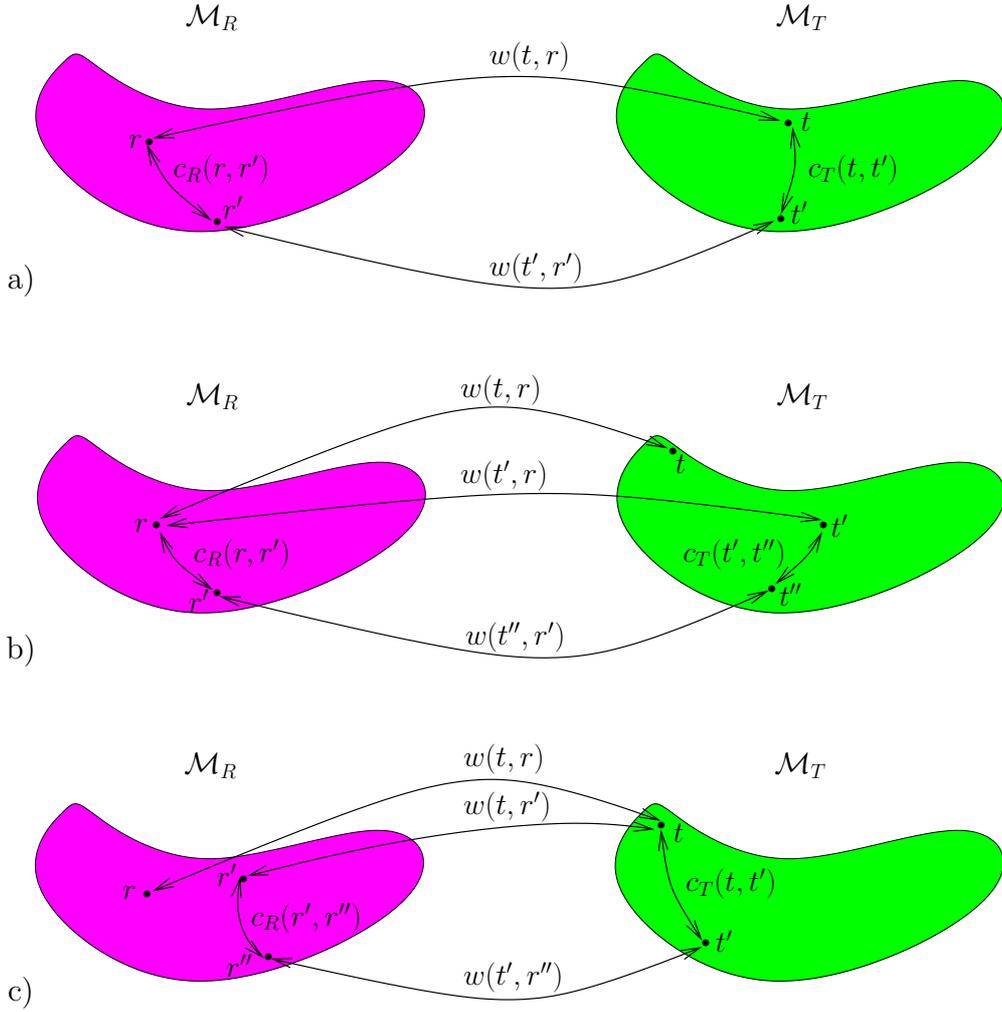


Abbildung 5.2: Kooperations- und Konkurrenzprozesse. Das Verbindungsgewicht $w(t, r)$ zwischen zwei Punkten $t \in \mathcal{M}_T$ und $r \in \mathcal{M}_R$ erfährt gemäß der Evolutionsgleichung (5.5) bzw. (5.6), (5.7) sowohl verstärkende als auch abschwächende Einflüsse. a) Jede Verbindung zwischen r' und t' verstärkt die Verbindung zwischen r und t . Wie ausgeprägt dieser Effekt ist, wird durch die Kooperationsfunktionen c_T und c_R festgelegt. b) Die vom Punkt r ausgehende Verbindung mit t konkurriert mit allen anderen vom selben Punkt r auf \mathcal{M}_T geknüpften Kontakten. c) Ganz analog konkurrieren alle von verschiedenen Punkten der Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_R zum selben Punkt t ziehenden Verbindungen miteinander.

Teil von (5.6) rührt von *kooperativen* Prozessen her. Dabei bezeichnet das Produkt $c_T(t, t')c_R(r, r')w(t', r')$ des Integranden den kooperativen Beitrag der Verbindung zwischen der Retina-Zelle r' und der Tectum-Zelle t' zur entsprechenden Verbindung zwischen r und t (vgl. Abbildung 5.2 a). Die beiden weiteren Terme in (5.7) stehen dagegen für die *Konkurrenzprozesse* (man beachte das negative Vorzeichen). Im ersten dieser Konkurrenzterme wird über alle Wachstumsraten der Verbindungsgewichte zwischen r und t' integriert (r fest). Dies entspricht dem folgenden Konkurrenzprozess: Die synaptischen Kontakte, die von einer bestimm-

ten Retina-Zelle r ausgehen, konkurrieren miteinander (vgl. Abbildung 5.2 b). Im zweiten Term wird über alle Wachstumsraten der Verbindungen zwischen r' und t integriert (t fest): Auch sämtliche synaptischen Kontakte, die auf einer bestimmten Zelle t des Tectums liegen, konkurrieren miteinander (vgl. Abbildung 5.2 c).

Wir geben die Gleichung (5.5) noch in zwei weiteren Formen an, die sich bei der späteren Analyse der Häussler-Gleichungen als nützlich erweisen werden. Fassen wir die von α abhängigen Terme zusammen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{w}(t, r) = & -\alpha[w(t, r) - 1] + w(t, r) \int_{t'} dt' \int_{r'} dr' c_T(t, t') c_R(r, r') w(t', r') \\ & - \frac{w(t, r)}{2M_T} \int_{t'} dt' w(t', r) \int_{t''} dt'' \int_{r'} dr' c_T(t', t'') c_R(r, r') w(t'', r') \\ & - \frac{w(t, r)}{2M_R} \int_{r'} dr' w(t, r') \int_{t'} dt' \int_{r''} dr'' c_T(t, t') c_R(r', r'') w(t', r''). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Daraus lässt sich eine besonders übersichtliche Form der Häussler-Gleichungen gewinnen. Wir definieren zunächst die linearen Operatoren

$$\hat{C}(t, r, x) := \int_{t'} dt' \int_{r'} dr' c_T(t, t') c_R(r, r') x(t', r'), \quad (5.9)$$

$$\hat{B}(t, r, x) := \frac{1}{2M_T} \int_{t'} dt' x(t', r) + \frac{1}{2M_R} \int_{r'} dr' x(t, r'), \quad (5.10)$$

für die offensichtlich gilt

$$\hat{C}(t, r, 1) = \hat{B}(t, r, 1) = 1. \quad (5.11)$$

Damit lässt sich (5.8) schreiben als

$$\dot{w}(t, r) = -\alpha[w(t, r) - 1] + w(t, r) \hat{C}(t, r, w) - w(t, r) \hat{B}(t, r, w) \cdot \hat{C}(w). \quad (5.12)$$

5.2 Kooperationsfunktionen

Im Folgenden werden stets Punkte der beiden Mannigfaltigkeiten betrachtet, es gelte also $t, t', t'' \in \mathcal{M}_T$ und entsprechend $r, r', r'' \in \mathcal{M}_R$. Wir tragen in Anlehnung an Abschnitt 3.3.3 die Eigenschaften der Kooperationsfunktionen zusammen. Sie sind reelle Größen kooperativer Natur, d. h. sie sind positiv:

$$c_T(t, t') \geq 0, \quad c_R(r, r') \geq 0. \quad (5.13)$$

Weiterhin sind sie symmetrisch bezüglich ihrer Argumente:

$$c_T(t, t') = c_T(t', t), \quad c_R(r, r') = c_R(r', r). \quad (5.14)$$

Wir fordern zudem, dass die Kooperationsfunktionen normiert sind, d. h. bei Integration über alle Punkte der jeweiligen Mannigfaltigkeit gilt

$$\int_{t'} dt' c_T(t, t') = 1, \quad \int_{r'} dr' c_R(r, r') = 1. \quad (5.15)$$

Außerdem nehmen wir zunächst in Verallgemeinerung von (3.34), (3.35) an, dass die Kooperation zwischen zwei Verbindungen $r \rightarrow t$ und $r' \rightarrow t'$ umso stärker ist, je kleiner der Abstand zwischen den Punkten r und r' auf \mathcal{M}_R bzw. t und t' auf \mathcal{M}_T ist. Zur Messung dieses Abstandes müssen die Mannigfaltigkeiten jeweils mit einer Metrik $g_{\mu\nu}^R$ bzw. $g_{\mu\nu}^T$ ausgestattet sein, die nicht notwendig euklidisch sein muss. Die Mannigfaltigkeiten seien durch die Parameterform $r(u_R^\mu)$ und $t(u_T^\mu)$ gegeben. Dabei bezeichnen r, t gemäß (5.1), (5.2) die Vektoren im euklidischen Einbettungsraum \mathbb{R}^D . Die intrinsischen Koordinaten der d -dimensionalen Mannigfaltigkeiten \mathcal{M}_R und \mathcal{M}_T sind dagegen durch u_T^μ, u_R^μ mit $\mu = 1, \dots, d$ gegeben. Dabei gilt stets $d \leq D$. Dann lauten die Komponenten des jeweiligen metrischen Tensors

$$g_{\mu\nu}^R = \left(\frac{\partial r}{\partial u_R^\mu} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial u_R^\nu} \right), \quad g_{\mu\nu}^T = \left(\frac{\partial t}{\partial u_T^\mu} \right) \left(\frac{\partial t}{\partial u_T^\nu} \right). \quad (5.16)$$

Die Abstandsquadrate auf den Mannigfaltigkeiten sind durch

$$(dr)^2 = g_{\mu\nu}^R du_R^\mu du_R^\nu, \quad (dt)^2 = g_{\mu\nu}^T du_T^\mu du_T^\nu \quad (5.17)$$

bestimmt. Der geodätische Abstand zwischen zwei Punkten auf \mathcal{M}_R bzw. \mathcal{M}_T ergibt sich zu

$$s_{rr'}^R = \int_{u_R(r')}^{u_R(r)} \sqrt{g_{\mu\nu}^R du_R^\mu du_R^\nu}, \quad s_{tt'}^T = \int_{u_T(t')}^{u_T(t)} \sqrt{g_{\mu\nu}^T du_T^\mu du_T^\nu}. \quad (5.18)$$

Wichtig ist dabei, dass der Abstand *auf* der Mannigfaltigkeit gemessen wird. Damit stimmt er im Allgemeinen nicht mit der Norm $\|t - t'\|$ bzw. $\|r - r'\|$ überein, wie man sich bei gekrümmten Flächen leicht klar machen kann (siehe Abbildung 5.1). Diese Norm wird nicht *auf* der Mannigfaltigkeit gemessen, sondern im euklidischen Einbettungsraum \mathbb{R}^D . Folglich ist der geodätische Abstand (5.18) nur im Fall euklidischer Mannigfaltigkeiten mit der Norm identisch. Die Bedingung monoton fallender Kooperationsfunktionen schreibt sich somit als

$$c_T(t, t') > c_T(t, t'') \quad \text{falls} \quad (s_{tt'}^T)^2 < (s_{tt''}^T)^2, \quad (5.19)$$

$$c_R(r, r') > c_R(r, r'') \quad \text{falls} \quad (s_{rr'}^R)^2 < (s_{rr''}^R)^2. \quad (5.20)$$

Diese letzte Forderung werden wir jedoch bei komplizierteren Mannigfaltigkeiten zum Teil fallen lassen (vgl. Kapitel 9).

5.3 Untere Schranke

Wir beweisen die folgende Aussage: Liegen die Verbindungsgewichte im Anfangszustand sämtlich zwischen Null und einem beliebigen positiven Wert W ,

$$0 \leq w(t, r) \leq W \quad \forall t \in \mathcal{M}_T, r \in \mathcal{M}_R, \quad (5.21)$$

so bleiben die Verbindungsgewichte im positiven Bereich. Somit sind die Häussler-Gleichungen konsistent mit der Voraussetzung $w(t, r) \geq 0$ aus (5.3). Dazu werde zunächst gezeigt, dass unter obiger Voraussetzung (5.21)

$$0 \leq \hat{C}(t, r, w) \leq W \quad (5.22)$$

gilt, wobei $\hat{C}(t, r, w)$ durch (5.9) gegeben ist. Da die Kooperationsfunktionen gemäß (5.13) positive Größen sind, und ebenso $w(t, r)$ nach (5.21), ist sicher

$$\hat{C}(t, r, w) \geq 0 \quad (5.23)$$

erfüllt. Da andererseits $w(t, r) \leq W$ nach (5.21) gilt, folgt weiter

$$\hat{C}(t, r, w) \leq W \int_{t'} dt' \int_{r'} dr' c_T(t, t') c_R(r, r') = W. \quad (5.24)$$

Dabei wurde im letzten Schritt die Normierung der Kooperationsfunktionen (5.15) verwendet. Somit ist (5.22) gezeigt.

Mit diesem Ergebnis lässt sich eine untere Schranke für $\dot{w}(t, r)$ auffinden. Dazu wählt man in der Ausgangsgleichung (5.7) die Wachstumsrate

$$f(t, r, w) = \alpha + w(t, r) \hat{C}(t, r, w) \quad (5.25)$$

minimal, d. h. man setzt $\hat{C}(t, r, w) = 0$:

$$f(t, r, w)_{\min} = \alpha. \quad (5.26)$$

Die Konkurrenzterme in (5.7) wählt man hingegen maximal:

$$f(t', r, w)_{\max} = f(t, r', w)_{\max} = \alpha + W^2. \quad (5.27)$$

Dann erhält man als untere Schranke für $\dot{w}(t, r)$:

$$\dot{w}(t, r)_{\min} = \alpha - w(t, r)(\alpha + W^2). \quad (5.28)$$

Somit ist für hinreichend kleine aber positive Verbindungsgewichte $w(t, r)$ die zeitliche Änderung positiv. Infolgedessen bleibt $w(t, r)$ für alle Zeiten positiv. Insbesondere gilt dann auch für alle Zeiten

$$\hat{C}(t, r, w) \geq 0, \quad f(t, r, w) \geq 0. \quad (5.29)$$

Es bleibt noch anzumerken, dass im diskreten Fall [9] auch eine obere Schranke für $w(t, r)$ gefunden werden kann. Im Fall kontinuierlicher Mannigfaltigkeiten existiert hingegen keine obere Schranke. Das zeigt sich später auch darin, dass das Verbindungsgewicht die Form einer Delta-Funktion annehmen kann, wenn sich eine perfekte retinotopie Ordnung ausgebildet hat (vgl. Kapitel 8 und Kapitel 10).

5.4 Summenregeln

Wir wollen nun ein tieferes Verständnis der Einflüsse der Konkurrenzterme in den Häussler-Gleichungen (5.7) entwickeln. Dazu berücksichtigen wir nur jeweils einen der beiden Konkurrenzterme. Wir betrachten zunächst die Gleichung

$$\dot{w}(t, r) = f(t, r, w) - \frac{w(t, r)}{M_T} \int_{t'} dt' f(t', r, w). \quad (5.30)$$

Definiert man

$$W_r^R := \int_{t'} dt' w(t', r) \quad (5.31)$$

als die Summe aller Verbindungsgewichte, die von einer bestimmten Retina-Zelle r ausgehen, so erhält man durch Integration von (5.30) über t'

$$\dot{W}_r^R = \int_{t'} dt' f(t', r, w) - \int_{t'} dt' \frac{1}{M_T} w(t', r) \int_{t''} dt'' f(t'', r, w). \quad (5.32)$$

Das ergibt schließlich

$$\dot{W}_r^R = -\frac{1}{M_T} \left[\int_{t'} dt' f(t', r, w) \right] (W_r^R - M_T). \quad (5.33)$$

Startet das System innerhalb der Schranken (5.21), so ist gemäß (5.29)

$$\int_{t'} dt' f(t', r, w) \geq 0.$$

Somit konvergiert W_r^R gegen den Sättigungswert M_T :

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} W_r^R(\tau) = M_T. \quad (5.34)$$

Dies etabliert eine Summenregel: Die Summe aller Verbindungsgewichte, die von der Retina-Zelle r ausgehen, ist für hinreichend große Zeiten τ gleich dem Maß M_T .

Ganz analog führt die Betrachtung der Gleichung

$$\dot{w}(t, r) = f(t, r, w) - \frac{w(t, r)}{M_R} \int_{r'} dr' f(t, r', w) \quad (5.35)$$

zusammen mit der Definition

$$W_t^T := \int_{r'} dr' w(t, r') \quad (5.36)$$

zu

$$\dot{W}_t^T = -\frac{1}{M_R} \left[\int_{r'} dr' f(t, r', w) \right] (W_t^T - M_R). \quad (5.37)$$

Also konvergiert in diesem Fall W_t^T gegen M_R :

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} W_t^T(\tau) = M_R, \quad (5.38)$$

und die zugehörige Summenregel lautet: Die Summe aller Verbindungsgewichte, die auf der Tectum-Zelle t liegen, ist für hinreichend große Zeiten τ gleich dem Maß M_R .

Die reale Situation, d. h. die Berücksichtigung *beider* Konkurrenzterme, lässt sich nicht mehr durch Summenregeln beschreiben. Vielmehr stellt diese Situation eine Überlagerung der beiden Zustände dar, die jeweils nur einen Konkurrenzterm berücksichtigen.

Kapitel 6

Lineare Stabilitätsanalyse

In den folgenden beiden Kapiteln werden wir die in Kapitel 4 erläuterten Methoden der Synergetik auf die verallgemeinerten Häussler-Gleichungen (5.5) anwenden. Dazu führen wir zunächst in Kapitel 6 eine lineare Stabilitätsanalyse um den stationären homogenen Ausgangszustand durch. Das Spektrum der Eigenwerte gibt dann Aufschluss darüber, wann dieser Ausgangszustand instabil wird. Die darüber hinausgehende nichtlineare Analyse erfolgt in Kapitel 7.

6.1 Stationäre Lösung

Eine stationäre Lösung der verallgemeinerten Häussler-Gleichungen (5.5) ist der homogene Zustand

$$w_0(t, r) = 1 \quad \forall (t, r) \in \mathcal{M}_T \times \mathcal{M}_R, \quad (6.1)$$

was im Folgenden verifiziert wird. Zunächst ergeben sich die Wachstumsraten (5.6) zu

$$f(t, r, w_0) = \alpha + \int_{t'} dt' \int_{r'} dr' c_T(t, t') c_R(r, r'), \quad (6.2)$$

was sich mit der Normierung der Kooperationsfunktionen (5.15) auf

$$f(t, r, w_0) = \alpha + 1 \quad (6.3)$$

reduziert. Setzt man diesen Ausdruck in (5.7) ein, erhält man mit der Definition der Maße (5.4)

$$\dot{w}_0(t, r) = \alpha + 1 - \frac{1}{2M_T}(\alpha M_T + M_T) - \frac{1}{2M_R}(\alpha M_R + M_R) = 0. \quad (6.4)$$

Die Lösung (6.1) entspricht der Situation, dass die von den Ganglienzellen der Retina ausgehenden Axone in zunächst zufälliger und ungeordneter Weise synaptische Kontakte auf dem Tectum knüpfen. Jede Zelle der Retina am Ort r ist

mit jeder Zelle des Tectums am Ort t verbunden, und zwar mit dem gleichen Verbindungsgewicht 1. Erst im Verlauf der weiteren Ontogenese wird dieser Zustand instabil, und das neuronale Verknüpfungsmuster zwischen den beiden Zellschichten differenziert sich zu einem geordneten, retinotopen Zustand, wird also durch einen neuen stationären Zustand ersetzt. Die Bedingungen, unter denen der stationäre homogene Zustand (6.1) instabil wird, wollen wir nun untersuchen.

6.2 Abweichung von der stationären Lösung

Wir führen als neue Variable die Abweichung vom stationären homogenen Zustand (6.1) ein:

$$v(t, r) = w(t, r) - 1. \quad (6.5)$$

Dadurch gehen die verallgemeinerten Häussler-Gleichungen (5.12) über in

$$\dot{v}(t, r) = \hat{L}(t, r, v) + \hat{Q}(t, r, v) + \hat{K}(t, r, v), \quad (6.6)$$

mit den linearen, quadratischen und kubischen Termen

$$\hat{L}(t, r, v) = -\alpha v + \hat{C}(t, r, v) - \hat{B}(t, r, v) - \hat{B}(t, r, \hat{C}(t, r, v)), \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}(t, r, v) &= v \cdot [\hat{C}(t, r, v) - \hat{B}(t, r, v) - \hat{B}(t, r, \hat{C}(t, r, v))] \\ &\quad - \hat{B}(t, r, v \cdot \hat{C}(t, r, v)), \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\hat{K}(t, r, v) = -v \cdot \hat{B}(t, r, v \cdot \hat{C}(t, r, v)). \quad (6.9)$$

Um die Stabilität des stationären homogenen Zustandes (6.1) zu untersuchen, betrachtet man das lineare Problem

$$\dot{v}(t, r) = \hat{L}(t, r, v). \quad (6.10)$$

Die Aufgabe besteht nun in der Bestimmung der Eigenwerte und Eigenfunktionen des Operators $\hat{L}(t, r, v)$. Dazu sind aber zuerst einige Vorbereitungen notwendig, die im nächsten Abschnitt ausgeführt werden.

6.3 Vollständiges Orthonormalsystem

Auf den beiden mit ihren jeweiligen Metriken ausgestatteten Mannigfaltigkeiten wird zunächst der Laplace-Beltrami-Operator definiert. Die entsprechenden Metriken wurden bereits auf Seite 55 diskutiert. Mit den kontravarianten Komponenten der Metrik $g_T^{\lambda\mu}, g_R^{\lambda\mu}$ lautet der Laplace-Beltrami-Operator jeweils

$$\Delta_T = \frac{1}{\sqrt{g_T}} \partial_\lambda \left(g_T^{\lambda\mu} \sqrt{g_T} \partial_\mu \right), \quad \Delta_R = \frac{1}{\sqrt{g_R}} \partial_\lambda \left(g_R^{\lambda\mu} \sqrt{g_R} \partial_\mu \right). \quad (6.11)$$

Dabei sind g_T, g_R die Determinanten der kovarianten Komponenten $g_{T\lambda\mu}, g_{R\lambda\mu}$ der Metrik.

Die Eigenfunktionen dieser Operatoren genügen den Gleichungen

$$\Delta_T \psi_{\lambda_T}^{m_T}(t) = \chi_{\lambda_T} \psi_{\lambda_T}^{m_T}(t), \quad (6.12)$$

$$\Delta_R \psi_{\lambda_R}^{m_R}(r) = \chi_{\lambda_R} \psi_{\lambda_R}^{m_R}(r). \quad (6.13)$$

Die Indizes m_T, m_R beschreiben die Entartung der Eigenräume. Es wird vorausgesetzt, dass die Eigenfunktionen ein *vollständiges* und *orthonormales Funktionensystem* bilden. Also gelten die Orthonormalitätsrelationen

$$\int_t dt \psi_{\lambda_T}^{m_T}(t) \psi_{\lambda'_T}^{m'_T*}(t) = \delta_{\lambda_T \lambda'_T} \delta_{m_T m'_T}, \quad (6.14)$$

$$\int_r dr \psi_{\lambda_R}^{m_R}(r) \psi_{\lambda'_R}^{m'_R*}(r) = \delta_{\lambda_R \lambda'_R} \delta_{m_R m'_R}, \quad (6.15)$$

sowie die Vollständigkeitsrelationen

$$\sum_{\lambda_T} \sum_{m_T} \psi_{\lambda_T}^{m_T}(t) \psi_{\lambda_T}^{m_T*}(t') = \delta(t - t'), \quad (6.16)$$

$$\sum_{\lambda_R} \sum_{m_R} \psi_{\lambda_R}^{m_R}(r) \psi_{\lambda_R}^{m_R*}(r') = \delta(r - r'). \quad (6.17)$$

Es ist zu beachten, dass jede konstante Funktion eine Eigenfunktion des Laplace-Beltrami-Operators zum Eigenwert $\chi_{\lambda_T} = 0$ bzw. $\chi_{\lambda_R} = 0$ ist. Man kann also zunächst setzen

$$\psi_0^{m_{T0}}(t) = c_1, \quad \psi_0^{m_{R0}}(r) = c_2. \quad (6.18)$$

Aus der Normierungsbedingung (6.14), (6.15) folgt dann

$$\int_t dt c_1 c_1^* = 1, \quad \int_r dr c_2 c_2^* = 1. \quad (6.19)$$

Mit der Definition der Maße (5.4) ergibt sich daraus unmittelbar

$$|c_1|^2 = \frac{1}{M_T}, \quad |c_2|^2 = \frac{1}{M_R}, \quad (6.20)$$

sodass die Eigenfunktionen zum Eigenwert Null die Form

$$\psi_0^{m_{T0}}(t) = \frac{1}{\sqrt{M_T}}, \quad \psi_0^{m_{R0}}(r) = \frac{1}{\sqrt{M_R}} \quad (6.21)$$

annehmen.

Aufgrund der Vollständigkeitsrelationen (6.16), (6.17) lassen sich die Kooperationsfunktionen gemäß

$$c_T(t, t') = \sum_{\lambda_T, \lambda'_T} \sum_{m_T, m'_T} F_{\lambda_T \lambda'_T}^{m_T m'_T} \psi_{\lambda_T}^{m_T}(t) \psi_{\lambda'_T}^{m'_T*}(t'), \quad (6.22)$$

$$c_R(r, r') = \sum_{\lambda_R, \lambda'_R} \sum_{m_R, m'_R} F_{\lambda_R \lambda'_R}^{m_R m'_R} \psi_{\lambda_R}^{m_R}(r) \psi_{\lambda'_R}^{m'_R}(r') \quad (6.23)$$

in der Basis der Eigenfunktionen entwickeln. Im Folgenden nehmen wir stets an, dass die Entwicklungskoeffizienten bezüglich der Eigenwerte diagonal sind:

$$F_{\lambda_T \lambda'_T}^{m_T m'_T} = f_{\lambda_T}^{m_T} \delta_{\lambda_T \lambda'_T} \delta_{m_T m'_T}, \quad (6.24)$$

$$F_{\lambda_R \lambda'_R}^{m_R m'_R} = f_{\lambda_R}^{m_R} \delta_{\lambda_R \lambda'_R} \delta_{m_R m'_R}. \quad (6.25)$$

Diese Einschränkung ist eine wesentliche Erleichterung für die weitere Analyse und ist allein dadurch gerechtfertigt, dass sie in allen betrachteten Anwendungen erfüllt ist. Es folgt dann

$$c_T(t, t') = \sum_{\lambda_T} \sum_{m_T} f_{\lambda_T}^{m_T} \psi_{\lambda_T}^{m_T}(t) \psi_{\lambda_T}^{m_T}(t'), \quad (6.26)$$

$$c_R(r, r') = \sum_{\lambda_R} \sum_{m_R} f_{\lambda_R}^{m_R} \psi_{\lambda_R}^{m_R}(r) \psi_{\lambda_R}^{m_R}(r'). \quad (6.27)$$

Die Normierungsbedingung der Kooperationsfunktionen führt in Verbindung mit den Orthonormalitätsrelationen der Eigenfunktionen zu einer Aussage über die Größen $f_0^{m_{T0}}$ und $f_0^{m_{R0}}$. Mit (6.21) erhalten wir aus (6.26)

$$\int_t dt c_T(t, t') = \sqrt{M_T} \sum_{\lambda_T, m_T} f_{\lambda_T}^{m_T} \int_t dt \psi_{\lambda_T}^{m_T}(t) \psi_0^{m_{T0}}(t) \psi_{\lambda_T}^{m_T}(t'), \quad (6.28)$$

sodass mit (6.14) und (6.21) folgt

$$\int_t dt c_T(t, t') = f_0^{m_{T0}}. \quad (6.29)$$

Aus der Normierung (5.15) folgt dann $f_0^{m_{T0}} = 1$. Ganz analog zeigt man dies für $f_0^{m_{R0}}$ und erhält

$$f_0^{m_{T0}} = f_0^{m_{R0}} = 1. \quad (6.30)$$

Die Entwicklungskoeffizienten $f_{\lambda_T}^{m_T}$ bzw. $f_{\lambda_R}^{m_R}$ sind eindeutig durch die Kooperationsfunktionen $c_T(t, t')$ bzw. $c_R(r, r')$ bestimmt. Um dies einzusehen, multipliziert man (6.26) mit $\psi_{\lambda_T}^{m_{T*}}(t) \psi_{\lambda_T}^{m_T}(t')$ und integriert über t und t' . Anschließend nutzt man die Orthonormalitätsrelationen (6.14) und erhält

$$f_{\lambda_T}^{m_T} = \int_t dt \int_{t'} dt' c_T(t, t') \psi_{\lambda_T}^{m_{T*}}(t) \psi_{\lambda_T}^{m_T}(t'). \quad (6.31)$$

Ganz analog ergibt sich

$$f_{\lambda_R}^{m_R} = \int_r dr \int_{r'} dr' c_R(r, r') \psi_{\lambda_R}^{m_{R*}}(r) \psi_{\lambda_R}^{m_R}(r'). \quad (6.32)$$

6.4 Eigenfunktionen und Eigenwerte

Die Eigenfunktionen des linearen Problems (6.10) mit (6.7) sind durch Produkte aus Orthonormalbasisfunktionen gemäß

$$v_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R}(t, r) = \psi_{\lambda_T}^{m_T}(t) \psi_{\lambda_R}^{m_R}(r) \quad (6.33)$$

gegeben. Hierzu zeigen wir, dass die Funktionen (6.33) Eigenfunktionen zu den linearen Operatoren (5.9), (5.10) sind. Einsetzen von (6.33) in die Definition des linearen Operators (5.9) ergibt zunächst

$$\hat{C}(t, r, v_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R}) = \int_{t'} dt' \int_{r'} dr' c_T(t, t') c_R(r, r') \psi_{\lambda_T}^{m_T}(t') \psi_{\lambda_R}^{m_R}(r'). \quad (6.34)$$

Die Entwicklung der Kooperationsfunktionen nach den jeweiligen Eigenfunktionen gemäß (6.26), (6.27) und Ausnutzung deren Orthonormalitätsrelationen (6.14), (6.15) führt auf

$$\hat{C}(t, r, v_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R}) = f_{\lambda_T}^{m_T} f_{\lambda_R}^{m_R} \psi_{\lambda_T}^{m_T}(t) \psi_{\lambda_R}^{m_R}(r). \quad (6.35)$$

Die Eigenwerte des Operators $\hat{C}(t, r, v_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R})$ sind also durch $f_{\lambda_T}^{m_T} f_{\lambda_R}^{m_R}$ gegeben.

Als nächstes betrachtet man den linearen Operator (5.10):

$$\hat{B}(t, r, v_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R}) = \frac{1}{2M_T} \int_{t'} dt' \psi_{\lambda_T}^{m_T}(t') \psi_{\lambda_R}^{m_R}(r) + \frac{1}{2M_R} \int_{r'} dr' \psi_{\lambda_T}^{m_T}(t) \psi_{\lambda_R}^{m_R}(r'). \quad (6.36)$$

Mit (6.14), (6.15) und (6.21) ergeben sich die Beziehungen

$$\frac{1}{\sqrt{M_T}} \int_{t'} dt' \psi_{\lambda_T}^{m_T}(t') = \delta_{\lambda_T 0}, \quad (6.37)$$

$$\frac{1}{\sqrt{M_R}} \int_{r'} dr' \psi_{\lambda_R}^{m_R}(r') = \delta_{\lambda_R 0}, \quad (6.38)$$

die wir im Folgenden noch häufiger verwenden werden. Damit geht (6.36) in

$$\hat{B}(t, r, v_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R}) = \frac{1}{2\sqrt{M_T}} \psi_{\lambda_R}^{m_R}(r) \delta_{\lambda_T 0} + \frac{1}{2\sqrt{M_R}} \psi_{\lambda_T}^{m_T}(t) \delta_{\lambda_R 0} \quad (6.39)$$

über. Das führt auf die Fallunterscheidung

$$\hat{B}(t, r, v_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R}) = \begin{cases} v_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R}; & \lambda_T = \lambda_R = 0 \\ \frac{1}{2} v_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R}; & \lambda_T = 0, \lambda_R \neq 0; \lambda_R = 0, \lambda_T \neq 0 \\ 0; & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.40)$$

Schließlich ist noch der lineare Operator $\hat{B}(t, r, \hat{C}(v_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R}))$ zu betrachten. Mit den Resultaten (6.35), (6.40) erhalten wir

$$\hat{B}(t, r, \hat{C}(v_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R})) = \begin{cases} f_{\lambda_T}^{m_T} f_{\lambda_R}^{m_R} v_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R}; & \lambda_T = \lambda_R = 0 \\ \frac{1}{2} f_{\lambda_T}^{m_T} f_{\lambda_R}^{m_R} v_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R}; & \lambda_T = 0, \lambda_R \neq 0; \lambda_R = 0, \lambda_T \neq 0 \\ 0; & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.41)$$

Somit erhält man für den linearen Operator (6.7) unter Verwendung der Ergebnisse (6.35), (6.40) und (6.41)

$$\hat{L}(t, r, v_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R}) = \Lambda_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R} v_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R}, \quad (6.42)$$

wobei die Eigenwerte durch

$$\Lambda_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R} = \begin{cases} -\alpha - 1; & \lambda_T = \lambda_R = 0 \\ -\alpha + \frac{1}{2}(f_{\lambda_T}^{m_T} f_{\lambda_R}^{m_R} - 1); & \lambda_T = 0, \lambda_R \neq 0; \lambda_R = 0, \lambda_T \neq 0 \\ -\alpha + f_{\lambda_T}^{m_T} f_{\lambda_R}^{m_R}; & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.43)$$

gegeben sind. Es stellt sich die Frage, welche Moden bei einer Änderung des Kontrollparameters α als erste instabil werden. Gesucht sind also nach (4.20), (4.21) die Eigenwerte mit maximalem Realteil. Wir werden in den späteren Anwendungen immer den Fall reeller Entwicklungskoeffizienten vorliegen haben, die außerdem die Relation

$$|f_{\lambda_T}^{m_T}|, |f_{\lambda_R}^{m_R}| \leq 1 \quad (6.44)$$

erfüllen. Dann folgt wegen $\alpha \geq 0$, dass nur diejenigen Eigenwerte positive Werte annehmen können, für die $\lambda_T \neq 0$ und $\lambda_R \neq 0$ gilt, also nur Zustände, die der letzten Zeile in (6.43) entsprechen. Da die zum maximalen Eigenwert gehörigen Moden gerade die instabilen Moden sind, versehen wir sie mit dem Index u für *unstable*. Der maximale Eigenwert bzw. die maximalen Eigenwerte lauten also

$$\Lambda_{\max} = \Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} = -\alpha + f_{\lambda_T^u}^{m_T^u} f_{\lambda_R^u}^{m_R^u}. \quad (6.45)$$

Kapitel 7

Nichtlineare Analyse

Die lineare Analyse des vorigen Kapitels liefert unter anderem die Eigenfunktionen (6.33) des Systems, die man auch als *Eigenmoden* oder *kollektive Moden* bezeichnet. In diesem Kapitel werden nun die gesamten nichtlinearen Bewegungsgleichungen auf diese Eigenmoden transformiert. Man erhält so in den Abschnitten 7.1 bis 7.3 die Bewegungsgleichungen für die instabilen und stabilen Modenamplituden. Letztere werden aufgrund des Versklavungsprinzips in Abschnitt 7.4 eliminiert, wodurch sich in Abschnitt 7.5 die Ordnungsparametergleichungen des Systems ergeben.

Wir werden im Folgenden stets die *Einsteinsche Summenkonvention* verwenden, d.h. über alle mehrfach auftretenden Indizes ist aufzusummieren. Allerdings verbinden wir das mit der Einschränkung, dass nur über solche doppelt auftretenden Indizes aufzusummieren ist, die einen Strich aufweisen. Dann können wir z.B. die Vollständigkeitsrelationen (6.16), (6.17) in der folgenden Form schreiben:

$$\psi_{\lambda'_T}^{m'_T}(t)\psi_{\lambda'_T}^{m'_T*}(t') = \delta(t - t'), \quad (7.1)$$

$$\psi_{\lambda'_R}^{m'_R}(r)\psi_{\lambda'_R}^{m'_R*}(r') = \delta(r - r'). \quad (7.2)$$

7.1 Zerlegung in stabile und instabile Moden

Da die Eigenfunktionen $\psi_{\lambda'_T}^{m'_T}(t)$ und $\psi_{\lambda'_R}^{m'_R}(r)$ gemäß (6.16), (6.17) vollständig sind, lässt sich die Abweichung $v(t, r)$ aus (6.5) in der Eigenfunktionsbasis entwickeln:

$$v(t, r) = V_{\lambda'_T \lambda'_R}^{m'_T m'_R} \psi_{\lambda'_T}^{m'_T}(t) \psi_{\lambda'_R}^{m'_R}(r). \quad (7.3)$$

Durch geeignete Wahl des Kontrollparameters α kann man erreichen, dass sämtliche Eigenwerte mit Ausnahme bestimmter Eigenwerte Λ_{\max} (6.45) negative Werte annehmen. Daher kann man in der Nähe der Instabilität die Modenamplituden $V_{\lambda'_T \lambda'_R}^{m'_T m'_R}$ in solche für die stabilen Moden $S_{\lambda'_T \lambda'_R}^{m'_T m'_R}$ und solche für die instabilen Moden $U_{\lambda'_T \lambda'_R}^{m'_T m'_R}$ aufspalten:

$$v(t, r) = U(t, r) + S(t, r), \quad (7.4)$$

mit

$$U(t, r) = U_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'}}^{m_T^{u'} m_R^{u'}} \psi_{\lambda_T^{u'}}^{m_T^{u'}}(t) \psi_{\lambda_R^{u'}}^{m_R^{u'}}(r), \quad (7.5)$$

$$S(t, r) = S_{\lambda_T^{m'} \lambda_R^{m'}}^{m_T^{m'} m_R^{m'}} \psi_{\lambda_T^{m'}}^{m_T^{m'}}(t) \psi_{\lambda_R^{m'}}^{m_R^{m'}}(r). \quad (7.6)$$

Dann gilt aufgrund von (6.6)

$$\dot{v}(t, r) = \hat{L}(t, r, U + S) + \hat{Q}(t, r, U + S) + \hat{K}(t, r, U + S). \quad (7.7)$$

Um die Gleichungen getrennt nach stabilen und instabilen Modenamplituden aufzuspalten, definieren wir die folgenden *Projektionsoperatoren*:

$$\hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} \bullet := \int_t dt \int_r dr \psi_{\lambda_T^u}^{m_T^u}(t) \psi_{\lambda_R^u}^{m_R^u}(r) \bullet, \quad (7.8)$$

$$\hat{P}_{\lambda_T^m \lambda_R^m}^{m_T^m m_R^m} \bullet := \int_t dt \int_r dr \psi_{\lambda_T^m}^{m_T^m}(t) \psi_{\lambda_R^m}^{m_R^m}(r) \bullet. \quad (7.9)$$

Durch (7.8) erhält man eine Projektion der Gleichungen auf den U -Raum, und durch (7.9) entsprechend auf den S -Raum. So ergibt die Anwendung der Projektionsoperatoren auf $\dot{v}(t, r)$ mit (7.4)–(7.6) gerade die gewünschte Aufspaltung:

$$\hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} \dot{v}(t, r) = \dot{U}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u}, \quad \hat{P}_{\lambda_T^m \lambda_R^m}^{m_T^m m_R^m} \dot{v}(t, r) = \dot{S}_{\lambda_T^m \lambda_R^m}^{m_T^m m_R^m}. \quad (7.10)$$

Mit (7.7) folgt weiter

$$\dot{U}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} = \hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} [\hat{L}(t, r, U + S) + \hat{Q}(t, r, U + S) + \hat{K}(t, r, U + S)], \quad (7.11)$$

$$\dot{S}_{\lambda_T^m \lambda_R^m}^{m_T^m m_R^m} = \hat{P}_{\lambda_T^m \lambda_R^m}^{m_T^m m_R^m} [\hat{L}(t, r, U + S) + \hat{Q}(t, r, U + S) + \hat{K}(t, r, U + S)]. \quad (7.12)$$

Wir wollen nun in der Umgebung der Instabilität eine Näherungslösung der gekoppelten Gleichungen (7.11), (7.12) konstruieren. Die Aufgabe besteht darin, die Terme in (7.11), (7.12) bis einschließlich zur dritten Ordnung in den instabilen Moden U auszuwerten. Als erstes betrachten wir die Wirkung der Projektionsoperatoren auf den linearen Term. Zunächst gilt aufgrund der Linearität von \hat{L} unter Berücksichtigung von (7.4)–(7.6) und (6.42)

$$\hat{L}(t, r, v) = U_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'}}^{m_T^{u'} m_R^{u'}} \Lambda_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'}}^{m_T^{u'} m_R^{u'}} \psi_{\lambda_T^{u'}}^{m_T^{u'}}(t) \psi_{\lambda_R^{u'}}^{m_R^{u'}}(r) + S_{\lambda_T^{m'} \lambda_R^{m'}}^{m_T^{m'} m_R^{m'}} \Lambda_{\lambda_T^{m'} \lambda_R^{m'}}^{m_T^{m'} m_R^{m'}} \psi_{\lambda_T^{m'}}^{m_T^{m'}}(t) \psi_{\lambda_R^{m'}}^{m_R^{m'}}(r). \quad (7.13)$$

Wendet man darauf die Projektionsoperatoren (7.8) und (7.9) an, so ergibt sich unter Ausnutzung der Orthonormalitätsrelationen (6.14), (6.15)

$$\hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} \hat{L}(t, r, v) = \Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u}, \quad (7.14)$$

$$\hat{P}_{\lambda_T^m \lambda_R^m}^{m_T^m m_R^m} \hat{L}(t, r, v) = \Lambda_{\lambda_T^m \lambda_R^m}^{m_T^m m_R^m} S_{\lambda_T^m \lambda_R^m}^{m_T^m m_R^m}. \quad (7.15)$$

Es sei an dieser Stelle noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, dass wir die Einsteinsche Summenkonvention ausschließlich auf *gestrichene* Indizes anwenden. Somit ist in (7.14), (7.15) keine Summation durchzuführen.

Weiterhin sind die Beiträge $\hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} \hat{Q}(t, r, U + S)$ und $\hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} \hat{K}(t, r, U + S)$ auszuwerten, d. h. nach (6.8), (6.9)

$$\begin{aligned} & \hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} \{(U + S)[\hat{C}(t, r, U + S) - \hat{B}(t, r, U + S) \\ & \quad - \hat{B}(t, r, \hat{C}(U + S))] - \hat{B}(t, r, (U + S) \cdot \hat{C}(U + S))\} \end{aligned} \quad (7.16)$$

und

$$\hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} \{-(U + S) \cdot \hat{B}(t, r, (U + S) \cdot \hat{C}(U + S))\}. \quad (7.17)$$

Es werden im nächsten Abschnitt diejenigen Terme berechnet, die nur von U abhängen. In Abschnitt 7.3 werden dann die S -abhängigen Terme bestimmt.

7.2 Beiträge der instabilen Moden

Zunächst geben wir die folgenden Teilausdrücke an:

$$\hat{C}(t, r, U) = U_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'}}^{m_T^{u'} m_R^{u'}} f_{\lambda_T^{u'}}^{m_T^{u'}} f_{\lambda_R^{u'}}^{m_R^{u'}} \psi_{\lambda_T^{u'}}^{m_T^{u'}}(t) \psi_{\lambda_R^{u'}}^{m_R^{u'}}(r), \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} U(t, r) \hat{C}(t, r, U) &= U_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'}}^{m_T^{u'} m_R^{u'}} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}}^{m_T^{u''} m_R^{u''}} f_{\lambda_T^{u'}}^{m_T^{u'}} f_{\lambda_R^{u'}}^{m_R^{u'}} \\ &\quad \times \psi_{\lambda_T^{u'}}^{m_T^{u'}}(t) \psi_{\lambda_T^{u''}}^{m_T^{u''}}(t) \psi_{\lambda_R^{u'}}^{m_R^{u'}}(r) \psi_{\lambda_R^{u''}}^{m_R^{u''}}(r). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Dann definieren wir Integrale, die im weiteren Verlauf mehrfach auftreten werden:

$$I_{\lambda, \lambda^{(1)} \lambda^{(2)} \dots \lambda^{(n)}}^{m, m^{(1)} m^{(2)} \dots m^{(n)}} := \int_x dx \psi_{\lambda}^{m^*}(x) \psi_{\lambda^{(1)}}^{m^{(1)}}(x) \psi_{\lambda^{(2)}}^{m^{(2)}}(x) \cdots \psi_{\lambda^{(n)}}^{m^{(n)}}(x), \quad (7.20)$$

$$J_{\lambda^{(1)} \lambda^{(2)} \dots \lambda^{(n)}}^{m^{(1)} m^{(2)} \dots m^{(n)}} := \int_x dx \psi_{\lambda^{(1)}}^{m^{(1)}}(x) \psi_{\lambda^{(2)}}^{m^{(2)}}(x) \cdots \psi_{\lambda^{(n)}}^{m^{(n)}}(x). \quad (7.21)$$

Hiermit erhalten wir beispielsweise:

$$I_{\lambda}^m = \int_x dx \psi_{\lambda}^{m^*}(x), \quad (7.22)$$

$$I_{\lambda, \lambda'}^{m, m'} = \int_x dx \psi_{\lambda}^{m^*}(x) \psi_{\lambda'}^{m'}(x), \quad (7.23)$$

$$I_{\lambda, \lambda' \lambda''}^{m, m' m''} = \int_x dx \psi_{\lambda}^{m^*}(x) \psi_{\lambda'}^{m'}(x) \psi_{\lambda''}^{m''}(x), \quad (7.24)$$

$$I_{\lambda, \lambda' \lambda'' \lambda'''}^{m, m' m'' m'''} = \int_x dx \psi_{\lambda}^{m^*}(x) \psi_{\lambda'}^{m'}(x) \psi_{\lambda''}^{m''}(x) \psi_{\lambda'''}^{m'''}(x), \quad (7.25)$$

$$J_{\lambda \lambda'}^{m m'} = \int_x dx \psi_{\lambda}^m(x) \psi_{\lambda'}^{m'}(x). \quad (7.26)$$

Die ersten beiden Integrale ergeben sich unter Verwendung der Orthonormalitätsrelationen (6.14), (6.15) und (6.21) zu

$$I_\lambda^m = \sqrt{M} \delta_{\lambda 0}, \quad (7.27)$$

$$I_{\lambda, \lambda'}^{m, m'} = \delta_{\lambda \lambda'} \delta_{mm'}. \quad (7.28)$$

Für den ersten Term in (7.16) folgt mit (7.19) und (7.20)

$$\hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} [U \cdot \hat{C}(U)] = f_{\lambda_T^u}^{m_T^u} f_{\lambda_R^u}^{m_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} I_{\lambda_T^u, \lambda_T^u}^{m_T^u, m_T^u} I_{\lambda_R^u, \lambda_R^u}^{m_R^u, m_R^u}. \quad (7.29)$$

Da mit (6.43), (6.45) für die instabilen Moden auf jeden Fall $\lambda_T^u \neq 0$ und $\lambda_R^u \neq 0$ gilt, ist stets mit (7.5) und (6.40)

$$\hat{B}(U) = U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} \hat{B}(v_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u}) = 0. \quad (7.30)$$

Dann ist

$$\hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} [U \cdot \hat{B}(U)] = \hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} [U \cdot \hat{B}(\hat{C}(U))] = 0. \quad (7.31)$$

Mit (6.37), (6.38) gilt ebenso

$$\hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} [\hat{B}(U \cdot \hat{C}(U))] = 0. \quad (7.32)$$

Als nächstes berechnen wir die Terme von (7.17), die nur von U abhängen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} [U \cdot \hat{B}(U \cdot \hat{C}(U))] &= \frac{1}{2} \int_t dt \int_r dr \psi_{\lambda_T^u}^{m_T^u} (t) \psi_{\lambda_R^u}^{m_R^u} (r) U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} \psi_{\lambda_T^u}^{m_T^u} (t) \psi_{\lambda_R^u}^{m_R^u} (r) \\ &\times \left[\frac{1}{M_T} \int_{t'} dt' U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} f_{\lambda_T^u}^{m_T^u} f_{\lambda_R^u}^{m_R^u} \psi_{\lambda_T^u}^{m_T^u} (t') \psi_{\lambda_R^u}^{m_R^u} (r) \psi_{\lambda_T^u}^{m_T^u} (t') \psi_{\lambda_R^u}^{m_R^u} (r) \right. \\ &\left. + \frac{1}{M_R} \int_{r'} dr' U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} f_{\lambda_T^u}^{m_T^u} f_{\lambda_R^u}^{m_R^u} \psi_{\lambda_T^u}^{m_T^u} (t) \psi_{\lambda_R^u}^{m_R^u} (r') \psi_{\lambda_T^u}^{m_T^u} (t) \psi_{\lambda_R^u}^{m_R^u} (r') \right], \end{aligned}$$

was sich mit Hilfe von (7.20) und (7.21) auf

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} [U \cdot \hat{B}(U \cdot \hat{C}(U))] &= \frac{1}{2} f_{\lambda_T^u}^{m_T^u} f_{\lambda_R^u}^{m_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} \\ &\times \left(\frac{1}{M_T} I_{\lambda_T^u, \lambda_T^u}^{m_T^u, m_T^u} \delta_{\lambda_T^u \lambda_T^u} \delta_{m_T^u m_T^u} J_{\lambda_T^u \lambda_T^u}^{m_T^u m_T^u} \right. \\ &\left. + \frac{1}{M_R} I_{\lambda_T^u, \lambda_T^u}^{m_T^u, m_T^u} \delta_{\lambda_R^u \lambda_R^u} \delta_{m_R^u m_R^u} J_{\lambda_R^u \lambda_R^u}^{m_R^u m_R^u} \right) \quad (7.33) \end{aligned}$$

reduziert. Damit sind sämtliche Terme aus (7.16) und (7.17), die nur von U abhängen, bestimmt.

7.3 Beiträge der zentralen Mannigfaltigkeit

Der nächste Schritt besteht in der Berechnung der S -abhängigen Terme in (7.16). Sie sollen nacheinander bestimmt werden, wobei zuerst die nicht verschwindenden Terme angegeben werden. Die ersten beiden Terme sind durch

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} [U \cdot \hat{C}(S)] &= \int_t dt \int_r dr \psi_{\lambda_T^u}^{m_T^u*}(t) \psi_{\lambda_R^u}^{m_R^u*}(r) U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} \psi_{\lambda_T^u}^{m_T^u}(t) \psi_{\lambda_R^u}^{m_R^u}(r) \\ &\times \int_{t'} dt' \int_{r'} dr' c_T(t, t') c_R(r, r') S(t', r') \end{aligned} \quad (7.34)$$

sowie durch

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} [S \cdot \hat{C}(U)] &= \int_t dt \int_r dr \psi_{\lambda_T^u}^{m_T^u*}(t) \psi_{\lambda_R^u}^{m_R^u*}(r) S(t, r) f_{\lambda_T^u}^{m_T^u} f_{\lambda_R^u}^{m_R^u} \\ &\times U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} \psi_{\lambda_T^u}^{m_T^u}(t) \psi_{\lambda_R^u}^{m_R^u}(r) \end{aligned} \quad (7.35)$$

gegeben. Der dritte Term lautet

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} [U \cdot \hat{B}(S)] &= \int_t dt \int_r dr \psi_{\lambda_T^u}^{m_T^u*}(t) \psi_{\lambda_R^u}^{m_R^u*}(r) U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} \psi_{\lambda_T^u}^{m_T^u}(t) \psi_{\lambda_R^u}^{m_R^u}(r) \\ &\times \left[\frac{1}{2M_T} \int_{t'} dt' S(t', r) + \frac{1}{2M_R} \int_{r'} dr' S(t, r') \right], \end{aligned} \quad (7.36)$$

während sich der vierte Term zu

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} [U \cdot \hat{B}(\hat{C}(S))] &= \frac{1}{2} \int_t dt \int_r dr \psi_{\lambda_T^u}^{m_T^u*}(t) \psi_{\lambda_R^u}^{m_R^u*}(r) U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} \psi_{\lambda_T^u}^{m_T^u}(t) \psi_{\lambda_R^u}^{m_R^u}(r) \\ &\times \left[\frac{1}{M_T} \int_{t'} dt' \int_{t''} dt'' \int_{r''} dr'' c_T(t', t'') c_R(r, r'') S(t'', r'') \right. \\ &\left. + \frac{1}{M_R} \int_{r'} dr' \int_{t''} dt'' \int_{r''} dr'' c_T(t, t'') c_R(r', r'') S(t'', r'') \right] \end{aligned} \quad (7.37)$$

ergibt. Die weiteren S -abhängigen Terme werden wegen (6.37), (6.38) sämtlich zu Null:

$$\hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} [S \cdot \hat{B}(U)] = 0, \quad (7.38)$$

$$\hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} [U \cdot \hat{B}(\hat{C}(S))] = 0, \quad (7.39)$$

$$\hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} [S \cdot \hat{B}(\hat{C}(U))] = 0, \quad (7.40)$$

$$\hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} [\hat{B}(S \cdot \hat{C}(U))] = 0. \quad (7.41)$$

Setzt man (7.6) in (7.34) ein, so folgt

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} [U \cdot \hat{C}(S)] &= \int_t^{\cdot} dt \int_r^{\cdot} dr \psi_{\lambda_T^u}^{m_T^u *}(t) \psi_{\lambda_R^u}^{m_R^u *}(r) U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} \psi_{\lambda_T^u}^{m_T^u}(t) \psi_{\lambda_R^u}^{m_R^u}(r) \\ &\times \int_{t'}^{\cdot} dt' \int_{r'}^{\cdot} dr' c_T(t, t') c_R(r, r') S_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} \psi_{\lambda_T^u}^{m_T^u}(t') \psi_{\lambda_R^u}^{m_R^u}(r'), \end{aligned} \quad (7.42)$$

was sich mit (6.35) und (7.20) reduziert auf

$$\hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} [U \cdot \hat{C}(S)] = U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} S_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} f_{\lambda_T^u}^{m_T^u} f_{\lambda_R^u}^{m_R^u} I_{\lambda_T^u \lambda_T^u}^{m_T^u, m_T^u} I_{\lambda_R^u \lambda_R^u}^{m_R^u, m_R^u}. \quad (7.43)$$

Entsprechend gehen wir bei den anderen Termen vor, für die hier nur die Ergebnisse angegeben werden:

$$\hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} [S \cdot \hat{C}(U)] = U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} f_{\lambda_T^u}^{m_T^u} f_{\lambda_R^u}^{m_R^u} S_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} I_{\lambda_T^u \lambda_T^u}^{m_T^u, m_T^u} I_{\lambda_R^u \lambda_R^u}^{m_R^u, m_R^u}, \quad (7.44)$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} [U \cdot \hat{B}(S)] &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{M_T}} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} S_{0 \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} I_{\lambda_R^u \lambda_R^u}^{m_R^u, m_R^u} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{M_R}} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} S_{\lambda_T^u 0}^{m_T^u m_R^u} I_{\lambda_T^u \lambda_T^u}^{m_T^u, m_T^u} \right], \end{aligned} \quad (7.45)$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} [U \cdot \hat{B}(\hat{C}(S))] &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{M_T}} f_{\lambda_R^u}^{m_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} S_{0 \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} I_{\lambda_R^u \lambda_R^u}^{m_R^u, m_R^u} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{M_R}} f_{\lambda_T^u}^{m_T^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} S_{\lambda_T^u 0}^{m_T^u m_R^u} I_{\lambda_T^u \lambda_T^u}^{m_T^u, m_T^u} \right]. \end{aligned} \quad (7.46)$$

7.4 Bestimmung der zentralen Mannigfaltigkeit

Wie in Abschnitt 4.6 erläutert, generiert ein synergetisches System in der Nähe einer Instabilität eine Zeitskalenhierarchie. Das führt auf das Versklavungsprinzip: Die Dynamik der stabilen Moden wird vollständig durch die Dynamik der instabilen Moden bestimmt. Es wird also

$$S(t, r) = h(U(t, r)). \quad (7.47)$$

Die nichtlinearen Terme starten mit quadratischen Beiträgen. Somit verwenden wir für die zentrale Mannigfaltigkeit analog zu (4.33) den Ansatz

$$h_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R}(U) \approx H_{\lambda_T \lambda_R, \lambda_T^u \lambda_R^u \lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T m_R, m_T^u m_R^u m_T^u m_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u}. \quad (7.48)$$

Die nichtlinearen Terme \hat{G} können nach (4.31), (4.32) in zweiter Ordnung approximiert werden:

$$G_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} \approx \tilde{Q}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} = \tilde{Q}_{\lambda_T^u \lambda_R^u, \lambda_T^u \lambda_R^u \lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u, m_T^u m_R^u m_T^u m_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u}, \quad (7.49)$$

$$G_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R} \approx \tilde{Q}_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R} = \tilde{Q}_{\lambda_T \lambda_R, \lambda_T^u \lambda_R^u \lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T m_R, m_T^u m_R^u m_T^u m_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u}. \quad (7.50)$$

Die Koeffizienten $H_{\lambda_T \lambda_R, \lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'} \lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}}$ sind dann mit (4.34) durch

$$H_{\lambda_T \lambda_R, \lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'} \lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} = \left[\Lambda_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'}} + \Lambda_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} - \Lambda_{\lambda_T \lambda_R} \right]^{-1} \tilde{Q}_{\lambda_T \lambda_R, \lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'} \lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} \quad (7.51)$$

gegeben, wobei ausnahmsweise keine Einsteinsche Summenkonvention anzuwenden ist. Wir berechnen nun den quadratischen Anteil für die stabilen Modenamplituden, indem wir auf der rechten Seite in (7.12) nur die Beiträge zweiter Ordnung betrachten. Dies ergibt mit (6.8), (6.9)

$$\tilde{Q}_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R} = \hat{P}_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R} [U \cdot \hat{C}(U) - U \cdot \hat{B}(U) - U \cdot \hat{B}(\hat{C}(U)) - \hat{B}(U \cdot \hat{C}(U))]. \quad (7.52)$$

Für den ersten Term erhalten wir

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R} [U \cdot \hat{C}(U)] &= \int dt \int dr \psi_{\lambda_T}^{m_T^*}(t) \psi_{\lambda_R}^{m_R^*}(r) U_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'}}^{m_T^{u'} m_R^{u'}} \psi_{\lambda_T^{u'}}^{m_T^{u'}}(t) \psi_{\lambda_R^{u'}}^{m_R^{u'}}(r) \\ &\quad \times \int dt' \int dr' c_T(t, t') c_R(r, r') U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}}^{m_T^{u''} m_R^{u''}} \psi_{\lambda_T^{u''}}^{m_T^{u''}}(t') \psi_{\lambda_R^{u''}}^{m_R^{u''}}(r'), \end{aligned} \quad (7.53)$$

was sich mit (7.20) reduziert auf

$$\hat{P}_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R} [U \cdot \hat{C}(U)] = f_{\lambda_T^{u''}}^{m_T^{u''}} f_{\lambda_R^{u''}}^{m_R^{u''}} U_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'}}^{m_T^{u'} m_R^{u'}} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}}^{m_T^{u''} m_R^{u''}} I_{\lambda_T, \lambda_T^{u'} \lambda_T^{u''}}^{m_T, m_T^{u'} m_T^{u''}} I_{\lambda_R, \lambda_R^{u'} \lambda_R^{u''}}^{m_R, m_R^{u'} m_R^{u''}}. \quad (7.54)$$

Wegen (7.30) ergibt sich unmittelbar

$$\hat{P}_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R} [U \cdot \hat{B}(U)] = \hat{P}_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R} [U \cdot \hat{B}(\hat{C}(U))] = 0. \quad (7.55)$$

Der Term $\hat{P}_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R} [\hat{B}(U \cdot \hat{C}(U))]$ ist dagegen von Null verschieden. Mit (7.19) erhalten wir

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R} [\hat{B}(U \cdot \hat{C}(U))] &= \frac{1}{2} \int dt \int dr \psi_{\lambda_T}^{m_T^*}(t) \psi_{\lambda_R}^{m_R^*}(r) U_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'}}^{m_T^{u'} m_R^{u'}} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}}^{m_T^{u''} m_R^{u''}} f_{\lambda_T^{u''}}^{m_T^{u''}} f_{\lambda_R^{u''}}^{m_R^{u''}} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{M_T} \int dt' \psi_{\lambda_T^{u'}}^{m_T^{u'}}(t') \psi_{\lambda_T^{u''}}^{m_T^{u''}}(t') \psi_{\lambda_R^{u'}}^{m_R^{u'}}(r) \psi_{\lambda_R^{u''}}^{m_R^{u''}}(r) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{M_R} \int dr' \psi_{\lambda_T^{u'}}^{m_T^{u'}}(t) \psi_{\lambda_T^{u''}}^{m_T^{u''}}(t) \psi_{\lambda_R^{u'}}^{m_R^{u'}}(r') \psi_{\lambda_R^{u''}}^{m_R^{u''}}(r') \right], \end{aligned} \quad (7.56)$$

was sich mit (7.20) und (7.21) ergibt zu

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R} [\hat{B}(U \cdot \hat{C}(U))] &= \frac{1}{2} U_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'}}^{m_T^{u'} m_R^{u'}} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}}^{m_T^{u''} m_R^{u''}} f_{\lambda_T^{u''}}^{m_T^{u''}} f_{\lambda_R^{u''}}^{m_R^{u''}} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{\sqrt{M_T}} J_{\lambda_T^{u'} \lambda_T^{u''}}^{m_T^{u'} m_T^{u''}} I_{\lambda_R, \lambda_R^{u'} \lambda_R^{u''}}^{m_R, m_R^{u'} m_R^{u''}} \delta_{\lambda_T 0} + \frac{1}{\sqrt{M_R}} J_{\lambda_R^{u'} \lambda_R^{u''}}^{m_R^{u'} m_R^{u''}} I_{\lambda_T, \lambda_T^{u'} \lambda_T^{u''}}^{m_T, m_T^{u'} m_T^{u''}} \delta_{\lambda_R 0} \right]. \end{aligned} \quad (7.57)$$

Damit lautet der quadratische Anteil insgesamt

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R} &= f_{\lambda_T^{u''}}^{m_T^{u''}} f_{\lambda_R^{u''}}^{m_R^{u''}} U_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'}}^{m_T^{u'} m_R^{u'}} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}}^{m_T^{u''} m_R^{u''}} \left[I_{\lambda_T, \lambda_T^{u'} \lambda_T^{u''}}^{m_T, m_T^{u'} m_T^{u''}} I_{\lambda_R, \lambda_R^{u'} \lambda_R^{u''}}^{m_R, m_R^{u'} m_R^{u''}} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{2\sqrt{M_T}} J_{\lambda_T^{u'} \lambda_T^{u''}}^{m_T^{u'} m_T^{u''}} I_{\lambda_R, \lambda_R^{u'} \lambda_R^{u''}}^{m_R, m_R^{u'} m_R^{u''}} \delta_{\lambda_T 0} + \frac{1}{2\sqrt{M_R}} J_{\lambda_R^{u'} \lambda_R^{u''}}^{m_R^{u'} m_R^{u''}} I_{\lambda_T, \lambda_T^{u'} \lambda_T^{u''}}^{m_T, m_T^{u'} m_T^{u''}} \delta_{\lambda_R 0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.58)$$

Der Vergleich von (7.58) mit (7.50) liefert dann

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{\lambda_T \lambda_R, \lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'} \lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}}^{m_T m_R, m_T^{u'} m_R^{u'} m_T^{u''} m_R^{u''}} &= f_{\lambda_T^{u''}}^{m_T^{u''}} f_{\lambda_R^{u''}}^{m_R^{u''}} \left[I_{\lambda_T, \lambda_T^{u'} \lambda_T^{u''}}^{m_T, m_T^{u'} m_T^{u''}} I_{\lambda_R, \lambda_R^{u'} \lambda_R^{u''}}^{m_R, m_R^{u'} m_R^{u''}} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{2\sqrt{M_T}} J_{\lambda_T^{u'} \lambda_T^{u''}}^{m_T^{u'} m_T^{u''}} I_{\lambda_R, \lambda_R^{u'} \lambda_R^{u''}}^{m_R, m_R^{u'} m_R^{u''}} \delta_{\lambda_T 0} + \frac{1}{2\sqrt{M_R}} J_{\lambda_R^{u'} \lambda_R^{u''}}^{m_R^{u'} m_R^{u''}} I_{\lambda_T, \lambda_T^{u'} \lambda_T^{u''}}^{m_T, m_T^{u'} m_T^{u''}} \delta_{\lambda_R 0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.59)$$

Dabei ist keine Einsteinsche Summenkonvention anzuwenden. Somit folgt schließlich für die Koeffizienten der zentralen Mannigfaltigkeit in (7.48) gemäß den Gleichungen (7.51) und (7.59)

$$\begin{aligned} H_{\lambda_T \lambda_R, \lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'} \lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}}^{m_T m_R, m_T^{u'} m_R^{u'} m_T^{u''} m_R^{u''}} &= \left(\Lambda_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'}}^{m_T^{u'} m_R^{u'}} + \Lambda_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}}^{m_T^{u''} m_R^{u''}} - \Lambda_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R} \right)^{-1} f_{\lambda_T^{u''}}^{m_T^{u''}} f_{\lambda_R^{u''}}^{m_R^{u''}} \\ &\quad \times \left[I_{\lambda_T, \lambda_T^{u'} \lambda_T^{u''}}^{m_T, m_T^{u'} m_T^{u''}} I_{\lambda_R, \lambda_R^{u'} \lambda_R^{u''}}^{m_R, m_R^{u'} m_R^{u''}} - \left(\frac{1}{2\sqrt{M_T}} J_{\lambda_T^{u'} \lambda_T^{u''}}^{m_T^{u'} m_T^{u''}} I_{\lambda_R, \lambda_R^{u'} \lambda_R^{u''}}^{m_R, m_R^{u'} m_R^{u''}} \delta_{\lambda_T 0} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2\sqrt{M_R}} J_{\lambda_R^{u'} \lambda_R^{u''}}^{m_R^{u'} m_R^{u''}} I_{\lambda_T, \lambda_T^{u'} \lambda_T^{u''}}^{m_T, m_T^{u'} m_T^{u''}} \delta_{\lambda_R 0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.60)$$

7.5 Ordnungsgleichungen

In der Gleichung für die Amplituden $U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u}$ lassen sich die stabilen Modenamplituden $S_{\lambda_T \lambda_R}^{m_T m_R}$ gemäß (7.47), (7.48) durch die zentrale Mannigfaltigkeit ersetzen. Das liefert dann die vollständigen Ordnungsgleichungen

$$\dot{U}_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} = L_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} + Q_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} + K_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u}. \quad (7.61)$$

Um diese anzugeben, müssen wir ausgehend von Gleichung (7.11) noch einmal alle Terme bis einschließlich dritter Ordnung betrachten. Der lineare Term ist gemäß (7.14) durch

$$L_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} = \Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} \quad (7.62)$$

gegeben. Der einzige nichtverschwindende Term zweiter Ordnung lautet mit (7.29)

$$Q_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} = f_{\lambda_T^{u'}}^{m_T^{u'}} f_{\lambda_R^{u'}}^{m_R^{u'}} U_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'}}^{m_T^{u'} m_R^{u'}} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}}^{m_T^{u''} m_R^{u''}} I_{\lambda_T, \lambda_T^{u'} \lambda_T^{u''}}^{m_T, m_T^{u'} m_T^{u''}} I_{\lambda_R, \lambda_R^{u'} \lambda_R^{u''}}^{m_R, m_R^{u'} m_R^{u''}}. \quad (7.63)$$

Insgesamt erhalten wir für den kubischen Anteil

$$K_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} = K_{1, \lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} + K_{2, \lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} + K_{3, \lambda_T^u \lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u}, \quad (7.64)$$

wobei die einzelnen Terme wie folgt definiert sind:

$$K_{1,\lambda_T^u\lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} = -\hat{P}_{\lambda_T^u\lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u}[U \cdot \hat{B}(U \cdot \hat{C}(U))], \quad (7.65)$$

$$K_{2,\lambda_T^u\lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} = \hat{P}_{\lambda_T^u\lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u}[U \cdot \hat{C}(S) + S \cdot \hat{C}(U)], \quad (7.66)$$

$$K_{3,\lambda_T^u\lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} = -\hat{P}_{\lambda_T^u\lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u}[U \cdot \hat{B}(S) + U \cdot \hat{B}(\hat{C}(S))]. \quad (7.67)$$

Der erste Term (7.65) schreibt sich mit (7.33) zu

$$\begin{aligned} K_{1,\lambda_T^u\lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} &= -\frac{1}{2} f_{\lambda_T^u}^{m_T^u} f_{\lambda_R^u}^{m_R^u} U_{\lambda_T^u\lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} U_{\lambda_T^u\lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} U_{\lambda_T^u\lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{M_T} I_{\lambda_R^u\lambda_R^u}^{m_R^u m_R^u} \delta_{\lambda_T^u\lambda_T^u} \delta_{m_T^u m_T^u} J_{\lambda_T^u\lambda_T^u}^{m_T^u m_T^u} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{M_R} I_{\lambda_T^u\lambda_T^u}^{m_T^u m_T^u} \delta_{\lambda_R^u\lambda_R^u} \delta_{m_R^u m_R^u} J_{\lambda_R^u\lambda_R^u}^{m_R^u m_R^u} \right). \end{aligned} \quad (7.68)$$

Die weiteren Beiträge (7.66) und (7.67) ergeben sich aus (7.43), (7.44) bzw. (7.45), (7.46) unter Verwendung von (7.47), (7.48) zu

$$\begin{aligned} K_{2,\lambda_T^u\lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} &= U_{\lambda_T^u\lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} U_{\lambda_T^u\lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} U_{\lambda_T^u\lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} (f_{\lambda_T^u}^{m_T^u} f_{\lambda_R^u}^{m_R^u} + f_{\lambda_T^u}^{m_T^u} f_{\lambda_R^u}^{m_R^u}) \\ &\quad \times H_{\lambda_T^u\lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} I_{\lambda_T^u\lambda_T^u}^{m_T^u m_T^u} I_{\lambda_R^u\lambda_R^u}^{m_R^u m_R^u}, \end{aligned} \quad (7.69)$$

$$\begin{aligned} K_{3,\lambda_T^u\lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} &= -\frac{1}{2} U_{\lambda_T^u\lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} U_{\lambda_T^u\lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} U_{\lambda_T^u\lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} H_{\lambda_T^u\lambda_R^u}^{m_T^u m_R^u} \\ &\quad \times \left(\frac{1 + f_{\lambda_R^u}^{m_R^u}}{\sqrt{M_T}} \delta_{\lambda_T^u 0} \delta_{m_T^u 0} \delta_{\lambda_T^u\lambda_T^u} \delta_{m_T^u m_T^u} I_{\lambda_R^u\lambda_R^u}^{m_R^u m_R^u} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 + f_{\lambda_T^u}^{m_T^u}}{\sqrt{M_R}} \delta_{\lambda_R^u 0} \delta_{m_R^u 0} \delta_{\lambda_R^u\lambda_R^u} \delta_{m_R^u m_R^u} I_{\lambda_T^u\lambda_T^u}^{m_T^u m_T^u} \right). \end{aligned} \quad (7.70)$$

Der erste kubische Term (7.68) beschreibt den Einfluss der Ordnungsparameter selbst, während die beiden anderen kubischen Beiträge (7.69) und (7.70) den Einfluss der zentralen Mannigfaltigkeit repräsentieren. Die Koeffizienten der zentralen Mannigfaltigkeit sind dabei durch (7.60) gegeben.

Somit haben wir die generische Form der Ordnungsparametergleichungen für die Verbindungsgewichte zwischen zwei Mannigfaltigkeiten beliebiger Geometrie und Dimension abgeleitet. Diese Gleichungen stellen ein zentrales neues Ergebnis unserer synergetischen Analyse dar. Sie bilden ferner den Ausgangspunkt für die Untersuchung ein- und zweidimensionaler euklidischer sowie nichteuklidischer Mannigfaltigkeiten in Teil II dieser Arbeit. Hierbei zeigt sich einer der wesentlichen Vorteile gegenüber der speziellen Vorgehensweise in Ref. [9]. Statt den synergetischen Formalismus auf jede Mannigfaltigkeit jeweils neu anzuwenden, lassen sich in unserem Fall die Ordnungsparametergleichungen vergleichsweise schnell durch

die Spezifizierung der betrachteten Geometrie angeben. Das Vorgehen dabei wollen wir hier kurz skizzieren. Zunächst sind die Metriken der Mannigfaltigkeiten zu bestimmen. Daraus ergibt sich dann mit (6.11) der Laplace-Beltrami-Operator. Mit den orthonormalen Eigenfunktionen, die sich aus den Eigenwertproblemen (6.12) und (6.13) ergeben, sind dann die in (7.60), (7.63) und (7.68)–(7.70) auftretenden Integrale der Form (7.20), (7.21) zu berechnen. Damit ist die Ordnungsparemetergleichung für die betreffende Geometrie festgelegt. Ausgehend von diesen Gleichungen ist dann die Emergenz retinotoper Ordnungen zu untersuchen.

Teil III

Anwendungen

Kapitel 8

Saite

Im vorausgegangenen Kapitel wurden die Ordnungsparametergleichungen der verallgemeinerten Häussler-Gleichungen (5.5) für beliebige Geometrien und Dimensionen der beiden Mannigfaltigkeiten berechnet. Als erstes Anwendungsbeispiel betrachten wir hier zunächst eindimensionale Mannigfaltigkeiten mit euklidischer Metrik. Der Vergleich der Ergebnisse mit der Literaturarbeit [9] wird dabei als Beweis für die Richtigkeit unserer allgemeinen Überlegung dienen.

8.1 Eigenfunktionen

Die Saite stellt ein wichtiges Beispiel für eine eindimensionale Mannigfaltigkeit in der Theoretischen Physik dar. Im Folgenden modellieren wir Retina und Tectum als Saiten der Länge L_R bzw. L_T [59]. Die Maße von \mathcal{M}_T und \mathcal{M}_R sind dann nach (5.4) durch $M_R = L_R$ und $M_T = L_T$ gegeben. Um Probleme an den Randpunkten zu vermeiden, nehmen wir an, dass die Endpunkte der Saiten benachbart sind. Wir betrachten somit *Ringe* mit dem Umfang L_R bzw. L_T . Das Eigenwertproblem des hier zutreffenden Laplace-Beltrami-Operators

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \psi_{\lambda_j}(x_j) = \chi_{\lambda_j} \psi_{\lambda_j}(x_j) \quad (8.1)$$

mit der Randbedingung $\psi_{\lambda_j}(x_j) = \psi_{\lambda_j}(x_j + L_j)$ wird offensichtlich gelöst durch die Eigenfunktionen

$$\psi_{\lambda_j}(x_j) = \alpha_j \exp\left(i \frac{2\pi}{L_j} \lambda_j x_j\right), \quad (8.2)$$

mit den Eigenwerten

$$\chi_{\lambda_j} = -\frac{4\pi^2}{L_j^2} \lambda_j^2. \quad (8.3)$$

Dabei ist $x_j \in [0, L_j)$ und $\lambda_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Jeder Eigenwert χ_{λ_j} mit Ausnahme von $\chi_0 = 0$ ist also zweifach entartet. Der Index j dient dabei der Unterscheidung zwischen Retina ($j = R$) und Tectum ($j = T$). Mit der Festlegung der

Normierungskonstanten

$$\alpha_j = \frac{1}{\sqrt{L_j}} \quad (8.4)$$

bilden die Eigenfunktionen ein orthonormales Funktionensystem:

$$\int_0^{L_j} dx_j \psi_{\lambda_j}(x_j) \psi_{\lambda'_j}^*(x_j) = \delta_{\lambda_j \lambda'_j}. \quad (8.5)$$

Die Eigenfunktionen sind auch vollständig,

$$\sum_{\lambda_j=-\infty}^{\infty} \psi_{\lambda_j}(x_j) \psi_{\lambda'_j}^*(x'_j) = \delta(x_j - x'_j), \quad (8.6)$$

was man z. B. unter Anwendung der Poisson-Formel [60]

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} f(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i n y} dy \quad (8.7)$$

beweisen kann. Mit der Identifikation

$$f(\lambda_j) = \frac{1}{L_j} \exp \left[i \frac{2\pi}{L_j} \lambda_j (x_j - x'_j) \right] \quad (8.8)$$

folgt dann nämlich mit (8.7)

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_j=-\infty}^{\infty} \psi_{\lambda_j}(x_j) \psi_{\lambda'_j}^*(x'_j) &= \frac{1}{L_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i 2\pi y \left(\frac{x_j - x'_j}{L_j} - n \right) \right] dy \\ &= \frac{1}{L_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(\frac{x_j - x'_j}{L_j} - n \right). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Da x_j und x'_j im Intervall $[0, L_j]$ liegen, und damit $|x_j - x'_j| < L_j$ gilt, kann nur der Summand mit $n = 0$ einen Beitrag leisten. Damit ist (8.6) bewiesen.

Die Kooperationsfunktionen sollen nur vom Abstand abhängen, wobei dieser hier durch den euklidischen Abstand $|x_j - x'_j|$ gegeben ist. Es gilt also

$$c_j(x_j, x'_j) = c_j(x_j - x'_j). \quad (8.10)$$

Dann lassen sich diese aber in eine Fourier-Reihe der Form

$$c_j(x_j - x'_j) = \frac{1}{L_j} \sum_{\lambda_j=-\infty}^{\infty} f_{\lambda_j}^j \exp \left(i \frac{2\pi}{L_j} \lambda_j x_j \right) \exp \left(-i \frac{2\pi}{L_j} \lambda_j x'_j \right) \quad (8.11)$$

entwickeln, die c_j 's nehmen also die in (6.26) und (6.27) geforderte Produktform an. Weiterhin soll gezeigt werden, dass die Entwicklungskoeffizienten $f_{\lambda_j}^j$

unabhängig vom Vorzeichen der Eigenwerte λ_j sind. Dazu benutzen wir die Symmetrie der Kooperationsfunktionen bezüglich der Argumente (5.14), die hier auch unmittelbar aus der Abstandsabhängigkeit folgt. Es gilt

$$c_j(x_j - x'_j) = c_j(x'_j - x_j), \quad (8.12)$$

also mit (8.11)

$$\sum_{\lambda_j=-\infty}^{\infty} f_{\lambda_j}^j \exp\left[i\frac{2\pi}{L_j}\lambda_j(x_j - x'_j)\right] = \sum_{\lambda_j=-\infty}^{\infty} f_{-\lambda_j}^j \exp\left[i\frac{2\pi}{L_j}\lambda_j(x_j - x'_j)\right]. \quad (8.13)$$

Da die Eigenfunktionen linear unabhängig sind, folgt unmittelbar

$$f_{\lambda_j}^j = f_{-\lambda_j}^j. \quad (8.14)$$

8.2 Lineare Analyse

Die Eigenwerte des linearen Problems (6.10) wurden für den allgemeinen Fall bereits in Abschnitt 6.4 berechnet und sind durch (6.43) gegeben. Wir wollen dieses Ergebnis hier für den Fall der Saite verifizieren, um uns damit auch von der Richtigkeit der allgemeinen Betrachtungen in Kapitel 6 zu überzeugen. Die Eigenfunktionen lauten gemäß (6.33) sowie (8.2), (8.4)

$$v_{\lambda_T\lambda_R}(t, r) = \frac{1}{\sqrt{L_T L_R}} \exp\left(i\frac{2\pi}{L_T}\lambda_T t\right) \exp\left(i\frac{2\pi}{L_R}\lambda_R r\right). \quad (8.15)$$

Eingesetzt in den Operator (6.34) erhält man

$$\begin{aligned} \hat{C}(t, r, v_{\lambda_T\lambda_R}) &= \frac{1}{\sqrt{L_T L_R}} \int_0^{L_T} dt' \int_0^{L_R} dr' c_T(t - t') c_R(r - r') \\ &\quad \times \exp\left(i\frac{2\pi}{L_T}\lambda_T t'\right) \exp\left(i\frac{2\pi}{L_R}\lambda_R r'\right). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Mit der Entwicklung (8.11) ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{C}(t, r, v_{\lambda_T\lambda_R}) &= \frac{1}{(L_T L_R)^{3/2}} \sum_{\lambda'_T, \lambda'_R} f_{\lambda'_T}^T f_{\lambda'_R}^R \exp\left(i\frac{2\pi}{L_T}\lambda'_T t\right) \exp\left(i\frac{2\pi}{L_R}\lambda'_R r\right) \\ &\quad \times \int_0^{L_T} dt' \exp\left(-i\frac{2\pi}{L_T}\lambda'_T t'\right) \exp\left(i\frac{2\pi}{L_T}\lambda_T t'\right) \\ &\quad \times \int_0^{L_R} dr' \exp\left(-i\frac{2\pi}{L_R}\lambda'_R r'\right) \exp\left(i\frac{2\pi}{L_R}\lambda_R r'\right). \end{aligned} \quad (8.17)$$

Ausnutzen der Orthonormalität (8.5) führt auf (6.35):

$$\hat{C}(t, r, v_{\lambda_T \lambda_R}) = f_{\lambda_T}^T f_{\lambda_R}^R \psi_{\lambda_T}(t) \psi_{\lambda_R}(r). \quad (8.18)$$

Für den Operator (6.36) ergibt sich entsprechend

$$\hat{B}(t, r, v_{\lambda_T \lambda_R}) = \frac{1}{2\sqrt{L_T L_R}} \left[\exp\left(i \frac{2\pi}{L_R} \lambda_R r\right) \delta_{\lambda_T 0} + \exp\left(i \frac{2\pi}{L_T} \lambda_T t\right) \delta_{\lambda_R 0} \right]. \quad (8.19)$$

Also gelangt man zur Fallunterscheidung

$$\hat{B}(t, r, v_{\lambda_T \lambda_R}) = \begin{cases} v_{\lambda_T \lambda_R}(t, r) & \lambda_T = \lambda_R = 0 \\ \frac{1}{2} v_{\lambda_T \lambda_R}(t, r) & \lambda_T = 0, \lambda_R \neq 0; \lambda_R = 0, \lambda_T \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (8.20)$$

Weiter gilt mit (8.18)

$$\hat{B}(t, r, \hat{C}(v_{\lambda_T \lambda_R})) = f_{\lambda_T}^T f_{\lambda_R}^R \hat{B}(t, r, v_{\lambda_T \lambda_R}). \quad (8.21)$$

Somit erhält man schließlich die Eigenwerte zum Operator (6.7) in Übereinstimmung mit (6.43) zu

$$\Lambda_{\lambda_T \lambda_R} = \begin{cases} -\alpha - 1 & \lambda_T = \lambda_R = 0 \\ -\alpha + \frac{1}{2}(f_{\lambda_T}^T f_{\lambda_R}^R - 1) & \lambda_T = 0, \lambda_R \neq 0; \lambda_R = 0, \lambda_T \neq 0 \\ -\alpha + f_{\lambda_T}^T f_{\lambda_R}^R & \text{sonst.} \end{cases} \quad (8.22)$$

Die weitere nichtlineare Analyse beschränkt sich bei Häussler und von der Malsburg [9] auf *monoton fallende* Kooperationskoeffizienten $c_T(t, t')$ bzw. $c_R(r, r')$. Dies impliziert, wie wir in Abschnitt 8.6 zeigen werden, dass der Fall $(\lambda_T^u, \lambda_R^u) = (\pm 1, \pm 1)$ vorliegt. Da wir aber eine möglichst allgemeine Beschreibung geben wollen, d. h. insbesondere auch den Fall *nichtmonotoner* Kooperationsfunktionen zulassen wollen, betrachten wir beliebige instabil werdende Moden, die wir mit $(\lambda_T^u, \lambda_R^u)$ bezeichnen, wobei gemäß den Erläuterungen von Seite 64 $\lambda_T^u \neq 0$ und $\lambda_R^u \neq 0$ gilt. Mögliche instabile Moden sind dann beispielsweise durch $(\lambda_T^u, \lambda_R^u) = (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \pm 2), (\pm 2, \pm 2), (\pm 2, \pm 3), \dots$ gegeben.

8.3 Nichtlineare Analyse

Zur Bestimmung der Ordnungsparametergleichungen (7.61) sind zunächst die dort auftretenden Integrale (7.20) und (7.21) über die Produkte von Eigenfunktionen zu berechnen. Da das Produkt aus Exponentialfunktionen wieder auf eine Exponentialfunktion führt, lassen sich diese recht einfach unter Verwendung von (8.2) und (8.4) angeben. Vernachlässigen wir der Einfachheit halber den Index j

und berücksichtigen wir, dass die Entartungsindizes in den Parametern λ enthalten sind, dann wird

$$\begin{aligned} I_{\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}\dots\lambda^{(n)}}^\lambda &= \int_0^L dx \psi_\lambda^*(x) \psi_{\lambda^{(1)}}(x) \psi_{\lambda^{(2)}}(x) \cdots \psi_{\lambda^{(n)}}(x) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{L}} \right)^{n-1} \delta_{\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}+\dots+\lambda^{(n)},\lambda}, \end{aligned} \quad (8.23)$$

$$\begin{aligned} J_{\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}\dots\lambda^{(n)}} &= \int_0^L dx \psi_{\lambda^{(1)}}(x) \psi_{\lambda^{(2)}}(x) \cdots \psi_{\lambda^{(n)}}(x) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{L}} \right)^{n-2} \delta_{\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}+\dots+\lambda^{(n)},0}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Aus dieser allgemeinen Beziehung ergeben sich unmittelbar die Spezialfälle

$$I_{\lambda' \lambda''}^\lambda = \frac{1}{\sqrt{L}} \delta_{\lambda'+\lambda'',\lambda}, \quad (8.25)$$

$$I_{\lambda' \lambda'' \lambda'''}^\lambda = \frac{1}{L} \delta_{\lambda'+\lambda''+\lambda''',\lambda}. \quad (8.26)$$

Im quadratischen Term (7.63) tritt (8.25) mit instabilen λ -Werten auf. Da sich diese aber nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden können, folgt

$$\lambda' + \lambda'' \neq \lambda. \quad (8.27)$$

Also ist

$$I_{\lambda' \lambda''}^\lambda = 0, \quad (8.28)$$

d. h. der quadratische Term (7.63) in (7.61) verschwindet:

$$Q_{\lambda_T^u \lambda_R^u} = 0. \quad (8.29)$$

Das Integral $J_{\lambda' \lambda''}$ ergibt sich mit (8.24) zu

$$J_{\lambda' \lambda''} = \delta_{\lambda', -\lambda''}. \quad (8.30)$$

Mit (8.29) ergeben sich die Ordnungsgleichungen (7.61) mit (7.62), (7.64) im Fall der Saite zu

$$\dot{U}_{\lambda_T^u \lambda_R^u} = \Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} + K_{1,\lambda_T^u \lambda_R^u} + K_{2,\lambda_T^u \lambda_R^u} + K_{3,\lambda_T^u \lambda_R^u}. \quad (8.31)$$

Die kubischen Terme (7.68)–(7.70) erhält man mit (8.25), (8.26) und (8.30). Der erste kubische Beitrag ist durch

$$\begin{aligned} K_{1,\lambda_T^u \lambda_R^u} &= -\frac{f_{\lambda_T^u}^T f_{\lambda_R^u}^R}{2L_T L_R} U_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'}} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} U_{\lambda_T^{u'''} \lambda_R^{u'''}} \left(\delta_{\lambda_R^{u'} + \lambda_R^{u''} + \lambda_R^{u'''} , \lambda_R^u} \delta_{\lambda_T^u, \lambda_T^{u'}} \delta_{\lambda_T^{u''}, -\lambda_T^{u'''}} \right. \\ &\quad \left. + \delta_{\lambda_T^{u'} + \lambda_T^{u''} + \lambda_T^{u'''} , \lambda_T^u} \delta_{\lambda_R^u, \lambda_R^{u'}} \delta_{\lambda_R^{u''}, -\lambda_R^{u'''}} \right) \end{aligned} \quad (8.32)$$

gegeben, was sich unmittelbar reduziert auf

$$K_{1,\lambda_T^u \lambda_R^u} = -\frac{f_{\lambda_T^u}^T f_{\lambda_R^u}^R}{2L_T L_R} \left[U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} U_{-\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} \delta_{\lambda_R^{u'} + \lambda_T^{u''} + \lambda_R^{u''}, \lambda_R^u} \right. \\ \left. + U_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^u} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} \delta_{\lambda_T^{u'} + \lambda_T^{u''} + \lambda_T^{u''}, \lambda_T^u} \right]. \quad (8.33)$$

Für den zweiten Anteil erhält man

$$K_{2,\lambda_T^u \lambda_R^u} = U_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^u} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} \frac{f_{\lambda_T^{u'}}^T f_{\lambda_R^u}^R + f_{\lambda_T^u}^T f_{\lambda_R^{u''}}^R}{\sqrt{L_T L_R}} \\ \times H_{\lambda_T^{u'}, \lambda_R^u, \lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''} \lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} \delta_{\lambda_T^{u'} + \lambda_T^{u''}, \lambda_T^u} \delta_{\lambda_R^u + \lambda_R^{u''}, \lambda_R^u} \quad (8.34)$$

und für den dritten

$$K_{3,\lambda_T^u \lambda_R^u} = -\frac{1}{2\sqrt{L_T L_R}} U_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^u} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} H_{\lambda_T^{u'}, \lambda_R^u, \lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''} \lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} \\ \times \left[(1 + f_{\lambda_R^u}^R) \delta_{\lambda_R^u + \lambda_R^u, \lambda_R^u} \delta_{\lambda_T^u} \delta_{\lambda_T^u} + (1 + f_{\lambda_T^u}^T) \delta_{\lambda_T^u + \lambda_T^u, \lambda_T^u} \delta_{\lambda_R^u} \delta_{\lambda_R^u} \right]. \quad (8.35)$$

Sowohl (8.34) als auch (8.35) beschreiben den Einfluss der zentralen Mannigfaltigkeit (7.60), für die sich mit (8.25) und (8.30) ergibt:

$$H_{\lambda_T \lambda_R, \lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''} \lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} = \frac{1}{\sqrt{L_T L_R}} \frac{f_{\lambda_T^u}^T f_{\lambda_R^u}^R}{2\Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u} - \Lambda_{\lambda_T \lambda_R}} \left[\delta_{\lambda_T^{u''} + \lambda_T^{u''}, \lambda_T} \delta_{\lambda_R^{u''} + \lambda_R^{u''}, \lambda_R} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (\delta_{\lambda_T^{u''}, -\lambda_T^{u''}} \delta_{\lambda_R^{u''} + \lambda_R^{u''}, \lambda_R} \delta_{\lambda_T^u} + \delta_{\lambda_R^{u''}, -\lambda_R^{u''}} \delta_{\lambda_T^{u''} + \lambda_T^{u''}, \lambda_T} \delta_{\lambda_R^u}) \right]. \quad (8.36)$$

8.4 Ordnungsgleichungen

In Ref. [9] ist allein zur Bestimmung *einer* der vier Ordnungsgleichungen, die zur Mode $(\lambda_T^u, \lambda_R^u)$ gehören, ein enormer Rechenaufwand erforderlich. Es drängt sich die Frage auf, ob sich die Gleichungen für die Saite nicht auch ganz allgemein bestimmen lassen. Dies ist, wie im Folgenden gezeigt wird, in der Tat möglich. Somit lassen sich die ursprünglich vier Ordnungsgleichungen auf die Berechnung einer Gleichung reduzieren. Dieser analytische Erkenntnisgewinn gegenüber [9] ist insbesondere im Hinblick auf den später zu behandelnden Fall der Ebene wesentlich.

8.4.1 Berechnung von $K_{1,\lambda_T^u \lambda_R^u}$

Es sei zunächst nur die erste der beiden Summen von (8.33) betrachtet. Ganz offensichtlich treten nur solche kubischen Terme auf, für welche die Summe der Entartungsindizes gerade λ_R^u ergibt:

$$\lambda_R^{u'} + \lambda_R^{u''} + \lambda_R^{u''} = \lambda_R^u. \quad (8.37)$$

Ebenso ist das für die entsprechenden T -Indizes der Fall:

$$\lambda_T^{u'} + \lambda_T^{u''} + \lambda_T^{u'''} = \lambda_T^u. \quad (8.38)$$

Die Bedingung (8.37) erlaubt nur die folgenden Kombinationen:

$$(\lambda_R^{u'}, \lambda_R^{u''}, \lambda_R^{u'''}) = (\lambda_R^u, \lambda_R^u, -\lambda_R^u), (\lambda_R^u, -\lambda_R^u, \lambda_R^u), (-\lambda_R^u, \lambda_R^u, \lambda_R^u). \quad (8.39)$$

Für (8.38) ergibt sich entsprechend:

$$(\lambda_T^{u'}, \lambda_T^{u''}, \lambda_T^{u'''}) = (\lambda_T^u, \lambda_T^u, -\lambda_T^u), (\lambda_T^u, -\lambda_T^u, \lambda_T^u), (-\lambda_T^u, \lambda_T^u, \lambda_T^u). \quad (8.40)$$

Das liefert die folgenden sechs Terme dritter Ordnung:

$$K_{1,\lambda_T^u \lambda_R^u} (1. \text{Teil}) = -\frac{f_{\lambda_T^u}^T f_{\lambda_R^u}^R}{L_T L_R} \left[U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^2 U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u} + 2U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} \right]. \quad (8.41)$$

Für die zweite Summe in $K_{1,\lambda_T^u \lambda_R^u}$ gelangt man zum analogen Ergebnis, und somit ergibt sich für den gesamten Ausdruck

$$K_{1,\lambda_T^u \lambda_R^u} = -\frac{f_{\lambda_T^u}^T f_{\lambda_R^u}^R}{L_T L_R} \left[2U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^2 U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u} + 4U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} \right]. \quad (8.42)$$

Damit ist es uns gelungen, den ersten kubischen Term ohne Spezifizierung der instabilen Moden λ_T^u und λ_R^u in allgemeiner Form anzugeben.

Wir zeigen nun, dass sich auch die beiden anderen Beiträge $K_{2,\lambda_T^u \lambda_R^u}$ und $K_{3,\lambda_T^u \lambda_R^u}$ in allgemeiner Form angeben lassen.

8.4.2 Berechnung von $K_{2,\lambda_T^u \lambda_R^u}$

Setzt man den Ausdruck für die zentrale Mannigfaltigkeit (8.36) in (8.34) ein, erhält man

$$\begin{aligned} K_{2,\lambda_T^u \lambda_R^u} &= \frac{f_{\lambda_T^u}^T f_{\lambda_R^u}^R + f_{\lambda_T^u}^T f_{\lambda_R^u}^R}{L_T L_R} \frac{f_{\lambda_T^u}^T f_{\lambda_R^u}^R}{2\Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u} - \Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u}} U_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'}} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} U_{\lambda_T^{u'''} \lambda_R^{u'''}} \\ &\quad \times \delta_{\lambda_T^{u'} + \lambda_T^{u''}, \lambda_T^{u'''} \lambda_R^{u'}} \delta_{\lambda_R^{u'} + \lambda_R^{u''}, \lambda_R^{u'''} \lambda_R^{u'''}} \left[\delta_{\lambda_T^{u''} + \lambda_T^{u'''}, \lambda_T^{u'''} \lambda_R^{u''} + \lambda_R^{u'''}, \lambda_R^{u''}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (\delta_{\lambda_T^{u''}, -\lambda_T^{u'''} \lambda_R^{u''} + \lambda_R^{u'''}, \lambda_R^{u''}} \delta_{\lambda_T^{u'''} \lambda_R^{u''} + \lambda_R^{u'''}, \lambda_R^{u''}} + \delta_{\lambda_R^{u''}, -\lambda_R^{u'''} \lambda_T^{u''} + \lambda_T^{u'''}, \lambda_T^{u''}} \delta_{\lambda_T^{u'''} \lambda_R^{u''} + \lambda_R^{u'''}, \lambda_R^{u''}}) \right]. \quad (8.43) \end{aligned}$$

Auch in diesem Fall treten nur Terme auf, die – jeweils für T und R – die Bedingung

$$\lambda^{u'} + \lambda^{u''} + \lambda^{u'''} = \lambda^u \quad (8.44)$$

erfüllen. Dies lässt sich zeigen, wenn man die drei Beiträge einzeln betrachtet. Der erste Beitrag ist proportional zu $\delta_{\lambda_T^{u'} + \lambda_T^{u''}, \lambda_T^{u'''} \lambda_R^{u''}} \delta_{\lambda_R^{u'} + \lambda_R^{u''}, \lambda_R^{u'''} \lambda_R^{u''}} \delta_{\lambda_T^{u''} + \lambda_T^{u'''}, \lambda_T^{u'''} \lambda_R^{u''} + \lambda_R^{u'''}, \lambda_R^{u''}}$. Für nichtverschwindende Beiträge muss also gelten

$$\lambda = \lambda^u - \lambda^{u'} = \lambda^{u''} + \lambda^{u'''}, \quad (8.45)$$

und damit folgt (8.44). Beim zweiten Beitrag tritt das folgende Produkt von Kronecker-Symbolen auf: $\delta_{\lambda_T^{u'} + \lambda_T, \lambda_T^u} \delta_{\lambda_R^{u'} + \lambda_R, \lambda_R^u} \delta_{\lambda_T^{u''}, -\lambda_T^{u'''}} \delta_{\lambda_R^{u''} + \lambda_R^{u'''}, \lambda_R} \delta_{\lambda_T, 0}$. Für die R -Indizes erkennt man sofort, dass wie im ersten Beitrag die Beziehung (8.44) erfüllt ist. Bezüglich der T -Indizes muss für nichtverschwindende Terme $\lambda_T = 0$ gelten und damit auch

$$\lambda_T^{u'} = \lambda_T^u. \quad (8.46)$$

Mit $\lambda_T^{u''} = -\lambda_T^{u'''}$ folgt dann unmittelbar auch für die T -Indizes die Beziehung (8.44). Für den dritten Beitrag schließlich zeigt man dies auf ganz analoge Weise. Die Bedingung (8.44) wird nur von den beiden kubischen Termen

$$(U_{\lambda_T^u \lambda_R^u})^2 U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u}, \quad U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}$$

erfüllt. Berechnen wir zunächst den K_2 -Anteil von $(U_{\lambda_T^u \lambda_R^u})^2 U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u}$. Dann sind die folgenden Möglichkeiten für $U_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'}} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} U_{\lambda_T^{u'''} \lambda_R^{u'''}}$ zu berücksichtigen:

$$U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u}, \quad U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}, \quad U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}.$$

Für die erste Möglichkeit erhält man aus (8.43), dass der Vorfaktor verschwindet:

$$\delta_{\lambda_T, 0} \delta_{\lambda_R, 0} - \frac{1}{2} \cdot 2 \delta_{\lambda_T, 0} \delta_{\lambda_R, 0} = 0. \quad (8.47)$$

Auch der zweite mögliche Beitrag ergibt sich zu Null. Für den dritten ist der Vorfaktor proportional zu $\delta_{2\lambda_T^u, \lambda_T} \delta_{2\lambda_R^u, \lambda_R}$. Dann muss für nichtverschwindende Beiträge $\lambda = 2\lambda^u$ gelten. Dies liefert den K_2 -Beitrag

$$\frac{f_{\lambda_T^u}^T f_{\lambda_R^u}^R f_{2\lambda_T^u}^T f_{2\lambda_R^u}^R + f_{\lambda_T^u}^T f_{\lambda_R^u}^R}{L_T L_R (2\Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u} - \Lambda_{2\lambda_T^u, 2\lambda_R^u})} (U_{\lambda_T^u \lambda_R^u})^2 U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u}. \quad (8.48)$$

Für den zweiten kubischen Term sind in $U_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'}} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} U_{\lambda_T^{u'''} \lambda_R^{u'''}}$ die folgenden Kombinationen zu berücksichtigen:

$$U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}, \quad U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}, \quad U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}.$$

Diese müssen alle doppelt gezählt werden, da jeweils noch eine Vertauschung der Indizes der letzten beiden U 's zu berücksichtigen ist. Die Vorfaktoren zu diesen Beiträgen sind aber identisch, da diese nach (8.43) invariant gegenüber einer Vertauschung $\lambda^{u''} \leftrightarrow \lambda^{u'''}$ sind. Der erste Beitrag ergibt sich wieder mit (8.47) zu Null. Der Vorfaktor des zweiten Beitrags ist proportional zu $\delta_{2\lambda_T^u, \lambda_T} \delta_{\lambda_R, 0}/2$. Daraus folgt $\lambda_T = 2\lambda_T^u, \lambda_R = 0$. Der dritte Beitrag ergibt sich völlig analog als proportional zu $\delta_{2\lambda_R^u, \lambda_R} \delta_{\lambda_T, 0}/2$, mit der Bedingung $\lambda_T = 0, \lambda_R = 2\lambda_R^u$. Zusammengefasst ergibt das den zweiten K_2 -Beitrag

$$\frac{f_{\lambda_T^u}^T f_{\lambda_R^u}^R}{L_T L_R} \left[\frac{f_{2\lambda_T^u}^T + f_{\lambda_T^u}^T f_{\lambda_R^u}^R}{2\Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u} - \Lambda_{2\lambda_T^u, 0}} + \frac{f_{2\lambda_R^u}^T + f_{\lambda_T^u}^T f_{\lambda_R^u}^R}{2\Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u} - \Lambda_{0, 2\lambda_R^u}} \right] U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}. \quad (8.49)$$

Den gesamten K_2 -Term erhalten wir aus der Summe von (8.48) und (8.49) zu

$$K_{2,\lambda_T^u\lambda_R^u} = \frac{f_{\lambda_T^u}^T f_{\lambda_R^u}^R f_{2\lambda_T^u}^T f_{2\lambda_R^u}^R + f_{\lambda_T^u}^T f_{\lambda_R^u}^R}{L_T L_R} (U_{\lambda_T^u\lambda_R^u})^2 U_{-\lambda_T^u-\lambda_R^u} \\ + \frac{f_{\lambda_T^u}^T f_{\lambda_R^u}^R}{L_T L_R} \left[\frac{f_{2\lambda_T^u}^T + f_{\lambda_T^u}^T f_{\lambda_R^u}^R}{2\Lambda_{\lambda_T^u\lambda_R^u} - \Lambda_{2\lambda_T^u,0}} + \frac{f_{2\lambda_R^u}^T + f_{\lambda_R^u}^T f_{\lambda_T^u}^R}{2\Lambda_{\lambda_T^u\lambda_R^u} - \Lambda_{0,2\lambda_R^u}} \right] U_{\lambda_T^u\lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u\lambda_R^u} U_{\lambda_T^u-\lambda_R^u}. \quad (8.50)$$

8.4.3 Berechnung von $K_{3,\lambda_T^u\lambda_R^u}$

Für den K_3 -Term (8.35) ergibt sich mit (8.36)

$$K_{3,\lambda_T^u\lambda_R^u} = -\frac{1}{2L_T L_R} U_{\lambda_T^u\lambda_R^u} U_{\lambda_T^u\lambda_R^u} U_{\lambda_T^u\lambda_R^u} \frac{f_{\lambda_T^u}^T f_{\lambda_R^u}^R}{2\Lambda_{\lambda_T^u\lambda_R^u} - \Lambda_{\lambda_T^u\lambda_R^u}} \\ \times \left[\delta_{\lambda_T^u+\lambda_T^u,\lambda_T^u} \delta_{\lambda_R^u+\lambda_R^u,\lambda_R^u} - \frac{1}{2} \left(\delta_{\lambda_T^u,-\lambda_T^u} \delta_{\lambda_R^u+\lambda_R^u,\lambda_R^u} \delta_{\lambda_T^u 0} \right. \right. \\ \left. \left. + \delta_{\lambda_R^u,-\lambda_R^u} \delta_{\lambda_T^u+\lambda_T^u,\lambda_T^u} \delta_{\lambda_R^u 0} \right) \right] \times \left[(1 + f_{\lambda_R^u}^R) \delta_{\lambda_R^u+\lambda_R^u,\lambda_R^u} \delta_{\lambda_T^u 0} \delta_{\lambda_T^u\lambda_T^u} \right. \\ \left. + (1 + f_{\lambda_T^u}^T) \delta_{\lambda_T^u+\lambda_T^u,\lambda_T^u} \delta_{\lambda_R^u 0} \delta_{\lambda_R^u\lambda_R^u} \right]. \quad (8.51)$$

Die Berechnung des K_3 -Terms geschieht auf ganz analoge Weise wie die von K_2 , sodass hier nur das Resultat angegeben sei. Man zeigt zuerst die Gültigkeit von (8.44) und rechnet dann die Vorfaktoren der auftretenden kubischen Terme aus. Das führt auf

$$K_{3,\lambda_T^u\lambda_R^u} = -\frac{f_{\lambda_T^u}^T f_{\lambda_R^u}^R}{2L_T L_R} \left[\frac{1 + f_{2\lambda_R^u}^R}{2\Lambda_{\lambda_T^u\lambda_R^u} - \Lambda_{0,2\lambda_R^u}} + \frac{1 + f_{2\lambda_T^u}^T}{2\Lambda_{\lambda_T^u\lambda_R^u} - \Lambda_{2\lambda_T^u,0}} \right] U_{\lambda_T^u\lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u\lambda_R^u} U_{\lambda_T^u-\lambda_R^u}. \quad (8.52)$$

8.4.4 Ordnungsgleichungen der Saite

Die Ordnungsgleichung (8.31) lautet mit den in den vorangegangenen Abschnitten berechneten kubischen Termen (8.42), (8.50) und (8.52)

$$\dot{U}_{\lambda_T^u\lambda_R^u} = \Lambda_{\lambda_T^u\lambda_R^u} U_{\lambda_T^u\lambda_R^u} + A_{\lambda_T^u\lambda_R^u} U_{\lambda_T^u\lambda_R^u}^2 U_{-\lambda_T^u-\lambda_R^u} + B_{\lambda_T^u\lambda_R^u} U_{\lambda_T^u\lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u\lambda_R^u} U_{\lambda_T^u-\lambda_R^u}, \quad (8.53)$$

mit

$$A_{\lambda_T^u\lambda_R^u} = -\frac{\gamma}{L_T L_R} \left(2 - \frac{\gamma + \gamma^{2\lambda_T^u,2\lambda_R^u}}{2\Lambda_{\lambda_T^u\lambda_R^u} - \Lambda_{2\lambda_T^u,2\lambda_R^u}} \right), \quad (8.54)$$

$$B_{\lambda_T^u\lambda_R^u} = -\frac{\gamma}{L_T L_R} \left(4 - \frac{\gamma + \frac{1}{2}(\gamma^{2\lambda_T^u,0} - 1)}{2\Lambda_{\lambda_T^u\lambda_R^u} - \Lambda_{2\lambda_T^u,0}} - \frac{\gamma + \frac{1}{2}(\gamma^{0,2\lambda_R^u} - 1)}{2\Lambda_{\lambda_T^u\lambda_R^u} - \Lambda_{0,2\lambda_R^u}} \right). \quad (8.55)$$

Dabei sind die Größen γ bzw. $\gamma^{\lambda_T,\lambda_R}$ wie folgt definiert:

$$\gamma^{\lambda_T,\lambda_R} := f_{\lambda_T}^T f_{\lambda_R}^R, \quad (8.56)$$

$$\gamma := \gamma^{\lambda_T,\lambda_R} = f_{\lambda_T}^T f_{\lambda_R}^R. \quad (8.57)$$

8.4.5 Einführen reeller Moden

Aus den Eigenfunktionen (8.15) zum Operator \hat{L} lassen sich reelle Moden konstruieren:

$$\begin{aligned} c_{\lambda_T \lambda_R}(t, r) &= \frac{1}{2} [v_{\lambda_T \lambda_R}(t, r) + v_{-\lambda_T - \lambda_R}(t, r)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{L_T L_R}} \cos \left(\frac{2\pi}{L_T} \lambda_T t + \frac{2\pi}{L_R} \lambda_R r \right), \end{aligned} \quad (8.58)$$

$$\begin{aligned} s_{\lambda_T \lambda_R}(t, r) &= -\frac{i}{2} [v_{\lambda_T \lambda_R}(t, r) - v_{-\lambda_T - \lambda_R}(t, r)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{L_T L_R}} \sin \left(\frac{2\pi}{L_T} \lambda_T t + \frac{2\pi}{L_R} \lambda_R r \right). \end{aligned} \quad (8.59)$$

Diese beiden Moden spannen einen reellen Unterraum auf. Setzen wir

$$a = \rho \cos \psi, \quad b = \rho \sin \psi; \quad \rho \geq 0, \quad \psi \in (-\pi, \pi], \quad (8.60)$$

so gilt offenbar die folgende Beziehung:

$$a c_{\lambda_T \lambda_R}(t, r) + b s_{\lambda_T \lambda_R}(t, r) = \rho \cos \left(\frac{2\pi}{L_T} \lambda_T t + \frac{2\pi}{L_R} \lambda_R r - \psi \right). \quad (8.61)$$

Der Unterraum besteht also aus allen Funktionen, die aus der Phasenverschiebung von $\rho c_{\lambda_T \lambda_R}(t, r)$ hervorgehen. Die zum instabilen Eigenwert gehörigen Moden (λ_T^u, λ_R^u) sind dann gerade durch die Moden $c_{\lambda_T^u \lambda_R^u}(t, r)$ und $c_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}(t, r)$ sowie aus allen daraus durch Phasenverschiebung hervorgehenden Funktionen gegeben.

Schreibt man den instabilen Anteil (7.5)

$$\begin{aligned} U(t, r) &= U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} v_{\lambda_T^u \lambda_R^u}(t, r) + U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u} v_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u}(t, r) \\ &\quad + U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u} v_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}(t, r) + U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} v_{-\lambda_T^u \lambda_R^u}(t, r) \end{aligned} \quad (8.62)$$

auf die reellen Moden (8.58), (8.59) um, so erhält man

$$\begin{aligned} U(t, r) &= u_1 c_{\lambda_T^u \lambda_R^u}(t, r) + u_2 s_{\lambda_T^u \lambda_R^u}(t, r) \\ &\quad + u_3 c_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}(t, r) + u_4 s_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}(t, r) \end{aligned} \quad (8.63)$$

mit den reellen Variablen u_j :

$$\begin{aligned} u_1 &= U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} + U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u}, & u_2 &= i(U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} - U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u}), \\ u_3 &= U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u} + U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u}, & u_4 &= i(U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u} - U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u}). \end{aligned} \quad (8.64)$$

Die inversen Transformationsformeln lauten

$$\begin{aligned} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} &= (u_1 - iu_2)/2, & U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u} &= (u_1 + iu_2)/2, \\ U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u} &= (u_3 - iu_4)/2, & U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} &= (u_3 + iu_4)/2. \end{aligned} \quad (8.65)$$

8.5 Potentialdynamik

Wir wenden uns nun der Frage zu, ob die reellen Ordnungsparametergleichungen durch eine Potentialdynamik dargestellt werden können. Ausgehend von den komplexen Gleichungen (8.66) formulieren wir eine hinreichende Bedingung, die es erlaubt, bereits anhand der komplexen Gleichungen Aussagen über die Existenz eines reellen Potentials zu machen. Ist diese Bedingung erfüllt, so lässt sich direkt aus den komplexen Gleichungen das Potential in komplexen Variablen angeben. Das gesuchte reelle Potential ergibt sich dann durch Einsetzen der entsprechenden Transformationsformeln, die im Fall der Saite durch (8.65) gegeben sind. Der Vorteil dieser Methode liegt darin, dass man die reellen Gleichungen dann direkt aus dem Potential ableiten kann. Dies ist in der Regel einfacher, als sie über die Transformation der komplexen Ordnungsparametergleichungen zu berechnen und erst danach das reelle Potential zu bestimmen.

8.5.1 Potentialbedingungen im Komplexen

Im Folgenden untersuchen wir die Konsequenzen, die sich aus der Existenz eines reellen Potentials für komplexe Variablen ergeben. Dazu betrachten wir ein Gleichungssystem

$$\dot{z}_j = h_j(z_k, z_k^*) \quad (8.66)$$

in den komplexen Variablen

$$z_j = x_j + iy_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.67)$$

Der Ausdruck $h_j(z_k, z_k^*)$ ist so zu verstehen, dass die Funktionen h_j von *allen* komplexen Variablen z_k und z_k^* mit $k = 1, 2, \dots, n$ abhängen können. Die Funktionen h_j werden nun in Real- und Imaginärteil zerlegt:

$$h_j(z_k, z_k^*) = f_j(x_k, y_k) + ig_j(x_k, y_k). \quad (8.68)$$

Also gilt

$$\dot{z}_j = \dot{x}_j + i\dot{y}_j = f_j(x_k, y_k) + ig_j(x_k, y_k) \quad (8.69)$$

und damit

$$\dot{x}_j = f_j(x_k, y_k), \quad \dot{y}_j = g_j(x_k, y_k). \quad (8.70)$$

Wir fordern nun, dass im Fall der reellen Variablen x_j und y_j ein Potential existiert:

$$\dot{x}_j = -\frac{\partial}{\partial x_j} V(x_k, y_k), \quad \dot{y}_j = -\frac{\partial}{\partial y_j} V(x_k, y_k). \quad (8.71)$$

Wenn wir das Potential durch komplexe Größen ausdrücken, d. h. wenn wir von $V(x_k, y_k)$ nach $\tilde{V}(z_k, z_k^*)$ übergehen, erhalten wir

$$\dot{z}_j = -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z_j^*} \frac{\partial z_j^*}{\partial x_j} - i \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial y_j} - i \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z_j^*} \frac{\partial z_j^*}{\partial y_j}. \quad (8.72)$$

Die Ableitungen der komplexen Variablen nach den reellen Größen ergeben sich sofort aus (8.67). Damit erhält man

$$\dot{z}_j = -2 \frac{\partial}{\partial z_j^*} \tilde{V}(z_k, z_k^*). \quad (8.73)$$

Somit lässt sich das Potential in komplexen Variablen durch Integration über $h_j(z_k, z_k^*)$ gewinnen. Das reelle Potential ergibt sich dann einfach, indem man die komplexen Variablen gemäß (8.67) durch die reellen ausdrückt. Da die Integration aber sehr aufwendig sein kann, interessiert uns zunächst die Frage, ob ein reelles Potential überhaupt existiert.

Ist V stetig und existieren die partiellen ersten und zweiten Ableitungen und sind ebenfalls stetig, so folgt nach dem *Satz von Schwarz*

$$\frac{\partial^2}{\partial y_l \partial x_j} V(x_k, y_k) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial y_l} V(x_k, y_k), \quad (8.74)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_j} V(x_k, y_k) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} V(x_k, y_k), \quad (8.75)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y_l \partial y_j} V(x_k, y_k) = \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_l} V(x_k, y_k). \quad (8.76)$$

Diese Gleichheit der zweiten Ableitungen von $V(x_k, y_k)$ führt zu den folgenden drei Bedingungen:

$$\frac{\partial f_j}{\partial y_l} = \frac{\partial g_l}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial f_j}{\partial x_l} = \frac{\partial f_l}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial g_j}{\partial y_l} = \frac{\partial g_l}{\partial y_j}. \quad (8.77)$$

Diese Bedingungen, deren Überprüfung die Kenntnis der reellen Gleichungen voraussetzt, sollen nun auf Bedingungen für die komplexen Gleichungen umgeschrieben werden. Dann wäre es möglich, bereits aus der Kenntnis der Gleichungen für die komplexen Variablen eine Aussage darüber zu treffen, ob für die reellen Variablen ein Potential existiert.

Als erstes drücken wir dazu die reellen Funktionen $f_j(x_k, y_k)$ und $g_j(x_k, y_k)$ durch die komplexen Funktionen $h_j(z_k, z_k^*)$ gemäß (8.68) und den dazu komplex konjugierten Funktionen $h_j^*(z_k, z_k^*)$ aus:

$$f_j(x_k, y_k) = \frac{1}{2} [h_j(z_k, z_k^*) + h_j^*(z_k, z_k^*)], \quad (8.78)$$

$$g_j(x_k, y_k) = -\frac{i}{2} [h_j(z_k, z_k^*) - h_j^*(z_k, z_k^*)]. \quad (8.79)$$

Dann folgt für die erste der drei Bedingungen aus (8.77)

$$\frac{\partial}{\partial y_l} \frac{1}{2} [h_j(z_k, z_k^*) + h_j^*(z_k, z_k^*)] = -\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{i}{2} [h_l(z_k, z_k^*) - h_l^*(z_k, z_k^*)].$$

Die Anwendung der Kettenregel führt auf

$$\left(\frac{\partial h_j}{\partial z_l} + \frac{\partial h_j^*}{\partial z_l} \right) \frac{\partial z_l}{\partial y_l} + \left(\frac{\partial h_j}{\partial z_l^*} + \frac{\partial h_j^*}{\partial z_l^*} \right) \frac{\partial z_l^*}{\partial y_l}$$

$$= -i \left[\left(\frac{\partial h_l}{\partial z_j} - \frac{\partial h_l^*}{\partial z_j} \right) \frac{\partial z_j}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial h_l}{\partial z_j^*} - \frac{\partial h_l^*}{\partial z_j^*} \right) \frac{\partial z_j^*}{\partial x_j} \right]. \quad (8.80)$$

Daher lautet die erste Bedingung:

$$\frac{\partial h_j}{\partial z_l} + \frac{\partial h_j^*}{\partial z_l} - \left(\frac{\partial h_j}{\partial z_l^*} + \frac{\partial h_j^*}{\partial z_l^*} \right) = - \left(\frac{\partial h_l}{\partial z_j} - \frac{\partial h_l^*}{\partial z_j} \right) - \left(\frac{\partial h_l}{\partial z_j^*} - \frac{\partial h_l^*}{\partial z_j^*} \right). \quad (8.81)$$

Die zweite und dritte Bedingung aus (8.77) führen ganz entsprechend auf

$$\frac{\partial h_j}{\partial z_l} + \frac{\partial h_j^*}{\partial z_l} + \frac{\partial h_j}{\partial z_l^*} + \frac{\partial h_j^*}{\partial z_l^*} = \frac{\partial h_l}{\partial z_j} + \frac{\partial h_l^*}{\partial z_j} + \frac{\partial h_l}{\partial z_j^*} + \frac{\partial h_l^*}{\partial z_j^*}, \quad (8.82)$$

$$\frac{\partial h_j}{\partial z_l} - \frac{\partial h_j^*}{\partial z_l} - \frac{\partial h_j}{\partial z_l^*} + \frac{\partial h_j^*}{\partial z_l^*} = \frac{\partial h_l}{\partial z_j} - \frac{\partial h_l^*}{\partial z_j} - \frac{\partial h_l}{\partial z_j^*} + \frac{\partial h_l^*}{\partial z_j^*}. \quad (8.83)$$

Die Addition bzw. Subtraktion von (8.81), (8.82) sowie die Addition von (8.82), (8.83) führt auf die äquivalenten und übersichtlicheren Potentialbedingungen

$$\frac{\partial h_j}{\partial z_l} + \frac{\partial h_j^*}{\partial z_l} = \frac{\partial h_l^*}{\partial z_j} + \frac{\partial h_l^*}{\partial z_j^*}, \quad (8.84)$$

$$\frac{\partial h_j}{\partial z_l^*} + \frac{\partial h_j^*}{\partial z_l^*} = \frac{\partial h_l}{\partial z_j} + \frac{\partial h_l}{\partial z_j^*}, \quad (8.85)$$

$$\frac{\partial h_j}{\partial z_l} + \frac{\partial h_j^*}{\partial z_l^*} = \frac{\partial h_l}{\partial z_j} + \frac{\partial h_l^*}{\partial z_j^*}. \quad (8.86)$$

Besonders einfach wird es, falls für das komplexe Gleichungssystem (8.66) die Bedingung

$$\frac{\partial h_j(z_k, z_k^*)}{\partial z_l} = \frac{\partial h_l^*(z_k, z_k^*)}{\partial z_j^*}, \quad (8.87)$$

gilt. Dann sind alle drei Potentialbedingungen (8.84)–(8.86) erfüllt. Die Beziehung (8.87) ist also eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines reellen Potentials. Für die Überprüfung dieser Bedingung genügt es, die komplexen Ausgangsgleichungen (8.66) zu kennen. Eine Transformation auf reelle Variable ist dazu nicht nötig.

8.5.2 Anwendung auf die Saite

Die Ordnungsparametergleichungen (8.53) sind von der Form (8.66), wenn man setzt

$$h_{\lambda_T^u \lambda_R^u}(U, U^*) = \Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} + A_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^2 U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u} + B_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}. \quad (8.88)$$

Die zu erfüllende Bedingung (8.87) lautet dann

$$\frac{\partial h_{\lambda_T^u \lambda_R^u}(U, U^*)}{\partial U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}} = \frac{\partial h_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^*(U, U^*)}{\partial U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^*}. \quad (8.89)$$

Weiterhin ist $U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^* = U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u}$ und $h_{\lambda_T^u \lambda_R^u} = h_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u}$. Damit vereinfacht sich (8.89) zu

$$\frac{\partial h_{\lambda_T^u \lambda_R^u}(U, U^*)}{\partial U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}} = \frac{\partial h_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u}(U, U^*)}{\partial U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u}}. \quad (8.90)$$

Die linke Seite ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{\lambda_T^u \lambda_R^u}(U, U^*)}{\partial U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}} = & \\ & (\Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u} + 2A_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u} + B_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}) \delta_{\lambda_T^u, \lambda_T^u} \delta_{\lambda_R^u, \lambda_R^u} \\ & + A_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^2 \delta_{\lambda_T^u, -\lambda_T^u} \delta_{\lambda_R^u, -\lambda_R^u} + B_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} \delta_{\lambda_T^u, \lambda_T^u} \delta_{\lambda_R^u, -\lambda_R^u} \\ & + B_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u} \delta_{\lambda_T^u, -\lambda_T^u} \delta_{\lambda_R^u, \lambda_R^u}. \end{aligned} \quad (8.91)$$

Die rechte Seite lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u}(U, U^*)}{\partial U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u}} = & \\ & (\Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u} + 2A_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} + B_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}) \delta_{\lambda_T^u, \lambda_T^u} \delta_{\lambda_R^u, \lambda_R^u} \\ & + A_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u}^2 \delta_{\lambda_T^u, -\lambda_T^u} \delta_{\lambda_R^u, -\lambda_R^u} + B_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u} \delta_{\lambda_T^u, \lambda_T^u} \delta_{\lambda_R^u, -\lambda_R^u} \\ & + B_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} \delta_{\lambda_T^u, -\lambda_T^u} \delta_{\lambda_R^u, \lambda_R^u}. \end{aligned} \quad (8.92)$$

Nun kann man aber bei diesem Term wegen der Kronecker-Symbole die Entartungsindizes λ_T^u, λ_R^u durch $\pm \lambda_T^u, \pm \lambda_R^u$ ersetzen. Die Kronecker-Symbole selbst werden dadurch natürlich nicht verändert. Dann sieht man, dass (8.92) mit (8.91) übereinstimmt. Die Bedingung (8.90) ist also für die Saite erfüllt.

8.5.3 Komplexes Potential

Nachdem nun gezeigt ist, dass tatsächlich ein Potential existiert, soll dieses explizit berechnet werden. Dazu schreibt man Gleichung (8.73) von z_j auf $U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}$ um, und erhält

$$\dot{U}_{\lambda_T^u \lambda_R^u} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{V}(U, U^*)}{\partial U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u}}, \quad (8.93)$$

$$\dot{U}_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{V}(U, U^*)}{\partial U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}}. \quad (8.94)$$

Gleichzeitig gilt mit (8.53)

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\lambda_T^u \lambda_R^u} = & \Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} + A_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^2 U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u} \\ & + B_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}, \end{aligned} \quad (8.95)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} = & \Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} + A_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u}^2 U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u} \\ & + B_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}. \end{aligned} \quad (8.96)$$

Dann folgt mit (8.93) und (8.95)

$$\begin{aligned}\tilde{V}(U, U^*) &= -2\Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u} - A_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^2 U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u}^2 \\ &\quad - 2B_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u} \\ &\quad + \tilde{V}(U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}, U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u}, U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}).\end{aligned}\quad (8.97)$$

Setzt man (8.97) in (8.94) ein, so folgt mit (8.96)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{V}(U, U^*)}{\partial U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}} &= -2B_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}} \\ &= -2\Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} - 2A_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u}^2 U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u} \\ &\quad - 2B_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}.\end{aligned}\quad (8.98)$$

Damit ergibt sich \tilde{V} zu

$$\tilde{V}(U, U^*) = -2\Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u} - A_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u}^2 U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}^2, \quad (8.99)$$

und für das gesuchte Potential \tilde{V} erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned}\tilde{V}(U, U^*) &= -2\Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u} (U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u} + U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}) \\ &\quad - A_{\lambda_T^u \lambda_R^u} (U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^2 U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u}^2 + U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u}^2 U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}^2) \\ &\quad - 2B_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}.\end{aligned}\quad (8.100)$$

8.5.4 Reelles Potential

Durch Einsetzen der Transformationsformeln (8.65) ergibt sich das reelle Potential aus (8.100) zu

$$\begin{aligned}\tilde{V}(u_j) &= -\frac{\Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u}}{2} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) - \frac{A_{\lambda_T^u \lambda_R^u}}{16} [(u_1^2 + u_2^2)^2 + (u_3^2 + u_4^2)^2] \\ &\quad - \frac{B_{\lambda_T^u \lambda_R^u}}{8} (u_1^2 + u_2^2)(u_3^2 + u_4^2).\end{aligned}\quad (8.101)$$

Dieses Resultat, das wir mit Hilfe des in Abschnitt 8.5.1 entwickelten Formalismus direkt aus den komplexen Ordnungsparametergleichungen (8.53) abgeleitet haben, ist ein wesentliches neues Resultat und geht über [9] deutlich hinaus. Die Gleichungen für die reellen Variablen lassen sich unmittelbar aus (8.101) mit

$$\dot{u}_j = -\frac{\partial \tilde{V}(u_i)}{\partial u_j} \quad (8.102)$$

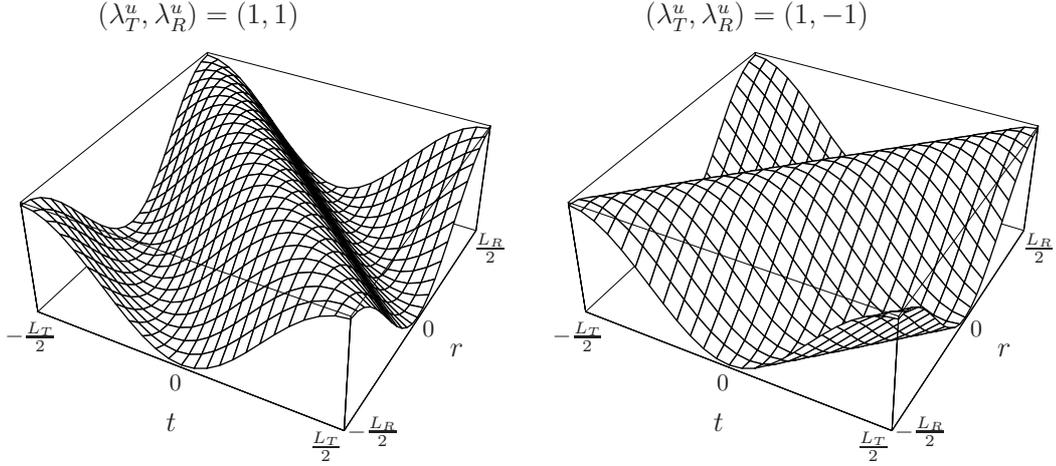


Abbildung 8.1: Diagonalmoden unterschiedlicher Orientierung nach (8.107), hier für den Fall $(\lambda_T^u, \lambda_R^u) = (1, 1)$ und $(1, -1)$. Dabei sind o. B. d. A. die Phasenverschiebungen als $\psi = \varphi = 0$ angenommen.

bestimmen. Man gelangt so zu den folgenden reellen Ordnungsparametergleichungen:

$$\dot{u}_1 = \left[\Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u} + \frac{A_{\lambda_T^u \lambda_R^u}}{4}(u_1^2 + u_2^2) + \frac{B_{\lambda_T^u \lambda_R^u}}{4}(u_3^2 + u_4^2) \right] u_1, \quad (8.103)$$

$$\dot{u}_2 = \left[\Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u} + \frac{A_{\lambda_T^u \lambda_R^u}}{4}(u_1^2 + u_2^2) + \frac{B_{\lambda_T^u \lambda_R^u}}{4}(u_3^2 + u_4^2) \right] u_2, \quad (8.104)$$

$$\dot{u}_3 = \left[\Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u} + \frac{A_{\lambda_T^u \lambda_R^u}}{4}(u_3^2 + u_4^2) + \frac{B_{\lambda_T^u \lambda_R^u}}{4}(u_1^2 + u_2^2) \right] u_3, \quad (8.105)$$

$$\dot{u}_4 = \left[\Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u} + \frac{A_{\lambda_T^u \lambda_R^u}}{4}(u_3^2 + u_4^2) + \frac{B_{\lambda_T^u \lambda_R^u}}{4}(u_1^2 + u_2^2) \right] u_4. \quad (8.106)$$

8.5.5 Konstante Phasenwinkel

Gemäß den obigen Erläuterungen zu Gleichung (8.61) kann $U(t, r)$ in (8.63) als eine Superposition zweier Diagonalmoden unterschiedlicher Orientierung dargestellt werden (siehe Abbildung 8.1). Man geht also von (8.63) zu der Form

$$U(t, r) = \xi \cos \left[\frac{2\pi}{L_T} \lambda_T^u t + \frac{2\pi}{L_R} \lambda_R^u r - \psi \right] + \eta \cos \left[\frac{2\pi}{L_T} \lambda_T^u t - \frac{2\pi}{L_R} \lambda_R^u r - \varphi \right] \quad (8.107)$$

über, wobei nach (8.60) und (8.61) gilt

$$u_1 = \xi \cos \psi, \quad (8.108)$$

$$u_2 = \xi \sin \psi, \quad (8.109)$$

$$u_3 = \eta \cos \varphi, \quad (8.110)$$

$$u_4 = \eta \sin \varphi. \quad (8.111)$$

Daraus folgt für die Amplituden der phasenverschobenen Diagonalmoden

$$\xi = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \quad (8.112)$$

$$\eta = \sqrt{u_3^2 + u_4^2}. \quad (8.113)$$

Für die Phasenwinkel gilt

$$\tan \psi = \frac{u_1}{u_2}, \quad (8.114)$$

$$\tan \varphi = \frac{u_3}{u_4}. \quad (8.115)$$

Diese Ausdrücke sind aber konstant, wie sich leicht zeigen lässt. Zunächst folgt aus den Ordnungsparametergleichungen (8.103), (8.104)

$$\frac{\dot{u}_1}{\dot{u}_2} = \frac{u_1}{u_2}. \quad (8.116)$$

Daraus folgt

$$\int \frac{\dot{u}_1}{u_1} dt = \int \frac{\dot{u}_2}{u_2} dt \quad (8.117)$$

und somit

$$\frac{u_1}{u_2} = \text{const.} \quad (8.118)$$

Ebenso erhält man

$$\frac{u_3}{u_4} = \text{const.} \quad (8.119)$$

Man kann die reellen Gleichungen (8.103)–(8.106) deshalb auf das folgende Gleichungssystem reduzieren:

$$\dot{\xi} = \left(\Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u} + \frac{A_{\lambda_T^u \lambda_R^u}}{4} \xi^2 + \frac{B_{\lambda_T^u \lambda_R^u}}{4} \eta^2 \right) \xi, \quad (8.120)$$

$$\dot{\eta} = \left(\Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u} + \frac{A_{\lambda_T^u \lambda_R^u}}{4} \eta^2 + \frac{B_{\lambda_T^u \lambda_R^u}}{4} \xi^2 \right) \eta. \quad (8.121)$$

Das zugehörige Potential erhält man aus (8.101) nach Ausführen der Variablentransformationen (8.112), (8.113) zu

$$V(\xi, \eta) = -\frac{\Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u}}{2} (\xi^2 + \eta^2) - \frac{A_{\lambda_T^u \lambda_R^u}}{16} (\xi^4 + \eta^4) - \frac{B_{\lambda_T^u \lambda_R^u}}{8} \xi^2 \eta^2. \quad (8.122)$$

Somit haben wir die vier komplexen Ordnungsparametergleichungen (8.53) auf zwei reelle Ordnungsparametergleichungen (8.120), (8.121) reduziert, zu denen wir das reelle Potential (8.122) sofort angeben konnten. Für die Moden $(\lambda_T^u, \lambda_R^u) = (\pm 1, \pm 1)$ entspricht das dem in [9] abgeleiteten Ergebnis. Ein Vorteil unserer Herleitung von (8.120)–(8.122) ist zum einen rechentechnischer Natur, was bereits in der Einleitung zu Abschnitt 8.5 erläutert wurde. Der wichtigste Erkenntnisgewinn unserer allgemeineren Analyse jedoch liegt vor allem in dem Nachweis, dass die Beschränkung auf diese Moden $(\pm 1, \pm 1)$ unnötig ist.

8.6 Monoton fallende Kooperationsfunktionen

Unsere bisherigen Betrachtungen sind für eine beliebige instabile Mode $(\lambda_T^u, \lambda_R^u)$ gültig. Welche Mode bei einer Veränderung des Kontrollparameters α tatsächlich instabil wird, ist nach (8.22) ausschließlich durch die Entwicklungskoeffizienten f_λ bestimmt. Im Folgenden sollen einige Eigenschaften dieser Koeffizienten abgeleitet werden. Insbesondere soll dabei untersucht werden, welche Konsequenzen monoton fallende Kooperationsfunktionen für die Entwicklungskoeffizienten haben.

8.6.1 Entwicklungskoeffizienten

Die Entwicklungskoeffizienten hängen über

$$c(x) = \frac{1}{L} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} f_\lambda \exp\left(i\frac{2\pi}{L}\lambda x\right) \quad (8.123)$$

mit den Kooperationsfunktionen zusammen. Man erhält sie somit zu

$$f_\lambda = \int_{-L/2}^{L/2} c(x) \exp\left(-i\frac{2\pi}{L}\lambda x\right) dx. \quad (8.124)$$

Daraus ergibt sich sofort eine Aussage über deren maximalen Betrag:

$$|f_\lambda| \leq \int_{-L/2}^{L/2} \left| c(x) \exp\left(-i\frac{2\pi}{L}\lambda x\right) \right| dx = \int_{-L/2}^{L/2} c(x) dx = 1. \quad (8.125)$$

Dabei wurde $c(x) \geq 0$ sowie die Normierung von $c(x)$ gemäß (5.15) ausgenutzt.

Mit der Eulerschen Formel

$$\exp\left(-i\frac{2\pi}{L}\lambda x\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{L}\lambda x\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{L}\lambda x\right) \quad (8.126)$$

verschwindet bei der Integration (8.124) wegen $c(x) = c(-x)$ der Sinusanteil, und man erhält

$$f_\lambda = 2 \int_0^{L/2} c(x) \cos\left(\frac{2\pi}{L}\lambda x\right) dx. \quad (8.127)$$

Damit folgt unmittelbar

$$f_\lambda = f_{-\lambda}, \quad (8.128)$$

sodass wir uns im Folgenden auf positive λ -Werte beschränken können. Aufgrund der Normierung von $c(x)$ gilt weiterhin

$$f_0 = 2 \int_0^{L/2} c(x) dx = 1, \quad (8.129)$$

was wir bereits in Gleichung (6.30) für den allgemeinen Fall abgeleitet haben.

Weiter folgt aus (8.127) mit partieller Integration

$$f_\lambda = \frac{L}{\pi\lambda} c(x) \sin\left(\frac{2\pi}{L}\lambda x\right) \Big|_0^{L/2} - \frac{L}{\pi\lambda} \int_0^{L/2} c'(x) \sin\left(\frac{2\pi}{L}\lambda x\right) dx, \quad (8.130)$$

was sich auf

$$f_\lambda = -\frac{L}{\pi\lambda} \int_0^{L/2} c'(x) \sin\left(\frac{2\pi}{L}\lambda x\right) dx \quad (8.131)$$

reduziert. Dann ist für $\lambda = 1$:

$$f_1 = -\frac{L}{\pi} \int_0^{L/2} c'(x) \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) dx. \quad (8.132)$$

Da $c(x)$ monoton fallend ist, gilt im Integrationsbereich $c'(x) < 0$. Die Sinusfunktion dagegen ist dort positiv. Also ist das Integral (8.132) negativ und folglich

$$f_1 > 0. \quad (8.133)$$

Als nächstes soll gezeigt werden, dass f_1 aufgrund der Monotonie der Kooperationsfunktion $c(x)$ der maximale Entwicklungskoeffizient ist, d. h. es ist $f_1 > f_\lambda$ für $\lambda \neq 0, 1$. Dazu bilden wir die Differenz

$$f_1 - f_\lambda = -\frac{L}{\pi} \int_0^{L/2} c'(x) \left[\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) - \frac{1}{\lambda} \sin\left(\frac{2\pi}{L}\lambda x\right) \right] dx. \quad (8.134)$$

Betrachten wir zunächst $\lambda = 2$. Dann ergibt sich mit der wohlbekannten Beziehung

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad (8.135)$$

die Differenz $f_1 - f_2$ zu

$$f_1 - f_2 = -\frac{L}{\pi} \int_0^{L/2} c'(x) \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \right] dx. \quad (8.136)$$

Nun gilt im betrachteten Integrationsintervall

$$c'(x) < 0, \quad \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \geq 0, \quad 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \geq 0. \quad (8.137)$$

Damit folgt sofort

$$f_1 - f_2 > 0. \quad (8.138)$$

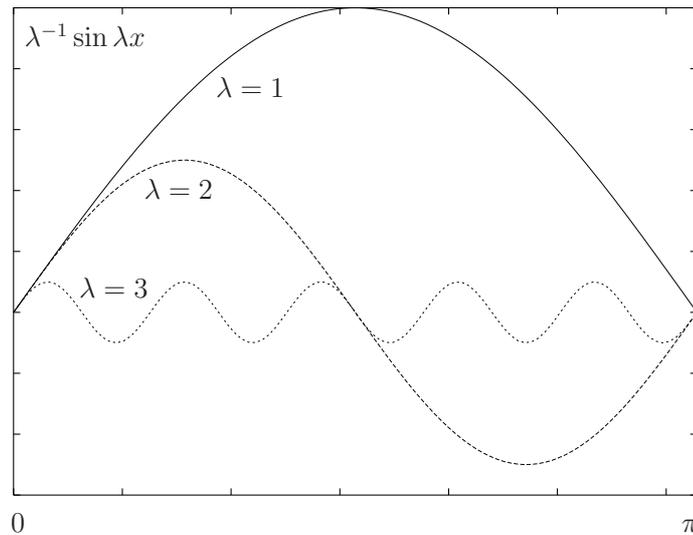


Abbildung 8.2: Zur Ungleichung (8.142): Im Intervall $[0, \pi)$ ist die Funktion $\sin x$ stets größer als $\lambda^{-1} \sin \lambda x$ für $\lambda \geq 2$.

Für $\lambda = 3$ gelangt man mit der Relation für die Funktion $\sin 3x$ (vgl. [61])

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \quad (8.139)$$

zur Beziehung

$$f_1 - f_3 = -\frac{4L}{3\pi} \int_0^{L/2} c'(x) \sin^3 \left(\frac{2\pi}{L} x \right) dx. \quad (8.140)$$

Also folgt auch hier

$$f_1 - f_3 > 0. \quad (8.141)$$

Diese Betrachtungen für $\lambda = 2$ und $\lambda = 3$ lassen sich verallgemeinern. Der im Integranden (8.134) stehende Sinus-Teil ist für alle $\lambda \geq 2$ positiv, d. h. es gilt

$$\sin \left(\frac{2\pi}{L} x \right) \geq \frac{1}{\lambda} \sin \left(\frac{2\pi}{L} \lambda x \right), \quad (8.142)$$

falls $x \in [0, L/2)$. Beide Funktionen starten bei $x = 0$ vom selben Funktionswert Null. Für $x \approx 0$ gilt für deren Steigungen

$$\frac{d}{dx} \sin \left(\frac{2\pi}{L} x \right) = \frac{2\pi}{L} \cos \left(\frac{2\pi}{L} x \right) \approx \frac{2\pi}{L} \left(1 - \frac{2\pi^2}{L^2} x^2 \right), \quad (8.143)$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{\lambda} \sin \left(\frac{2\pi}{L} \lambda x \right) = \frac{2\pi}{L} \cos \left(\frac{2\pi}{L} \lambda x \right) \approx \frac{2\pi}{L} \left(1 - \frac{2\pi^2}{L^2} \lambda^2 x^2 \right). \quad (8.144)$$

Für kleine x -Werte wächst $\sin[(2\pi/L)x]$ also schneller als $\lambda^{-1} \sin[(2\pi/L)\lambda x]$. Da keine weiteren Schnittpunkte im betrachteten Intervall existieren (siehe Abbildung 8.2), folgt die Ungleichung (8.142) und damit

$$f_1 - f_\lambda > 0, \quad \forall \lambda \neq 0, \pm 1. \quad (8.145)$$

Der maximale Entwicklungskoeffizient *ist* also durch f_1 gegeben.

8.6.2 Instabile Moden

Mit (8.125) und (8.145) erhält man den maximalen Eigenwert von (8.22) zu

$$\Lambda_{\max} = \Lambda_{11} = -\alpha + f_1^T f_1^R. \quad (8.146)$$

Es ergeben sich also vier instabile Moden $(\lambda_T^u, \lambda_R^u) = (\pm 1, \pm 1)$. Wir werden die Indizierung $(1, 1)$ aus Gründen der Übersichtlichkeit im Folgenden weglassen.

8.6.3 Potentialeigenschaften

Das Potential (8.122) lautet dann

$$V(\xi, \eta) = -\frac{\Lambda}{2}(\xi^2 + \eta^2) - \frac{A}{16}(\xi^4 + \eta^4) - \frac{B}{8}\xi^2\eta^2, \quad (8.147)$$

wobei die Koeffizienten A, B gemäß (8.54), (8.55) durch

$$A = -\frac{\gamma}{L_T L_R} \left(2 - \frac{\gamma + \gamma^{2,2}}{2\Lambda - \Lambda_{2,2}} \right), \quad (8.148)$$

$$B = -\frac{\gamma}{L_T L_R} \left(4 - \frac{\gamma + \frac{1}{2}(\gamma^{2,0} - 1)}{2\Lambda - \Lambda_{2,0}} - \frac{\gamma + \frac{1}{2}(\gamma^{0,2} - 1)}{2\Lambda - \Lambda_{0,2}} \right) \quad (8.149)$$

gegeben sind. Notwendige Bedingung für die Existenz eines relativen Extremwertes von $V(\xi, \eta)$ ist $\nabla V = 0$. Man erhält auf diese Weise vier mögliche Extrema:

1. Fall: $\xi = \eta = 0$,
2. Fall: $\xi = 0, \eta = \sqrt{-4\Lambda/A}$,
3. Fall: $\eta = 0, \xi = \sqrt{-4\Lambda/A}$,
4. Fall: $\xi = \eta = \sqrt{-4\Lambda/(A+B)}$.

Zur Klärung der Frage, ob es sich dabei um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt, ist die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \end{vmatrix} \quad (8.150)$$

und die zweite Ableitung $\partial^2 V / \partial \xi^2$ an den entsprechenden Punkten zu bestimmen [61]. Es ergeben sich dann mit

$$D = \left(\Lambda + \frac{3}{4}A\eta^2 + \frac{1}{4}B\xi^2 \right) \left(\Lambda + \frac{3}{4}A\xi^2 + \frac{1}{4}B\eta^2 \right) - \frac{B^2}{4}\xi^2\eta^2 \quad (8.151)$$

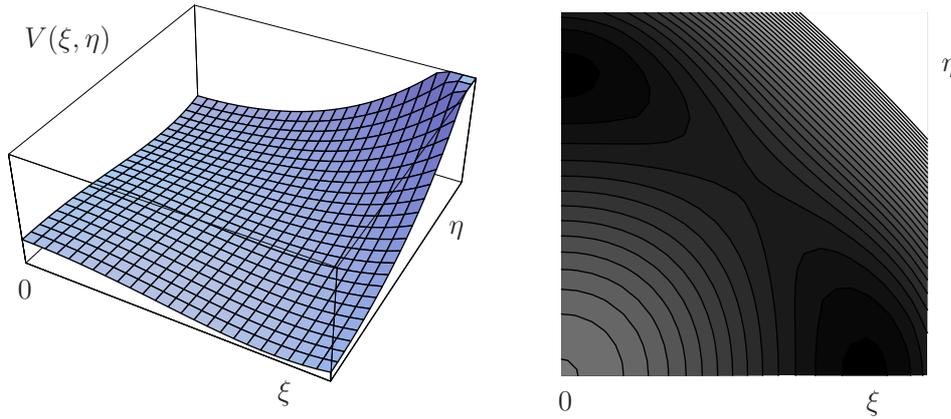


Abbildung 8.3: Das Potential $V(\xi, \eta)$ aus (8.147) im instabilen Gebiet $\Lambda > 0$. Der für negative Λ -Werte stabile Ausgangszustand $\xi = \eta = 0$ ist nun instabil. Das System nimmt eines der beiden Minima ein, d. h. eine der beiden Moden verschwindet. Rechts in der Darstellung der Niveaulinien treten die Extrema deutlicher hervor. Dunkle Grautöne entsprechen niedrigen, helle Grautöne hohen Werten des Potentials.

und

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = -\Lambda - \frac{3}{4}A\xi^2 - \frac{1}{4}B\eta^2 \quad (8.152)$$

die folgenden Situationen:

1. Fall:

$$\begin{aligned} D(0, 0) &= \Lambda^2 > 0, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}(0, 0) &= -\Lambda < 0. \end{aligned} \quad (8.153)$$

2. Fall:

$$\begin{aligned} D(0, \sqrt{-4\Lambda/A}) &= 2\Lambda^2(B/A - 1) > 0, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}(0, \sqrt{-4\Lambda/A}) &= \Lambda(B/A - 1) > 0. \end{aligned} \quad (8.154)$$

3. Fall:

$$\begin{aligned} D(\sqrt{-4\Lambda/A}) &= 2\Lambda^2(B/A - 1) > 0, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}(0, \sqrt{-4\Lambda/A}) &= \Lambda(B/A - 1) > 0. \end{aligned} \quad (8.155)$$

4. Fall:

$$D(\sqrt{-4\Lambda/(A+B)}, \sqrt{-4\Lambda/(A+B)}) = 4\Lambda^2 \frac{A^2 - B^2}{(A+B)^2} < 0. \quad (8.156)$$

Das Potential $V(\xi, \eta)$ hat für $\Lambda \geq 0$, also im instabilen Bereich, in folgenden Punkten Extrema bzw. Sattelpunkte (siehe Abbildung 8.3):

ein relatives Maximum in $P_1(0, 0)$,

zwei relative Minima in $P_2(0, \sqrt{-4\Lambda/A}), P_3(\sqrt{-4\Lambda/A}, 0)$,
 einen Sattelpunkt in $P_4(\sqrt{-4\Lambda/(A+B)}, \sqrt{-4\Lambda/(A+B)})$.

Im stabilen Bereich, in dem also $\Lambda < 0$ gilt, existiert nur das relative Minimum $\xi = \eta = 0$. Das System befindet sich anfangs im noch stabilen homogenen Zustand $w_0(t, r) = 1$. Dieser wird instabil, wenn der Kontrollparameter α bis auf den kritischen Wert $\alpha_c = f_1^T f_1^R$ fällt. Der Eigenwert (8.146) nimmt positive Werte an, und das ursprüngliche Potentialminimum geht in ein Maximum über. Das System fällt in eines der beiden Minima. Dabei kommt es zu einem Wettbewerb zwischen den beiden Moden, sodass eine Mode verschwindet. Welche der beiden Moden weiter existiert, wird durch zufällige Fluktuationen in den Anfangsbedingungen von ξ und η bestimmt. Für den Fall $\eta(0) > \xi(0)$ verschwindet die ξ -Mode und umgekehrt.

8.7 1-1-Retinotopie

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass sich entsprechend der soeben besprochenen Potentialdynamik eine der beiden Diagonalmoden durchgesetzt hat. Diese zeigen bereits ein ausgeprägtes Maximum für $t = -r$ bzw. $t = r$ (siehe Abbildung 8.1). Um den Einfluss höherer Moden zu bestimmen, berechnen wir zunächst die zentrale Mannigfaltigkeit $S(U)$. Wir betrachten den Fall, dass die η -Mode überlebt hat. Weiterhin setzen wir o. B. d. A. $u_4 = 0$ voraus, da dies nur Einfluss auf die Phase der Mode hat. Mit (8.113) folgt dann $\eta = u_3$, und wir erhalten

$$U(t, r) = \eta \cos\left(\frac{2\pi}{L_T}t - \frac{2\pi}{L_R}r\right). \quad (8.157)$$

Mit (7.47), (7.48) und (8.36) ergibt sich $S(U)$ nach der Transformation auf reelle Variable η zu

$$S(U) = \frac{2}{\sqrt{L_T L_R}} \frac{\gamma}{2\Lambda - \Lambda_{2,2}} \eta^2 \cos\left(\frac{4\pi}{L_T}t - \frac{4\pi}{L_R}r\right). \quad (8.158)$$

Es wird also eine Mode angeregt, die zur Verstärkung des retinotopen Charakters beiträgt. Wie man sich leicht anhand der komplexen Moden klar macht, werden ganz allgemein nur solche höheren Moden angeregt, die eine Konzentration von $w(t, r)$ um die Diagonale zur Folge haben. Im Falle der Mode mit $(\lambda_T^u, \lambda_R^u) = (1, 1)$ werden ausschließlich die Moden $(2, 2), (3, 3)$ etc. angeregt (siehe Abbildung 8.4).

8.7.1 Rekursionsgleichungen

Motiviert durch obige Überlegungen untersuchen wir die Häussler-Gleichungen für die Saite mit dem Ansatz

$$w(t, r) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} w_\lambda v_{\lambda, -\lambda}(t, r), \quad (8.159)$$

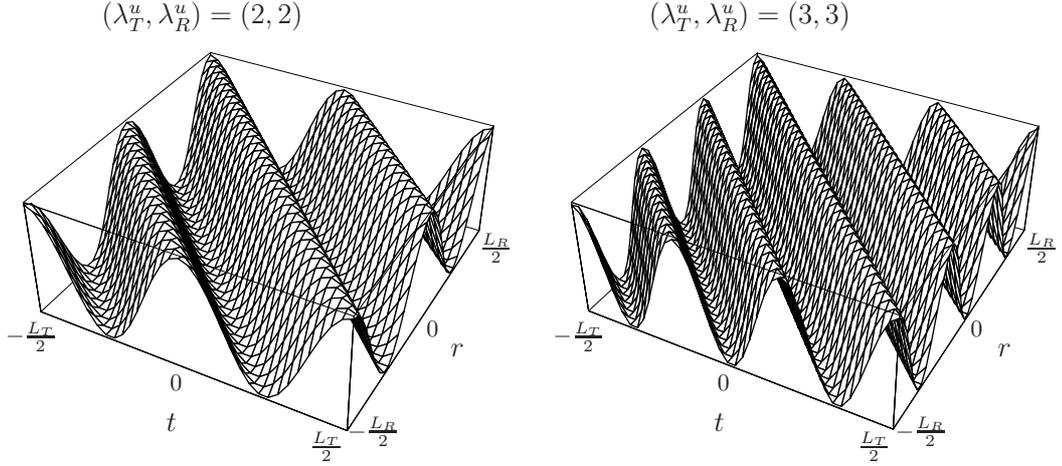


Abbildung 8.4: Höhere Diagonalmodes, welche durch die instabile Mode $(\lambda_T^u, \lambda_R^u) = (1, 1)$ aus Abbildung 8.1 angeregt werden. Sie verstärken den retinotopen Charakter der $(1, 1)$ -Mode.

wobei $v_{\lambda, -\lambda}(t, r)$ durch (8.15) definiert ist. Dann ergibt sich mit (8.20)

$$\hat{B}(w) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} w_{\lambda} \hat{B}(v_{\lambda, -\lambda}) = w_0 v_{0,0}. \quad (8.160)$$

Mit der Definition

$$p(w) = \frac{1}{L_T L_R} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} w_{-\lambda} w_{\lambda} f_{\lambda}^T f_{\lambda}^R \quad (8.161)$$

und dem zu (8.18) analogen Resultat

$$\hat{C}(v_{\lambda, -\lambda}) = f_{\lambda}^T f_{\lambda}^R v_{\lambda, -\lambda}(t, r) \quad (8.162)$$

erhält man

$$\begin{aligned} \hat{B}(w \cdot \hat{C}(w)) &= \frac{1}{\sqrt{L_T L_R}} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \sum_{\lambda'=-\infty}^{\infty} w_{\lambda} w_{\lambda'} f_{\lambda}^T f_{\lambda'}^R \hat{B}(v_{\lambda+\lambda', -\lambda-\lambda'}) \\ &= p(w). \end{aligned} \quad (8.163)$$

Die Häussler-Gleichung (5.12) schreibt sich dann

$$\dot{w}(t, r) = -\alpha[w(t, r) - 1] + w(t, r) \hat{C}(t, r, w) - p(w) w(t, r). \quad (8.164)$$

Setzen wir den Ansatz (8.159) in diese Gleichung ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \dot{w}_{\lambda} v_{\lambda, -\lambda} &= -\alpha \left(\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} w_{\lambda} v_{\lambda, -\lambda} - 1 \right) - p(w) \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} w_{\lambda} v_{\lambda, -\lambda} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{L_T L_R}} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \sum_{\lambda'=-\infty}^{\infty} w_{\lambda} w_{\lambda'} f_{\lambda}^T f_{\lambda'}^R v_{\lambda+\lambda', -\lambda-\lambda'}. \end{aligned} \quad (8.165)$$

Ein Koeffizientenvergleich der linear unabhängigen Basisfunktionen $v_{\lambda,-\lambda}$ ergibt

$$\dot{w}_0 = -(\alpha + p(w))(w_0 - \sqrt{L_T L_R}), \quad (8.166)$$

$$\dot{w}_\lambda = -(\alpha + p(w))w_\lambda + \frac{1}{\sqrt{L_T L_R}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} w_{\lambda-j} w_j f_j^T f_j^R, \quad \lambda \neq 0. \quad (8.167)$$

Da sowohl $w(t, r)$ als auch $\hat{C}(w)$ nach (5.29) positive Größen sind, gilt mit (8.163) auch $p(w) > 0$. Also ist

$$\alpha + p(w) > 0, \quad (8.168)$$

womit aus (8.166) für den stationären Zustand folgt

$$w_0 = \sqrt{L_T L_R}. \quad (8.169)$$

8.7.2 Spezielle Kooperationsfunktionen

Wir beschränken uns nun auf den Fall, dass die Kooperationsfunktionen (8.11) die folgende spezielle Form haben:

$$c_T(t - t') = \frac{1}{L_T} \left(1 + 2f_1^T \cos \left[\frac{2\pi}{L_T} (t - t') \right] \right), \quad (8.170)$$

$$c_R(r - r') = \frac{1}{L_R} \left(1 + 2f_1^R \cos \left[\frac{2\pi}{L_R} (r - r') \right] \right). \quad (8.171)$$

Es gilt also $f_{\lambda_T}^T, f_{\lambda_R}^R = 0$ falls $\lambda_T, \lambda_R \neq 0, \pm 1$. Mit der Abkürzung

$$\gamma := f_1^T f_1^R \quad (8.172)$$

folgt dann aus (8.161)

$$p(w) = 1 + \frac{2\gamma}{L_T L_R} w_1 w_{-1}. \quad (8.173)$$

Die Gleichungen (8.167) vereinfachen sich somit zu

$$\dot{w}_\lambda = - \left(\alpha + \frac{2\gamma}{L_T L_R} w_1 w_{-1} \right) w_\lambda + \frac{\gamma}{\sqrt{L_T L_R}} (w_1 w_{\lambda-1} + w_{-1} w_{\lambda+1}). \quad (8.174)$$

Im stationären Fall erhält man für (8.174)

$$w_\lambda = \frac{1}{\sqrt{L_T L_R}} \frac{\gamma w_1 (w_{\lambda-1} + w_{\lambda+1})}{\alpha + 2\gamma w_1^2 / L_T L_R}. \quad (8.175)$$

Durch Einführen der Variablen

$$u_\lambda = \frac{w_\lambda}{\sqrt{L_T L_R}} \quad (8.176)$$

gelangt man zu

$$u_0 = 1, \quad (8.177)$$

$$(\alpha + 2\gamma u_1^2) u_\lambda = \gamma u_1 (u_{\lambda-1} + u_{\lambda+1}), \quad \lambda \neq 0. \quad (8.178)$$

8.7.3 Erzeugende Funktion

Zur Lösung der nichtlinearen Rekursionsgleichung (8.178) berechnen wir die Erzeugende

$$E(z) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} u_{\lambda} z^{\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} u_{\lambda} (z^{\lambda} + z^{-\lambda}) + u_0. \quad (8.179)$$

Multipliziert man (8.178) mit $z^{\lambda} + z^{-\lambda}$ und summiert von $\lambda = 1$ bis unendlich, so ergibt sich

$$(\alpha + 2\gamma u_1^2)[E(z) - u_0] = \gamma u_1 z \left[E(z) - \frac{u_1}{z} \right] + \gamma u_1 \frac{1}{z} [E(z) - u_1 z]. \quad (8.180)$$

Damit erhält man die Erzeugende mit (8.177) zu

$$E(z) = \frac{\alpha}{\alpha + 2\gamma u_1^2 - \gamma u_1 (z + z^{-1})}. \quad (8.181)$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten u_{λ} entwickeln wir die Erzeugende (8.181) in eine Reihe, die wir dann mit der Laurent-Reihe (8.179) vergleichen. Zunächst schreiben wir $E(z)$ als

$$E(z) = \frac{\alpha}{\alpha + 2\gamma u_1^2} f(z) \quad (8.182)$$

mit der Funktion

$$f(z) = \frac{z}{z - u(z^2 + 1)}. \quad (8.183)$$

Dabei haben wir die Abkürzung

$$u = \frac{\gamma u_1}{\alpha + 2\gamma u_1^2} \quad (8.184)$$

eingeführt. Für die Berechnung der Nullstellen im Nenner von (8.183) erhält man

$$z_{1,2} = \frac{1}{2u} (1 \pm \sqrt{1 - 4u^2}). \quad (8.185)$$

Damit ist $z_2 = z_1^{-1}$, und eine Partialbruchzerlegung von $f(z)$ führt auf

$$f(z) = -\frac{z}{u(z_1 - z_1^{-1})} \left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_1^{-1}} \right). \quad (8.186)$$

Wir nehmen o. B. d. A. an, dass $|z_1| < |z_2|$ und damit $|z_1| < |z_1^{-1}|$ gilt. Mit der Darstellung von $(z - z_1)^{-1}$ und $(z - z_1^{-1})^{-1}$ durch geometrische Reihen gelangt man dann zu

$$f(z) = -\frac{1}{u(z_1 - z_1^{-1})} \sum_{\lambda=1}^{\infty} (z_1^{\lambda} - z_1^{-\lambda}) z^{\lambda}, \quad 0 < |z| < |z_1|, \quad (8.187)$$

$$f(z) = -\frac{1}{u(z_1 - z_1^{-1})} \left(\sum_{\lambda=1}^{\infty} z_1^{\lambda} (z^{\lambda} + z^{-\lambda}) + 1 \right), \quad |z_1| < |z| < |z_1^{-1}|, \quad (8.188)$$

$$f(z) = -\frac{1}{u(z_1 - z_1^{-1})} \sum_{\lambda=1}^{\infty} (z_1^{\lambda} - z_1^{-\lambda}) z^{-\lambda}, \quad |z| > |z_1^{-1}|. \quad (8.189)$$

Die Erzeugende $E(z)$ ergibt sich daraus mit (8.182). Aus dem Vergleich von $E(z)$ für die verschiedenen Bereiche von $|z|$ mit dem Ansatz (8.179), der explizit die Forderung $u_\lambda = u_{-\lambda}$ enthält, folgt sofort, dass nur der Bereich $|z_1| < |z| < |z_1^{-1}|$ in Frage kommt. Es ist also

$$E(z) = -\frac{\alpha}{\alpha + 2\gamma u_1^2} \frac{1}{u(z_1 - z_1^{-1})} \left(\sum_{\lambda=1}^{\infty} z_1^\lambda (z^\lambda + z^{-\lambda}) + 1 \right), \quad |z_1| < |z| < |z_1^{-1}|. \quad (8.190)$$

Der direkte Vergleich mit (8.179) führt auf die Bedingung

$$-\frac{\alpha}{\alpha + 2\gamma u_1^2} \frac{1}{u(z_1 - z_1^{-1})} = 1. \quad (8.191)$$

Mit $z_1 - z_1^{-1} = -u^{-1} \sqrt{1 - 4u^2}$ ergibt sich daraus

$$u_1^2 = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma}. \quad (8.192)$$

Dann folgt weiter mit (8.185)

$$z_1 = u_1. \quad (8.193)$$

Somit ist

$$u_\lambda = \varepsilon^{|\lambda|}. \quad (8.194)$$

Als Ergebnis für die Erzeugende erhält man also

$$E(z) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \varepsilon^{|\lambda|} z^\lambda \quad (8.195)$$

mit

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\gamma - \alpha}{\gamma}}. \quad (8.196)$$

8.7.4 Grenzfälle

Durch Einsetzen von (8.194) mit (8.176) in (8.159) erhalten wir das Ergebnis

$$w_0(t, r) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \varepsilon^{|\lambda|} \exp\left(i \frac{2\pi}{L_T} \lambda t - i \frac{2\pi}{L_R} \lambda r\right), \quad (8.197)$$

aus dem sich $w_0(t, r)$ explizit berechnen lässt:

$$w_0(t, r) = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - 2\varepsilon \cos\left(\frac{2\pi}{L_T} t - \frac{2\pi}{L_R} r\right) + \varepsilon^2}. \quad (8.198)$$

Für $\varepsilon = 0$ erhält man den homogenen Zustand

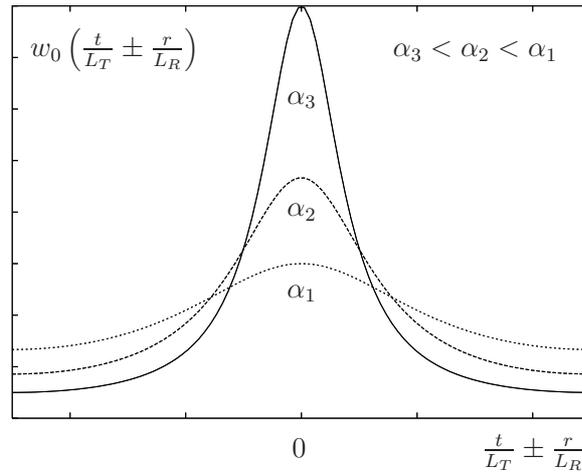


Abbildung 8.5: Beim Absenken des Kontrollparameters α zu immer kleineren Werten geht $w_0(t, r)$ gemäß (8.198) mit (8.196) in die Delta-Funktion (8.204) über.

$$w_0(t, r) = 1 \quad \forall t \in [0, L_T), r \in [0, L_R). \quad (8.199)$$

Um $w_0(t, r)$ für $\varepsilon = 1$, d. h. $u_\lambda = 1 \forall \lambda$, zu untersuchen, betrachten wir den Ausdruck

$$w_0(t, r) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \exp\left(i\frac{2\pi}{L_T}\lambda t - i\frac{2\pi}{L_R}\lambda r\right). \quad (8.200)$$

Mit der Poisson-Formel (8.7) und

$$f(\lambda) = \exp\left(i\frac{2\pi}{L_T}\lambda t - i\frac{2\pi}{L_R}\lambda r\right) \quad (8.201)$$

erhält man weiter

$$w_0(t, r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{L_T} - \frac{r}{L_R} - n\right). \quad (8.202)$$

Wegen

$$\frac{t}{L_T}, \frac{r}{L_R} \in [0, 1) \quad (8.203)$$

trägt nur der Term mit $n = 0$ bei, und es ergibt sich somit die Delta-Funktion:

$$w_0(t, r) = \delta\left(\frac{t}{L_T} - \frac{r}{L_R}\right). \quad (8.204)$$

Wir haben also die folgende Situation vorliegen (siehe Abbildung 8.5): Für Werte des Kontrollparameters $\alpha \approx \gamma$ ist das Verbindungsgewicht noch weitgehend homogen mit einem nur schwach ausgeprägten Maximum für $t/L_T = \pm r/L_R$. Bei weiterem Absenken von α wird die Projektion immer schärfer, bis die Abbildung im Grenzfall $\alpha \rightarrow 0$ in die Delta-Funktion und damit in eine perfekte 1-1-Retinitopie übergeht. Das undifferenzierte Wachstum neuer synaptischer Kontakte auf dem Tectum kommt also genau dann zum Stillstand, wenn die Retinitopie ideal ausgeprägt ist.

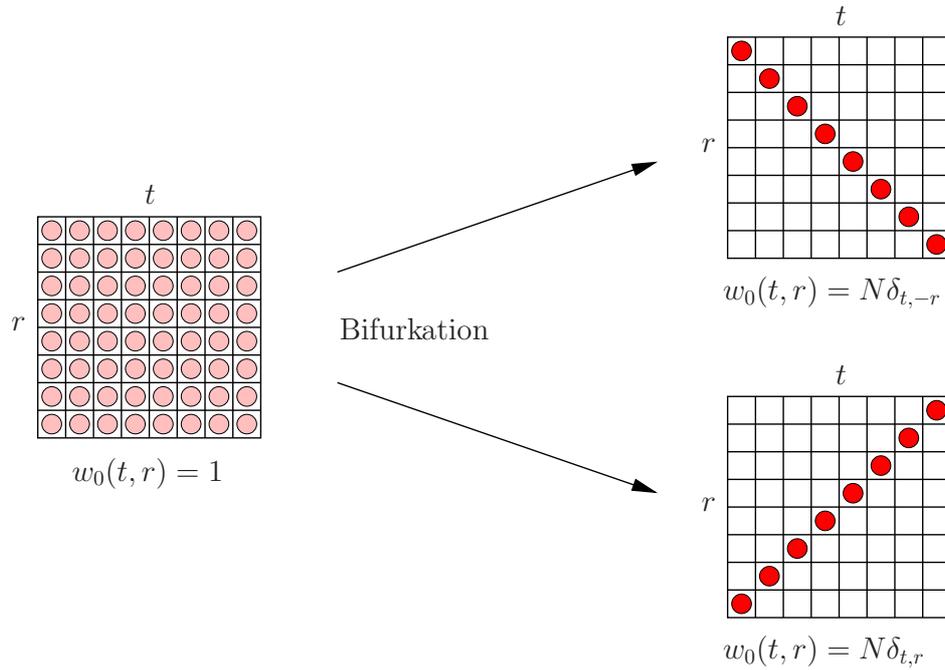


Abbildung 8.6: Bifurkation nahe der Instabilität für die in [9] analysierte lineare Kette aus jeweils N Zellen. Die quadratische Anordnung der beiden Ketten ermöglicht eine besonders übersichtliche Darstellung der Verbindungsgewichte. Intensivere Rotfärbung bedeutet ein höheres Verbindungsgewicht zwischen den entsprechenden Zellen t und r . Im homogenen Ausgangszustand sind alle Verbindungsgewichte identisch. Beim Einsetzen der Instabilität kommt es zur Bifurkation. Das System geht in eine der beiden möglichen Zustände über, die sich nur durch ihre Orientierung unterscheiden. Beim Absenken des Kontrollparameters α gegen Null erhält man eine 1-1-Retinotopie. Statt der Delta-Funktion im kontinuierlichen Fall wird dies im diskreten Fall durch Kronecker-Symbole beschrieben.

8.8 Vergleich mit der linearen Kette

Der Fall, dass Retina und Tectum jeweils als lineare Ketten mit N Zellen modelliert werden, wurde bereits von Häussler und v.d. Malsburg in [9] untersucht. Die Ordnungsgleichungen schreiben sich als

$$\dot{U}_{ij} = [\Lambda - \gamma(2 - a)U_{ij}U_{-i-j} + (4 - b' - b'')U_{i-j}U_{-ij}]U_{ij} \quad (8.205)$$

mit

$$a = -\frac{\gamma + \gamma^{2,2}}{\Lambda_{22}}, \quad (8.206)$$

$$b' = -\frac{\gamma + (\gamma^{2,0} - 1)/2}{\Lambda_{20}}, \quad (8.207)$$

$$b'' = -\frac{\gamma + (\gamma^{0,2} - 1)/2}{\Lambda_{02}}. \quad (8.208)$$

Der Vergleich der Vorfaktoren A, B nach (8.148), (8.149) mit $\gamma(2-a), \gamma(4-b'-b'')$ offenbart zwei Unterschiede: der Faktor $1/L_T L_R$ in A und B sowie der Term 2Λ im Nenner. Das Fehlen eines entsprechenden Faktors $1/N^2$ in [9] rührt daher, dass die Eigenfunktionen dort nicht normiert waren. Interessanter ist das Auftreten des Terms 2Λ in den Nennern von A, B . Dies hat seine Ursache darin, dass wir die mathematisch korrekte Bestimmungsgleichung für die zentrale Mannigfaltigkeit $S(U)$ in der Form (4.30) verwendet haben. In [9] hingegen wurde die adiabatische Näherung (4.36) zugrunde gelegt. Diese ad-hoc-Methode der adiabatischen Näherung, auf die in der Literatur üblicherweise verwiesen wird, ist nur dann gerechtfertigt, wenn die Eigenwerte reell sind, was bei der Saite auch der Fall ist. Dann nämlich gilt im instabilen Gebiet die Relation

$$\Lambda = -\alpha + \gamma \approx 0, \quad (8.209)$$

und somit gehen die Koeffizienten (8.148), (8.149) in unmittelbarer Nähe des Instabilitätspunktes gerade in diejenigen von [9] über.

Unsere Ergebnisse für den kontinuierlichen Fall sind wie erwartet ganz analog zum Fall diskreter Zellen. Auch der Übergang in eine perfekte 1-1-Abbildung ergibt sich für die Kette auf ganz ähnliche Weise. In Abbildung 8.6 ist das noch einmal kurz erläutert. Zusammenfassend lässt sich somit feststellen, dass das von uns entwickelte allgemeine, von der spezifischen Geometrie der Mannigfaltigkeiten unabhängige Modell der Emergenz retinotoper Verbindungen die Ergebnisse aus [9] entsprechend reproduzieren kann. Darüberhinaus ist der Gültigkeitsbereich, d. h. der Bereich um den Instabilitätspunkt $\Lambda = 0$, in dem die Ordnungsparametergleichungen das System quantitativ gut beschreiben, aufgrund der hier verwandten genaueren Form zur Bestimmung der zentralen Mannigfaltigkeit (4.30) erweitert worden. Insbesondere entsprechen durch die spezielle Wahl der Variablentransformation die beiden Minima gerade den beiden retinotopen Abbildungen.

Kapitel 9

Ebene

Nach der Behandlung eindimensionaler euklidischer Mannigfaltigkeiten untersuchen wir nun den Fall zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten mit euklidischer Metrik. Wir betrachten daher Retina und Tectum als Ebenen mit den Seitenlängen L_1^R, L_2^R bzw. L_1^T, L_2^T . Ein Punkt auf der Retina bzw. dem Tectum hat dann die Koordinaten

$$r = (r_1, r_2), \quad r_1 \in [0, L_1^R), r_2 \in [0, L_2^R), \quad (9.1)$$

$$t = (t_1, t_2), \quad t_1 \in [0, L_1^T), t_2 \in [0, L_2^T). \quad (9.2)$$

Die Maße sind durch die Flächeninhalte

$$M_T = \int_{t \in \mathcal{M}_T} d^2t = \int_0^{L_1^T} dt_1 \int_0^{L_2^T} dt_2 = L_1^T L_2^T, \quad (9.3)$$

und entsprechend

$$M_R = L_1^R L_2^R \quad (9.4)$$

gegeben.

9.1 Vollständige Entkopplung

Eine triviale Lösung wäre durch eine vollständige Entkopplung der beiden Dimensionen gegeben. Das heißt, das Verbindungsgewicht müsste sich gemäß

$$w(t, r) = w_1(t_1, r_1)w_2(t_2, r_2) \quad (9.5)$$

schreiben lassen. Dann gilt weiter

$$\dot{w}(t, r) = \dot{w}_1(t_1, r_1)w_2(t_2, r_2) + w_1(t_1, r_1)\dot{w}_2(t_2, r_2), \quad (9.6)$$

wobei gefordert wird, dass die zeitliche Entwicklung der Verbindungsgewichte in den beiden Dimensionen $j = 1, 2$ wie bei der Saite durch die Häussler-Gleichung

$$\dot{w}_j(t_j, r_j) = f(t_j, r_j, w_j) - \frac{w_j(t_j, r_j)}{2L_j^T} \int_{t'_j} dt'_j f(t'_j, r_j, w_j) - \frac{w_j(t_j, r_j)}{2L_j^R} \int_{r'_j} dr'_j f(t_j, r'_j, w_j) \quad (9.7)$$

gegeben ist. Damit liesse sich das Problem vollständig auf das der Saite zurückführen. Speziell für den Fall $f_{\lambda_j}^T, f_{\lambda_j}^R = 0 \forall \lambda_j \neq 0, \pm 1$ ergäbe sich die stationäre Lösung dann zu

$$w_{j,0}(t_j \pm r_j) = \sum_{\lambda} \varepsilon_j^{|\lambda|} \exp \left[i2\pi\lambda \left(\frac{t_j}{L_j^T} \pm \frac{r_j}{L_j^R} \right) \right] \quad (9.8)$$

mit

$$\varepsilon_j^2 = \frac{\gamma_j - \alpha}{\gamma_j}, \quad \gamma_j = f_{1,j}^T f_{1,j}^R. \quad (9.9)$$

Somit erhielten wir für $w_0(t \pm r) = w_{1,0}(t_1 \pm r_1)w_{2,0}(t_2 \pm r_2)$

$$w_0(t \pm r) = \sum_{\lambda, \lambda'} \varepsilon_1^{|\lambda|} \varepsilon_2^{|\lambda'|} \exp \left[i2\pi\lambda \left(\frac{t_1}{L_1^T} \pm \frac{r_1}{L_1^R} \right) \right] \exp \left[i2\pi\lambda' \left(\frac{t_2}{L_2^T} \pm \frac{r_2}{L_2^R} \right) \right]. \quad (9.10)$$

Am Instabilitätspunkt $\gamma_1 = \gamma_2 = \alpha$ wäre dann $w_0(t \pm r) = 1$, beim Absenken des Kontrollparameters bis auf $\alpha = 0$ ginge das Verbindungsgewicht in die Delta-Funktion über:

$$w_0(t \pm r) = \delta(t_1/L_1^T \pm r_1/L_1^R) \delta(t_2/L_2^T \pm r_2/L_2^R). \quad (9.11)$$

Diese vollständige Entkopplung der beiden Dimensionen bereits in den Ausgangsgleichungen steht allerdings im Widerspruch zur angenommenen Form der Häussler-Gleichungen (5.7). Dies sieht man, wenn man die rechte Seite von Gleichung (9.6) gemäß (9.7) ersetzt. Der sich ergebende Ausdruck ist inkompatibel zu (5.7), was seine Ursache in den Nichtlinearitäten der Häussler-Gleichungen hat. Deshalb untersuchen wir im Folgenden nur den nichttrivialen Fall (5.7).

9.2 Eigenfunktionen

Da die Überlegungen und Rechnungen bezüglich der beiden Mannigfaltigkeiten Retina und Tectum völlig äquivalent sind, betrachten wir ganz allgemein eine Ebene mit den Seitenlängen L_1, L_2 und dem Ortsvektor $x = (x_1, x_2)$, $x_1 \in [0, L_1)$, $x_2 \in [0, L_2)$. Das Maß ist dann $M = L_1 L_2$. Der Laplace-Beltrami-Operator in kartesischen Koordinaten lautet

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \quad (9.12)$$

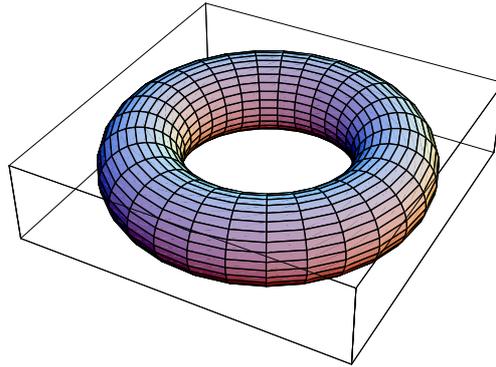


Abbildung 9.1: Schematische Darstellung von Retina bzw. Tectum als Tori infolge periodischer Randbedingungen.

Zur Lösung der Eigenwertgleichung

$$\Delta\psi(x) = \chi\psi(x) \quad (9.13)$$

verwendet man den Separationsansatz

$$\psi(x) = \psi(x_1, x_2) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2). \quad (9.14)$$

Eingesetzt in (9.13) führt das auf

$$\frac{1}{\psi_1} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{\psi_2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_2^2} = \chi = \text{const.} \quad (9.15)$$

Dies soll für alle Punkte (x_1, x_2) der Ebene gelten. Dann müssen die beiden Summanden auf der linken Seite der Gleichung bereits jeder für sich konstant sein:

$$\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x_j^2} = \text{const}_j \cdot \psi_j, \quad j = 1, 2. \quad (9.16)$$

Ein Ansatz mit

$$\psi_j(x_j) = e^{ik_j x_j} \quad (9.17)$$

führt auf

$$-k_j^2 = \text{const}_j, \quad (9.18)$$

und somit auf die allgemeine Lösung

$$\psi_j(x_j) = \alpha e^{ik_j x_j} + \beta e^{-ik_j x_j}. \quad (9.19)$$

Wir setzen periodische Randbedingungen voraus, sodass wir uns die Zellen auf der Oberfläche eines Torus vorstellen können (siehe Abbildung 9.1):

$$\psi_j(x_j + L_j) = \psi_j(x_j). \quad (9.20)$$

Daraus folgen die möglichen k -Werte zu

$$k_j = \lambda_j \frac{2\pi}{L_j}, \quad \lambda_j \in \mathbb{Z}. \quad (9.21)$$

Die Basisfunktionen zum Eigenwertproblem (9.13) lauten also

$$\psi_\lambda(x) = \psi_{\lambda_1}(x_1)\psi_{\lambda_2}(x_2) = \mathcal{N} \exp\left(i\frac{2\pi}{L_1}\lambda_1x_1\right) \exp\left(i\frac{2\pi}{L_2}\lambda_2x_2\right), \quad (9.22)$$

mit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$. Die Normierungskonstante \mathcal{N} ergibt sich aus der Forderung, dass die Basisfunktionen ein Orthonormalsystem bilden:

$$\int_x dx \psi_\lambda(x)\psi_{\lambda'}^*(x) = \delta_{\lambda_1\lambda'_1}\delta_{\lambda_2\lambda'_2}. \quad (9.23)$$

Damit wird

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{L_1L_2}}. \quad (9.24)$$

Zum Beweis der Vollständigkeit ist zu zeigen, dass

$$\sum_\lambda \psi_\lambda(x)\psi_\lambda^*(x') = \delta(x - x') \quad (9.25)$$

gilt. Hierzu kann auf beiden Seiten nach den Komponenten x_1 und x_2 separiert werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_1L_2} \sum_{\lambda_1=-\infty}^{\infty} \exp\left[i\frac{2\pi}{L_1}\lambda_1(x_1 - x'_1)\right] \sum_{\lambda_2=-\infty}^{\infty} \exp\left[i\frac{2\pi}{L_2}\lambda_2(x_2 - x'_2)\right] \\ = \delta(x_1 - x'_1)\delta(x_2 - x'_2). \end{aligned} \quad (9.26)$$

Dies ist genau dann erfüllt, falls

$$\frac{1}{L} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \exp\left[i\frac{2\pi}{L}\lambda(x - x')\right] = \delta(x - x') \quad (9.27)$$

für $x, x' \in [0, L)$ gilt. Genau das wurde aber bereits im Fall der Saite unter Verwendung der Poisson-Formel bewiesen (vgl. Abschnitt 8.1). Somit ist (9.25) erfüllt. Die Basisfunktionen

$$\psi_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{L_1L_2}} \exp\left(i\frac{2\pi}{L_1}\lambda_1x_1\right) \exp\left(i\frac{2\pi}{L_2}\lambda_2x_2\right) \quad (9.28)$$

bilden also ein vollständiges Orthonormalsystem.

Schließlich zeigen wir analog zur Saite in Abschnitt 8.1, dass die Entwicklungskoeffizienten $f_{\lambda_j}^j$ der Kooperationsfunktionen unabhängig vom Vorzeichen von λ_j sind ($j = T, R$). Dabei ist der Vektorcharakter der Parameter $\lambda_j = (\lambda_{j1}, \lambda_{j2})$ und der Ortskoordinate $x_j = (x_{j1}, x_{j2})$ zu berücksichtigen. Es gilt dann

$$\begin{aligned} c_j(x_j - x'_j) &= c_j(x_{j1} - x'_{j1}, x_{j2} - x'_{j2}) \\ &= \frac{1}{L_1^j L_2^j} \sum_{\lambda_{j1}, \lambda_{j2}} f_{(\lambda_{j1}, \lambda_{j2})}^j \exp\left[i\frac{2\pi}{L_1^j}\lambda_{j1}(x_{j1} - x'_{j1})\right] \exp\left[i\frac{2\pi}{L_2^j}\lambda_{j2}(x_{j2} - x'_{j2})\right]. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Die Kooperationsfunktionen sollen nur von den Beträgen der Abstände $x_{j1} - x'_{j1}$ bzw. $x_{j2} - x'_{j2}$ abhängen. Diese Forderung führt mit der linearen Unabhängigkeit der Exponentialfunktionen unmittelbar auf

$$f_{(\lambda_{j1}, \lambda_{j2})}^j = f_{(\pm\lambda_{j1}, \pm\lambda_{j2})}^j. \quad (9.30)$$

Die Entwicklungskoeffizienten sind also invariant gegenüber Vorzeichenänderungen der einzelnen Komponenten λ_{j1} , λ_{j2} .

9.3 Integrale

Wir berechnen zunächst die Integrale (7.20) und (7.21), wobei wir die Entartungsindizes schon in den Parametern λ berücksichtigt haben:

$$I_{\lambda, \lambda^{(1)} \lambda^{(2)} \dots \lambda^{(n)}} = \int_x d^2x \psi_\lambda^*(x) \psi_{\lambda^{(1)}}(x) \psi_{\lambda^{(2)}}(x) \cdots \psi_{\lambda^{(n)}}(x), \quad (9.31)$$

$$J_{\lambda^{(1)} \lambda^{(2)} \dots \lambda^{(n)}} = \int_x d^2x \psi_{\lambda^{(1)}}(x) \psi_{\lambda^{(2)}}(x) \cdots \psi_{\lambda^{(n)}}(x). \quad (9.32)$$

Einsetzen der Eigenfunktionen (9.28) in (9.31) führt mit $\psi_\lambda^*(x) = \psi_{-\lambda}(x)$ auf

$$\begin{aligned} I_{\lambda, \lambda^{(1)} \lambda^{(2)} \dots \lambda^{(n)}} &= \left(\frac{1}{L_1 L_2} \right)^{(n+1)/2} \int_0^{L_1} dx_1 \exp \left[i \frac{2\pi}{L_1} (\lambda_1^{(1)} + \lambda_1^{(2)} + \dots + \lambda_1^{(n)} - \lambda_1) x_1 \right] \\ &\quad \times \int_0^{L_2} dx_2 \exp \left[i \frac{2\pi}{L_2} (\lambda_2^{(1)} + \lambda_2^{(2)} + \dots + \lambda_2^{(n)} - \lambda_2) x_2 \right] \\ &= \left(\frac{1}{L_1 L_2} \right)^{(n-1)/2} \delta_{\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \dots + \lambda^{(n)}, \lambda}. \end{aligned} \quad (9.33)$$

Entsprechend erhalten wir aus (9.32)

$$\begin{aligned} J_{\lambda^{(1)} \lambda^{(2)} \dots \lambda^{(n)}} &= \left(\frac{1}{L_1 L_2} \right)^{n/2} \int_0^{L_1} dx_1 \exp \left[i \frac{2\pi}{L_1} (\lambda_1^{(1)} + \lambda_1^{(2)} + \dots + \lambda_1^{(n)}) x_1 \right] \\ &\quad \times \int_0^{L_2} dx_2 \exp \left[i \frac{2\pi}{L_2} (\lambda_2^{(1)} + \lambda_2^{(2)} + \dots + \lambda_2^{(n)}) x_2 \right] \\ &= \left(\frac{1}{L_1 L_2} \right)^{(n-2)/2} \delta_{\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \dots + \lambda^{(n)}, 0}. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Mit diesen Vorbereitungen sollen nun die einzelnen Beiträge der Ordnungsparametergleichung

$$\dot{U}_{\lambda_T^u \lambda_R^u} = \Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} + Q_{\lambda_T^u \lambda_R^u} + K_{1, \lambda_T^u \lambda_R^u} + K_{2, \lambda_T^u \lambda_R^u} + K_{3, \lambda_T^u \lambda_R^u} \quad (9.35)$$

für beliebige instabile Moden $(\lambda_T^u, \lambda_R^u)$ berechnet werden. Zuvor wollen wir uns aber der Frage zuwenden, welche kubischen Terme überhaupt auftreten.

9.4 Nichtlineare Terme

Mit den sich aus (9.33) ergebenden Integralen

$$I_{\lambda^u, \lambda^{u'} \lambda^{u''}} = \frac{1}{\sqrt{L_1 L_2}} \delta_{\lambda^{u'} + \lambda^{u''}, \lambda^u} \quad (9.36)$$

erhält man den quadratischen Term (7.63) zu

$$Q_{\lambda_T^u \lambda_R^u} = \frac{1}{\sqrt{M_T M_R}} f_{\lambda_T^u}^T f_{\lambda_R^u}^R U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} \delta_{\lambda_T^{u'} + \lambda_T^{u''}, \lambda_T^u} \delta_{\lambda_R^{u'} + \lambda_R^{u''}, \lambda_R^u}. \quad (9.37)$$

Der erste kubische Term (7.68) lautet nach Einsetzen der obigen Integrale

$$K_{1, \lambda_T^u \lambda_R^u} = -\frac{f_{\lambda_T^u}^T f_{\lambda_R^u}^R}{2M_T M_R} \left[U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} U_{-\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} \delta_{\lambda_R^{u'} + \lambda_R^{u''} + \lambda_R^{u''}, \lambda_R^u} \right. \\ \left. + U_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^u} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} \delta_{\lambda_T^{u'} + \lambda_T^{u''} + \lambda_T^{u''}, \lambda_T^u} \right]. \quad (9.38)$$

Es treten also, analog zur Saite, nur solche Terme auf, welche die Bedingung

$$\lambda^{u'} + \lambda^{u''} + \lambda^{u'''} = \lambda^u \quad (9.39)$$

erfüllen.

Der zweite kubische Term (7.69) lautet

$$K_{2, \lambda_T^u \lambda_R^u} = U_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^u} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} U_{\lambda_T^{u'''} \lambda_R^{u'''}} \frac{f_{\lambda_T^u}^T f_{\lambda_R^u}^R + f_{\lambda_T^{u'}}^T f_{\lambda_R^u}^R}{\sqrt{M_T M_R}} \\ \times H_{\lambda_T^u \lambda_R^u, \lambda_T^{u'} \lambda_R^{u''} \lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} \delta_{\lambda_T^{u'} + \lambda_T^{u''}, \lambda_T^u} \delta_{\lambda_R^{u'} + \lambda_R^{u''}, \lambda_R^u} \quad (9.40)$$

und entsprechend gilt für den dritten Term (7.70)

$$K_{3, \lambda_T^u \lambda_R^u} = -\frac{1}{2\sqrt{M_T M_R}} U_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^u} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} U_{\lambda_T^{u'''} \lambda_R^{u'''}} H_{\lambda_T^u \lambda_R^u, \lambda_T^{u'} \lambda_R^{u''} \lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} \\ \times \left[(1 + f_{\lambda_R^u}^R) \delta_{\lambda_R^{u'} + \lambda_R^{u''}, \lambda_R^u} \delta_{\lambda_T^{u'} \lambda_T^{u''}} + (1 + f_{\lambda_T^u}^T) \delta_{\lambda_T^{u'} + \lambda_T^{u''}, \lambda_T^u} \delta_{\lambda_R^{u'} \lambda_R^{u''}} \right]. \quad (9.41)$$

Nach Einsetzen der zentralen Mannigfaltigkeit (7.60), d. h.

$$H_{\lambda_T \lambda_R, \lambda_T^{u'} \lambda_R^{u''} \lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} = \left[\Lambda_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^{u''}} + \Lambda_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} - \Lambda_{\lambda_T \lambda_R} \right]^{-1} f_{\lambda_T^{u''}}^T f_{\lambda_R^{u''}}^R \left[I_{\lambda_T, \lambda_T^{u'} \lambda_T^{u''}} I_{\lambda_R, \lambda_R^{u'} \lambda_R^{u''}} \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{2\sqrt{M_T}} J_{\lambda_T^{u'} \lambda_T^{u''}} I_{\lambda_R, \lambda_R^{u'} \lambda_R^{u''}} \delta_{\lambda_T^0} + \frac{1}{2\sqrt{M_R}} J_{\lambda_R^{u'} \lambda_R^{u''}} I_{\lambda_T, \lambda_T^{u'} \lambda_T^{u''}} \delta_{\lambda_R^0} \right) \right], \quad (9.42)$$

in (9.40) und (9.41) erhält man

$$K_{2, \lambda_T^u \lambda_R^u} = \frac{f_{\lambda_T^u}^T f_{\lambda_R^u}^R + f_{\lambda_T^{u'}}^T f_{\lambda_R^u}^R}{M_T M_R} \frac{f_{\lambda_T^{u''}}^T f_{\lambda_R^{u''}}^R}{\Lambda_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} + \Lambda_{\lambda_T^{u'''} \lambda_R^{u'''}} - \Lambda_{\lambda_T \lambda_R}} U_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^u} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} U_{\lambda_T^{u'''} \lambda_R^{u'''}}$$

$$\begin{aligned} & \times \delta_{\lambda_T^{u'} + \lambda_T', \lambda_T^u} \delta_{\lambda_R^{u'} + \lambda_R', \lambda_R^u} \left[\delta_{\lambda_T^{u''} + \lambda_T''', \lambda_T'} \delta_{\lambda_R^{u''} + \lambda_R''', \lambda_R'} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (\delta_{\lambda_T^{u''}, -\lambda_T'''} \delta_{\lambda_R^{u''} + \lambda_R''', \lambda_R'} \delta_{\lambda_T' 0} + \delta_{\lambda_R^{u''}, -\lambda_R'''} \delta_{\lambda_T^{u''} + \lambda_T''', \lambda_T'} \delta_{\lambda_R' 0}) \right] \end{aligned} \quad (9.43)$$

und

$$\begin{aligned} K_{3, \lambda_T^u \lambda_R^u} &= -\frac{1}{2M_T M_R} U_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'}} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} U_{\lambda_T^{u'''} \lambda_R^{u'''}} \frac{f_{\lambda_T^{u'''} }^T f_{\lambda_R^{u'''} }^R}{\Lambda_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} + \Lambda_{\lambda_T^{u'''} \lambda_R^{u'''}} - \Lambda_{\lambda_T' \lambda_R'}} \\ & \times \left[\delta_{\lambda_T^{u''} + \lambda_T''', \lambda_T'} \delta_{\lambda_R^{u''} + \lambda_R''', \lambda_R'} - \frac{1}{2} \left(\delta_{\lambda_T^{u''}, -\lambda_T'''} \right. \right. \\ & \left. \left. \times \delta_{\lambda_R^{u''} + \lambda_R''', \lambda_R'} \delta_{\lambda_T' 0} + \delta_{\lambda_R^{u''}, -\lambda_R'''} \delta_{\lambda_T^{u''} + \lambda_T''', \lambda_T'} \delta_{\lambda_R' 0} \right) \right] \\ & \times [(1 + f_{\lambda_R'}^R) \delta_{\lambda_R^{u'} + \lambda_R', \lambda_R^u} \delta_{\lambda_T' 0} \delta_{\lambda_T^{u'} \lambda_T^u} + (1 + f_{\lambda_T'}^T) \delta_{\lambda_T^{u'} + \lambda_T', \lambda_T^u} \delta_{\lambda_R' 0} \delta_{\lambda_R^{u'} \lambda_R^u}]. \end{aligned} \quad (9.44)$$

Auch für $K_{2, \lambda_T^u \lambda_R^u}$ und $K_{3, \lambda_T^u \lambda_R^u}$ lässt sich – analog zur Saite – leicht zeigen, dass nur solche Terme $U_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'}} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} U_{\lambda_T^{u'''} \lambda_R^{u'''}}$ einen nichtverschwindenden Beitrag leisten, die die Bedingung (9.39) erfüllen. Dazu betrachtet man einfach sämtliche auftretenden Produkte von Kronecker-Symbolen. So tritt beispielsweise beim Term $K_{3, \lambda_T^u \lambda_R^u}$ ein Beitrag proportional zu

$$\delta_{\lambda_T^{u''} + \lambda_T''', \lambda_T'} \delta_{\lambda_R^{u''} + \lambda_R''', \lambda_R'} \delta_{\lambda_R^{u'} + \lambda_R', \lambda_R^u} \delta_{\lambda_T' 0} \delta_{\lambda_T^{u'} \lambda_T^u}$$

auf. Für Beiträge ungleich Null folgt daraus

$$\lambda_T^{u''} = -\lambda_T^{u'''}, \lambda_R^{u''} + \lambda_R^{u'''} = \lambda_R = \lambda_R^u - \lambda_R^{u'}, \lambda_T^{u'} = \lambda_T^u. \quad (9.45)$$

Damit ergibt sich sofort

$$\lambda_T^{u'} + \lambda_T^{u''} + \lambda_T^{u'''} = \lambda_T^u, \quad (9.46)$$

$$\lambda_R^{u'} + \lambda_R^{u''} + \lambda_R^{u'''} = \lambda_R^u, \quad (9.47)$$

also gerade die Relation (9.39). Entsprechend zeigt man dies für die anderen Produkte von Kronecker-Symbolen.

9.5 Instabile Moden

Im vorhergehenden Abschnitt wurden die Beiträge zur Ordnungsgleichung (9.35) für beliebige instabile Moden $(\lambda_T^u, \lambda_R^u)$ berechnet. Diese sollen nun spezifiziert werden.

9.5.1 Instabilitätspunkt

Wir wollen nun die Frage untersuchen, welche Moden instabil werden. Dies hängt davon ab, welche Entwicklungskoeffizienten vorliegen. Die maximalen Eigenwerte sind gemäß (6.45) durch

$$\Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u} = -\alpha + f_{\lambda_T^u}^T f_{\lambda_R^u}^R \quad (9.48)$$

gegeben. Wir fordern, dass sämtliche instabile Moden *gleichzeitig* instabil werden. Diese Forderung berücksichtigt, dass die Ordnungsparametergleichungen nur in der unmittelbaren Umgebung des Instabilitätspunktes gültig sind. Würden die zu den instabilen Moden gehörigen Eigenwerte nennenswert voneinander abweichen, so wäre für den Fall, dass sich alle Moden im instabilen Bereich befinden, der maximale Eigenwert schon wieder deutlich von Null verschieden, d. h. weit jenseits des Instabilitätspunktes. Die Ordnungsparametergleichungen würden also keine angemessene Näherung mehr darstellen. Den speziellen Fall, dass die Eigenwerte zwar differieren, aber nur unwesentlich, sodass die Ordnungsparametergleichungen ihre Gültigkeit behalten, wollen wir hier vernachlässigen. Wir betrachten also den Fall

$$\Lambda_{\lambda_T^u \lambda_R^u} = \Lambda_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'}}, \quad \forall \lambda_T^u, \lambda_R^u, \lambda_T^{u'}, \lambda_R^{u'}. \quad (9.49)$$

Damit folgt dann auch

$$f_{\lambda_T^u}^T = f_{\lambda_T^{u'}}^T, \quad f_{\lambda_R^u}^R = f_{\lambda_R^{u'}}^R, \quad \forall \lambda_T^u, \lambda_R^u, \lambda_T^{u'}, \lambda_R^{u'}. \quad (9.50)$$

Es kann allerdings sehr wohl $f_{\lambda_T^u}^T \neq f_{\lambda_R^u}^R$ gelten.

9.5.2 Kooperationsfunktionen

Wir gehen zunächst davon aus, dass die Kooperationskoeffizienten entkoppeln, sodass also z. B. gilt

$$c_T(t - t') = c_{T_1}(t_1 - t'_1) c_{T_2}(t_2 - t'_2). \quad (9.51)$$

Die einzelnen Kooperationsfunktionen lassen sich dann in der Form

$$c_{T_1}(t_1 - t'_1) = \frac{1}{L_1^T} \sum_{\lambda_{T_1}} f_{\lambda_{T_1}}^T \exp \left[i \frac{2\pi}{L_1^T} \lambda_{T_1} (t_1 - t'_1) \right], \quad (9.52)$$

$$c_{T_2}(t_2 - t'_2) = \frac{1}{L_2^T} \sum_{\lambda_{T_2}} f_{\lambda_{T_2}}^T \exp \left[i \frac{2\pi}{L_2^T} \lambda_{T_2} (t_2 - t'_2) \right], \quad (9.53)$$

entwickeln. Für monoton fallende Kooperationsfunktionen erhält man ganz analog wie bei der Saite (8.145) die Relation $f_1^T > f_\lambda^T$ ($\lambda \neq 0, \pm 1$). Damit ist der maximale Entwicklungskoeffizient $f_{\lambda_T}^T = f_{(\lambda_{T_1}, \lambda_{T_2})}^T = f_{\lambda_{T_1}}^T f_{\lambda_{T_2}}^T$ gegeben, falls $\lambda_{T_1} = 0, \lambda_{T_2} = \pm 1$ bzw. $\lambda_{T_1} = \pm 1, \lambda_{T_2} = 0$ sind. Beispiele solcher möglichen Funktionen sind in Abbildung 9.2 dargestellt. Im allgemeinen Fall, wenn die Ko-

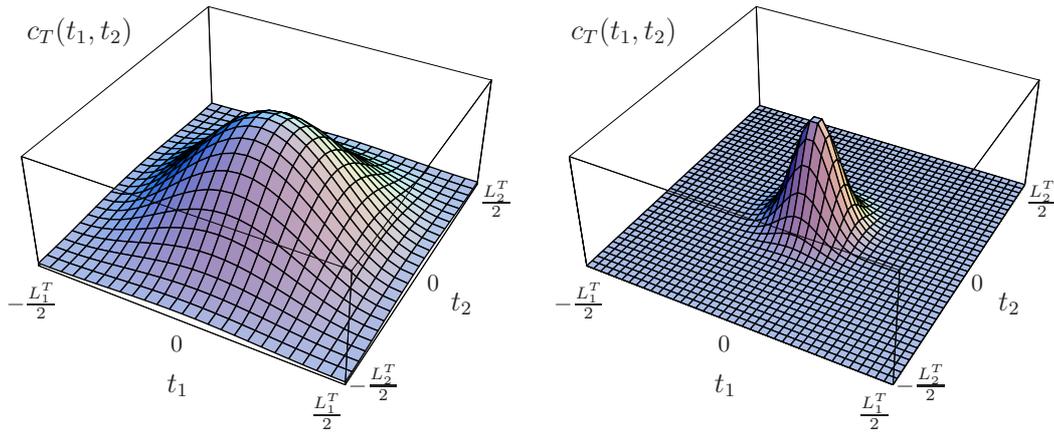


Abbildung 9.2: Exemplarische Darstellung von Kooperationsfunktionen: Links ein Beispiel einer anisotropen Funktion: $c_T(t) \propto (1 + \cos[(2\pi/L_1^T)t_1])(1 + \cos[(2\pi/L_2^T)t_2])$. Rechts eine Gauß-Funktion als Beispiel einer isotropen Funktion: $c_T(t) \propto \exp[-(t_1/L_1^T)^2 - (t_2/L_2^T)^2]$. (Hinweis: Die Funktionen sind in unterschiedlichem Maßstab aufgetragen. Aufgrund der Normierung der Kooperationsfunktionen ist der Peak der Gauß-Funktion etwa um den Faktor 10 größer als das Maximum der links dargestellten Funktion.)

operationsfunktionen nicht entkoppeln, gilt

$$c_T(t - t') = \frac{1}{L_1^T L_2^T} \sum_{\lambda_{T1}, \lambda_{T2}} f_{(\lambda_{T1}, \lambda_{T2})}^T \exp \left[i \frac{2\pi}{L_1^T} \lambda_{T1} (t_1 - t'_1) \right] \exp \left[i \frac{2\pi}{L_2^T} \lambda_{T2} (t_2 - t'_2) \right]. \quad (9.54)$$

Auch dann ergeben sich die instabilen Moden im Fall monoton fallender Kooperationsfunktionen zu

$$\lambda^u = (1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1). \quad (9.55)$$

9.6 Ordnungsparametergleichungen

Aus (9.55) folgt unmittelbar $\lambda^{u'} + \lambda^{u''} \neq \lambda^u$. Somit verschwindet der quadratische Term (9.37):

$$Q_{\lambda_T^u, \lambda_R^u} = 0. \quad (9.56)$$

Um zu einer möglichst übersichtlichen und kompakten Berechnung und Darstellung der Ordnungsparametergleichungen zu gelangen, führen wir zunächst komplementäre Moden $\bar{\lambda}^u$ ein. Sie ergeben sich im Falle der instabilen Moden (9.55) einfach durch Vertauschen der beiden Komponenten λ_1^u und λ_2^u :

$$\bar{\lambda}^u = \begin{cases} (0, \pm 1) & \text{falls } \lambda^u = (\pm 1, 0), \\ (\pm 1, 0) & \text{falls } \lambda^u = (0, \pm 1). \end{cases} \quad (9.57)$$

Dann führt die obige Bedingung (9.39) auf die folgenden neun Möglichkeiten:

$$\begin{aligned}
 (\lambda^{u'}, \lambda^{u''}, \lambda^{u'''}) = & (\lambda^u, \lambda^u, -\lambda^u), (\lambda^u, -\lambda^u, \lambda^u), (-\lambda^u, \lambda^u, \lambda^u), \\
 & (\lambda^u, \bar{\lambda}^u, -\bar{\lambda}^u), (\bar{\lambda}^u, \lambda^u, -\bar{\lambda}^u), (\bar{\lambda}^u, -\bar{\lambda}^u, \lambda^u), \\
 & (\lambda^u, -\bar{\lambda}^u, \bar{\lambda}^u), (-\bar{\lambda}^u, \lambda^u, \bar{\lambda}^u), (-\bar{\lambda}^u, \bar{\lambda}^u, \lambda^u). \quad (9.58)
 \end{aligned}$$

Kombiniert man die neun möglichen Kombinationen bezüglich $(\lambda_T^{u'}, \lambda_T^{u''}, \lambda_T^{u'''})$ mit den neun Kombinationen $(\lambda_R^{u'}, \lambda_R^{u''}, \lambda_R^{u'''})$, so ergeben sich zunächst 81 Möglichkeiten, von denen aber einige identisch sind. Um die Zahl der *verschiedenen* Kombinationen $U_{\lambda_T^{u'} \lambda_R^{u'}} U_{\lambda_T^{u''} \lambda_R^{u''}} U_{\lambda_T^{u'''} \lambda_R^{u'''}}$ zu bestimmen, betrachtet man am einfachsten die folgenden Fälle getrennt:

1. Es tritt überhaupt keine komplementäre Mode auf (kein $\pm \bar{\lambda}_T^u, \pm \bar{\lambda}_R^u$).
2. Es treten zwei komplementäre Moden bezüglich der T -Indizes auf, keine dagegen bezüglich der R -Indizes.
3. Den umgekehrten Fall: $0 \times \pm \bar{\lambda}_T^u, 2 \times \pm \bar{\lambda}_R^u$.
4. Es treten bezüglich der T - und R -Indizes jeweils zwei komplementäre Moden auf.

Es bereitet dann keine großen Schwierigkeiten zu zeigen, dass man insgesamt 14 mögliche kubische Terme erhält:

1. $U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^2 U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u}, U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u},$
2. $U_{\bar{\lambda}_T^u \lambda_R^u} U_{-\bar{\lambda}_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}, U_{\bar{\lambda}_T^u - \lambda_R^u} U_{-\bar{\lambda}_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}, U_{\bar{\lambda}_T^u \lambda_R^u} U_{-\bar{\lambda}_T^u - \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u},$
3. $U_{\lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u} U_{\lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u} U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u}, U_{\lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u}, U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u} U_{-\lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u},$
4. $U_{\bar{\lambda}_T^u \lambda_R^u} U_{-\bar{\lambda}_T^u \bar{\lambda}_R^u} U_{\lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u}, U_{\bar{\lambda}_T^u \lambda_R^u} U_{-\bar{\lambda}_T^u - \bar{\lambda}_R^u} U_{\lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u}, U_{\bar{\lambda}_T^u \bar{\lambda}_R^u} U_{-\bar{\lambda}_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u},$
 $U_{\bar{\lambda}_T^u \bar{\lambda}_R^u} U_{-\bar{\lambda}_T^u - \bar{\lambda}_R^u} U_{\lambda_T^u \lambda_R^u}, U_{\bar{\lambda}_T^u - \bar{\lambda}_R^u} U_{-\bar{\lambda}_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u}.$

Die Ordnungsparametergleichungen ergeben sich nach Berechnung der kubischen Terme aus Abschnitt 9.4 zu

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_{\lambda_T^u \lambda_R^u} = & c_1 (U_{\lambda_T^u \lambda_R^u})^2 U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u} + c_2 U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u} \\
 & + c_3 U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\bar{\lambda}_T^u \lambda_R^u} U_{-\bar{\lambda}_T^u - \lambda_R^u} + c_3 U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\bar{\lambda}_T^u - \lambda_R^u} U_{-\bar{\lambda}_T^u \lambda_R^u} \\
 & + c_4 U_{\bar{\lambda}_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u - \lambda_R^u} U_{-\bar{\lambda}_T^u \lambda_R^u} + c_5 U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u} U_{-\lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u} \\
 & + c_5 U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{-\lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u} U_{\lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u} + c_6 U_{-\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u} U_{\lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u} \\
 & + c_7 U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\bar{\lambda}_T^u \bar{\lambda}_R^u} U_{-\bar{\lambda}_T^u - \bar{\lambda}_R^u} + c_7 U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} U_{\bar{\lambda}_T^u - \bar{\lambda}_R^u} U_{-\bar{\lambda}_T^u \bar{\lambda}_R^u} \\
 & + c_8 U_{\bar{\lambda}_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u} U_{-\bar{\lambda}_T^u - \bar{\lambda}_R^u} + c_8 U_{-\bar{\lambda}_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u} U_{\bar{\lambda}_T^u - \bar{\lambda}_R^u} \\
 & + c_8 U_{\bar{\lambda}_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u} U_{-\bar{\lambda}_T^u \bar{\lambda}_R^u} + c_8 U_{-\bar{\lambda}_T^u \lambda_R^u} U_{\lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u} U_{\bar{\lambda}_T^u \bar{\lambda}_R^u}. \quad (9.59)
 \end{aligned}$$

Mit $\tilde{\gamma} = \gamma/M_T M_R$ lauten die Koeffizienten c_1 bis c_8 :

$$\begin{aligned}
c_1 &= -2\tilde{\gamma} + a, \\
c_2 &= -4\tilde{\gamma} - a_R - a_T + b, \\
c_3 &= -3\tilde{\gamma} - A_T + B_T, \\
c_4 &= -3\tilde{\gamma} - a_R - 2A_T + H, \\
c_5 &= -3\tilde{\gamma} - A_R + B_R, \\
c_6 &= -3\tilde{\gamma} - a_T - 2A_R + I, \\
c_7 &= -2\tilde{\gamma} + J, \\
c_8 &= -2\tilde{\gamma} - A_R - A_T + K.
\end{aligned} \tag{9.60}$$

Der jeweils erste Term $\propto \tilde{\gamma}$ in (9.60) beschreibt den Einfluss der Ordnungsparameter selbst. Die anderen Abkürzungen hingegen stehen für die Beiträge der zentralen Mannigfaltigkeit und sind folgendermaßen gegeben:

$$a = \tilde{\gamma} \frac{\gamma^{2\lambda_T^u, 2\lambda_R^u} + \gamma}{2\gamma - \gamma^{2\lambda_T^u, 2\lambda_R^u} - \alpha}, \tag{9.61}$$

$$b = \tilde{\gamma} \left(\frac{\gamma^{2\lambda_T^u, 0} + \gamma}{2\gamma - \frac{1}{2}(\gamma^{2\lambda_T^u, 0} - 1) - \alpha} + \frac{\gamma^{0, 2\lambda_R^u} + \gamma}{2\gamma - \frac{1}{2}(\gamma^{0, 2\lambda_R^u} - 1) - \alpha} \right), \tag{9.62}$$

$$B_T = \tilde{\gamma} \frac{\gamma + \gamma^{\lambda_T^u + \bar{\lambda}_T^u, 0}}{2\gamma - \frac{1}{2}(\gamma^{\lambda_T^u + \bar{\lambda}_T^u, 0} - 1) - \alpha} + 2\tilde{\gamma} \frac{\gamma + \gamma^{\lambda_T^u + \bar{\lambda}_T^u, 2\lambda_R^u}}{2\gamma - \gamma^{\lambda_T^u + \bar{\lambda}_T^u, 2\lambda_R^u} - \alpha}, \tag{9.63}$$

$$B_R = \tilde{\gamma} \frac{\gamma + \gamma^{0, \lambda_R^u + \bar{\lambda}_R^u}}{2\gamma - \frac{1}{2}(\gamma^{0, \lambda_R^u + \bar{\lambda}_R^u} - 1) - \alpha} + 2\tilde{\gamma} \frac{\gamma + \gamma^{2\lambda_T^u, \lambda_R^u + \bar{\lambda}_R^u}}{2\gamma - \gamma^{2\lambda_T^u, \lambda_R^u + \bar{\lambda}_R^u} - \alpha}, \tag{9.64}$$

$$H = 2\tilde{\gamma} \frac{\gamma + \gamma^{\lambda_T^u + \bar{\lambda}_T^u, 0}}{2\gamma - \frac{1}{2}(\gamma^{\lambda_T^u + \bar{\lambda}_T^u, 0} - 1) - \alpha} + \tilde{\gamma} \frac{\gamma + \gamma^{0, 2\lambda_R^u}}{2\gamma - \frac{1}{2}(\gamma^{0, 2\lambda_R^u} - 1) - \alpha}, \tag{9.65}$$

$$I = 2\tilde{\gamma} \frac{\gamma + \gamma^{0, \lambda_R^u + \bar{\lambda}_R^u}}{2\gamma - \frac{1}{2}(\gamma^{0, \lambda_R^u + \bar{\lambda}_R^u} - 1) - \alpha} + \tilde{\gamma} \frac{\gamma + \gamma^{2\lambda_T^u, 0}}{2\gamma - \frac{1}{2}(\gamma^{2\lambda_T^u, 0} - 1) - \alpha}, \tag{9.66}$$

$$J = 4\tilde{\gamma} \frac{\gamma + \gamma^{\lambda_T^u + \bar{\lambda}_T^u, \lambda_R^u + \bar{\lambda}_R^u}}{2\gamma - \gamma^{\lambda_T^u + \bar{\lambda}_T^u, \lambda_R^u + \bar{\lambda}_R^u} - \alpha}, \tag{9.67}$$

$$\begin{aligned}
K &= \tilde{\gamma} \left(\frac{\gamma + \gamma^{\lambda_T^u + \bar{\lambda}_T^u, 0}}{2\gamma - \frac{1}{2}(\gamma^{\lambda_T^u + \bar{\lambda}_T^u, 0} - 1) - \alpha} + \frac{\gamma + \gamma^{0, \lambda_R^u + \bar{\lambda}_R^u}}{2\gamma - \frac{1}{2}(\gamma^{0, \lambda_R^u + \bar{\lambda}_R^u} - 1) - \alpha} \right) \\
&\quad + 2\tilde{\gamma} \frac{\gamma + \gamma^{\lambda_T^u + \bar{\lambda}_T^u, \lambda_R^u + \bar{\lambda}_R^u}}{2\gamma - \gamma^{\lambda_T^u + \bar{\lambda}_T^u, \lambda_R^u + \bar{\lambda}_R^u} - \alpha},
\end{aligned} \tag{9.68}$$

$$a_R = \frac{\tilde{\gamma}}{2} \frac{1 + \gamma^{0, 2\lambda_R^u}}{2\gamma - \frac{1}{2}(\gamma^{0, 2\lambda_R^u} - 1) - \alpha}, \tag{9.69}$$

$$a_T = \frac{\tilde{\gamma}}{2} \frac{1 + \gamma^{2\lambda_T^u, 0}}{2\gamma - \frac{1}{2}(\gamma^{2\lambda_T^u, 0} - 1) - \alpha}, \tag{9.70}$$

$$A_T = \frac{\tilde{\gamma}}{2} \frac{1 + \gamma^{\lambda_T^u + \bar{\lambda}_T^u, 0}}{2\gamma - \frac{1}{2}(\gamma^{\lambda_T^u + \bar{\lambda}_T^u, 0} - 1) - \alpha}, \quad (9.71)$$

$$A_R = \frac{\tilde{\gamma}}{2} \frac{1 + \gamma^{0, \lambda_R^u + \bar{\lambda}_R^u}}{2\gamma - \frac{1}{2}(\gamma^{0, \lambda_R^u + \bar{\lambda}_R^u} - 1) - \alpha}. \quad (9.72)$$

9.7 Transformation auf reelle Variablen

Die komplexen Ordnungsparametergleichungen (9.59) sollen nun auf reelle Größen umgeschrieben werden. Dazu führen wir reelle Variablen gemäß

$$u_{\lambda_T^u \lambda_R^u} = U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} + U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u}, \quad (9.73)$$

$$v_{\lambda_T^u \lambda_R^u} = i(U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} - U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u}), \quad (9.74)$$

ein. Die inversen Transformationsformeln lauten:

$$U_{\lambda_T^u \lambda_R^u} = (u_{\lambda_T^u \lambda_R^u} - iv_{\lambda_T^u \lambda_R^u})/2, \quad (9.75)$$

$$U_{-\lambda_T^u - \lambda_R^u} = (u_{\lambda_T^u \lambda_R^u} + iv_{\lambda_T^u \lambda_R^u})/2. \quad (9.76)$$

Wir führen im Folgenden die Funktion ein:

$$h_{\lambda_T^u \lambda_R^u, \lambda_T^u \lambda_R^u, \lambda_T^u \lambda_R^u, \lambda_T^u \lambda_R^u}(u, v) = u_{\lambda_T^u \lambda_R^u} u_{\lambda_T^u \lambda_R^u} u_{\lambda_T^u \lambda_R^u} u_{\lambda_T^u \lambda_R^u} - u_{\lambda_T^u \lambda_R^u} v_{\lambda_T^u \lambda_R^u} v_{\lambda_T^u \lambda_R^u} v_{\lambda_T^u \lambda_R^u} v_{\lambda_T^u \lambda_R^u} + v_{\lambda_T^u \lambda_R^u} u_{\lambda_T^u \lambda_R^u} u_{\lambda_T^u \lambda_R^u} v_{\lambda_T^u \lambda_R^u} v_{\lambda_T^u \lambda_R^u} + v_{\lambda_T^u \lambda_R^u} v_{\lambda_T^u \lambda_R^u} u_{\lambda_T^u \lambda_R^u} u_{\lambda_T^u \lambda_R^u}. \quad (9.77)$$

Die reellen Ordnungsparametergleichungen ergeben sich dann nach längerer Rechnung zu

$$\begin{aligned} \dot{u}_{\lambda_T^u \lambda_R^u} &= u_{\lambda_T^u \lambda_R^u} [c_1(u_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^2 + v_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^2) + c_2(u_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}^2 + v_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}^2) \\ &\quad + c_3(u_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^2 + v_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^2) + c_3(u_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}^2 + v_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}^2) + c_5(u_{\lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u}^2 + v_{\lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u}^2) \\ &\quad + c_5(u_{\lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u}^2 + v_{\lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u}^2) + c_7(u_{\lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u}^2 + v_{\lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u}^2) + c_7(u_{\lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u}^2 + v_{\lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u}^2)] \\ &\quad + c_6 h_{\lambda_T^u - \lambda_R^u, \lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u, \lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u}(u, v) + c_8 h_{\lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u, \lambda_T^u \lambda_R^u, \lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u}(u, v) \\ &\quad + c_8 h_{\lambda_T^u - \lambda_R^u, \lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u, \lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u}(u, v) + c_8 h_{\lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u, \lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u, \lambda_T^u \lambda_R^u}(u, v) \\ &\quad + c_8 h_{\lambda_T^u - \lambda_R^u, \lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u, \lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u}(u, v), \end{aligned} \quad (9.78)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_{\lambda_T^u \lambda_R^u} &= v_{\lambda_T^u \lambda_R^u} [c_1(u_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^2 + v_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^2) + c_2(u_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}^2 + v_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}^2) \\ &\quad + c_3(u_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^2 + v_{\lambda_T^u \lambda_R^u}^2) + c_3(u_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}^2 + v_{\lambda_T^u - \lambda_R^u}^2) + c_5(u_{\lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u}^2 + v_{\lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u}^2) \\ &\quad + c_5(u_{\lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u}^2 + v_{\lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u}^2) + c_7(u_{\lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u}^2 + v_{\lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u}^2) + c_7(u_{\lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u}^2 + v_{\lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u}^2)] \\ &\quad + c_6 h_{\lambda_T^u - \lambda_R^u, \lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u, \lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u}(v, u) + c_8 h_{\lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u, \lambda_T^u \lambda_R^u, \lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u}(v, u) \\ &\quad + c_8 h_{\lambda_T^u - \lambda_R^u, \lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u, \lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u}(v, u) + c_8 h_{\lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u, \lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u, \lambda_T^u \lambda_R^u}(v, u) \\ &\quad + c_8 h_{\lambda_T^u - \lambda_R^u, \lambda_T^u - \bar{\lambda}_R^u, \lambda_T^u \bar{\lambda}_R^u}(v, u). \end{aligned} \quad (9.79)$$

9.8 Retinotope Abbildungen

Wir wollen im Folgenden verschiedene mögliche Fälle abhängig davon diskutieren, wieviele nichtverschwindende Moden überleben. Insbesondere untersuchen wir die Frage, ob und wann retinotope Ordnungen möglich sind.

9.8.1 Eine nichtverschwindende Mode

Wir gehen davon aus, dass nur die Amplituden u_j, v_j einer einzelnen Mode verbleiben. Wir betrachten hier speziell den Fall $j = 2$, die anderen Fälle liefern völlig analoge Resultate. Wir gehen also davon aus, dass der instabile Anteil $U(t, r)$ die Zerlegung

$$U(t, r) = u_2 \cos \left[2\pi \left(\frac{t_1}{L_1^T} - \frac{r_1}{L_1^R} \right) \right] + v_2 \sin \left[2\pi \left(\frac{t_1}{L_1^T} - \frac{r_1}{L_1^R} \right) \right] \quad (9.80)$$

besitzt, die äquivalent ist zu

$$U(t, r) = U_{10,-10} \exp \left[i2\pi \left(\frac{t_1}{L_1^T} - \frac{r_1}{L_1^R} \right) \right] + U_{-10,10} \exp \left[-i2\pi \left(\frac{t_1}{L_1^T} - \frac{r_1}{L_1^R} \right) \right]. \quad (9.81)$$

Die komplexen Ordnungsparametergleichungen (9.59) reduzieren sich dann auf

$$\dot{U}_{10,-10} = \Lambda U_{10,-10} + c_1 U_{10,-10}^2 U_{-10,10}, \quad (9.82)$$

$$\dot{U}_{-10,10} = \Lambda U_{-10,10} + c_1 U_{-10,10}^2 U_{10,-10}, \quad (9.83)$$

und die reellen Gleichungen (9.78), (9.79) entsprechend zu

$$\dot{u}_2 = \Lambda u_2 + \frac{c_1}{4} u_2 (u_2^2 + v_2^2), \quad (9.84)$$

$$\dot{v}_2 = \Lambda v_2 + \frac{c_1}{4} v_2 (u_2^2 + v_2^2). \quad (9.85)$$

Damit erhält man wegen

$$\frac{\dot{u}_2}{\dot{v}_2} = \frac{u_2}{v_2} \quad (9.86)$$

konstante Phasen. Mit $\xi = \sqrt{u_2^2 + v_2^2}$ ergibt sich

$$\dot{\xi} = \Lambda \xi + \frac{c_1}{4} \xi^3. \quad (9.87)$$

Im stationären Fall erhält man so

$$\xi = 0 \vee \xi = \sqrt{-\frac{4\Lambda}{c_1}}. \quad (9.88)$$

Für uns ist hier nur der Fall $\xi \neq 0$ von Interesse. Er entspricht aber nur einer Retinotopie zwischen r_1 und t_1 , also nur einer Dimension und nicht in der gesamten Ebene.

9.8.2 Zwei nichtverschwindende Moden

Wir untersuchen nun, ob zwei Moden dazu imstande sind, eine retinotopie Ordnung in der Ebene zu generieren. Dazu fordern wir, dass beispielsweise neben der zu u_2 und v_2 gehörenden Mode auch noch die zu u_8 und v_8 übrig bleibt:

$$U(t, r) = u_2 \cos \left[2\pi \left(\frac{t_1}{L_1^T} - \frac{r_1}{L_1^R} \right) \right] + v_2 \sin \left[2\pi \left(\frac{t_1}{L_1^T} - \frac{r_1}{L_1^R} \right) \right] \\ + u_8 \cos \left[2\pi \left(\frac{t_2}{L_2^T} - \frac{r_2}{L_2^R} \right) \right] + v_8 \sin \left[2\pi \left(\frac{t_2}{L_2^T} - \frac{r_2}{L_2^R} \right) \right]. \quad (9.89)$$

Die entsprechende Zerlegung in komplexe Amplituden lautet

$$U(t, r) = U_{10,-10} \exp \left[i2\pi \left(\frac{t_1}{L_1^T} - \frac{r_1}{L_1^R} \right) \right] + U_{-10,10} \exp \left[-i2\pi \left(\frac{t_1}{L_1^T} - \frac{r_1}{L_1^R} \right) \right] \\ + U_{01,0-1} \exp \left[i2\pi \left(\frac{t_2}{L_2^T} - \frac{r_2}{L_2^R} \right) \right] + U_{0-1,01} \exp \left[-i2\pi \left(\frac{t_2}{L_2^T} - \frac{r_2}{L_2^R} \right) \right]. \quad (9.90)$$

Die komplexen Ordnungsgleichungen (9.59) haben dann die Gestalt

$$\dot{U}_{10,-10} = \Lambda U_{10,-10} + c_1 U_{10,-10}^2 U_{-10,10} + c_7 U_{10,-10} U_{01,0-1} U_{0-1,01} \\ + c_7 U_{10,-10} U_{01,01} U_{0-1,0-1}, \quad (9.91)$$

$$\dot{U}_{-10,10} = \Lambda U_{-10,10} + c_1 U_{-10,10}^2 U_{10,-10} + c_7 U_{-10,10} U_{0-1,01} U_{01,0-1} \\ + c_7 U_{-10,10} U_{0-1,0-1} U_{01,01}, \quad (9.92)$$

$$\dot{U}_{01,0-1} = \Lambda U_{01,0-1} + c_1 U_{01,0-1}^2 U_{0-1,01} + c_7 U_{01,0-1} U_{10,-10} U_{-10,10} \\ + c_7 U_{01,0-1} U_{10,10} U_{-10,-10}, \quad (9.93)$$

$$\dot{U}_{0-1,01} = \Lambda U_{0-1,01} + c_1 U_{0-1,01}^2 U_{01,0-1} + c_7 U_{0-1,01} U_{-10,10} U_{10,-10} \\ + c_7 U_{0-1,01} U_{-10,-10} U_{10,10}, \quad (9.94)$$

und die reellen Ordnungsgleichungen (9.78), (9.79) schreiben sich in der Form

$$\dot{u}_2 = \left[\Lambda + \frac{c_1}{4}(u_2^2 + v_2^2) + \frac{c_7}{4}(u_8^2 + v_8^2) \right] u_2, \quad (9.95)$$

$$\dot{v}_2 = \left[\Lambda + \frac{c_1}{4}(u_2^2 + v_2^2) + \frac{c_7}{4}(u_8^2 + v_8^2) \right] v_2, \quad (9.96)$$

$$\dot{u}_8 = \left[\Lambda + \frac{c_1}{4}(u_8^2 + v_8^2) + \frac{c_7}{4}(u_2^2 + v_2^2) \right] u_8, \quad (9.97)$$

$$\dot{v}_8 = \left[\Lambda + \frac{c_1}{4}(u_8^2 + v_8^2) + \frac{c_7}{4}(u_2^2 + v_2^2) \right] v_8. \quad (9.98)$$

Wieder erhält man konstante Phasen:

$$\frac{\dot{u}_2}{v_2} = \frac{u_2}{v_2}, \quad \frac{\dot{u}_8}{v_8} = \frac{u_8}{v_8}. \quad (9.99)$$

Mit den Amplituden

$$\xi = \sqrt{u_2^2 + v_2^2}, \quad \eta = \sqrt{u_8^2 + v_8^2}, \quad (9.100)$$

ergeben sich die Gleichungen

$$\dot{\xi} = \left[\Lambda + \frac{c_1}{4}\xi^2 + \frac{c_7}{4}\eta^2 \right] \xi, \quad (9.101)$$

$$\dot{\eta} = \left[\Lambda + \frac{c_1}{4}\eta^2 + \frac{c_7}{4}\xi^2 \right] \eta. \quad (9.102)$$

Wir fragen nach den Bedingungen, die für die Koexistenz beider retinotoper Moden erfüllt sein müssen. Gilt $\xi, \eta \neq 0$, folgt aus $\dot{\xi} = \dot{\eta} = 0$ die Beziehung

$$(\xi^2 - \eta^2)(c_1 - c_7) = 0. \quad (9.103)$$

Da die Wahl der Koeffizienten c_1, c_7 möglichst wenig Einschränkungen unterliegen soll, im allgemeinen also $c_1 \neq c_7$ gilt, folgt daraus $\xi = \eta$. Dies in (9.101) oder (9.102) eingesetzt führt im stationären Fall auf

$$\xi = \eta = \sqrt{-\frac{4\Lambda}{c_1 + c_7}}. \quad (9.104)$$

Da ξ, η reell sein müssen, und $\Lambda > 0$ gilt, folgt als Bedingung an die Koeffizienten

$$c_1 + c_7 < 0. \quad (9.105)$$

Weiterhin ist zu fordern, dass der Zustand der Koexistenz stabil ist. Dazu betrachten wir das Potential

$$V(\xi, \eta) = -\frac{\Lambda}{2}(\xi^2 + \eta^2) - \frac{c_1}{16}(\xi^4 + \eta^4) - \frac{c_7}{8}\xi^2\eta^2, \quad (9.106)$$

das gemäß

$$\dot{\xi} = -\frac{\partial V(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \quad \dot{\eta} = -\frac{\partial V(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad (9.107)$$

auf die Bewegungsgleichungen (9.101), (9.102) führt. Wir untersuchen die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \end{vmatrix} \quad (9.108)$$

sowie die zweite Ableitung $\partial^2 V / \partial \xi^2$, jeweils am Punkt (9.104). Wir erhalten

$$D \left(\sqrt{\frac{-4\Lambda}{c_1 + c_7}}, \sqrt{\frac{-4\Lambda}{c_1 + c_7}} \right) = 4\Lambda^2 \frac{c_1^2 - c_7^2}{(c_1 + c_7)^2}, \quad (9.109)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} \left(\sqrt{\frac{-4\Lambda}{c_1 + c_7}}, \sqrt{\frac{-4\Lambda}{c_1 + c_7}} \right) = \frac{2\Lambda c_1}{c_1 + c_7}. \quad (9.110)$$

Soll der Zustand stabil sein, also einem Minimum des Potentials entsprechen, so muss sowohl D als auch $\partial^2 V / \partial \xi^2$ positiv sein. Dies führt auf die Forderungen

$$c_1^2 - c_7^2 > 0, \quad (9.111)$$

$$c_1 < 0. \quad (9.112)$$

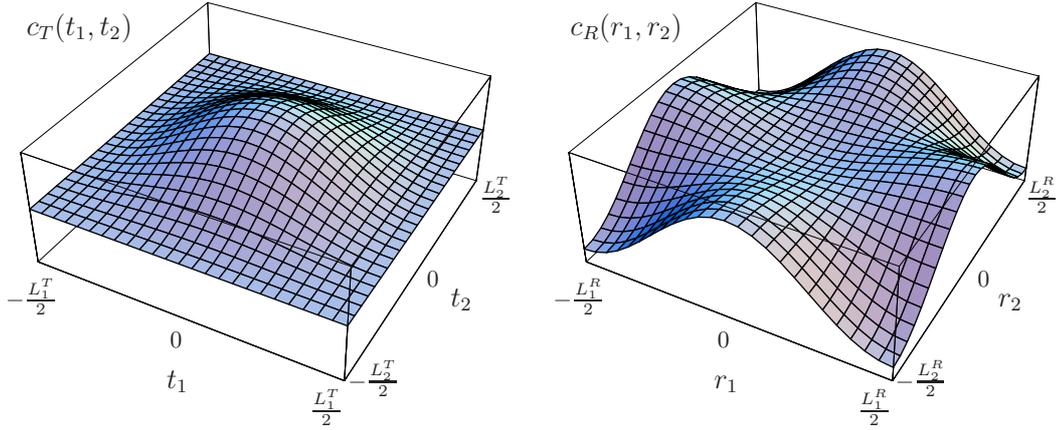


Abbildung 9.3: Kooperationsfunktionen für Retina und Tectum gemäß den untersuchten Spezialfällen (9.121), (9.122). Die Beschränkung auf monoton fallende Kooperationsfunktionen ist hier für die Retina aufgegeben.

Dabei wurde im letzten Fall berücksichtigt, dass der Nenner von (9.110) gemäß (9.105) negativ sein muss. Wegen $c_1^2 - c_7^2 = (c_1 + c_7)(c_1 - c_7)$ folgt dann auch

$$c_1 - c_7 < 0. \quad (9.113)$$

Die Beziehung (9.112) folgt unmittelbar aus (9.105) und (9.113). Es bleiben also die Forderungen

$$c_1 < c_7, \quad c_1 < -c_7. \quad (9.114)$$

Gemäß (9.60), (9.61) und (9.67) lauten die Koeffizienten

$$c_1 = -2\gamma + \gamma \frac{\gamma + \gamma^{20,20}}{\gamma - \gamma^{20,20}}, \quad c_7 = -2\gamma + 4\gamma \frac{\gamma + \gamma^{11,11}}{\gamma - \gamma^{11,11}}. \quad (9.115)$$

In (9.114) eingesetzt führt dies auf die Ungleichungen

$$\gamma(\gamma + \gamma^{20,20}) < \gamma^{11,11}(9\gamma^{20,20} - 7\gamma), \quad (9.116)$$

$$\gamma(3\gamma - 5\gamma^{20,20}) > \gamma^{11,11}(3\gamma^{20,20} - 5\gamma). \quad (9.117)$$

Wir betrachten einige Spezialfälle:

$$\gamma^{20,20} = 0 \quad \longrightarrow \quad \gamma < -7\gamma^{11,11}, \quad \gamma > -5\gamma^{11,11}/3, \quad (9.118)$$

$$\gamma^{11,11} = 0 \quad \longrightarrow \quad \gamma < -\gamma^{20,20}, \quad \gamma > 5\gamma^{20,20}/3, \quad (9.119)$$

$$\gamma^{20,20} = \gamma^{11,11} = 0 \quad \longrightarrow \quad \gamma^2 < 0, \quad \gamma^2 > 0. \quad (9.120)$$

Der letzte Fall führt auf einen Widerspruch, die beiden ersten sind dagegen prinzipiell möglich. Als Beispiel betrachten wir den ersten Fall mit $\gamma^{20,20} = 0$. Die

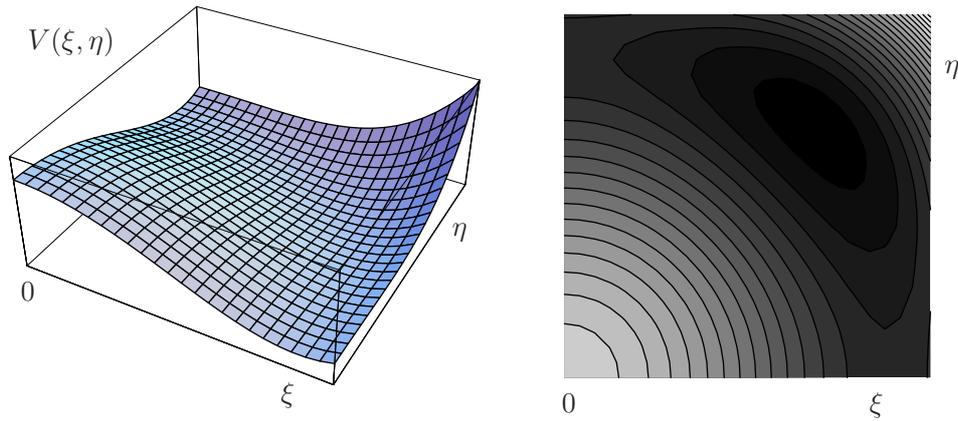


Abbildung 9.4: Das Potential (9.106) im Fall zweier koexistenter Moden. Es existiert ein Maximum bei $\xi = \eta = 0$ sowie ein Minimum bei $\xi = \eta$ gemäß (9.104). Rechts sind die Niveaulinien des Potentials über der ξ, η -Ebene aufgetragen, was die Extrema besonders gut erkennen lässt. Helle Grautöne entsprechen großen Werten des Potentials, dunklere niedrigeren Werten.

Kooperationsfunktionen wählen wir zu

$$c_T(t_1, t_2) = 1 + 0.2 \cos\left(\frac{2\pi t_1}{L_1^T}\right) + 0.2 \cos\left(\frac{2\pi t_2}{L_2^T}\right) + 0.1 \cos\left[2\pi\left(\frac{t_1}{L_1^T} + \frac{t_2}{L_2^T}\right)\right] + 0.1 \cos\left[2\pi\left(\frac{t_1}{L_1^T} - \frac{t_2}{L_2^T}\right)\right], \quad (9.121)$$

$$c_R(r_1, r_2) = 1 + 0.2 \cos\left(\frac{2\pi r_1}{L_1^R}\right) + 0.2 \cos\left(\frac{2\pi r_2}{L_2^R}\right) - 0.1 \cos\left[2\pi\left(\frac{r_1}{L_1^R} + \frac{r_2}{L_2^R}\right)\right] - 0.1 \cos\left[2\pi\left(\frac{r_1}{L_1^R} - \frac{r_2}{L_2^R}\right)\right]. \quad (9.122)$$

Es ist also $f_{\pm 10}^T = f_{0\pm 1}^T = f_{\pm 10}^R = f_{0\pm 1}^R = 0.1$. Die weiteren Entwicklungskoeffizienten unterscheiden sich hingegen: $f_{\pm 1, \pm 1}^T = 0,05$, $f_{\pm 1, \pm 1}^R = -0.1$. Dann gilt $\gamma = 0.01$ und $\gamma^{11,11} = -0.005$, wodurch obige Forderungen (9.118) erfüllt sind. Dies führt dann allerdings dazu, dass die Kooperationsfunktion der Retina nicht monoton fällt (siehe Abbildung 9.3). Der zugehörige Potentialverlauf ist in Abbildung 9.4 dargestellt.

9.8.3 Zentrale Mannigfaltigkeit

Wir betrachten nun den Beitrag der zentralen Mannigfaltigkeit $S(U)$ zu dem betrachteten Spezialfall (9.118). Das Verbindungsgewicht lässt sich mit (6.33) und (7.4) als

$$w(t, r) = 1 + U(t, r) + S(U(t, r)) \quad (9.123)$$

angeben. Den stabilen Anteil haben wir in zweiter Ordnung approximiert. Mit (7.47), (7.48) und (9.42) ergibt sich

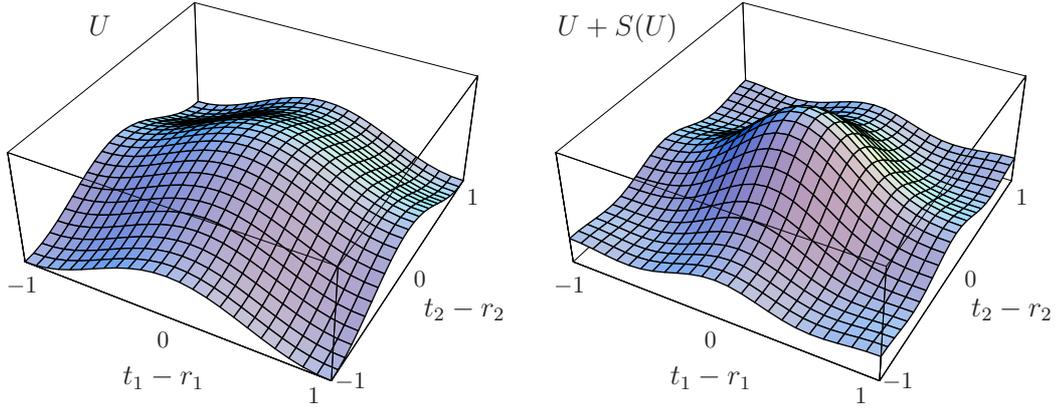


Abbildung 9.5: Der Beitrag der zentralen Mannigfaltigkeit nach (9.125) führt dazu, dass sich das Verbindungsgewicht $w(t, r) \approx 1 + U(t, r) + S(U(t, r))$ stärker als bei der Approximation $w(t, r) \approx 1 + U(t, r)$ um den Punkt $t = r$ konzentriert.

$$\begin{aligned}
S(U) = & \frac{1}{\sqrt{M_T M_R}} [U_{10,-10}^2 v_{20,-20}(t, r) + U_{-10,10}^2 v_{-20,20}(t, r) + \\
& + U_{01,0-1}^2 v_{02,0-2}(t, r) + U_{0-1,01}^2 v_{0-2,02}(t, r)] \\
& + \frac{2}{\sqrt{M_T M_R}} \frac{\gamma}{\gamma - \gamma^{11,11}} [U_{10,-10} U_{01,0-1} v_{11,-1-1}(t, r) + U_{-10,10} U_{0-1,01} v_{-1-1,11}(t, r) \\
& + U_{10,-10} U_{0-1,01} v_{1-1,-11}(t, r) + U_{-10,10} U_{01,0-1} v_{-11,1-1}(t, r)]. \quad (9.124)
\end{aligned}$$

Wir schreiben dies auf reelle Variable und Eigenfunktionen um, wobei wir die Seitenlängen der beiden Ebenen $L_1^{T,R} = L_2^{T,R} = 2$ setzen. Dann ergibt sich (9.124) mit (9.3), (9.4) zu

$$\begin{aligned}
S(U) = & \frac{1}{32} (u_2^2 - v_2^2) \cos[2\pi(t_1 - r_1)] + \frac{1}{32} (u_8^2 - v_8^2) \cos[2\pi(t_2 - r_2)] \\
& + \frac{1}{16} [u_2 v_2 \sin[2\pi(t_1 - r_1)] + u_8 v_8 \sin[2\pi(t_2 - r_2)]] \\
& + \frac{\gamma}{\gamma - \gamma^{11,11}} \{ u_2 u_8 (\cos[\pi(t_1 - r_1 - t_2 + r_2)] + \cos[\pi(t_1 - r_1 + t_2 - r_2)]) \\
& + v_2 v_8 (\cos[\pi(t_1 - r_1 - t_2 + r_2)] - \cos[\pi(t_1 - r_1 + t_2 - r_2)]) \\
& + u_2 v_8 (\sin[\pi(t_1 - r_1 + t_2 - r_2)] - \sin[\pi(t_1 - r_1 - t_2 + r_2)]) \\
& + u_8 v_2 (\sin[\pi(t_1 - r_1 - t_2 + r_2)] + \sin[\pi(t_1 - r_1 + t_2 - r_2)]) \}. \quad (9.125)
\end{aligned}$$

Der Vergleich von $U(t, r)$ mit $U(t, r) + S(U(t, r))$ zeigt, dass sich die Projektion durch den Beitrag der zentralen Mannigfaltigkeit stärker um den Punkt $t = r$ konzentriert (siehe Abbildung 9.5). Ähnlich wie bei der Saite verstärken also die höheren Beiträge die retinotope Ordnung.

Damit haben wir gezeigt, dass das Verbindungsgewicht im betrachteten Spezialfall zweier nichtverschwindender Moden mit der Bedingung (9.118) einen retinotopen Charakter annimmt. Auffallend hierbei ist insbesondere die Einschränkung

für die Kooperationsfunktionen, die nun nicht mehr monoton fallend sind. Wir haben hier nur Moden bis zur zweiten Ordnung berücksichtigt. Eine vollständige Analyse sollte auch sämtliche höhere Moden betrachten. Dies führt auf eine nichtlineare Differenzgleichung, deren analytische Lösung eine umfangreiche nichttriviale Aufgabe darstellt.

Kapitel 10

Kugeloberfläche

In diesem Kapitel untersuchen wir das Problem der retinotopen Projektion erstmals für *nichteuklidische* Mannigfaltigkeiten, genauer für Mannigfaltigkeiten mit konstanter positiver Krümmung. Das heißt, wir folgen Ref. [10] und modellieren die Zellschichten durch Kugeloberflächen, wobei wir uns o. B. d. A. auf die Oberflächen der Einheitskugel beschränken können. Dieser Ansatz wird durch die biologischen Befunde nahegelegt, dass die Retina näherungsweise die Form einer Halbkugel hat, während das Tectum eine ovale Form besitzt (siehe Abschnitt 2.3.4). Wir bezeichnen die Einheitsvektoren vom Mittelpunkt zur Kugeloberfläche der Retina mit \hat{r} und die des Tectum mit \hat{t} . Da die Kooperationsfunktionen wiederum nur vom Abstand der Punkte auf der Mannigfaltigkeit abhängen sollen, und damit auf der Kugeloberfläche nur vom Winkel, den \hat{t} und \hat{t}' bzw. \hat{r} und \hat{r}' einschließen, gilt

$$\begin{aligned} c_T(\hat{t}, \hat{t}') &= c_T(\hat{t} \cdot \hat{t}'), \\ c_R(\hat{r}, \hat{r}') &= c_R(\hat{r} \cdot \hat{r}'). \end{aligned} \quad (10.1)$$

Das Maß M dieser zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten ist offenbar durch

$$M = \int d\Omega_t = \int d\Omega_r = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = 4\pi \quad (10.2)$$

gegeben, wobei $d\Omega_t, d\Omega_r$ die differentiellen Raumwinkel der jeweiligen Kugeloberflächen darstellen. Die Häussler-Gleichung (5.8) nimmt dann die spezielle Form an:

$$\begin{aligned} \dot{w}(\hat{t}, \hat{r}) &= \alpha[1 - w(\hat{t}, \hat{r})] + w(\hat{t}, \hat{r}) \int d\Omega_{t'} \int d\Omega_{r'} c_T(\hat{t} \cdot \hat{t}') c_R(\hat{r} \cdot \hat{r}') w(\hat{t}', \hat{r}') \\ &\quad - \frac{w(\hat{t}, \hat{r})}{8\pi} \left[\int d\Omega_{t'} w(\hat{t}', \hat{r}) \int d\Omega_{t''} \int d\Omega_{r'} c_T(\hat{t}' \cdot \hat{t}'') c_R(\hat{r} \cdot \hat{r}') w(\hat{t}'', \hat{r}') \right. \\ &\quad \left. + \int d\Omega_{r''} w(\hat{t}, \hat{r}') \int d\Omega_{t'} \int d\Omega_{r''} c_T(\hat{t} \cdot \hat{t}') c_R(\hat{r}' \cdot \hat{r}'') w(\hat{t}', \hat{r}'') \right]. \end{aligned} \quad (10.3)$$

10.1 Laplace-Beltrami-Operator

Im Falle der euklidischen Mannigfaltigkeiten Saite und Ebene konnte der Laplace-Beltrami-Operator sofort angegeben werden. Für sphärische Geometrien ist eine genauere Betrachtung notwendig. Wir knüpfen dabei an die Überlegungen am Ende von Abschnitt 5.2 an. Man muss sich zunächst klarmachen, dass der Laplace-Beltrami-Operator auf der Mannigfaltigkeit zu bestimmen ist und nicht im dreidimensionalen Einbettungsraum der Vektoren \hat{t} und \hat{r} .

10.1.1 Einbettungsraum

Die Ortsvektoren \hat{t} , \hat{r} der Oberflächen der Einheitskugeln lauten in sphärischen Polarkoordinaten

$$\hat{t} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta_t \cos \varphi_t \\ \sin \vartheta_t \sin \varphi_t \\ \cos \vartheta_t \end{pmatrix}, \quad \hat{r} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta_r \cos \varphi_r \\ \sin \vartheta_r \sin \varphi_r \\ \cos \vartheta_r \end{pmatrix}. \quad (10.4)$$

Die Abstände zwischen zwei Punkten auf der Mannigfaltigkeit sind, wie bereits auf Seite 55 diskutiert, verschieden vom Betrag des Differenzvektors $\hat{t} - \hat{t}'$ bzw. $\hat{r} - \hat{r}'$. Dies soll im Folgenden genauer betrachtet werden.

Gegeben sei eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit \mathcal{M} beliebiger Geometrie im dreidimensionalen Einbettungsraum \mathbb{R}^3 . Die Punkte des \mathbb{R}^3 beschreiben wir durch ein kartesisches Orthonormalsystem e_i :

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3. \quad (10.5)$$

Die Mannigfaltigkeit in diesem Einbettungsraum parametrisieren wir durch die krummlinigen Koordinaten u^1, u^2 :

$$x = \begin{pmatrix} x_1(u^1, u^2) \\ x_2(u^1, u^2) \\ x_3(u^1, u^2) \end{pmatrix}. \quad (10.6)$$

Das Abstandsquadrat *innerhalb* der Mannigfaltigkeit ist gegeben durch

$$dx^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u^1} \right)^2 (du^1)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u^2} \right)^2 (du^2)^2 + 2 \frac{\partial x}{\partial u^1} \frac{\partial x}{\partial u^2} du^1 du^2. \quad (10.7)$$

Der Vergleich mit

$$dx^2 = g_{\mu\nu} du^\mu du^\nu \quad (10.8)$$

ergibt für die Komponenten des metrischen Tensors in Übereinstimmung mit (5.16)

$$g_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial u^1} \right)^2, \quad g_{12} = g_{21} = \frac{\partial x}{\partial u^1} \frac{\partial x}{\partial u^2}, \quad g_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial u^2} \right)^2. \quad (10.9)$$

10.1.2 Einheitskugel

In unserem Fall ist die Mannigfaltigkeit durch die Oberfläche der Einheitskugel gegeben. Diese lässt sich im \mathbb{R}^3 durch sphärische Polarkoordinaten parametrisieren. Sowohl für die Retina als auch für das Tectum lautet (10.6) mit $u^1 = \vartheta$ und $u^2 = \varphi$

$$x = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (10.10)$$

Damit ergeben sich die Komponenten $g_{\mu\nu}$ gemäß (10.9) zu

$$g_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \right)^2 = 1, \quad g_{12} = g_{21} = \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0, \quad g_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 = \sin^2 \vartheta. \quad (10.11)$$

Das Abstandsquadrat lautet also

$$dx^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2. \quad (10.12)$$

Die Determinante des kovarianten metrischen Tensors ist durch

$$g = \sin^2 \vartheta \quad (10.13)$$

gegeben. Die Komponenten der kontravarianten Metrik ergeben sich unmittelbar zu

$$g^{11} = 1, \quad g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{22} = \frac{1}{\sin^2 \vartheta}. \quad (10.14)$$

Damit lautet der Laplace-Beltrami-Operator (6.11) auf der Einheitskugel

$$\Delta_{\vartheta, \varphi} = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (10.15)$$

Das Linienelement auf der Kugeloberfläche (10.11) und der Winkelanteil des Laplace-Beltrami-Operators in sphärischen Polarkoordinaten sind somit systematisch hergeleitet worden.

10.2 Eigenfunktionen

Die Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami-Operators (10.15) sind bekanntlich durch die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ gegeben:

$$\Delta_{\vartheta, \varphi} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = -l(l+1)Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (10.16)$$

Sie bilden ein vollständiges Orthonormalsystem auf der Einheitskugel und sind jeweils $(2l+1)$ -fach entartet:

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad l = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -l, -l+1, \dots, l-1, l. \quad (10.17)$$

Expemparisch geben wir die Darstellungen der Kugelflächenfunktionen für die Fälle $l = 0, 1, 2$ an (vgl. [62]):

$$Y_{00}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad (10.18)$$

$$Y_{11}(\vartheta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{i\varphi}, \quad (10.19)$$

$$Y_{10}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta, \quad (10.20)$$

$$Y_{22}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi}, \quad (10.21)$$

$$Y_{21}(\vartheta, \varphi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{i\varphi}, \quad (10.22)$$

$$Y_{20}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right). \quad (10.23)$$

Für negative Entartungsindizes erhält man die entsprechenden Kugelflächenfunktionen mit Hilfe der Relation

$$Y_{l-m}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi). \quad (10.24)$$

Zu einer kompakteren Darstellung gelangen wir, indem wir die beiden Winkel durch die entsprechenden Einheitsvektoren charakterisieren, d. h. wir schreiben im Folgenden stets

$$Y_{lm}^T(\hat{t}) := Y_{lm}^T(\vartheta_t, \varphi_t), \quad Y_{lm}^R(\hat{r}) := Y_{lm}^R(\vartheta_r, \varphi_r). \quad (10.25)$$

Die Orthonormalitätsrelationen lauten dann

$$\int d\Omega_t Y_{lm}^T(\hat{t}) Y_{l'm'}^{T*}(\hat{t}) = \int_0^{2\pi} d\varphi_t \int_0^\pi d\vartheta_t \sin \vartheta_t Y_{lm}^T(\hat{t}) Y_{l'm'}^{T*}(\hat{t}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (10.26)$$

$$\int d\Omega_r Y_{lm}^R(\hat{r}) Y_{l'm'}^{R*}(\hat{r}) = \int_0^{2\pi} d\varphi_r \int_0^\pi d\vartheta_r \sin \vartheta_r Y_{lm}^R(\hat{r}) Y_{l'm'}^{R*}(\hat{r}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (10.27)$$

Die Vollständigkeitsrelationen schreiben sich als

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^T(\hat{t}) Y_{lm}^{T*}(\hat{t}') = \delta(\hat{t} - \hat{t}'), \quad (10.28)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^R(\hat{r}) Y_{lm}^{R*}(\hat{r}') = \delta(\hat{r} - \hat{r}'). \quad (10.29)$$

Die Eigenfunktionen zum Eigenwert Null sind gemäß (6.21) und (10.2) durch

$$Y_{00}^T(\hat{t}) = Y_{00}^R(\hat{r}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad (10.30)$$

gegeben, in Übereinstimmung mit (10.18).

10.3 Lineare Analyse

Um den in Teil II entwickelten Formalismus auf Kugeloberflächen anwenden zu können, ist zunächst zu zeigen, dass die Kooperationsfunktionen $c_T(\hat{t}, \hat{t}') = c_T(\hat{t} \cdot \hat{t}')$ und $c_R(\hat{r}, \hat{r}') = c_R(\hat{r} \cdot \hat{r}')$ tatsächlich gemäß der Form (6.26), (6.27) nach Eigenfunktionen entwickelt werden können. Anschließend soll die in Abschnitt 6.4 für den allgemeinen Fall präsentierte Methode zur Berechnung der Eigenwerte für den speziellen Fall sphärischer Mannigfaltigkeiten explizit durchexerziert werden.

10.3.1 Kooperationsfunktionen

Die Skalarprodukte $\hat{t} \cdot \hat{t}'$ und $\hat{r} \cdot \hat{r}'$ zwischen den jeweiligen Einheitsvektoren nehmen Werte im Intervall $[-1, +1]$ an. Die Kooperationsfunktionen lassen sich somit nach den Legendre-Funktionen P_l entwickeln, da diese ein vollständiges Orthogonalsystem im Intervall $[-1, +1]$ bilden. Also ist

$$c_T(\hat{t} \cdot \hat{t}') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} f_l^T P_l(\hat{t} \cdot \hat{t}'), \quad (10.31)$$

$$c_R(\hat{r} \cdot \hat{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} f_l^R P_l(\hat{r} \cdot \hat{r}'). \quad (10.32)$$

Unter Ausnutzung des Additionstheorems für die Kugelflächenfunktionen,

$$P_l(\hat{t} \cdot \hat{t}') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^T(\hat{t}) Y_{lm}^{T*}(\hat{t}'), \quad (10.33)$$

gelangt man so auf die gewünschte Form (6.26), (6.27) der Entwicklung

$$c_T(\hat{t} \cdot \hat{t}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_l^T Y_{lm}^T(\hat{t}) Y_{lm}^{T*}(\hat{t}'), \quad (10.34)$$

$$c_R(\hat{r} \cdot \hat{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_l^R Y_{lm}^R(\hat{r}) Y_{lm}^{R*}(\hat{r}'). \quad (10.35)$$

10.3.2 Eigenwerte

Gemäß (6.33) sind die Eigenfunktionen zum Operator \hat{L} durch

$$v_{Ll}^{Mm}(\hat{t}, \hat{r}) = Y_{LM}^T(\hat{t}) Y_{lm}^R(\hat{r}) \quad (10.36)$$

gegeben. Eingesetzt in den Operator (6.34) erhält man

$$\hat{C}(\hat{t}, \hat{r}, v_{Ll}^{Mm}) = \int d\Omega_{t'} \int d\Omega_{r'} c_T(\hat{t} \cdot \hat{t}') c_R(\hat{r} \cdot \hat{r}') Y_{LM}^T(\hat{t}') Y_{lm}^R(\hat{r}'). \quad (10.37)$$

Mit (10.34), (10.35) und den Orthonormalitätsrelationen (10.26), (10.27) folgt schließlich

$$\hat{C}(\hat{t}, \hat{r}, v_{Ll}^{Mm}) = f_L^T f_l^R Y_{LM}^T(\hat{t}) Y_{lm}^R(\hat{r}). \quad (10.38)$$

Für den Operator (6.36) ergibt sich mit (10.30)

$$\hat{B}(\hat{t}, \hat{r}, v_{Ll}^{Mm}) = \frac{1}{2} [Y_{lm}^R(\hat{r}) Y_{00}^T(\hat{t}) \delta_{L0} \delta_{M0} + Y_{LM}^T(\hat{t}) Y_{00}^R(\hat{r}) \delta_{l0} \delta_{m0}], \quad (10.39)$$

sodass folgt

$$\hat{B}(\hat{t}, \hat{r}, \hat{C}(v_{Ll}^{Mm})) = f_L^T f_l^R \hat{B}(\hat{t}, \hat{r}, v_{Ll}^{Mm}). \quad (10.40)$$

Das Spektrum der Eigenwerte zu \hat{L} in (6.7) lautet damit

$$\Lambda_{Ll}^{Mm} = -\alpha + f_L^T f_l^R - \frac{1}{2} (f_L^T f_l^R + 1) (\delta_{L0} \delta_{M0} + \delta_{l0} \delta_{m0}). \quad (10.41)$$

Das führt auf die Fallunterscheidung

$$\Lambda_{Ll}^{Mm} = \begin{cases} -\alpha - 1 & L = M = l = m = 0 \\ -\alpha + \frac{1}{2} (f_L^T f_l^R - 1) & L = M = 0, (l, m) \neq (0, 0) \\ & l = m = 0, (L, M) \neq (0, 0) \\ -\alpha + f_L^T f_l^R & \text{sonst.} \end{cases} \quad (10.42)$$

Damit haben wir das allgemeine Resultat (6.43) auch für die Einheitskugel verifiziert.

Schließlich bestimmen wir noch die instabilen Moden. Im Folgenden nehmen wir wieder an, dass die Koeffizienten f_L^T und f_l^R monoton fallende positive Größen sind:

$$1 = f_0^T \geq f_1^T \geq f_2^T \geq \dots \geq 0, \quad (10.43)$$

$$1 = f_0^R \geq f_1^R \geq f_2^R \geq \dots \geq 0. \quad (10.44)$$

Der maximale Eigenwert in (10.42) ist dann durch

$$\Lambda_{\max} = \Lambda_{11}^{11} = -\alpha + f_1^T f_1^R \quad (10.45)$$

gegeben. Somit kann man durch geeignete Wahl des positiven Kontrollparameters α erreichen, dass sämtliche Eigenwerte mit Ausnahme von Λ_{\max} negative Werte annehmen. Der kritische Wert des Kontrollparameters, bei dem die zu Λ_{\max} gehörenden Moden instabil werden, ist

$$\alpha_c = f_1^T f_1^R. \quad (10.46)$$

An diesem Instabilitätspunkt werden alle neun Moden mit $(L, l) = (1, 1)$ und $M = 0, \pm 1, m = 0, \pm 1$ instabil.

10.4 Integrale

Für die Ordnungsparametergleichungen in Abschnitt 7.5 benötigen wir die folgenden Integrale:

$$J_{11}^{m'm''}, I_{1,11}^{m,m'm''}, I_{l,11}^{m,m'm''}, I_{1,1l}^{m,m'm''}, I_{1,111}^{m,m'm'm''}.$$

Auf die Unterscheidung der beiden Mannigfaltigkeiten durch die Indizierung mit R bzw. T wird dabei verzichtet, da die Berechnungen der Integrale davon unabhängig sind. Das erste Integral ergibt sich unter Verwendung von (10.24) sowie der Orthonormalitätsrelation (10.26), (10.27) zu

$$J_{11}^{m'm''} = \int d\Omega Y_{1m'}(\Omega) Y_{1m''}(\Omega) = (-1)^{m'} \delta_{m', -m''}. \quad (10.47)$$

Für die Berechnung der Integrale über drei bzw. vier Kugelflächenfunktionen ist die folgende Beziehung sehr hilfreich [63]:

$$\begin{aligned} Y_{l_1, m_1}(\Omega) Y_{l_2, m_2}(\Omega) &= \sum_{l_3=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} \sum_{m_3=-l_3}^{l_3} \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l_3+1)}} C(l_1, 0, l_2, 0|l_3, 0) \\ &\times C(l_1, m_1, l_2, m_2|l_3, m_3) Y_{l_3, m_3}(\Omega). \end{aligned} \quad (10.48)$$

Die Größen $C(l_1, 0, l_2, 0|l_3, 0)$ und $C(l_1, m_1, l_2, m_2|l_3, m_3)$ sind die Clebsch-Gordan-Koeffizienten, deren Eigenschaften im Anhang B diskutiert werden. Wendet man dies auf die Integrale über drei Kugelflächenfunktionen

$$I_{l,l'l''}^{m,m'm''} = \int d\Omega Y_{l,m}^*(\Omega) Y_{l',m'}(\Omega) Y_{l'',m''}(\Omega) \quad (10.49)$$

an, so erhält man wegen des Auftretens von

$$\int d\Omega Y_{l,m}^*(\Omega) Y_{l_3, m_3}(\Omega) = \delta_{ll_3} \delta_{mm_3} \quad (10.50)$$

einen Ausdruck, der nur noch die Clebsch-Gordan-Koeffizienten beinhaltet:

$$I_{l,l'l''}^{m,m'm''} = \sqrt{\frac{(2l'+1)(2l''+1)}{4\pi(2l+1)}} C(l', 0, l'', 0|l, 0) C(l', m', l'', m''|l, m). \quad (10.51)$$

Für $l' = l'' = 1$ gilt dann

$$I_{l,11}^{m,m'm''} = \frac{3}{\sqrt{4\pi(2l+1)}} C(1, 0, 1, 0|l, 0) C(1, m', 1, m''|l, m). \quad (10.52)$$

Mit (A.3) und (A.9) ist

$$C(l_1, 0, l_2, 0|l_3, 0) \begin{cases} = 0 & l_1 + l_2 + l_3 \text{ ungerade} \\ \neq 0 & l_1 + l_2 + l_3 \text{ gerade} \end{cases}. \quad (10.53)$$

$D_1 \times D_1$	$u_{1,1}v_{1,1}$	$u_{1,1}v_{1,0}$	$u_{1,0}v_{1,1}$	$u_{1,1}v_{1,-1}$	$u_{1,0}v_{1,0}$	$u_{1,-1}v_{1,1}$	$u_{1,0}v_{1,-1}$	$u_{1,-1}v_{1,0}$	$u_{1,-1}v_{1,-1}$
$w_{2,2}$	1								
$w_{2,1}$		$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$						
$w_{1,1}$		$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$						
$w_{2,0}$				$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$			
$w_{1,0}$				$\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$			
$w_{0,0}$				$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$			
$w_{2,-1}$							$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	
$w_{1,-1}$							$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	
$w_{2,-2}$									1

Tabelle 10.1: Kopplungstafel der Produktdarstellung $D_1 \times D_1$ nach [64]. Es sind nur die nichtverschwindenden Clebsch-Gordan-Koeffizienten aufgeführt, die in (10.60) auftreten.

Damit verschwinden alle Integrale (10.52), für die $l_1 + l_2 + l_3$ ungerade ist. Daraus folgt unmittelbar

$$I_{1,11}^{m,m'm''} = 0. \quad (10.54)$$

Ebenso wie im Fall euklidischer Mannigfaltigkeiten verschwindet also der quadratische Beitrag (7.63) auch bei sphärischen Mannigfaltigkeiten:

$$Q_{11}^{m_T^u m_R^v} = 0. \quad (10.55)$$

Nichtverschwindende Integrale (10.52) sind nach (10.53) nur für die Fälle $l = 0$ und $l = 2$ zu erwarten. Wir wollen exemplarisch den Fall $l = 0$ explizit berechnen. Es gilt dann

$$I_{0,11}^{0,m'm''} = \frac{3}{\sqrt{4\pi}} C(1, 0, 1, 0|0, 0) C(1, m', 1, m''|0, 0). \quad (10.56)$$

Mit (A.3) und (A.7) erhält man die Clebsch-Gordan-Koeffizienten zu

$$C(1, 0, 1, 0|0, 0) = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (10.57)$$

$$C(1, m', 1, m''|0, 0) = \frac{(-1)^{1-m'}}{\sqrt{3}} \delta_{m', -m''}. \quad (10.58)$$

Damit folgt

$$I_{0,11}^{0,m'm''} = \frac{(-1)^{m'}}{\sqrt{4\pi}} \delta_{m', m''}. \quad (10.59)$$

Für die Berechnung der Integrale mit $l = 2$ entnehmen wir die Clebsch-Gordan-Koeffizienten der Tabelle 10.1. Dabei ist die Bezeichnungsweise aus (A.1) gewählt:

$$u_{l,m}v_{l',m'} = \sum_{L=|l-l'|}^{l+l'} \sum_{M=-L}^L C(lm, l'm'|LM) w_{L,M}, \quad (10.60)$$

wobei jeweils $u_{l,m}$, $v_{l',m'}$, $w_{L,M}$ Kugelflächenfunktionen darstellen. Es ist also beispielsweise $C(1, 1, 1, 1|2, 2) = 1$ und $C(1, -1, 1, 1|1, 0) = -1/\sqrt{2}$. Man erhält somit die folgenden Integrale:

$$I_{0,11}^{0,00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad (10.61)$$

$$I_{2,11}^{0,00} = \frac{1}{\sqrt{5\pi}}, \quad (10.62)$$

$$I_{0,11}^{0,1-1} = I_{0,11}^{0,-11} = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad (10.63)$$

$$I_{2,11}^{0,1-1} = I_{2,11}^{0,-11} = \frac{1}{\sqrt{20\pi}}, \quad (10.64)$$

$$I_{2,11}^{1,10} = I_{2,11}^{1,01} = I_{2,11}^{-1,-10} = I_{2,11}^{-1,0-1} = \frac{3}{2\sqrt{15\pi}}, \quad (10.65)$$

$$I_{2,11}^{2,11} = \frac{3}{\sqrt{30\pi}}, \quad (10.66)$$

$$I_{2,11}^{-2,-1-1} = -\frac{3}{\sqrt{30\pi}}. \quad (10.67)$$

Die Integrale $I_{1,1l}^{m,m'm''}$ erhält man mit

$$I_{1,1l}^{m,m'm''} = (-1)^{m'+m''} I_{l,11}^{-m'',-mm'}. \quad (10.68)$$

Weiterhin haben wir Integrale über vier Kugelflächenfunktionen

$$I_{l,l'l'l''}^{m,m'm''m'''} = \int d\Omega Y_{l,m}^*(\Omega) Y_{l',m'}(\Omega) Y_{l'',m''}(\Omega) Y_{l''',m'''}(\Omega) \quad (10.69)$$

zu bestimmen. Wendet man obige Beziehung (10.48) auf die letzten beiden Kugelflächenfunktionen in (10.69) an, so erhält man

$$\begin{aligned} I_{l,l'l'l''}^{m,m'm''m'''} &= \sum_{l_3=|l''-l'''}^{l''+l'''} \sum_{m_3=-l_3}^{l_3} \sqrt{\frac{(2l''+1)(2l''' + 1)}{4\pi(2l_3+1)}} C(l'', 0, l''', 0|l_3, 0) \\ &\times C(l'', m'', l''', m'''|l_3, m_3) I_{l,l'l_3}^{m,m'm_3}. \end{aligned} \quad (10.70)$$

Die Integrale $I_{l,l'l_3}^{m,m'm_3}$ lassen sich mit (10.51) berechnen.

Die Integrale über vier Kugelflächenfunktionen $I_{1,111}^{m,m'm''m'''}$ lauten damit

$$I_{1,111}^{0,000} = \frac{9}{20\pi}, \quad (10.71)$$

$$I_{1,111}^{0,1-10} = I_{1,111}^{0,-110} = I_{1,111}^{0,10-1} = I_{1,111}^{0,-101} = I_{1,111}^{0,01-1} = I_{1,111}^{0,0-11} = -\frac{3}{20\pi}, \quad (10.72)$$

$$I_{1,111}^{1,100} = I_{1,111}^{1,010} = I_{1,111}^{1,001} = I_{1,111}^{-1,-100} = I_{1,111}^{-1,0-10} = I_{1,111}^{-1,00-1} = \frac{3}{20\pi}, \quad (10.73)$$

$$I_{1,111}^{1,11-1} = I_{1,111}^{1,1-11} = I_{1,111}^{1,-111} = -\frac{3}{10\pi}, \quad (10.74)$$

$$I_{1,111}^{-1,1-1-1} = I_{1,111}^{-1,-11-1} = I_{1,111}^{-1,-1-11} = -\frac{3}{10\pi}. \quad (10.75)$$

10.5 Ordnungsgleichungen

Die Ordnungsgleichung (7.61) haben mit (10.55) die Form

$$\dot{U}m_T^u m_R^u = \Lambda U m_T^u m_R^u + K_{1,11}^{m_T^u m_R^u} + K_{2,11}^{m_T^u m_R^u} + K_{3,11}^{m_T^u m_R^u}. \quad (10.76)$$

Dabei verzichten wir auf die untere Indizierung $(\lambda_T^u, \lambda_R^u) = (1, 1)$, da diese immer gleich bleibt. Weiterhin führen wir analog zum Vorgehen bei der Seite die Abkürzungen

$$\gamma^{\lambda_T, \lambda_R} := f_{\lambda_T}^T f_{\lambda_R}^R, \quad \gamma := \gamma^{1,1} = f_1^T f_1^R \quad (10.77)$$

ein.

10.5.1 Kubische Beiträge

Der erste kubische Beitrag (7.68) ergibt sich mit (10.47) zu

$$\begin{aligned} K_{1,11}^{m_T^u m_R^u} &= -\frac{\gamma}{8\pi} U m_T^{u'} m_R^{u'} U m_T^{u''} m_R^{u''} U m_T^{u'''} m_R^{u'''} \\ &\times \left[I_{1,111}^{m_T^u, m_R^u, m_R^{u''} m_R^{u'''} } \delta_{m_T^u, m_T^{u'}} (-1)^{m_T^{u''}} \delta_{m_T^{u''}, -m_T^{u'''} } \right. \\ &\left. + I_{1,111}^{m_T^u, m_T^{u'} m_T^{u''} m_T^{u'''} } \delta_{m_R^u, m_R^{u'}} (-1)^{m_R^{u''}} \delta_{m_R^{u''}, -m_R^{u'''} } \right]. \quad (10.78) \end{aligned}$$

Für den zweiten Beitrag (7.69) erhält man nach Einsetzen der zentralen Mannigfaltigkeit (7.60), wenn man (10.68) berücksichtigt,

$$\begin{aligned} K_{2,11}^{m_T^u m_R^u} &= U m_T^{u'} m_R^{u'} U m_T^{u''} m_R^{u''} U m_T^{u'''} m_R^{u'''} \frac{\gamma + \gamma^{\lambda_T, \lambda_R}}{2\Lambda - \Lambda_{\lambda_T, \lambda_R}} \gamma \left[I_{\lambda_T, 11}^{m_T', m_T'' m_T'''} I_{\lambda_R, 11}^{m_R', m_R'' m_R'''} \right. \\ &- \frac{1}{2\sqrt{4\pi}} \left((-1)^{m_T^{u''}} \delta_{m_T^{u''}, -m_T^{u'''} } I_{\lambda_R, 11}^{m_R', m_R'' m_R'''} \delta_{\lambda_T, 0} \right. \\ &\left. \left. + (-1)^{m_R^{u''}} \delta_{m_R^{u''}, -m_R^{u'''} } I_{\lambda_T, 11}^{m_T', m_T'' m_T'''} \delta_{\lambda_R, 0} \right) \right] \\ &\times (-1)^{m_T^{u'} + m_R^{u'} + m_T^{u''} + m_R^{u''}} I_{\lambda_T, 11}^{-m_T', -m_T'' m_T'''} I_{\lambda_R, 11}^{-m_R', -m_R'' m_R'''} . \quad (10.79) \end{aligned}$$

Der dritte Beitrag (7.70) schließlich lautet

$$\begin{aligned}
K_{3,11}^{m_T^u m_R^u} &= -U^{m_T^{u'} m_R^{u'}} U^{m_T^{u''} m_R^{u''}} U^{m_T^{u'''} m_R^{u'''}} \frac{\gamma}{2\Lambda - \Lambda_{\lambda_T' \lambda_R'}} \left[I_{\lambda_T', 11}^{m_T', m_T^{u''} m_T^{u'''}} I_{\lambda_R', 11}^{m_R', m_R^{u''} m_R^{u'''}} \right. \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{4\pi}} \left((-1)^{m_T^{u''}} \delta_{m_T^{u''}, -m_T^{u'''}} I_{\lambda_R', 11}^{m_R', m_R^{u''} m_R^{u'''}} \delta_{\lambda_T', 0} \right. \\
&\quad \left. \left. + (-1)^{m_R^{u''}} \delta_{m_R^{u''}, -m_R^{u'''}} I_{\lambda_T', 11}^{m_T', m_T^{u''} m_T^{u'''}} \delta_{\lambda_R', 0} \right) \right] \\
&\quad \times \frac{1}{2\sqrt{4\pi}} \left[(1 + \gamma^{0, \lambda_R'}) \delta_{\lambda_T', 0} \delta_{m_T', 0} \delta_{m_T^u, m_T^{u'}} (-1)^{m_R^u + m_R'} I_{\lambda_R', 11}^{-m_R', -m_R^u m_R^u} \right. \\
&\quad \left. + (1 + \gamma^{\lambda_T', 0}) \delta_{\lambda_R', 0} \delta_{m_R', 0} \delta_{m_R^u, m_R^{u'}} (-1)^{m_T^u + m_T'} I_{\lambda_T', 11}^{-m_T', -m_T^u m_T^u} \right]. \quad (10.80)
\end{aligned}$$

Bevor wir die Berechnung der Ordnungsparametergleichungen in Angriff nehmen, wollen wir im folgenden Abschnitt einige Symmetrieüberlegungen anstellen.

10.5.2 Symmetrien

Da die Berechnung schon einer der neun Ordnungsparametergleichungen einen nicht unerheblichen Rechenaufwand erfordert, soll hier zunächst untersucht werden, inwieweit sich allein unter Verwendung von Symmetrien die Gleichung für $U^{m_T^u m_R^u}$ angeben lässt, falls diejenige für $U^{m_T^{u'} m_R^{u'}}$ bekannt ist.

Intuitiv erwartet man beispielsweise, dass sich die Gleichung für $U^{-m_T^u - m_R^u}$ aus derjenigen für $U^{m_T^{u'} m_R^{u'}}$ gewinnen lässt, indem jedes $U^{m_T^{u'} m_R^{u'}}$ durch $U^{-m_T^{u'} - m_R^{u'}}$ ersetzt wird, wobei die Vorfaktoren gleichbleiben. Dass dies auch tatsächlich der Fall ist, soll nun gezeigt werden. Dazu wird zunächst der zweite kubische Term $K_{2,11}^{-m_T^u - m_R^u}$ betrachtet:

$$\begin{aligned}
K_{2,11}^{-m_T^u - m_R^u} &= U^{m_T^{u'} m_R^{u'}} U^{m_T^{u''} m_R^{u''}} U^{m_T^{u'''} m_R^{u'''}} \frac{\gamma + \gamma^{\lambda_T' \lambda_R'}}{2\Lambda - \Lambda_{\lambda_T' \lambda_R'}} \gamma \left[I_{\lambda_T', 11}^{m_T', m_T^{u''} m_T^{u'''}} I_{\lambda_R', 11}^{m_R', m_R^{u''} m_R^{u'''}} \right. \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{4\pi}} \left((-1)^{m_T^{u''}} \delta_{m_T^{u''}, -m_T^{u'''}} I_{\lambda_R', 11}^{m_R', m_R^{u''} m_R^{u'''}} \delta_{\lambda_T', 0} \right. \\
&\quad \left. \left. + (-1)^{m_R^{u''}} \delta_{m_R^{u''}, -m_R^{u'''}} I_{\lambda_T', 11}^{m_T', m_T^{u''} m_T^{u'''}} \delta_{\lambda_R', 0} \right) \right] \\
&\quad \times (-1)^{m_T^u + m_R^u + m_T' + m_R'} I_{\lambda_T', 11}^{-m_T', m_T^u m_T^u} I_{\lambda_R', 11}^{-m_R', m_R^u m_R^u}. \quad (10.81)
\end{aligned}$$

Die Indizes über die instabilen Moden $m^{u'}$, $m^{u''}$, $m^{u'''}$ durchlaufen alle Werte -1 , 0 und $+1$, die der stabilen Moden m durchlaufen alle Werte von $-\lambda$ bis $+\lambda$. Man kann die negativen und positiven Indizes miteinander vertauschen, da dies lediglich die Reihenfolge der Summation umkehrt. Diese aber ist für das Ergebnis

natürlich belanglos. Also ist

$$\begin{aligned}
K_{2,11}^{-m_T^u - m_R^u} &= U^{-m_T^{u'} - m_R^{u'}} U^{-m_T^{u''} - m_R^{u''}} U^{-m_T^{u'''} - m_R^{u'''}} \frac{\gamma + \gamma^{\lambda_T \lambda_R}}{2\Lambda - \Lambda_{\lambda_T \lambda_R}} \\
&\times \gamma \left[I_{\lambda_T, 11}^{-m_T', -m_T^{u''} - m_T^{u'''}} I_{\lambda_R, 11}^{-m_R', -m_R^{u''} - m_R^{u'''}} \right. \\
&- \frac{1}{2\sqrt{4\pi}} \left((-1)^{m_T^{u''}} \delta_{m_T^{u''}, -m_T^{u'''}} I_{\lambda_R, 11}^{-m_R', -m_R^{u''} - m_R^{u'''}} \delta_{\lambda_T, 0} \right. \\
&\left. \left. + (-1)^{m_R^{u''}} \delta_{m_R^{u''}, -m_R^{u'''}} I_{\lambda_T, 11}^{-m_T', -m_T^{u''} - m_T^{u'''}} \delta_{\lambda_R, 0} \right) \right] \\
&\times (-1)^{m_T^{u'} + m_R^{u'} + m_T^{u''} + m_R^{u''}} I_{\lambda_T, 11}^{m_T', m_T^{u''} - m_T^{u'''}} I_{\lambda_R, 11}^{m_R', m_R^{u''} - m_R^{u'''}}. \quad (10.82)
\end{aligned}$$

Falls nun gilt

$$I_{\lambda, 11}^{-m, -m^{u''} - m^{u'''}} = I_{\lambda, 11}^{m, m^{u''} m^{u'''}}, \quad (10.83)$$

so hätte man für diesen ersten Teil des kubischen Terms gerade das erwartete Ergebnis: $K_{2,11}^{-m_T^u - m_R^u}$ erhalte man dann einfach aus $K_{2,11}^{m_T^u m_R^u}$ in (10.79), indem jedes Produkt $U^{m_T^{u'} m_R^{u'}} U^{m_T^{u''} m_R^{u''}} U^{m_T^{u'''} m_R^{u'''}}$ durch $U^{-m_T^{u'} - m_R^{u'}} U^{-m_T^{u''} - m_R^{u''}} U^{-m_T^{u'''} - m_R^{u'''}}$ ersetzt wird. Die Beziehung (10.83) lässt sich in der Tat leicht beweisen. Mit (10.24) und (10.49) erhält man zunächst

$$I_{\lambda, 11}^{-m, -m^{u''} - m^{u'''}} = (-1)^{m+m^{u''}+m^{u'''}} I_{\lambda, 11}^{m, m^{u''} m^{u'''}}. \quad (10.84)$$

Da beide Seiten proportional zu $\delta_{m^{u''}+m^{u'''}, m}$ sind, folgt unmittelbar (10.83).

Im Fall des $K_{3,11}^{m_T^u m_R^u}$ -Terms führt die Relation (10.83) zur gleichen Aussage. Im Fall des ersten kubischen Beitrags ergibt sich (10.78), nachdem man die Entartungsindizes negiert hat, zu

$$\begin{aligned}
K_{1,11}^{-m_T^u - m_R^u} &= -\frac{\gamma}{8\pi} U^{-m_T^{u'} - m_R^{u'}} U^{-m_T^{u''} - m_R^{u''}} U^{-m_T^{u'''} - m_R^{u'''}} \\
&\times \left[I_{1,111}^{-m_R^u, -m_R^{u'} - m_R^{u''} - m_R^{u'''}} \delta_{m_T^u m_T^{u'}} (-1)^{m_T^{u''}} \delta_{m_T^{u''}, -m_T^{u'''}} \right. \\
&\left. + I_{1,111}^{-m_T^u, -m_T^{u'} - m_T^{u''} - m_T^{u'''}} \delta_{m_R^u m_R^{u'}} (-1)^{m_R^{u''}} \delta_{m_R^{u''}, -m_R^{u'''}} \right]. \quad (10.85)
\end{aligned}$$

Völlig analog zu (10.83) beweist man

$$I_{1,111}^{m^u, m^{u'} m^{u''} m^{u'''}} = I_{1,111}^{-m^u, -m^{u'} - m^{u''} - m^{u'''}} , \quad (10.86)$$

womit auch der erste kubische Term der Gleichung für $\dot{U}^{-m_T^u - m_R^u}$ aus der Gleichung für $\dot{U}^{m_T^u m_R^u}$ durch Negation der Entartungsindizes hervorgeht.

In gleicher Weise lässt sich auch zeigen, dass die Gleichung für $U^{-m_T^u m_R^u}$ bzw. $U^{m_T^u - m_R^u}$ aus derjenigen für $U^{m_T^u m_R^u}$ zu gewinnen ist, indem in dieser auf der

Aus den Bedingungen (10.88), (10.89) ergibt sich, dass nur die folgenden neun kubischen Terme auftreten können:

$$(U^{00})^3, U^{00}U^{0-1}U^{01}, U^{00}U^{-10}U^{10}, U^{00}U^{11}U^{-1-1}, U^{00}U^{-11}U^{1-1}, \\ U^{10}U^{01}U^{-1-1}, U^{-10}U^{01}U^{1-1}, U^{10}U^{0-1}U^{-11}, U^{-10}U^{0-1}U^{11}. \quad (10.91)$$

Die erste Aufgabe besteht in der Berechnung von $K_{1,11}^{00}$, welches wegen (10.78) die folgende Form annimmt:

$$K_{1,11}^{00} = -\frac{\gamma}{8\pi} U^{m_T^{u'} m_R^{u'}} U^{m_T^{u''} m_R^{u''}} U^{m_T^{u'''} m_R^{u'''}} \\ \times \left[I_{1,111}^{0,m_R^{u'} m_R^{u''} m_R^{u'''}} \delta_{0,m_T^{u'}} (-1)^{m_T^{u''}} \delta_{m_T^{u''}, -m_T^{u'''}} \right. \\ \left. + I_{1,111}^{0,m_T^{u'} m_T^{u''} m_T^{u'''}} \delta_{0,m_R^{u'}} (-1)^{m_R^{u''}} \delta_{m_R^{u''}, -m_R^{u'''}} \right]. \quad (10.92)$$

Dies ergibt mit (10.71) und (10.72)

$$K_{1,11}^{00} = -\frac{3\gamma}{80\pi^2} [3(U^{00})^3 - 6U^{00}U^{0-1}U^{01} - 6U^{00}U^{-10}U^{10} \\ + 2(U^{00}U^{11}U^{-1-1} + U^{00}U^{-11}U^{1-1} + U^{10}U^{01}U^{-1-1} \\ + U^{-10}U^{01}U^{1-1} + U^{10}U^{0-1}U^{-11} + U^{-10}U^{0-1}U^{11})]. \quad (10.93)$$

Betrachten wir nun den zweiten Term in (10.79) für $(m_T^u, m_R^u) = (0, 0)$:

$$K_{2,11}^{00} = U^{m_T^{u'} m_R^{u'}} U^{m_T^{u''} m_R^{u''}} U^{m_T^{u'''} m_R^{u'''}} \frac{\gamma + \gamma^{\lambda_T \lambda_R}}{2\Lambda - \Lambda_{\lambda_T \lambda_R}} \gamma \left[I_{\lambda_T, 11}^{m_T', m_T^{u''} m_T^{u'''}} I_{\lambda_R, 11}^{m_R', m_R^{u''} m_R^{u'''}} \right. \\ \left. - \frac{1}{2\sqrt{4\pi}} \left((-1)^{m_T^{u''}} \delta_{m_T^{u''}, -m_T^{u'''}} I_{\lambda_R, 11}^{m_R', m_R^{u''} m_R^{u'''}} \delta_{\lambda_T, 0} \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^{m_R^{u''}} \delta_{m_R^{u''}, -m_R^{u'''}} I_{\lambda_T, 11}^{m_T', m_T^{u''} m_T^{u'''}} \delta_{\lambda_R, 0} \right) \right] \\ \times (-1)^{m_T^{u'} + m_R^{u'} + m_T' + m_R'} I_{\lambda_T, 11}^{-m_T', 0} I_{\lambda_R, 11}^{-m_R', 0} m_R^{u'}. \quad (10.94)$$

Aus Gründen einer möglichst kompakten und übersichtlichen Darstellung beschränken wir uns im Folgenden darauf, von den neun möglichen kubischen Termen (10.91) nur die Berechnung des $(U^{00})^3$ -Beitrags auszuführen. Die Berechnung der anderen acht Beiträge wird aus diesem Beispiel ersichtlich. Dieser $(U^{00})^3$ -Beitrag in (10.94) hat den Vorfaktor

$$\frac{\gamma + \gamma^{\lambda_T \lambda_R}}{2\Lambda - \Lambda_{\lambda_T \lambda_R}} \gamma \left[I_{\lambda_T, 11}^{m_T', 00} I_{\lambda_R, 11}^{m_R', 00} - \frac{1}{2\sqrt{4\pi}} \left(I_{\lambda_R, 11}^{m_R', 00} \delta_{\lambda_T, 0} + I_{\lambda_T, 11}^{m_T', 00} \delta_{\lambda_R, 0} \right) \right] \\ \times (-1)^{m_T' + m_R'} I_{\lambda_T, 11}^{-m_T', 00} I_{\lambda_R, 11}^{-m_R', 00}. \quad (10.95)$$

Die Summation über alle λ_T , λ_R und m_T , m_R führt mit (10.61), (10.62) auf die nichtverschwindenden Kombinationen

$$(\lambda_T, m_T; \lambda_R, m_R) = (0, 0; 0, 0), (2, 0; 0, 0), (0, 0; 2, 0), (2, 0; 2, 0).$$

Für den ersten Fall $\lambda_T = \lambda_R = 0$ ergibt sich (10.95) zu Null. Die drei anderen Fälle liefern mit (10.61), (10.62) die Beiträge

$$\left[\frac{1}{40} \frac{\gamma}{\pi^2} \left(\frac{\gamma + \gamma^{2,0}}{2\Lambda - \Lambda_{2,0}} + \frac{\gamma + \gamma^{0,2}}{2\Lambda - \Lambda_{0,2}} \right) + \frac{1}{25} \frac{\gamma}{\pi^2} \frac{\gamma + \gamma^{2,2}}{2\Lambda - \Lambda_{2,2}} \right] (U^{00})^3. \quad (10.96)$$

10.5.5 Gleichungssystem

Die Berechnung für die Ordnungsparameter U^{10} , U^{01} und U^{11} kann analog zur Berechnung der Ordnungsparametergleichung von U^{00} durchgeführt werden. Daraus lassen sich dann gemäß Abschnitt 10.5.2 aus Symmetrieüberlegungen die restlichen fünf Gleichungen sofort angeben. Wir erhalten so das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{U}^{00} &= \Lambda U^{00} + \beta_1 (U^{00})^3 - 2\beta_2 U^{00} U^{-10} U^{10} - 2\bar{\beta}_2 U^{00} U^{0-1} U^{01} \\ &\quad + 2\beta_3 U^{00} U^{1-1} U^{-11} + 2\beta_3 U^{00} U^{-1-1} U^{11} + \beta_4 U^{01} U^{10} U^{-1-1} \\ &\quad + \beta_4 U^{0-1} U^{-10} U^{11} + \beta_4 U^{0-1} U^{10} U^{-11} + \beta_4 U^{01} U^{-10} U^{1-1}, \end{aligned} \quad (10.97)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}^{11} &= \Lambda U^{11} + \beta_4 U^{00} U^{01} U^{10} + \beta_5 (U^{01})^2 U^{1-1} + \beta_6 U^{01} U^{0-1} U^{11} \\ &\quad + \beta_3 (U^{00})^2 U^{11} + \beta_5 (U^{10})^2 U^{-11} + \bar{\beta}_6 U^{10} U^{-10} U^{11} \\ &\quad + \beta_7 U^{11} U^{1-1} U^{-11} + \beta_8 (U^{11})^2 U^{-1-1}, \end{aligned} \quad (10.98)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}^{-1-1} &= \Lambda U^{-1-1} + \beta_4 U^{00} U^{0-1} U^{-10} + \beta_5 (U^{0-1})^2 U^{-11} + \beta_6 U^{0-1} U^{01} U^{-1-1} \\ &\quad + \beta_3 (U^{00})^2 U^{-1-1} + \beta_5 (U^{-10})^2 U^{1-1} + \bar{\beta}_6 U^{-10} U^{10} U^{-1-1} \\ &\quad + \beta_7 U^{-1-1} U^{-11} U^{1-1} + \beta_8 (U^{-1-1})^2 U^{11}, \end{aligned} \quad (10.99)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}^{1-1} &= \Lambda U^{1-1} + \beta_4 U^{00} U^{0-1} U^{10} + \beta_5 (U^{0-1})^2 U^{11} + \beta_6 U^{0-1} U^{01} U^{1-1} \\ &\quad + \beta_3 (U^{00})^2 U^{1-1} + \beta_5 (U^{10})^2 U^{-1-1} + \bar{\beta}_6 U^{10} U^{-10} U^{1-1} \\ &\quad + \beta_7 U^{1-1} U^{11} U^{-1-1} + \beta_8 (U^{1-1})^2 U^{-11}, \end{aligned} \quad (10.100)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}^{-11} &= \Lambda U^{-11} + \beta_4 U^{00} U^{01} U^{-10} + \beta_5 (U^{01})^2 U^{-1-1} + \beta_6 U^{01} U^{0-1} U^{-11} \\ &\quad + \beta_3 (U^{00})^2 U^{-11} + \beta_5 (U^{-10})^2 U^{11} + \bar{\beta}_6 U^{-10} U^{10} U^{-11} \\ &\quad + \beta_7 U^{-11} U^{-1-1} U^{11} + \beta_8 (U^{-11})^2 U^{1-1}, \end{aligned} \quad (10.101)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}^{01} &= \Lambda U^{01} + \bar{\beta}_2 U^{01} (U^{00})^2 + \beta_9 (U^{01})^2 U^{0-1} \\ &\quad - 2\beta_3 U^{01} U^{10} U^{-10} - \beta_4 U^{00} U^{11} U^{-10} - \beta_4 U^{00} U^{10} U^{-11} \\ &\quad - \beta_6 U^{01} U^{11} U^{-1-1} - \beta_6 U^{01} U^{1-1} U^{-11} - 2\beta_5 U^{0-1} U^{11} U^{-11}, \end{aligned} \quad (10.102)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}^{0-1} &= \Lambda U^{0-1} + \bar{\beta}_2 U^{0-1} (U^{00})^2 + \beta_9 (U^{0-1})^2 U^{01} - 2\beta_3 U^{0-1} U^{-10} U^{10} \\ &\quad - \beta_4 U^{00} U^{-1-1} U^{10} - \beta_4 U^{00} U^{-10} U^{1-1} - \beta_6 U^{0-1} U^{-1-1} U^{11} \\ &\quad - \beta_6 U^{0-1} U^{-11} U^{1-1} - 2\beta_5 U^{01} U^{-1-1} U^{1-1}, \end{aligned} \quad (10.103)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}^{10} &= \Lambda U^{10} + \beta_2 U^{10} (U^{00})^2 + \bar{\beta}_9 (U^{10})^2 U^{-10} - 2\beta_3 U^{10} U^{01} U^{0-1} \\ &\quad - \beta_4 U^{00} U^{11} U^{0-1} - \beta_4 U^{00} U^{01} U^{1-1} - \bar{\beta}_6 U^{10} U^{11} U^{-1-1} \\ &\quad - \bar{\beta}_6 U^{10} U^{-11} U^{1-1} - 2\beta_5 U^{-10} U^{11} U^{1-1}, \end{aligned} \quad (10.104)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}^{-10} &= \Lambda U^{-10} + \beta_2 U^{-10} (U^{00})^2 + \bar{\beta}_9 (U^{-10})^2 U^{10} - 2\beta_3 U^{-10} U^{0-1} U^{01} \\ &\quad - \beta_4 U^{00} U^{-1-1} U^{01} - \beta_4 U^{00} U^{0-1} U^{-11} - \bar{\beta}_6 U^{-10} U^{-1-1} U^{11} \\ &\quad - \bar{\beta}_6 U^{-10} U^{1-1} U^{-11} - 2\beta_5 U^{10} U^{-1-1} U^{-11}. \end{aligned} \quad (10.105)$$

Wir führen die folgenden Abkürzungen ein:

$$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\pi^2}, \quad (10.106)$$

$$a' = \tilde{\gamma} \frac{\gamma + \gamma^{2,0}}{2\gamma - \alpha - \frac{1}{2}(\gamma^{2,0} - 1)}, \quad (10.107)$$

$$a'' = \tilde{\gamma} \frac{\gamma + \gamma^{0,2}}{2\gamma - \alpha - \frac{1}{2}(\gamma^{0,2} - 1)}, \quad (10.108)$$

$$b' = \tilde{\gamma} \frac{1 + \gamma^{2,0}}{2\gamma - \alpha - \frac{1}{2}(\gamma^{2,0} - 1)}, \quad (10.109)$$

$$b'' = \tilde{\gamma} \frac{1 + \gamma^{0,2}}{2\gamma - \alpha - \frac{1}{2}(\gamma^{0,2} - 1)}, \quad (10.110)$$

$$c = \tilde{\gamma} \frac{\gamma + \gamma^{2,2}}{2\gamma - \alpha - \gamma^{2,2}}. \quad (10.111)$$

Dann sind die Koeffizienten in (10.97)–(10.105) gegeben durch

$$\beta_1 = -\frac{9}{80}\tilde{\gamma} + \frac{1}{40}(a' + a'') - \frac{1}{80}(b' + b'') + \frac{1}{25}c, \quad (10.112)$$

$$\beta_2 = -\frac{9}{80}\tilde{\gamma} + \frac{1}{40}a'' - \frac{1}{20}a' - \frac{1}{80}b'' + \frac{1}{40}b' - \frac{2}{25}c, \quad (10.113)$$

$$\bar{\beta}_2 = -\frac{9}{80}\tilde{\gamma} + \frac{1}{40}a' - \frac{1}{20}a'' - \frac{1}{80}b' + \frac{1}{40}b'' - \frac{2}{25}c, \quad (10.114)$$

$$\beta_3 = -\frac{3}{80}\tilde{\gamma} - \frac{1}{80}(a' + a'') + \frac{1}{160}(b' + b'') + \frac{11}{200}c, \quad (10.115)$$

$$\beta_4 = -\frac{3}{40}\tilde{\gamma} - \frac{3}{80}(a' + a'') + \frac{3}{160}(b' + b'') + \frac{21}{200}c, \quad (10.116)$$

$$\beta_5 = \frac{3}{40}\tilde{\gamma} + \frac{3}{80}(a' + a'') - \frac{3}{160}(b' + b'') - \frac{3}{200}c, \quad (10.117)$$

$$\beta_6 = \frac{3}{20}\tilde{\gamma} + \frac{1}{16}a' - \frac{1}{80}a'' - \frac{1}{32}b' + \frac{1}{160}b'' - \frac{13}{200}c, \quad (10.118)$$

$$\bar{\beta}_6 = \frac{3}{20}\tilde{\gamma} + \frac{1}{16}a'' - \frac{1}{80}a' - \frac{1}{32}b'' + \frac{1}{160}b' - \frac{13}{200}c, \quad (10.119)$$

$$\beta_7 = -\frac{3}{10}\tilde{\gamma} - \frac{1}{16}(a' + a'') + \frac{1}{32}(b' + b'') - \frac{11}{200}c, \quad (10.120)$$

$$\beta_8 = -\frac{3}{20}\tilde{\gamma} + \frac{1}{80}(a' + a'') - \frac{1}{160}(b' + b'') + \frac{19}{200}c, \quad (10.121)$$

$$\beta_9 = \frac{9}{40}\tilde{\gamma} - \frac{1}{20}a' + \frac{1}{40}a'' + \frac{1}{40}b' - \frac{1}{80}b'' + \frac{1}{25}c, \quad (10.122)$$

$$\bar{\beta}_9 = \frac{9}{40}\tilde{\gamma} - \frac{1}{20}a'' + \frac{1}{40}a' + \frac{1}{40}b'' - \frac{1}{80}b' + \frac{1}{25}c. \quad (10.123)$$

Dabei beschreiben wiederum – analog zur Ebene – die jeweils ersten Terme $\propto \tilde{\gamma}$ die Beiträge der Ordnungsparameter selbst, während die restlichen Terme den Einfluss der zentralen Mannigfaltigkeit widerspiegeln.

10.6 Reelle Variablen

Wir gehen nun zu reellen Variablen über, wobei wir die Transformationsformeln wie folgt ansetzen:

$$\begin{aligned}
 u_0 &= U^{00}/\sqrt{2} \\
 u_1 &= \frac{1}{2}(U^{11} + U^{-1-1}) \quad , \quad u_2 = \frac{1}{2}i(U^{11} - U^{-1-1}) \\
 u_3 &= \frac{1}{2}(U^{1-1} + U^{-11}) \quad , \quad u_4 = \frac{1}{2}i(U^{1-1} - U^{-11}) \\
 u_5 &= \frac{1}{2}(U^{01} - U^{0-1}) \quad , \quad u_6 = \frac{1}{2}i(U^{01} + U^{0-1}) \\
 u_7 &= \frac{1}{2}(U^{10} - U^{-10}) \quad , \quad u_8 = \frac{1}{2}i(U^{10} + U^{-10}) .
 \end{aligned} \tag{10.124}$$

Umgekehrt lassen sich die komplexen Variablen gemäß

$$\begin{aligned}
 U^{00} &= \sqrt{2} u_0 \\
 U^{11} &= u_1 - iu_2 \quad , \quad U^{-1-1} = u_1 + iu_2 \\
 U^{1-1} &= u_3 - iu_4 \quad , \quad U^{-11} = u_3 + iu_4 \\
 U^{01} &= u_5 - iu_6 \quad , \quad U^{0-1} = -(u_5 + iu_6) \\
 U^{10} &= u_7 - iu_8 \quad , \quad U^{-10} = -(u_7 + iu_8)
 \end{aligned} \tag{10.125}$$

durch die reellen Größen ausdrücken. Aus dem Vergleich

$$U(\hat{t}, \hat{r}) = \sum_{m_T^u, m_R^u = -1}^{+1} U^{m_T^u m_R^u} Y_{1m_T^u}^T(\hat{t}) Y_{1m_R^u}^R(\hat{r}) = \sum_{j=0}^8 u_j y_j(\hat{t}, \hat{r}) \tag{10.126}$$

ergeben sich die reellen Moden $y_j(\hat{t}, \hat{r})$ zu

$$\begin{aligned}
 y_0(\hat{t}, \hat{r}) &= \sqrt{2} Y_{10}^T(\hat{t}) Y_{10}^R(\hat{r}) \\
 &= \frac{3\sqrt{2}}{4\pi} \cos \vartheta_t \cos \vartheta_r ,
 \end{aligned} \tag{10.127}$$

$$\begin{aligned}
 y_1(\hat{t}, \hat{r}) &= Y_{11}^T(\hat{t}) Y_{11}^R(\hat{r}) + Y_{1-1}^T(\hat{t}) Y_{1-1}^R(\hat{r}) \\
 &= \frac{3}{4\pi} \sin \vartheta_t \sin \vartheta_r \cos(\varphi_t + \varphi_r) ,
 \end{aligned} \tag{10.128}$$

$$\begin{aligned}
 y_2(\hat{t}, \hat{r}) &= -i[Y_{11}^T(\hat{t}) Y_{11}^R(\hat{r}) - Y_{1-1}^T(\hat{t}) Y_{1-1}^R(\hat{r})] \\
 &= \frac{3}{4\pi} \sin \vartheta_t \sin \vartheta_r \sin(\varphi_t + \varphi_r) ,
 \end{aligned} \tag{10.129}$$

$$\begin{aligned}
 y_3(\hat{t}, \hat{r}) &= Y_{11}^T(\hat{t}) Y_{1-1}^R(\hat{r}) + Y_{1-1}^T(\hat{t}) Y_{11}^R(\hat{r}) \\
 &= -\frac{3}{4\pi} \sin \vartheta_t \sin \vartheta_r \cos(\varphi_t - \varphi_r) ,
 \end{aligned} \tag{10.130}$$

$$\begin{aligned}
 y_4(\hat{t}, \hat{r}) &= i[Y_{1-1}^T(\hat{t}) Y_{11}^R(\hat{r}) - Y_{11}^T(\hat{t}) Y_{1-1}^R(\hat{r})] \\
 &= -\frac{3}{4\pi} \sin \vartheta_t \sin \vartheta_r \sin(\varphi_t - \varphi_r) ,
 \end{aligned} \tag{10.131}$$

$$\begin{aligned} y_5(\hat{t}, \hat{r}) &= Y_{10}^T(\hat{t})Y_{11}^R(\hat{r}) - Y_{10}^T(\hat{t})Y_{1-1}^R(\hat{r}) \\ &= -\frac{3}{2\sqrt{2}\pi} \cos \vartheta_t \sin \vartheta_r \cos \varphi_r, \end{aligned} \quad (10.132)$$

$$\begin{aligned} y_6(\hat{t}, \hat{r}) &= -i[Y_{10}^T(\hat{t})Y_{11}^R(\hat{r}) + Y_{10}^T(\hat{t})Y_{1-1}^R(\hat{r})] \\ &= -\frac{3}{2\sqrt{2}\pi} \cos \vartheta_t \sin \vartheta_r \sin \varphi_r, \end{aligned} \quad (10.133)$$

$$\begin{aligned} y_7(\hat{t}, \hat{r}) &= Y_{11}^T(\hat{t})Y_{10}^R(\hat{r}) - Y_{1-1}^T(\hat{t})Y_{10}^R(\hat{r}) \\ &= -\frac{3}{2\sqrt{2}\pi} \sin \vartheta_t \cos \vartheta_r \cos \varphi_t, \end{aligned} \quad (10.134)$$

$$\begin{aligned} y_8(\hat{t}, \hat{r}) &= -i[Y_{11}^T(\hat{t})Y_{10}^R(\hat{r}) + Y_{1-1}^T(\hat{t})Y_{10}^R(\hat{r})] \\ &= -\frac{3}{2\sqrt{2}\pi} \sin \vartheta_t \cos \vartheta_r \sin \varphi_t. \end{aligned} \quad (10.135)$$

Die Gleichungen für die reellen Variablen u_i lauten dann:

$$\begin{aligned} \dot{u}_0 &= \Lambda u_0 + 2\beta_1 u_0^3 + 2\bar{\beta}_2 u_0(u_5^2 + u_6^2) + 2\beta_2 u_0(u_7^2 + u_8^2) \\ &\quad + 2\beta_3 u_0(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) \\ &\quad + \sqrt{2}\beta_4(u_1 u_5 u_7 + u_2 u_5 u_8 + u_2 u_6 u_7 + u_4 u_6 u_7 \\ &\quad - u_1 u_6 u_8 - u_3 u_5 u_7 - u_4 u_5 u_8 - u_3 u_6 u_8), \end{aligned} \quad (10.136)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \Lambda u_1 + \sqrt{2}\beta_4 u_0(u_5 u_7 - u_6 u_8) + \beta_5(u_3 u_5^2 - u_3 u_6^2 - 2u_4 u_5 u_6) \\ &\quad - \beta_6 u_1(u_5^2 + u_6^2) - \bar{\beta}_6 u_1(u_7^2 + u_8^2) \\ &\quad + 2\beta_3 u_0^2 u_1 + \beta_5(u_3 u_7^2 - u_3 u_8^2 + 2u_4 u_7 u_8) \\ &\quad + \beta_7 u_1(u_3^2 + u_4^2) + \beta_8 u_1(u_1^2 + u_2^2), \end{aligned} \quad (10.137)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_2 &= \Lambda u_2 + \sqrt{2}\beta_4 u_0(u_5 u_8 + u_6 u_7) + \beta_5(u_5^2 u_4 - u_4 u_6^2 + 2u_3 u_5 u_6) \\ &\quad - \beta_6 u_2(u_5^2 + u_6^2) - \bar{\beta}_6 u_2(u_7^2 + u_8^2) \\ &\quad + 2\beta_3 u_0^2 u_2 - \beta_5(u_4 u_7^2 - u_4 u_8^2 - 2u_3 u_7 u_8) \\ &\quad + \beta_7 u_2(u_3^2 + u_4^2) + \beta_8 u_2(u_1^2 + u_2^2), \end{aligned} \quad (10.138)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_3 &= \Lambda u_3 - \sqrt{2}\beta_4 u_0(u_5 u_7 + u_6 u_8) + \beta_5(u_1 u_5^2 - u_1 u_6^2 + 2u_2 u_5 u_6) \\ &\quad - \beta_6 u_3(u_5^2 + u_6^2) - \bar{\beta}_6 u_3(u_7^2 + u_8^2) \\ &\quad + 2\beta_3 u_0^2 u_3 + \beta_5(u_1 u_7^2 - u_1 u_8^2 + 2u_2 u_7 u_8) \\ &\quad + \beta_7 u_3(u_1^2 + u_2^2) + \beta_8 u_3(u_3^2 + u_4^2), \end{aligned} \quad (10.139)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_4 &= \Lambda u_4 + \sqrt{2}\beta_4 u_0(u_6 u_7 - u_5 u_8) + \beta_5(u_2 u_5^2 - u_2 u_6^2 - 2u_1 u_5 u_6) \\ &\quad - \beta_6 u_4(u_5^2 + u_6^2) - \bar{\beta}_6 u_4(u_7^2 + u_8^2) \\ &\quad + 2\beta_3 u_0^2 u_4 + \beta_5(u_2 u_8^2 - u_2 u_7^2 + 2u_1 u_7 u_8) \\ &\quad + \beta_7 u_4(u_1^2 + u_2^2) + \beta_8 u_4(u_3^2 + u_4^2), \end{aligned} \quad (10.140)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_5 &= \Lambda u_5 + 2\bar{\beta}_2 u_0^2 u_5 - \beta_9 u_5(u_5^2 + u_6^2) + 2\beta_3 u_5(u_7^2 + u_8^2) \\ &\quad + \sqrt{2}\beta_4 u_0(u_1 u_7 - u_3 u_7 + u_2 u_8 - u_4 u_8) \\ &\quad - \beta_6 u_5(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) \\ &\quad - 2\beta_5(u_1 u_4 u_6 - u_1 u_3 u_5 - u_2 u_4 u_5 - u_2 u_3 u_6), \end{aligned} \quad (10.141)$$

$$\begin{aligned}
\dot{u}_6 &= \Lambda u_6 + 2\bar{\beta}_2 u_0^2 u_6 - \beta_9 u_6 (u_5^2 + u_6^2) + 2\beta_3 u_6 (u_7^2 + u_8^2) \\
&\quad + \sqrt{2} \beta_4 u_0 (u_2 u_7 + u_4 u_7 - u_1 u_8 - u_3 u_8) \\
&\quad - \beta_6 u_6 (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) \\
&\quad - 2\beta_5 (u_1 u_4 u_5 + u_1 u_3 u_6 + u_2 u_4 u_6 - u_2 u_3 u_5), \tag{10.142}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{u}_7 &= \Lambda u_7 + 2\beta_2 u_0^2 u_7 - \bar{\beta}_9 u_7 (u_7^2 + u_8^2) + 2\beta_3 u_7 (u_5^2 + u_6^2) \\
&\quad + \sqrt{2} \beta_4 u_0 (u_1 u_5 - u_3 u_5 + u_2 u_6 + u_4 u_6) \\
&\quad - \bar{\beta}_6 u_7 (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) \\
&\quad - 2\beta_5 (u_2 u_4 u_7 - u_1 u_3 u_7 - u_2 u_3 u_8 - u_1 u_4 u_8), \tag{10.143}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{u}_8 &= \Lambda u_8 + 2\beta_2 u_0^2 u_8 - \bar{\beta}_9 u_8 (u_7^2 + u_8^2) + 2\beta_3 u_8 (u_5^2 + u_6^2) \\
&\quad - \sqrt{2} \beta_4 u_0 (u_1 u_6 + u_3 u_6 - u_2 u_5 + u_4 u_5) \\
&\quad - \bar{\beta}_6 u_8 (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) \\
&\quad - 2\beta_5 (u_1 u_3 u_8 - u_2 u_3 u_7 - u_1 u_4 u_7 - u_2 u_4 u_8). \tag{10.144}
\end{aligned}$$

10.7 Potential

Falls ein Potential V existiert, lassen sich die Ordnungsgleichungen u_i aus

$$\dot{u}_i = -\frac{\partial V(\{u_j\})}{\partial u_i} = K_i(\{u_j\}) \tag{10.145}$$

gewinnen. Für die Terme $K_i(\{u_j\})$ müssen die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial K_i}{\partial u_j} = \frac{\partial K_j}{\partial u_i} \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots, 8) \tag{10.146}$$

erfüllt sein. Bei neun Variablen sind dies 36 Integrabilitätsbedingungen. Diese sind sämtlich erfüllt. So ist beispielsweise

$$\frac{\partial K_0}{\partial u_5} = 4\bar{\beta}_2 u_0 u_5 + \sqrt{2} \beta_4 (u_1 u_7 + u_2 u_8 - u_3 u_7 - u_4 u_8) = \frac{\partial K_5}{\partial u_0}. \tag{10.147}$$

Das Potential zu den reellen Ordnungsgleichungen (10.136)–(10.144) ergibt sich nach längerer Rechnung zu

$$\begin{aligned}
V(\{u_j\}) &= -\frac{\Lambda}{2} \sum_{j=0}^8 u_j^2 - \frac{\beta_1}{2} u_0^4 - \bar{\beta}_2 u_0^2 (u_5^2 + u_6^2) - \beta_2 u_0^2 (u_7^2 + u_8^2) - \beta_3 u_0^2 (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) \\
&\quad - \sqrt{2} \beta_4 u_0 (u_1 u_5 u_7 + u_2 u_5 u_8 + u_2 u_6 u_7 + u_4 u_6 u_7 \\
&\quad \quad - u_1 u_6 u_8 - u_3 u_5 u_7 - u_4 u_5 u_8 - u_3 u_6 u_8) \\
&\quad - \beta_5 (u_5^2 - u_6^2) (u_1 u_3 + u_2 u_4) - \beta_5 (u_7^2 - u_8^2) (u_1 u_3 - u_2 u_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\beta_5 u_7 u_8 (u_1 u_4 + u_2 u_3) - 2\beta_5 u_5 u_6 (u_2 u_3 - u_1 u_4) \\
& + \frac{1}{2} [\beta_6 (u_5^2 + u_6^2) + \bar{\beta}_6 (u_7^2 + u_8^2)] (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) \\
& - \frac{\beta_7}{2} (u_1^2 + u_2^2) (u_3^2 + u_4^2) - \beta_3 (u_5^2 + u_6^2) (u_7^2 + u_8^2) \\
& - \frac{\beta_8}{4} [(u_1^2 + u_2^2)^2 + (u_3^2 + u_4^2)^2] + \frac{\beta_9}{4} (u_5^2 + u_6^2)^2 + \frac{\bar{\beta}_9}{4} (u_7^2 + u_8^2)^2. \quad (10.148)
\end{aligned}$$

10.8 Stationäre Zustände

Eine vollständige analytische Bestimmung aller stationären Zustände der reellen Ordnungsparametergleichungen (10.136)–(10.144) ist offensichtlich nicht möglich. Wir wollen hier zeigen, dass die stationären Zustände retinotope Moden zulassen. Dazu betrachten wir den Spezialfall

$$u_1, u_2, u_5, u_6, u_7, u_8 = 0. \quad (10.149)$$

Dann lauten die Gleichungen für die nichtverschwindenden Amplituden u_0, u_3, u_4 nach (10.136), (10.139) und (10.140)

$$\begin{aligned}
\dot{u}_0 &= \Lambda u_0 + 2\beta_1 u_0^3 + 2\beta_3 (u_3^2 + u_4^2) u_0, \\
\dot{u}_3 &= \Lambda u_3 + 2\beta_3 u_0^2 u_3 + \beta_8 (u_3^2 + u_4^2) u_3, \\
\dot{u}_4 &= \Lambda u_4 + 2\beta_3 u_0^2 u_4 + \beta_8 (u_3^2 + u_4^2) u_4. \quad (10.150)
\end{aligned}$$

Aufgrund der Relation

$$\frac{\dot{u}_3}{u_3} = \frac{\dot{u}_4}{u_4} \quad (10.151)$$

gelangt man analog zur Behandlung des Problems der Saite in Abschnitt 8.5.5 zu konstanten Phasen, und damit $u_3 \propto u_4$. Somit lässt sich obiges Gleichungssystem von drei auf zwei Variablen reduzieren. Nach Einführen der neuen Variablen

$$\xi = \sqrt{u_3^2 + u_4^2} \quad (10.152)$$

erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\dot{u}_0 &= \Lambda u_0 + 2\beta_1 u_0^3 + 2\beta_3 \xi^2 u_0, \\
\dot{\xi} &= \Lambda \xi + 2\beta_3 u_0^2 \xi + \beta_8 \xi^3. \quad (10.153)
\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich vier stationäre Lösungen:

1. $u_0 = \xi = 0$,
2. $u_0 = 0, \quad \xi^2 = -\frac{\Lambda}{\beta_8}$,

$$3. \quad \xi = 0, \quad u_0^2 = -\frac{\Lambda}{2\beta_1},$$

$$4. \quad u_0^2 = \frac{\beta_8 - 2\beta_3}{2\beta_1 - 2\beta_3} \xi^2.$$

Wir zeigen nun, dass sich im letzten Fall, bei dem die u_0 -Mode und die ξ -Mode koexistieren, eine retinotopie Mode ergibt. Mit (10.112), (10.115) und (10.121) folgt ganz allgemein

$$\beta_8 = \beta_1 + \beta_3. \quad (10.154)$$

Damit ergibt sich

$$u_0^2 = \frac{1}{2} \xi^2. \quad (10.155)$$

In Gleichung (10.153) für den stationären Fall eingesetzt erhält man mit (10.154)

$$u_0^2 = -\frac{\Lambda}{2(\beta_3 + \beta_8)}, \quad \xi^2 = -\frac{\Lambda}{\beta_3 + \beta_8}. \quad (10.156)$$

Dies liefert als Bedingung für die Koexistenz die Ungleichung

$$\beta_3 + \beta_8 < 0. \quad (10.157)$$

Weiterhin fordern wir, dass dieser Zustand stabil ist. Dazu betrachten wir das Potential, das sich aus (10.148) mit (10.149) und (10.152) zu

$$V(u_0, \xi) = -\frac{\Lambda}{2}(u_0^2 + \xi^2) - \frac{\beta_1}{2}u_0^4 - \beta_3 u_0^2 \xi^2 - \frac{\beta_4}{4}\xi^4 \quad (10.158)$$

ergibt. Stabile Zustände des Potentials sind durch die Minima des Potentials gegeben. Wir berechnen zunächst die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial u_0^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial u_0 \partial \xi} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial u_0} & \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} \end{vmatrix} \quad (10.159)$$

sowie die zweite Ableitung $\partial^2 V / \partial u_0^2$. Diese ergeben sich am Punkt (u_0, ξ_0) von (10.156) zu

$$D \left(\sqrt{-\frac{\Lambda}{2(\beta_3 + \beta_8)}}, \sqrt{-\frac{\Lambda}{\beta_3 + \beta_8}} \right) = -4\Lambda^2 \frac{2\beta_3 - \beta_8}{\beta_3 + \beta_8}, \quad (10.160)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u_0^2} \left(\sqrt{-\frac{\Lambda}{2(\beta_3 + \beta_8)}}, \sqrt{-\frac{\Lambda}{\beta_3 + \beta_8}} \right) = -2\Lambda \frac{\beta_3 - \beta_8}{\beta_3 + \beta_8}. \quad (10.161)$$

Für die Existenz eines Extremums ist $D > 0$ zu fordern, bei einem Minimum muss außerdem die zweite Ableitung (10.161) ebenfalls positiv sein. Dies führt mit $\Lambda > 0$ und (10.157) zu den Ungleichungen

$$2\beta_3 - \beta_8 > 0, \quad \beta_3 - \beta_8 > 0. \quad (10.162)$$

Die Ungleichungen (10.157) und (10.162) lassen sich umschreiben zu

$$\beta_8 < 0, \quad \beta_8 < \beta_3 < -\beta_8, \quad 2\beta_3 > \beta_8. \quad (10.163)$$

Sind diese erfüllt, so können die u_0 - und die ξ -Mode koexistieren. Wir geben die Lösung gleich in komplexen Variablen an, wobei wir für ξ o. B. d. A. $u_4 = 0$ annehmen. Dann ist gemäß (10.152) und den Transformationsformeln (10.125)

$$U^{00} = \sqrt{-\frac{\Lambda}{\beta_3 + \beta_8}}, \quad U^{1-1} = U^{-11} = -\sqrt{-\frac{\Lambda}{\beta_3 + \beta_8}}. \quad (10.164)$$

Damit ist der instabile Anteil gegeben durch

$$U(\hat{t}, \hat{r}) = \sqrt{-\frac{\Lambda}{\beta_3 + \beta_8}} [Y_{10}^T(\hat{t})Y_{10}^R(\hat{r}) - Y_{11}^T(\hat{t})Y_{1-1}^R(\hat{r}) - Y_{1-1}^T(\hat{t})Y_{11}^R(\hat{r})]. \quad (10.165)$$

Nach dem Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen (10.33) ist dies gerade das Legendre-Polynom mit $l = 1$:

$$U(\hat{t}, \hat{r}) = \sqrt{-\frac{\Lambda}{\beta_3 + \beta_8}} P_1(\hat{t} \cdot \hat{r}) = \sqrt{-\frac{\Lambda}{\beta_3 + \beta_8}} \hat{t} \cdot \hat{r}. \quad (10.166)$$

Das Minimum von $U(\hat{t}, \hat{r})$ ist gegeben, wenn \hat{t} und \hat{r} antiparallel ausgerichtet sind, der Abstand auf der Einheitskugel also maximal wird. Mit abnehmendem Einschlusswinkel ψ , der mit dem Skalarprodukt der beiden Vektoren gemäß $\cos \psi = \hat{t} \cdot \hat{r}$ zusammenhängt, sinkt $U(\hat{t}, \hat{r})$, bis schließlich bei paralleler Ausrichtung das Maximum erreicht ist. Es handelt sich also ganz offensichtlich um eine retinotopie Mode.

10.9 1-1-Retinotopie

Wir betrachten nun retinotopie Zustände. Analog zur Situation bei der Behandlung der Saite, wo die retinotopen Zustände durch Verbindungsgewichte der Form $w(t \pm r)$ gegeben waren, fordern wir hier, dass das Verbindungsgewicht nur vom Abstand der Punkte auf der Kugeloberfläche und damit vom Winkel abhängt, den \hat{t} und \hat{r} miteinander einschließen.

Die Frage, welche höheren Moden zu (10.166) angeregt werden, ist einfach zu beantworten. Die Legendre-Polynome bilden ein vollständiges Orthonormalsystem [65]:

$$\int_{-1}^1 P_l(\sigma) P_{l'}(\sigma) d\sigma = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}, \quad (10.167)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\sigma') P_l(\sigma) = \delta(\sigma - \sigma'). \quad (10.168)$$

Somit muss jedes Produkt von Legendre-Polynomen wieder als eine Linearkombination von Legendre-Polynomen darstellbar sein. Wir machen daher den Ansatz

$$w(\sigma) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) Z_l P_l(\sigma), \quad (10.169)$$

wobei die Amplituden Z_l nur von der Zeit abhängen sollen.

10.9.1 Rekursionsgleichungen

Einsetzen von (10.169) in die Häussler-Gleichung (10.3) führt nach Ausführen der Integrale auf

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \dot{Z}_l P_l(\sigma) &= \alpha \left(1 - \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) Z_l P_l(\sigma) \right) + \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) Z_l P_l(\sigma) \\ &\quad \times \sum_{l'=0}^{\infty} (2l'+1) Z_{l'} f_{l'}^T f_{l'}^R (P_{l'}(\sigma) - Z_{l'}). \end{aligned} \quad (10.170)$$

Aufgrund der Vollständigkeit (10.168) lassen sich die in (10.170) auftretenden Produkte über Legendre-Polynome auf Linearkombinationen einzelner Legendre-Polynome zurückführen. Diese Zerlegung ist gemäß [66, 8.915] durch

$$P_l(\sigma) P_{l'}(\sigma) = \sum_{k=0}^l A_{l,l',k} P_{l+l'-2k}(\sigma), \quad l \leq l', \quad (10.171)$$

mit den Koeffizienten

$$A_{l,l',k} = \frac{a_{l-k} a_k a_{l-k}}{a_{l+l'-k}} \frac{2l'+2l-4k+1}{2l'+2l-2k+1}, \quad a_k = \frac{(2k-1)!!}{k!} \quad (10.172)$$

gegeben. Dabei ist die bei a_k auftretende Doppelfakultät wie folgt definiert:

$$n!! = \begin{cases} n \cdot (n-2) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1; & n > 0 \text{ ungerade,} \\ n \cdot (n-2) \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2; & n > 0 \text{ gerade,} \\ 1; & n = -1, 0. \end{cases} \quad (10.173)$$

Beiträge zum Polynom $P_l(\sigma)$ erhält man genau dann, wenn

$$k = \frac{l+l'-\tilde{l}}{2} \quad (10.174)$$

erfüllt ist. Mit den Orthonormalitätsrelationen (10.167) erhält man folgende Rekursionsgleichung:

$$\begin{aligned} (2l+1) \dot{Z}_l &= \alpha [\delta_{l,0} - (2l+1) Z_l] - (2l+1) Z_l (Z_0^2 + 3f_1^T f_1^R Z_1^2) \\ &\quad + \sum_{l'=0}^{\infty} (2l'+1) Z_{l'} \left[\sum_{l''=0}^l (2l''+1) Z_{l''} f_{l''}^T f_{l''}^R \sum_{k=0}^{l''} A_{l',l'',k} \delta_{k,(l'+l''-l)/2} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l''=l'+1}^{\infty} (2l''+1) Z_{l''} f_{l''}^T f_{l''}^R \sum_{k=0}^{l'} A_{l',l'',k} \delta_{k,(l'+l''-l)/2} \right]. \end{aligned} \quad (10.175)$$

10.9.2 Spezielle Kooperationsfunktionen

Wir betrachten den Fall, dass die Kooperationsfunktionen (10.31), (10.32) in der Form

$$c_T(\hat{t} \cdot \hat{t}') = \frac{1}{4\pi}[1 + q_T P_1(\hat{t} \cdot \hat{t}')], \quad c_R(\hat{r} \cdot \hat{r}') = \frac{1}{4\pi}[1 + q_R P_1(\hat{r} \cdot \hat{r}')] \quad (10.176)$$

vorliegen. Wegen $P_1(\sigma) = \sigma$ handelt es sich dabei um lineare Kooperationsfunktionen. Mit $\gamma = q_T q_R / 6$ ist $f_1^T f_1^R = 2\gamma/3$. Dann folgt für $l = 0$

$$\dot{Z}_0 = -(\alpha + Z_0^2 + 2\gamma Z_1^2)(Z_0 - 1). \quad (10.177)$$

Für $l \neq 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} (2l+1)\dot{Z}_l &= -\alpha(2l+1)Z_l - (2l+1)Z_l(Z_0 + 3f_1^T f_1^R Z_1^2) \\ &\quad + (2l+1)Z_0 Z_l A_{l,0,0} + 3f_1^T f_1^R Z_1(2l-1)Z_{l-1} A_{l-1,1,0} \\ &\quad + 3f_1^T f_1^R Z_1(2l+3)Z_{l+1} A_{l+1,1,1}. \end{aligned} \quad (10.178)$$

Mit (10.172) erhält man

$$A_{l,0,0} = 1, \quad (10.179)$$

$$A_{l-1,1,0} = \frac{l}{2l-1}, \quad (10.180)$$

$$A_{l+1,1,1} = \frac{l+1}{2l+3}. \quad (10.181)$$

Daher wird

$$\dot{Z}_l = -(\alpha + Z_0^2 + 2\gamma Z_1^2)Z_l + Z_0 Z_l + 2\gamma Z_1 \frac{lZ_{l-1} + (l+1)Z_{l+1}}{2l+1}. \quad (10.182)$$

Dem Langzeitverhalten des Systems entsprechen die stationären Zustände. Aus (10.177) folgt sofort

$$Z_0 = 1. \quad (10.183)$$

Für $l \neq 0$ erhält man dann im stationären Fall

$$(\alpha + 2\gamma Z_1^2)Z_l = 2\gamma Z_1 \frac{lZ_{l-1} + (l+1)Z_{l+1}}{2l+1}. \quad (10.184)$$

Dies ist eine nichtlineare Rekursionsgleichung für die Amplituden Z_l . Sie lässt sich aber durch Einführen der Variablen

$$u = \frac{\alpha + 2\gamma Z_1^2}{2\gamma Z_1} \quad (10.185)$$

formal in die lineare Rekursionsgleichung

$$(l+1)Z_{l+1} = (2l+1)uZ_l + lZ_{l-1}, \quad l \geq 1 \quad (10.186)$$

umformen. Damit haben wir ein nichtlineares Problem auf ein lineares Problem zurückgeführt, wobei (10.185) eine Selbstkonsistenz-Bedingung darstellt. Das bedeutet, dass die Lösung $Z_l(u)$ der Gleichung (10.186) im Fall $l = 1$ mit (10.185) konsistent sein muss.

10.9.3 Erzeugende Funktion

Gesucht sind nun die Funktionen $Z_l(u)$. Dazu berechnen wir die erzeugende Funktion von $Z_l(u)$, d. h. die Funktion

$$E(x, u) = \sum_{l=0}^{\infty} Z_l(u)x^l. \quad (10.187)$$

Es gilt dann mit (10.183)

$$E(0, u) = Z_0(u) = 1. \quad (10.188)$$

Ziel ist zunächst die Bestimmung der Differentialgleichung für $E(x, u)$ mit der Nebenbedingung (10.188). Ausgangspunkt dafür ist die Rekursionsformel (10.186). Multiplikation auf beiden Seiten mit x^l und Summation über alle $l \geq 1$ liefert für die linke Seite

$$\sum_{l=1}^{\infty} (l+1)x^l Z_{l+1}(u) = \frac{\partial}{\partial x} E(x, u) - Z_1(u). \quad (10.189)$$

Auf ähnliche Weise erhält man für die Terme der rechten Seite

$$\sum_{l=1}^{\infty} (2l+1)ux^l Z_l(u) = 2ux \frac{\partial}{\partial x} E(x, u) + uE(x, u) - u, \quad (10.190)$$

$$- \sum_{l=1}^{\infty} lx^l Z_{l-1}(u) = -x^2 \frac{\partial}{\partial x} E(x, u) - xE(x, u), \quad (10.191)$$

womit sich für $E(x, u)$ die gesuchte Differentialgleichung zu

$$(x^2 - 2ux + 1) \frac{\partial E(x, u)}{\partial x} = (u - x)E(x, u) + Z_1(u) - u \quad (10.192)$$

ergibt. Dies ist eine nichtlineare, partielle, inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung. Das stellt einen wichtigen Unterschied zur Berechnung der Erzeugenden im Fall der Saite dar. Dort erhielt man für die Erzeugende die algebraische Gleichung (8.180), mit deren Hilfe man diese sofort angeben konnte.

Zunächst bestimmen wir für (10.192) die homogene Lösung:

$$(x^2 - 2ux + 1) \frac{\partial E_{\text{hom}}(x, u)}{\partial x} = (u - x)E_{\text{hom}}(x, u). \quad (10.193)$$

Daraus folgt nach Trennung der Variablen und Integration

$$\ln E_{\text{hom}}(x, u) = C(u) + \int \frac{u - x}{x^2 - 2ux + 1} dx, \quad (10.194)$$

was sich unmittelbar integrieren lässt zu

$$\ln E_{\text{hom}}(x, u) = C(u) - \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2ux + 1). \quad (10.195)$$

Dabei ist $C(u)$ eine Integrationskonstante, die noch von u abhängen kann. Mit $K(u) = \exp[C(u)]$ lautet die homogene Lösung dann

$$E_{\text{hom}}(x, u) = \frac{K(u)}{\sqrt{x^2 - 2ux + 1}}. \quad (10.196)$$

Als Nächstes bestimmen wir eine partikuläre Lösung, die wir mit der Methode der Variation der Konstanten als

$$E_{\text{part}}(x, u) = \frac{K(x, u)}{\sqrt{x^2 - 2ux + 1}} \quad (10.197)$$

ansetzen. Einsetzen in (10.192) führt auf die Differentialgleichung

$$\frac{\partial K(x, u)}{\partial x} = \frac{Z_1(u) - u}{\sqrt{x^2 - 2ux + 1}}, \quad (10.198)$$

deren Lösung sich mit [66, 2.261] zu

$$K(x, u) = \frac{[Z_1(u) - u] \ln[2\sqrt{x^2 - 2ux + 1} + 2(x - u)]}{\sqrt{x^2 - 2ux + 1}} \quad (10.199)$$

ergibt. Damit lautet die gesamte Lösung

$$E(x, u) = E_{\text{hom}}(x, u) + E_{\text{part}}(x, u) \quad (10.200)$$

wie folgt:

$$E(x, u) = \frac{K(u) + [Z_1(u) - u] \ln[2\sqrt{x^2 - 2ux + 1} + 2(x - u)]}{\sqrt{x^2 - 2ux + 1}}. \quad (10.201)$$

Mit der Bedingung (10.188) erhält man $K(u)$ zu

$$K(u) = 1 - [Z_1(u) - u] \ln(2 - 2u) \quad (10.202)$$

und damit

$$E(x, u) = \frac{1 + [Z_1(u) - u] \ln \frac{\sqrt{x^2 - 2ux + 1} + x - u}{1 - u}}{\sqrt{x^2 - 2ux + 1}}. \quad (10.203)$$

10.9.4 Zerlegung der Erzeugenden

Zur Bestimmung der unbekanntenen Funktion $Z_1(u)$ führen wir folgende Überlegung durch. Die Rekursionsformel (10.186) ist für die Legendre-Polynome sowohl erster Art $P_l(u)$ als auch zweiter Art $Q_l(u)$ gültig. Somit ist es naheliegend anzunehmen, dass sich obige Erzeugende (10.203) als Linearkombination der Erzeugenden der

Legendre-Polynome erster und zweiter Art darstellen lässt. Diese sind gemäß [66, 8.921] und [66, 8.791] durch

$$E_P(x, u) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(u)x^l = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2ux + 1}}, \quad (10.204)$$

$$E_Q(x, u) = \sum_{l=0}^{\infty} Q_l(u)x^l = \frac{\ln \frac{\sqrt{x^2 - 2ux + 1} + u - x}{\sqrt{u^2 - 1}}}{\sqrt{x^2 - 2ux + 1}}, \quad (10.205)$$

gegeben. Wir betrachten in (10.203) zunächst den folgenden Term:

$$\ln \frac{\sqrt{x^2 - 2ux + 1} + x - u}{1 - u}.$$

Nach Erweitern mit $\sqrt{x^2 - 2ux + 1} + u - x$ in Zähler und Nenner hat man

$$\begin{aligned} \ln \frac{1 - u^2}{(1 - u)[\sqrt{x^2 - 2ux + 1} + u - x]} \\ &= \ln \left(\sqrt{\frac{u+1}{u-1}} \cdot \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 2ux + 1} + u - x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{u+1}{u-1} - \ln \frac{u-x + \sqrt{x^2 - 2ux + 1}}{\sqrt{u^2 - 1}}. \end{aligned} \quad (10.206)$$

Mit dem Legendre-Polynom zweiter Art für $l = 0$ [67]

$$Q_0(u) = \frac{1}{2} \ln \frac{u+1}{u-1} \quad (10.207)$$

folgt dann

$$\ln \frac{\sqrt{x^2 - 2ux + 1} + x - u}{1 - u} = Q_0(u) - \ln \frac{u-x + \sqrt{x^2 - 2ux + 1}}{\sqrt{u^2 - 1}}. \quad (10.208)$$

Damit lässt sich schließlich die Erzeugende (10.203) in der Form

$$E(x, u) = \{1 + [Z_1(u) - u]Q_0(u)\}E_P(x, u) - [Z_1(u) - u]E_Q(x, u) \quad (10.209)$$

schreiben. Der Vergleich mit (10.187) liefert somit

$$Z_l(u) = \{1 + [Z_1(u) - u]Q_0(u)\}P_l(u) - [Z_1(u) - u]Q_l(u). \quad (10.210)$$

10.9.5 Randbedingungen

Für den Ansatz (10.169) ist zu fordern, dass die Summe konvergiert. Da die Legendre-Polynome $P_l(\sigma)$ nicht mit wachsendem l verschwinden, muss infolgedessen

$$\lim_{l \rightarrow \infty} Z_l(u) = 0 \quad (10.211)$$

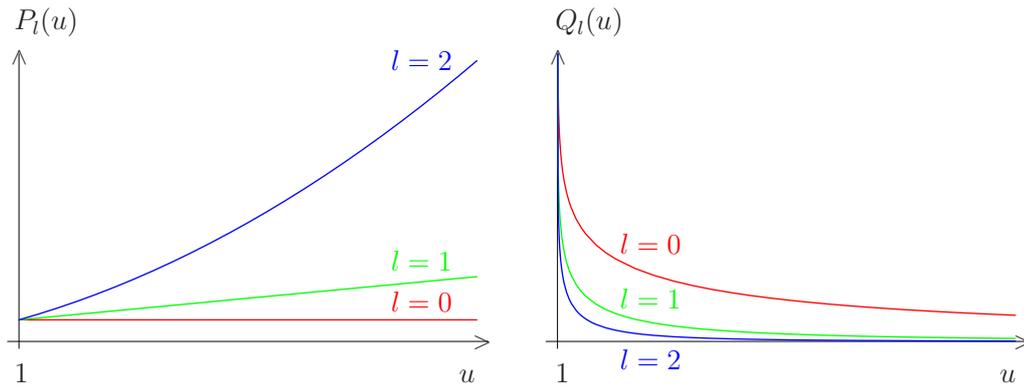


Abbildung 10.1: Die Legendre-Polynome erster und zweiter Art, $P_l(u)$ und $Q_l(u)$, aufgetragen für $u > 1$. Für $u \downarrow 1$ gilt $P_l(1) = 1$, während $Q_l(u)$ dort divergiert. Wichtig bezüglich der Randbedingungen für $Z_l(u)$ ist das unterschiedliche Verhalten für steigende l -Werte: $P_l(u)$ divergiert gemäß (10.212), während $Q_l(u)$ gegen Null konvergiert.

gelten. Die Reihe der Werte der Legendre-Polynome erster Art mit festem $u > 1$ divergiert für $l \rightarrow \infty$ gemäß [66, 8.917]

$$P_0(u) < P_1(u) < P_2(u) < \dots < P_n(u) < \dots, \quad u > 1. \quad (10.212)$$

Die Legendre-Polynome zweiter Art hingegen konvergieren gegen Null (siehe Abbildung 10.1). Daraus folgt mit (10.210)

$$1 + [Z_1(u) - u]Q_0(u) = 0. \quad (10.213)$$

Mit der Beziehung

$$Q_1(u) = \frac{u}{2} \ln \frac{u+1}{u-1} - 1 = uQ_0(u) - 1 \quad (10.214)$$

ist dann

$$Z_1(u) = \frac{Q_1(u)}{Q_0(u)}. \quad (10.215)$$

Damit erhält man

$$-[Z_1(u) - u] = \frac{1}{Q_0(u)} \quad (10.216)$$

und somit als Endergebnis für (10.210):

$$Z_l(u) = \frac{Q_l(u)}{Q_0(u)}. \quad (10.217)$$

10.9.6 Lösung

Eingesetzt in (10.169) gelangen wir somit zur Lösung

$$w(\sigma) = \frac{1}{Q_0(u)} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) Q_l(u) P_l(\sigma). \quad (10.218)$$

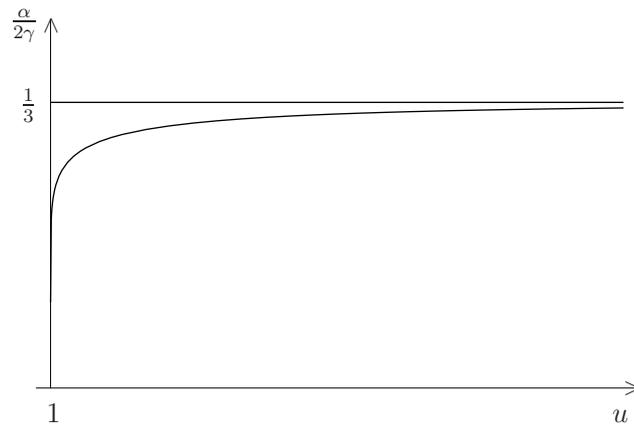


Abbildung 10.2: Der Zusammenhang zwischen dem Kontrollparameter α und der Größe u gemäß der transzendenten Gleichung (10.222).

Dann folgt mit der Formel [66, 8.791]

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) Q_l(u) P_l(\sigma) = \frac{1}{u-\sigma} \quad (10.219)$$

sowie (10.207) für das Verbindungsgewicht

$$w(\sigma) = \frac{2}{u-\sigma} \left(\ln \frac{u+1}{u-1} \right)^{-1}. \quad (10.220)$$

Nun hängt aber u gemäß der Selbstkonsistenz-Bedingung (10.185) von α ab. Wir lösen (10.185) nach Z_1 auf und vergleichen mit dem Ergebnis (10.215) für Z_1 :

$$Z_1^{\pm} = \frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} - \frac{\alpha}{2\gamma}}, \quad Z_1 = u - 2 \left(\ln \frac{u+1}{u-1} \right)^{-1}. \quad (10.221)$$

Gleichsetzen und Quadrieren führt auf

$$\frac{\alpha}{2\gamma} = -2 \left(\ln \frac{u+1}{u-1} \right)^{-1} \left[2 \left(\ln \frac{u+1}{u-1} \right)^{-1} - u \right]. \quad (10.222)$$

Diese transzendenten Gleichung zwischen α und u ist in Abbildung 10.2 graphisch dargestellt.

10.9.7 Grenzfälle

Im Fall $u \downarrow 1$ folgt mit

$$\lim_{u \downarrow 1} \left(\ln \frac{u+1}{u-1} \right)^{-1} = 0 \quad (10.223)$$

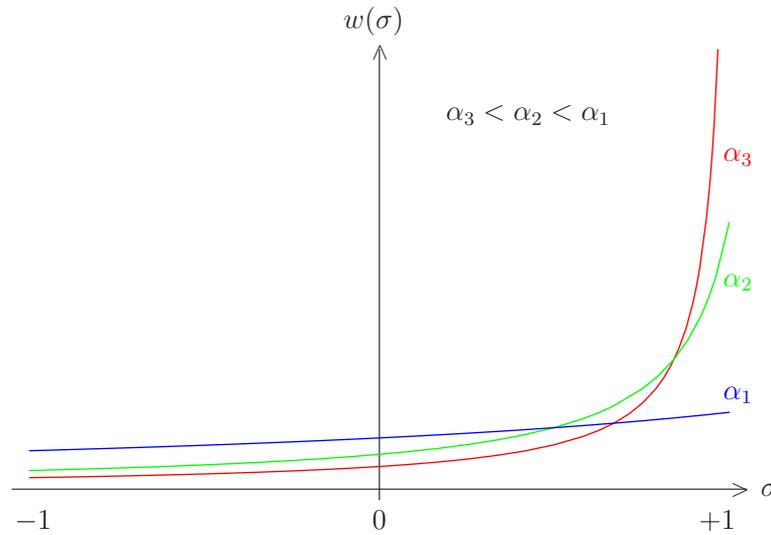


Abbildung 10.3: Das Verbindungsgewicht für verschiedene Werte des Kontrollparameters α . Für sinkendes α steigt das Verbindungsgewicht im Bereich $\sigma = +1$ stark an, während es für kleinere Werte abnimmt. Im Grenzfall $\alpha \rightarrow 0$ geht $w(\sigma)$ gemäß (10.231) in eine Delta-Funktion über.

unmittelbar

$$\lim_{u \downarrow 1} \frac{\alpha}{2\gamma} = 0. \quad (10.224)$$

Den Grenzwert für große u -Werte bestimmen wir mit der Umformung

$$\frac{\alpha}{2\gamma} = \frac{2 \ln \frac{1+1/u}{1-1/u} - \frac{4}{u}}{\frac{1}{u} \left(\ln \frac{1+1/u}{1-1/u} \right)^2} \quad (10.225)$$

und der Entwicklung [66, 1.513]

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} x^{2k-1}, \quad x^2 < 1. \quad (10.226)$$

Dies in (10.222) eingesetzt ergibt mit $x = 1/u$

$$\frac{\alpha}{2\gamma} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}(1/u)^2 + \dots}{1 + \frac{2}{3}(1/u)^2 + \dots}. \quad (10.227)$$

Für den Grenzfall $u \rightarrow \infty$ erhält man

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{2\gamma} = \frac{1}{3}. \quad (10.228)$$

Für den Fall $u \downarrow 1$ betrachten wir den Fall $\sigma \neq u$. Dann gilt

$$\lim_{u \downarrow 1} \frac{2}{u - \sigma} \left(\ln \frac{u+1}{u-1} \right)^{-1} = 0. \quad (10.229)$$

Schließlich integrieren wir noch $w(\sigma)$ für $u \downarrow 1$ über alle σ :

$$\lim_{u \downarrow 1} \int_{-1}^1 \frac{2}{u - \sigma} \left(\ln \frac{u+1}{u-1} \right)^{-1} d\sigma = \lim_{u \downarrow 1} -2 \left(\ln \frac{u+1}{u-1} \right)^{-1} \ln(u - \sigma) \Big|_{-1}^1 = 2. \quad (10.230)$$

Das bedeutet, dass $w(\sigma)$ in eine δ -Funktion übergeht:

$$w(\sigma) = 4\delta(\sigma - 1). \quad (10.231)$$

Auch im Fall der Kugel erhält man somit eine retinotop 1-1-Projektion genau dann, wenn die homogene, undifferenzierte Bildung neuer Synapsen auf dem Tectum zum Stillstand gekommen ist, wenn also $\alpha = 0$ gilt.

Damit haben wir den Nachweis erbracht, dass die verallgemeinerten Häussler-Gleichungen (5.5) wie im Fall der Saite auch für sphärische Mannigfaltigkeiten die Emergenz einer retinotopen Ordnung beschreiben. Bemerkenswert sind zudem die weiteren Parallelen, die sich bei der Analyse von Saite und Kugel zeigen. Dazu gehören neben dem Verschwinden des quadratischen Terms (8.29) bzw. (10.55) in den jeweiligen Ordnungsgleichungen die Existenz eines reellen Potentials (8.147) bzw. (10.148). Aufgrund der zu Beginn dieses Kapitels erwähnten realen Geometrie von Retina und Tectum geht das Ergebnis für die Kugel jedoch wesentlich über das der Saite hinaus. Während die Saite nur als stark vereinfachtes Modellbeispiel dient, kann die Analyse sphärischer Mannigfaltigkeiten für sich in Anspruch nehmen, die biologische Realität in deutlich adäquaterer Weise zu berücksichtigen.

Kapitel 11

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit haben wir unter anderem den Nachweis geführt, dass sich die synergetische Analyse in Ref. [9] auf kontinuierliche Mannigfaltigkeiten beliebiger Geometrie und Dimension verallgemeinern lässt. Dabei haben wir Mannigfaltigkeiten unterschiedlicher Mächtigkeit betrachtet. Damit erweisen sich die biologisch unplausiblen Beschränkungen aus [9] auf eindimensionale Zellgruppen, die zudem noch die selbe Anzahl von Zellen besitzen, als überflüssig. Die aus unserer Analyse resultierenden allgemeinen Ordnungsparametergleichungen stellen ein wesentliches neues Ergebnis dar und bilden den Ausgangspunkt für die Untersuchung verschiedener Geometrien im zweiten Teil dieser Arbeit. Wir konnten darin nachweisen, dass sich im kontinuierlichen Fall der Saite völlig analoge Resultate ergeben wie im Fall der diskreten linearen Kette in [9], wobei wir darüber hinaus eine perfekte 1-1-Retinotopie auch für Saiten *unterschiedlicher* Längen erhielten. Bei der Erweiterung auf zweidimensionale euklidische Mannigfaltigkeiten anhand der Ebene zeigten wir, dass diese nicht in trivialer Weise in die beiden Dimensionen entkoppelt, sondern komplexere Eigenschaften aufweist. Insbesondere führte die Betrachtung des Spezialfalls zweier koexistierender Moden dazu, dass die Beschränkung auf monoton fallende Kooperationsfunktionen aufgehoben werden musste. Der Einfluss der Moden zweiter Ordnung führt zu einer Verstärkung des retinotopen Charakters der Projektion zwischen Retina und Tectum. Als ein Anwendungsbeispiel nichteuklidischer Geometrien betrachteten wir sphärische Mannigfaltigkeiten. Dabei konnten wir explizit zeigen, dass bestimmte stationäre Lösungen der Ordnungsparametergleichungen analog zur Saite einer perfekten 1-1-Retinotopie entsprechen.

Abschließend sollen noch einige offene interessante Fragestellungen angesprochen werden, die in Zukunft untersucht werden sollten.

Die vorliegende Arbeit behandelt die selbstorganisierte Emergenz retinotoper Verbindungen zwischen Mannigfaltigkeiten verschiedener Geometrie. Dabei ist es einerseits gelungen, die generischen Eigenschaften analytisch zu untersuchen, die unabhängig von der speziellen Geometrie auftreten. Andererseits wurden exemplarisch sphärische Mannigfaltigkeiten diskutiert, da sie durch die reale Form von Retina und Tectum nahegelegt werden. Zur Motivation der Arbeit kann man

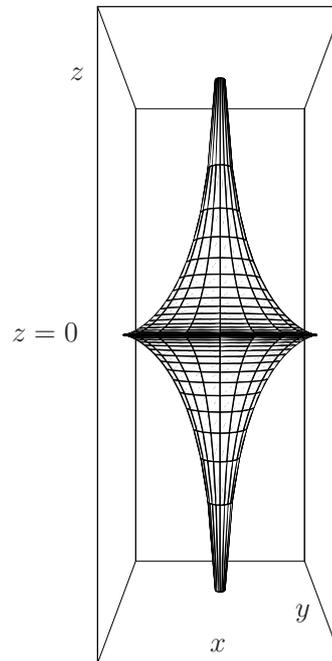


Abbildung 11.1: Die Pseudosphäre stellt eine Mannigfaltigkeit mit negativer Krümmung dar. Im Gegensatz zu den in dieser Arbeit betrachteten euklidischen und sphärischen Mannigfaltigkeiten ist sie nicht beschränkt, sondern strebt für kleine Werte von x und y unendlichen z -Werten zu.

aber auch die folgende differentialgeometrische Betrachtung anstellen. Wir fordern, dass die zugrundeliegenden Mannigfaltigkeiten homogen und isotrop sind, sodass sie durch eine konstante Krümmung κ charakterisiert werden. Solche Mannigfaltigkeiten treten beispielsweise in der Allgemeinen Relativitätstheorie bei kosmologischen Modellen auf, die durch die stationäre Robertson-Walker-Metrik beschrieben werden [68]. Man unterscheidet bei homogenen und isotropen Mannigfaltigkeiten je nach dem Wert der Krümmung drei Fälle. In dieser Arbeit wird der Fall euklidischer Mannigfaltigkeiten mit $\kappa = 0$ und sphärischer Mannigfaltigkeiten mit $\kappa > 0$ behandelt. Eine Betrachtung von Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung führt auf die Pseudosphäre (siehe Abbildung 11.1). Diese ist durch die folgende Parameterdarstellung mit $0 \leq u \leq 2\pi$ und $0 < v < \pi$ gegeben [69]:

$$x = \cos u \sin v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos v + \ln \left(\tan \frac{v}{2} \right). \quad (11.1)$$

In der Umgebung der z -Achse strebt die z -Koordinate gegen unendliche positive und negative Werte. Die Oberfläche der Pseudosphäre ist deshalb unbeschränkt. Das Maß (5.4) dieser Mannigfaltigkeit ist dann keine endliche Größe mehr. Damit stellt sich die Frage, ob unser in Teil II dieser Arbeit entwickelter Formalismus auch auf die Pseudosphäre anwendbar ist. Ein Problem betrifft die Normierung der Eigenfunktionen. Weiterhin ist zu erwarten, dass das Eigenwertspektrum infolge der unbeschränkten Mannigfaltigkeit kontinuierliche Werte annimmt. Das bedeutet, dass in der Umgebung einer Instabilität keine Zeitskalenhierarchie auftritt. Eine Trennung der Moden in instabile und stabile Moden mit adiabatischer

Elimination der letzteren ist somit nicht möglich. Die Anpassung der synergetischen Analyse auf solche Eigenwertspektren stellt somit eine große Herausforderung dar.

Unsere allgemeinen Ordnungsparametergleichungen sind für eine beliebige instabile Mode $(\lambda_T^u, \lambda_R^u)$ gültig (siehe Abschnitt 7.5). In den hier untersuchten Anwendungsbeispielen gilt unser Augenmerk jedoch dem Nachweis der Existenz retinotoper Moden. Die Analyse für den Fall, dass nichtretinotoper Moden instabil werden, stellt deshalb eine weitere Aufgabe dar. Es ist insbesondere zu untersuchen, unter welchen Umständen nichtretinotoper Zustände die retinotoper Ordnung zerstören können. Von besonderem Interesse ist in diesem Zusammenhang auch die Frage, ob dafür pathologische Entsprechungen in der Biologie bekannt sind.

Die Kooperationsfunktionen $c_T(t, t')$, $c_R(r, r')$ sind mit den Verbindungen zwischen den Zellen *innerhalb* der jeweiligen Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_T bzw. \mathcal{M}_R verknüpft (siehe Abschnitt 3.3). Dabei wird vorausgesetzt, dass die lateralen Verbindungen bereits fest etabliert sind und sich nicht mehr verändern können. Folglich sind auch die Kooperationsfunktionen zeitunabhängig. Zu klären wäre, ob die lateralen Verbindungen tatsächlich unveränderlich sind, oder ob hier – wie in vielen anderen Teilen des Nervensystems – eine gewisse Plastizität existiert. Unabhängig von dieser Frage sind die Verbindungen zumindest in einem frühen Stadium der Ontogenese zeitlich veränderlich. Somit stellt sich die Aufgabe, eine selbstkonsistente Theorie für die Kooperationsfunktionen zu entwickeln. Diese sollte dann auch in der Lage sein, auf der Grundlage bestimmter Modellvorstellungen über die lateralen Verbindungen Aussagen bezüglich der Abstandsabhängigkeit der Kooperationsfunktionen zu liefern. In Ermangelung einer solchen selbstkonsistenten Theorie mussten in dieser Arbeit die Kooperationsfunktionen durch ad-hoc-Annahmen festgelegt werden.

Als Ausgangspunkt unserer synergetischen Analyse dienen die verallgemeinerten Häussler-Gleichungen (5.5). Diese sind vollkommen deterministisch. In realen Systemen hingegen treten immer auch Fluktuationen auf. Diese kleinen Schwankungen rühren von verschiedenen Ursachen her, die wir kurz im Hinblick auf unser biologisches System diskutieren wollen.

Das Geschehen auf der Ebene einzelner Atome bzw. Moleküle wird durch die Gesetze der Quantenmechanik bestimmt und ist damit indeterministischer Natur. Ob solche zufälligen Ereignisse auf der Quantenebene für neurophysiologische Prozesse irgendeine Bedeutung haben, wie von manchen Autoren vorgeschlagen [70–73], ist allerdings sehr umstritten. Weitere Ursachen von Fluktuationen liegen in der Vielteilchennatur begründet, beispielsweise treten zufällige Dichteschwankungen von Molekülen auf. So könnten kleinste Konzentrationsunterschiede freigesetzter Neurotransmitter dazu führen, dass die Verbindungsgewichte einen teilweisen Zufallscharakter erhalten. Eine weitere Ursache von Fluktuationen sind Prozesse, die bei der Modellbildung unberücksichtigt bleiben. Gerade in komplexen biologischen Systemen wird die zeitliche Dynamik durch eine Vielzahl miteinander wechselwirkender physiologischer Prozesse bestimmt. Diese wiederum werden durch ein kompliziertes Zusammenspiel genetischer und

umweltbedingter Faktoren beeinflusst. Es ist deshalb nicht möglich, sämtliche Determinanten eines biologischen Vorgangs wie z. B. der Änderung von Verbindungsgewichten vollständig und detailliert zu berücksichtigen. Für unser Modell der Selbstorganisation retinotoper Verbindungen bedeutet dies, dass neben den in den verallgemeinerten Häussler-Gleichungen beschriebenen Prozessen noch zahlreiche weitere Einflüsse existieren, die in nicht vorhersagbarer Weise Schwankungen der Verbindungsgewichte $w(t, r)$ verursachen. Denkbar wären in diesem Zusammenhang Wechselwirkungen mit anderen während der Ontogenese ablaufenden biochemischen Prozessen oder Schwankungen in der Bereitstellung der für den Aufbau synaptischer Kontakte notwendigen Substanzen wie z. B. Aminosäuren. Der Einfluss sämtlicher Fluktuationen wird häufig dadurch berücksichtigt, dass man zum deterministischen Anteil eine stochastische Kraft addiert (siehe Gleichung (4.1)). Fluktuationen spielen eine fundamentale Rolle in der Umgebung von Instabilitätspunkten. Dazu betrachten wir noch einmal das Potential der Saite in der Abbildung 8.3. Bei einer rein deterministischen Beschreibung sind die beiden Minima völlig gleichberechtigt. Erst kleinste Schwankungen in den Anfangsbedingungen von ξ und η führen zu einer Symmetriebrechung, sodass das System in eines der beiden Minima übergeht. Somit haben wir implizit bereits hier Fluktuationen mitberücksichtigt. Die ausführliche Analyse der Einflüsse solcher Fluktuationen erfordert allerdings, eine stochastische Kraft bereits in den verallgemeinerten Häussler-Gleichungen zu verwenden. Dabei ist es eine nichttriviale Aufgabe, die synergetische Vorgehensweise wie z. B. die adiabatische Elimination stabiler Moden, auf stochastische Systeme zu erweitern [74].

Ein weiterer wissenschaftlich interessanter Aspekt liegt in der Untersuchung dynamischer Systeme mit zeitlicher Verzögerung. Meist lässt sich die zeitliche Entwicklung einer physikalischen Größe zu einem bestimmten Zeitpunkt in Abhängigkeit dieser und eventuell weiterer physikalischer Größen zum *selben* Zeitpunkt darstellen. Retardierungseffekte sind dann entweder nicht vorhanden oder vernachlässigbar. Doch dies ist nicht immer der Fall. Ein bekanntes physikalisches Beispiel, bei dem diese Effekte berücksichtigt werden müssen, sind die retardierten Potentiale der Elektrodynamik, in denen explizit die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen eingeht. Auch in synergetischen Systemen können solche zeitlichen Verzögerungen infolge von Laufzeiteffekten oder anderen Ursachen auftreten. Dabei können zeitliche Verzögerungen einen Übergang zu chaotischem Verhalten verursachen, andererseits können zeitliche Verzögerungen aber auch das Auftreten chaotischen Verhaltens verhindern [75, 76]. Eine Analyse der Anwendbarkeit synergetischer Konzepte auf solche Systeme findet sich in [54, 55, 57]. Dabei wurden speziell *Delay-Differentialgleichungen* untersucht, die eine Unterklasse der retardierten Funktionaldifferentialgleichungen darstellen [77]. Die konkrete Realisierung an einem Beispiel aus der Elektrotechnik, dem zeitlich verzögerten Phasenregelkreis erster Ordnung, wird in [54–56] analytisch, numerisch und experimentell ausführlich diskutiert. In Bezug auf die Selbstorganisationsprozesse neuronaler Verbindungen existieren sicherlich zeitliche Verzögerungen. Grund hierfür sind die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit neuronaler Signale sowie die endliche Dauer der physiologischen Prozesse, die zu einer Verstärkung oder

Abschwächung einer synaptischen Verbindung führen. Daher wäre es lohnend, zeitliche Verzögerungen in den verallgemeinerten Häussler-Gleichungen (5.5) zu berücksichtigen und deren Einfluss auf die Emergenz retinotoper Verbindungen zu studieren.

Kapitel 12

Summary

12.1 Introduction

This work is devoted to a fundamental biological problem of pattern formation. In the course of ontogenesis of vertebrate animals well-ordered neural connections are established between retina and tectum, a part of the brain which plays an important role in processing optical information. At an initial stage of ontogenesis the ganglion cells of the retina have random synaptic contacts with the tectum. In the adult animal, however, neighbouring retinal cells project onto neighbouring cells of the tectum (see Figure 1.1). Such *retinotopic projections* are also realized between the retina and the corpus geniculatum laterale as well as the visual cortex, respectively. Furthermore, there are analogous ordered projections in other parts of the nervous system. Neighbouring mechanoreceptors of the skin, e.g., are connected with neighbouring cells of the somatosensorial cortex. This is called *somatotopy*. In the case of *tonotopy* similar frequencies excite neighbouring cells of the auditorial cortex, i.e. a topographic representation of tone frequencies is realized (see Chapter 2).

In the early 1940s, Sperry performed a series of pioneering experiments in the visual system of frogs and goldfish. Fish and amphibians can regenerate axonal tracts in their central nervous system, in contrast to mammals, birds and reptiles. Sperry crushed the optic nerve and found that retinal axons reestablished the same retinotopically ordered pattern of connections in the tectum. Even if the eye was rotated by 180 degrees, the retinal ganglion cells grew back to their original destinations in the tectum (see Figure 2.3). Thus, in the early 1960s Sperry presented his chemoaffinity hypothesis which proposed that the retinotectal map is set up on the basis of chemical markers carried by the cells. The most fundamental form of this hypothesis was the idea that each tectal location is labeled by a different recognition molecule. Further experiments, however, suggested that there are gradients of cell surface molecules to which growing retinal axons respond in the tectum to establish the basic axes of the map.

Based on these physiological studies, some time ago the group of von der Mals-

burg investigated the rearranging of the initially disordered synaptic contacts into a precise topological projection. They presented a sorting mechanism which solves the problem. The basic notion of this mechanism is the following: Once a fibre has already grown from retina to tectum, the fibre moves over the tectum by strengthening its synaptic contacts in some parts of its ramification and by weakening them in others. These modifications are governed by two contradictory rules. The first rule is due to cooperative interactions between synaptic contacts, whereas the second rule is a consequence of competitive interactions. On the one hand, contacts on neighbouring tectal cells stemming from fibres of neighbouring retinal ganglion cells support each other to be strengthened. On the other hand, contacts starting from one retinal cell or ending at one tectal cell compete with each other. A detailed analytical treatment by Häussler and von der Malsburg was able to describe the generation of retinotopic states from an undifferentiated initial state [9]. In that paper retina and tectum were treated as one-dimensional discrete cell arrays. The analysis was performed by using the methods of synergetics, which provides effective analytical methods to study self-organization in complex systems.

There are three essential reasons which motivate a more general approach. First, neurons usually do not establish 1-dimensional arrays but 2- or 3-dimensional networks. Hence the 1-dimensional model of Häussler and von der Malsburg can only serve as a simplistic approximation of the real situation. Secondly, we want to include cell sheets of different extent, which is a more realistic assumption than neural sheets with the same number of cells. The third reason is that a general model is able to demonstrate what is generic, i.e. what is independent of the special geometry of the problem.

Thus, this thesis generalizes the Häussler equations to continuous manifolds, i.e. we neglect the discrete nature of neurons, of arbitrary geometry with non-Euclidean metrics. The change to continuous variables is reasonable because of the high cell density, i.e. the cells lie close together in a relatively small zone. Cell sheets normally exist of at least thousands of cells. We are not interested in the dynamics of the single cell but in the evolving global spatio-temporal patterns of the system. Furthermore, continuous variables will be helpful to describe retinotopic projections between manifolds of different magnitudes, e.g. two strings of different lengths. In the case of discrete cell arrays with different cell numbers it is not clear what a perfect retinotopy means, whereas in the continuous case a perfect 1-1-projection can be described without offending against the bijectivity of the projection. We proceed in a phenomenological manner and abdicate of a microscopic derivation of the underlying equations.

12.2 Model

The two cell sheets retina (R) and tectum (T) are represented by general manifolds \mathcal{M}_R and \mathcal{M}_T , respectively [58]. Every ordered pair (t, r) with $t \in \mathcal{M}_T$, $r \in$

\mathcal{M}_R is connected by a *connection weight* $w(t, r)$. The equations of evolution of these connections are assumed to be given by a generalization of the *Häussler equations* (5.5). The *cooperativity functions* $c_T(t, t')$, $c_R(r, r')$ represent measures for the connectivity within each manifold. We regard them as time-independent, given properties of the manifolds which are only limited by certain global constraints. For instance, we assume that they are positive, symmetric with respect to their arguments, and normalized. The cooperation strength depends on the distance between two points of the manifold. This requires a measure of distance, i.e. metrics, which in turn define the Laplace-Beltrami operators (6.11) on the manifolds. Their eigenvalue problems yield a complete orthonormal system, and the generalized Häussler equations are most conveniently transformed to this new basis.

12.3 Synergetic System Analysis

The generalized Häussler equations are autonomous, nonlinear, and deterministic integral equations. A complete analysis of these equations is not possible. Therefore we restrict our investigations to the vicinity of stationary states, where we apply the methods of synergetics (see Chapter 4). The initial state of ontogenesis with randomly distributed synaptic contacts is described by the stationary uniform solution of the generalized Häussler equations $w_0(t, r) = 1$.

12.3.1 Linear Analysis

Our first aim is to analyze the stability of the stationary uniform solution. To this end we introduce the deviation $v(t, r) = w(t, r) - w_0(t, r)$ and rewrite the generalized Häussler equations by keeping, for the present, only terms linear in $v(t, r)$. This leads to the spectrum of eigenvalues (6.43), which turn out to be determined by the expansion coefficients of the cooperativity functions. By changing in a suitable way the control parameter in the generalized Häussler equations, which is the growth rate α of new synapses onto the tectum, the real parts of some eigenvalues become positive. Thus the system can be driven to the neighbourhood of an instability point. In this region the absolute values of the eigenvalues of the unstable modes are much smaller than those of the stable modes (see Figure 4.1).

12.3.2 Nonlinear Analysis

The linear stability analysis gives rise to a decomposition of the deviation from the stationary uniform solution $v(t, r)$ near the instability in unstable and stable contributions. By inserting this decomposition in the nonlinear Häussler equations (5.5), we obtain equations for the mode amplitudes of the unstable and stable modes, respectively. In the vicinity of the instability point the system generates a time-scale hierarchy, i.e. the stable modes evolve on a faster time-scale than the

unstable modes. This leads to the *slaving principle* of synergetics: the stable modes are enslaved by the unstable modes. In the literature this enslaving $S = h(U)$ is usually achieved by invoking an adiabatic elimination of the stable modes, which amounts to solving the equation $\dot{S} = 0$. However, the mathematically correct approach for determining the center manifold $h(U)$ is to determine it from the corresponding evolution equations for the stable modes [54, 55]. It can be shown that only for real eigenvalues this approach leads to the same result obtained by the approximation $\dot{S} = 0$.

Thus it is possible to reduce the original high-dimensional system to a low-dimensional one which only contains the unstable amplitudes. The general form of the resulting order parameter equations is independent of the geometry of the problem (see Section 7.5). It contains typically a linear, a quadratic and a cubic term of the order parameters. As usual in synergetics, the coefficients in these equations in general consist of two parts, one stemming from the order parameters themselves and the other representing the influence of the center manifold on the order parameter dynamics.

Finally we demonstrate the validity of the circular causality chain of synergetics for our system (see Figure 12.1). On the one hand, the order parameters, i.e. the few amplitudes U_{λ^u} of the slow evolving linear unstable modes v_{λ^u} , determine the dynamics of the many stable mode amplitudes S_{λ^s} of the fast evolving stable modes v_{λ^s} . On the other hand, through the center manifold the stable amplitudes retroact to the order parameters. This characteristic behaviour of synergetic systems in the vicinity of an instability point is termed circular causality.

12.4 Applications

The order parameter equations for the generalized Häussler equations are a central new result of this work, and serve as a starting point of the analysis of selforganization in cell arrays of different geometries. Specifying the geometry means inserting the corresponding eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operators in the order parameter equations. The simplest example is given by two one-dimensional manifolds, i.e. strings (see Chapter 8). The string plays an important role in many fields of theoretical physics, e.g. in solid state physics and in quantum field theory. In contrast to more complicated geometries an analytical treatment for strings is often possible. However, in order to give a more realistic description of the cell sheets we also consider two-dimensional manifolds, namely planes in Chapter 9, and spheres in Chapter 10.

12.4.1 String

Why do we investigate strings given the fact that Häussler and von der Malsburg already treated linear chains in detail? There are several arguments to do

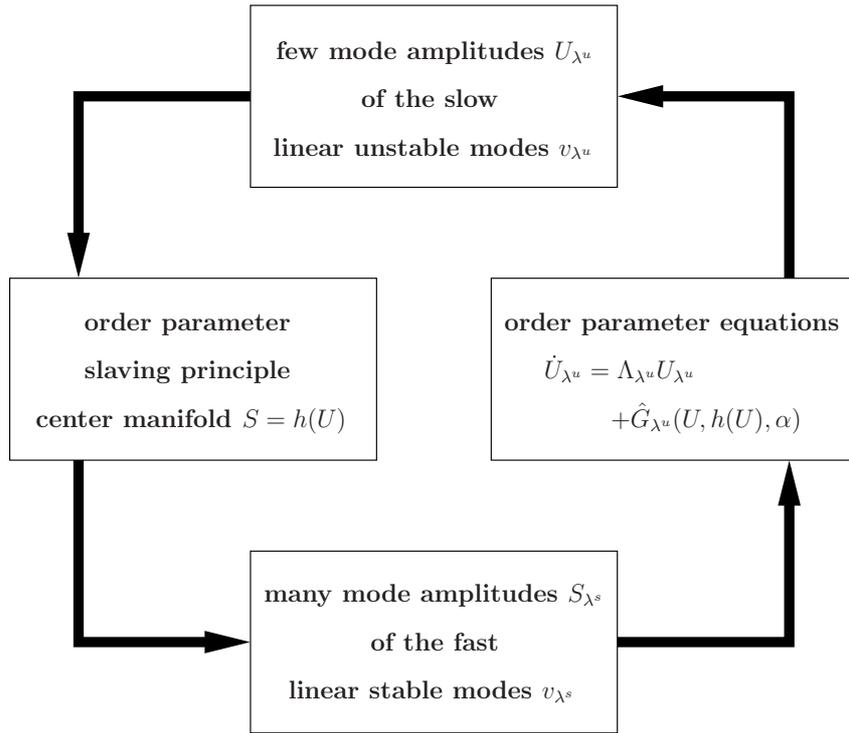


Figure 12.1: Circular causality chain of synergetics for the order parameter equations of the generalized Häussler equations (5.5). Here the notation of Chapter 4 is used, i.e. $\lambda^u = (\lambda_T^u, \lambda_R^u)$ and $\lambda^s = (\lambda_T, \lambda_R)$. The control parameter α denotes the growth rate of new synapses onto the tectum.

this. Although one would expect that the results for two strings may turn out to be very similar to the case of discrete linear chains, this has to be proven. Furthermore, the comparison between the two results serves as a test for our more general approach: analogous results would be a strong indication for the correctness of our general model. The most important argument for the treatment of strings, however, is that we want to proceed in a more general way than Ref. [9]. Instead of discrete cell arrays with the same number of cells, we consider here continuously distributed cells on strings of different lengths [59]. In contrast to Ref. [9], we do not restrict our investigations to monotonically decreasing cooperativity functions, which implies that we also have to consider arbitrary unstable modes $(\lambda_T^u, \lambda_R^u)$. Because every eigenstate λ_T^u and λ_R^u is twofold degenerated, we have to calculate four order parameter equations. With the approach developed in Chapters 5 to 7 we are able to reduce it to the calculation of the general order parameter equation for $U_{\lambda_T^u, \lambda_R^u}$. It is shown that the quadratic term vanishes, and we derive selection rules for the appearance of cubic terms. These conditions (8.37), (8.38) are an essential simplification for the calculation of the order parameter equations. Transformation to real variables leads to constant phase-shift angles. This way we reduce the system to two variables, which correspond to the amplitudes of two diagonal modes (see Figure 8.1). These two modes compete with each other, until one of them vanishes. This situation can be illustrated with the

help of the potential for the real order parameter equations (see Figure 8.3). The originally stable uniform state becomes unstable and the system settles into one of the two minima.

After one of the diagonal modes has won, only diagonal modes are excited that contribute to the sharpening of the diagonal. For instance, if the mode $(\lambda_T^u, \lambda_R^u) = (1, 1)$ wins, all higher modes $(\lambda_T^u, \lambda_R^u) = (2, 2), (3, 3), \dots$ are excited (see Figure 8.4). Therefore, we make the ansatz (8.159) for solving our generalized Häussler equations. This leads to a recursion relation for the corresponding amplitudes. If we restrict ourselves to a special case of cooperation functions which contain only zeroth and first harmonics, we can solve the recursion relation analytically. Introducing the result into the ansatz mentioned above leads to the following behaviour. For a critical growth-rate α_c we have the uniform state $w_0(t, r) = 1$. By decreasing the control parameter α the projection gets sharper and sharper (see Figure 8.5). Finally, if there is no growth of new synapses any more, i.e. $\alpha = 0$, the connection weights are given by the Dirac delta function. Thus, a perfect 1-1-retinotopic state is realized.

12.4.2 Plane

In a first extension to two dimensions the cell sheets are assumed to be planes of lengths L_1^T, L_2^T and L_1^R, L_2^R , respectively. A trivial solution would be a full decoupling of the two dimensions. Then the solution would be given by the respective products of string solutions in both dimensions. But as shown in Section 9.1, this is inconsistent with the form of the Häussler equations (5.5). Thus the trivial solution has to be discarded.

To conceive at a consistent solution we assume again periodic boundary conditions, which corresponds to the situation where the cell sheets are modelled as surfaces of tori (see Figure 9.1). To determine the unstable modes we have to discuss the cooperativity functions in more detail. They are supposed to be monotonically decreasing in both dimensions. This restriction permits both anisotropic and isotropic cooperativity functions (see Figure 9.3). This is an interesting feature because it is reasonable to assume that real cell sheets sometimes have a preference direction. The unstable modes turn out to be given by $\lambda^u = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$, therefore we have to calculate in total sixteen order parameter equations. It is shown that the quadratic term vanishes, as in the case of strings, and that selection rules reduce the number of cubic terms to fourteen.

Because an analytical treatment of the whole differential equation system is not possible, we restrict ourselves to several special cases. If we set all modes zero except for one, we reveal a retinotopy only in one dimension. For instance, the unstable part $U(t, r)$ has a maximum value for $t_1 = r_1$ but there is no dependence on t_2 and r_2 . In the next step we consider the superposition of two modes, where we obtain constant phase-shift angles. Hence we reduce the system by introducing new variables to two order parameters ξ, η . We are interested in conditions

for the coexistence of the two modes. From the order parameter equations it follows directly that $\xi = \eta$. However, there are two further necessary conditions for coexistence. First, the amplitudes have to be real. Secondly, the state of coexistence must be stable, i.e. the corresponding potential must have a minimum at that point (see Figure 9.4). These conditions lead to restrictions for the expansion coefficients $f_{\lambda_T}^T$, $f_{\lambda_R}^R$ and their products $\gamma^{\lambda_T \lambda_R} = f_{\lambda_T}^T f_{\lambda_R}^R$, respectively. As an example we investigate a special case which satisfies these conditions. The resulting cooperativity function $c_T(t_1, t_2)$ is monotonically decreasing, whereas for $c_R(r_1, r_2)$ this is not the case (see Figure 9.4). We calculate the contribution of the center manifold $S(U)$. It turns out that the projection $w(t, r)$ becomes sharper (see Figure 9.5). Obviously the higher modes are strengthening the retinotopic character of the projection between retina and tectum.

12.4.3 Sphere

The second extension to two dimensions is that to manifolds with constant positive curvature. The retina is approximately a hemisphere, whereas the tectum has an oval form (see Section 2.3.4). Thus it is reasonable to model both cell sheets by spheres. Without loss of generality we restrict ourselves considering two unit spheres. The distance between two points on the sphere is given by the scalar product of the corresponding unit vectors \hat{t} and \hat{r} to the points. We have to distinguish between the elements of the manifolds and the unit vectors themselves. The elements of the manifolds are given by the surfaces of the spheres, whereas the unit vectors lie in the embedding space \mathbb{R}^3 . The eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operator on this sphere turn out to be spherical harmonics. The calculations of the order parameter equations show that the quadratic term vanishes, as in the case of Euclidean manifolds. Furthermore, again the dynamics of the real order parameters can be described by a potential. We show that there are retinotopic modes which correspond to stationary and stable solutions of the order parameter equations.

On the sphere the retinotopic mode is given by the first Legendre polynomial $P_1(\hat{t} \cdot \hat{r})$. Higher modes are given by products of the first Legendre polynomial. Because the Legendre polynomials form a complete orthonormal system, every power of $P_1(\hat{t} \cdot \hat{r})$ can be decomposed in a linear combination of $P_l(\hat{t} \cdot \hat{r})$. Therefore we use the ansatz (10.169) to solve the Häussler equations. This leads to recursion equations for the amplitudes Z_l . We restrict our further considerations to the special case that the cooperation functions contain only the zeroth and first spherical harmonics. Then the resulting recursion relations can be solved analytically using the method of generating functions. The solution for Z_l is found to be given by ratios of Legendre functions of the second kind (10.217). We demonstrate that stationary solutions of the order parameter equations exist which correspond to a perfect 1-1-retinotopic projection, by analogy with the string.

12.5 Outlook

Finally, in Chapter 11 we summarize our results and present an outlook which points the way to further investigations.

Homogeneous and isotropic manifolds are characterized by a constant curvature. The cases of curvature $\kappa = 0$ and $\kappa > 0$ have been treated in this thesis. There remains the challenging task of investigating manifolds of negative curvature, namely the pseudosphere (see Figure 11.1).

A further intriguing problem concerns the question under what circumstances non-retinotopic modes become unstable and destroy the retinotopic order. Certainly, there is a pathological development in animals which corresponds to this case.

As mentioned, lacking any theory for the cooperativity functions, we regard them as time-independent given properties of the manifolds. According to Section 3.3 they are determined by the lateral connections between the cells of retina and tectum, respectively. But neither a reason for their time-independence nor a detailed discussion of their precise mathematical form is available. To fill this gap it will be necessary to elaborate a self-consistent theory of the cooperativity functions.

Our generalized Häussler equations are fully deterministic. In real systems, however, there are always fluctuations. To take into account such unpredictable small variations a stochastic force is added to the deterministic part of the equation (see Equation (4.1)). Such fluctuations are known to play an important role, especially in the vicinity of instability points (see Section 8.6.3).

Finally, delayed processes could be included in our considerations. The application of synergetic concepts to time delayed dynamical systems is analyzed in [54–57]. In neurophysiological systems delays occur due to the finite propagation velocity of nerve signals as well as the finite duration of physiological processes such as the change of synaptic connection weights. Thus, it would be rewarding to expand the investigations also to time-delayed Häussler equations.

Anhang A

Clebsch-Gordan-Koeffizienten

Für die Produktdarstellungen $D_l \times D_{l'}$ der Rotationsgruppe R zerfallen die Produkte zweier Funktionen gemäß

$$u_{l,m}v_{l',m'} = \sum_{L=|l-l'|}^{l+l'} \sum_{M=-L}^L C(lm, l'm'|LM) w_{L,M}. \quad (\text{A.1})$$

In unserem Fall sind die Funktionen $u_{l,m}$, $v_{l',m'}$ und $w_{L,M}$ Kugelflächenfunktionen. Die Wigner- oder Clebsch-Gordan-Koeffizienten lassen sich mit der Formel

$$\begin{aligned} C(l, m, l', m'|LM) &= \left[\frac{(l+l'-L)!(l+L-l')!(l'+L-l)!(2L+1)}{(l+l'+L+1)!} \right]^{1/2} \delta_{M, m+m'} \\ &\times \sum_r (-1)^r \frac{[(l+m)!(l-m)!(l'+m')!]^{1/2}}{(l-m-r)!(L-l'+m+r)!(l'+m'-r)!} \\ &\times \frac{[(l'-m')!(L+M)!(L-M)]^{1/2}}{(L-l-m'+r)!r!(l+l'-L-r)!} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

explizit berechnen [64, 78]. Dabei ist $r \geq 0$ und durchläuft alle Werte, sodass keines der Fakultätsargumente im Nenner negativ wird. Man stellt die Clebsch-Gordan-Koeffizienten häufig mit den Wigner- $3j$ -Symbolen in der Form

$$C(l, m, l', m'|LM) = (-1)^{l-l'+M} \sqrt{2L+1} \begin{pmatrix} l & l' & L \\ m & m' & -M \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

dar. Der Vorteil der $3j$ -Symbole liegt in der Symmetrie ihrer Variablen. So sind sie z. B. invariant bei zyklischer Vertauschung der Spalten:

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_2 & l_3 & l_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_3 & l_1 & l_2 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{pmatrix} l_2 & l_1 & l_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{l_1+l_2+l_3} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{l_1+l_2+l_3} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

In bestimmten Fällen nehmen die expliziten Ausdrücke der $3j$ -Symbole recht einfache Formen an:

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & 0 \\ m_1 & m_2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{l_1-m_1}}{\sqrt{2l_1+1}} \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1, -m_2}, \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{pmatrix} l & l & 0 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{l-m}}{\sqrt{2l+1}}, \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^g \Delta(l_1, l_2, l_3) \frac{g!}{(g-l_1)!(g-l_2)!(g-l_3)!} \\ \times \delta_{2g, l_1+l_2+l_3}, \quad g \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.9})$$

Dabei ist $\Delta(l_1, l_2, l_3)$ durch

$$\Delta(l_1, l_2, l_3) = \sqrt{\frac{(l_1+l_2-l_3)!(l_1-l_2+l_3)!(-l_1+l_2+l_3)!}{(l_1+l_2+l_3+1)!}} \quad (\text{A.10})$$

mit $|l_1 - l_2| \leq l_3 \leq l_1 + l_2$ gegeben.

Literaturverzeichnis

- [1] E. Schrödinger: *Was ist Leben? Die lebende Zelle mit den Augen des Physikers betrachtet*. Piper, München (1999)
- [2] M. P. Murphy und L. A. J. O'Neill (Hrsg.): *Was ist Leben? Die Zukunft der Biologie*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (2002)
- [3] H. Haken und R. Graham: *Synergetik – Die Lehre vom Zusammenwirken*. Umschau **6**, 191 (1971)
- [4] H. Haken: *Synergetik – Eine Einführung*. Springer-Verlag, Berlin, 3. Aufl. (1983)
- [5] H. Haken: *Advanced Synergetics*. Springer-Verlag, Berlin (1983)
- [6] H. Haken: *Synergetics. Introduction and Advanced Topics*. Springer-Verlag, Berlin (2004)
- [7] H. Haken und A. Wunderlin: *Die Selbststrukturierung der Materie – Synergetik in der unbelebten Welt*. Vieweg-Verlag, Braunschweig (1991)
- [8] H. Haken: *Information and Self-Organization. A Macroscopic Approach to Complex Systems*, 2nd. ed. Springer-Verlag, Berlin (2000)
- [9] A. F. Häussler and C. von der Malsburg: *Development of Retinotopic Projections: An Analytical Treatment*. J. Theoret. Neurobiol. **2**, 47 (1983)
- [10] W. Wagner und C. von der Malsburg: unveröffentlichte Ergebnisse
- [11] E. R. Kandel, J. H. Schwartz, und T. M. Jessel (Hrsg.): *Neurowissenschaften*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (1996)
- [12] G. M. Shepard: *Neurobiologie*. 2. Aufl. Springer-Verlag, Heidelberg (1993)
- [13] E. B. Goldstein: *Wahrnehmungspsychologie*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (1997)
- [14] K. R. Gegenfurtner: *Gehirn und Wahrnehmung*. Fischer Taschenbuch Verlag, Frankfurt am Main (2003)

- [15] E. I. Knudsen and M. Konishi: *A Neural Map of Auditory Space in the Owl*. Science **200**, 795 (1978)
- [16] E. I. Knudsen and M. Konishi: *Center-Surround Organization of Auditory Receptive Fields in the Owl*. Science **202**, 778 (1978)
- [17] J. L. van Hemmen: *Die Karte im Kopf: Wie stellt das Gehirn seine Umwelt dar?* Phys. Blätter **57**, 2: 37 (2001)
- [18] H. Haken und H. C. Wolf: *Molekülphysik und Quantenchemie*. 4. Aufl. Springer-Verlag, Berlin (2003)
- [19] D. H. Hubel: *Auge und Gehirn – Neurobiologie des Sehens*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (1989)
- [20] D. J. Ingle: *Optic Tectum*. In: Readings from the Encyclopedia of Neuroscience: Sensory Systems I – Vision and Visual Systems, R. Held (ed.), Birkhäuser, Basel (1988)
- [21] G. Roth, U. Dicke und W. Wiggers: *Wie das Gehirn eine Fliege erkennt*. Spektrum der Wissenschaft, 11: 56 (1999)
- [22] R. W. Sperry: *Effect of 180 Degree Rotation of the Retinal Field on Visuo-motor Coordination*. J. Exper. Zool. **92**, 263 (1943)
- [23] R. W. Sperry: *Visuomotor Co-Ordination in the Newt (Triturus viride-scens) after Regeneration of the Optic Nerve*. J. Comp. Neurol. **79**, 33 (1943)
- [24] S. C. Sharma: *Retinotectal Interactions*. In: Readings from the Encyclopedia of Neuroscience: Sensory Systems I – Vision and Visual Systems, R. Held (ed.), Birkhäuser, Basel (1988)
- [25] C. A. O. Stürmer: *Regeneration von Nervenfasern im Sehsystem*. Spektrum der Wissenschaft, 6: 40 (1992)
- [26] C. A. O. Stürmer: *Retinotopic Organization of the Developing Retinotectal Projection in the Zebrafish Embryo*. J. Neurosci. **8**, 4513 (1988)
- [27] R. W. Sperry: *Chemoaffinity in the Orderly Growth of Nerve Fiber Patterns and Connections*. Proc. Natl. Acad. Sci., U.S.A. **50**, 703 (1963)
- [28] G. J. Goodhill and L. J. Richards: *Retinotectal Maps: Molecules, Models and Misplaced Data*. Trends Neurosci., **22**, 529 (1999)
- [29] C. J. Shatz: *The Developing Brain*. Scientific American, September, 34 (1992)
- [30] C. J. Shatz: *Competitive Interactions between Retinal Ganglion Cells during Prenatal Development*. J. Neurobiol. **21**, 197 (1990)

- [31] C. J. Shatz: *Impulse Activity and the Patterning of Connections during CNS Development*. Neuron **5**, 745 (1990)
- [32] D. O. Hebb: *The Organization of Behavior: A Neuropsychological Theory*. Wiley, New York (1949)
- [33] E. R. Kandel and R. D. Hawkins: *The Biological Basis of Learning and Individuality*. Scientific American, September, 52 (1992)
- [34] M. C. Prestige and D. J. Willshaw: *On a Role for Competition in the Formation of Patterned Neural Connections*. Proc. R. Soc. Lond. B **190**, 77 (1975)
- [35] D. J. Willshaw and C. von der Malsburg: *A Marker Induction Mechanism for the Establishment of Ordered Neural Mappings: Its Application to the Retinotectal Problem*. Phil. Trans. R. Soc. Lond. B **287**, 203 (1979)
- [36] C. von der Malsburg: *Neural Network Self-organization (I) – Self-organization in the Development of the Visual System*. Vorlesungsmanuskript (2000)
- [37] H. Haken: *Laser Theory*. Encyclopedia of Physics, Bd. XXV/2C, Springer-Verlag, Berlin (1984)
- [38] H. Haken: *Licht und Materie – Band 2: Laser*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim (1995)
- [39] A. Wunderlin: *Mathematische Methoden der Synergetik und ihre Anwendungen auf den Laser*. Habilitationsschrift, Universität Stuttgart (1985)
- [40] M. Bestehorn: *Strukturbildung durch Selbstorganisation in Flüssigkeiten und in chemischen Systemen*. Habilitation, Universität Stuttgart; Harri-Deutsch Verlag, Frankfurt am Main (1994)
- [41] W. Weimer: *Verallgemeinerte Ginzburg-Landau-Gleichungen für die Dynamik der atmosphärischen Zyklogese*. Dissertation, Universität Stuttgart (1989)
- [42] V. A. Vavalin, A. M. Zhabotinsky, and L. S. Yaguzhinsky: *Oscillatory Processes in Biological and Chemical Systems*. Science Publ., Moskau (1967)
- [43] A. Gierer and M. Meinhardt: *Biological Pattern Formation Involving Lateral Inhibition*. Lectures on Mathematics in the Life Sciences **7**, 163 (1974)
- [44] H. Haken: *Principles of Brain Functioning. A Synergetic Approach to Brain Activity, Behavior and Cognition*. Springer-Verlag, Berlin (1996)
- [45] C. Uhl (ed.): *Analysis of Neurophysiological Brain Functioning*. Springer-Verlag, Berlin (1999)

- [46] R. Friedrich, C. Uhl, and H. Haken: *Reconstruction of Spatio-Temporal Signals of Complex Systems*. Zeitschrift für Physik B **92**, 211 (1993)
- [47] C. Uhl, R. Friedrich, and H. Haken: *Analysis of Spatio-Temporal Signals of Complex Systems*. Phys. Rev. E **51**, 3890 (1995)
- [48] R. Friedrich and C. Uhl: *Synergetic Analysis of Human Electroencephalograms: Petit-mal Epilepsy*. In: Evolution of dynamical structures in complex systems, R. Friedrich and A. Wunderlin (eds.), Springer-Verlag, Berlin (1992)
- [49] M. Güßmann: *Shilnikov-Attraktoren und epileptisches Anfallsverhalten*. Diplomarbeit, Universität Stuttgart (2000)
- [50] A. Fuchs, J. A. S. Kelso, and H. Haken: *Phase Transitions in the Human Brain: Spatial Mode Dynamics*. Int. J. Bifurcation Chaos **2**, 917 (1992)
- [51] V. K. Jirsa, R. Friedrich, H. Haken, and J. A. S. Kelso: *A Theoretical Model of Phase Transitions in the Human Brain*. Biol. Cybern. **71**, 27 (1994)
- [52] W. Weidlich and G. Haag: *Concepts and Models of a Quantitative Sociology – The Dynamics of Interaction Populations*. Springer-Verlag, Berlin (1983)
- [53] W. Weidlich: *Sociodynamics – A Systematic Approach to Mathematical Modelling in the Social Sciences*. Harwood Academic Publishers, Amsterdam (2000)
- [54] W. Wischert: *Anwendung synergetischer Konzepte auf Selbstorganisationsprozesse in zeitlich verzögerten Systemen*. Dissertation, Universität Stuttgart; Shaker Verlag, Aachen (1993)
- [55] W. Wischert, A. Wunderlin, A. Pelster, M. Olivier, and J. Gros Lambert: *Delay-Induced Instabilities in Nonlinear Feedback Systems*. Phys. Rev. E, **49**, 203 (1994)
- [56] M. Schanz and A. Pelster: *Analytical and Numerical Investigations of the Phase-Locked Loop with Time-Delay*. Phys. Rev. E **67**, 056205 (2003)
- [57] M. Schanz: *Zur Analytik und Numerik zeitlich verzögerter synergetischer Systeme*. Dissertation, Universität Stuttgart; Shaker Verlag, Aachen (1997)
- [58] M. Güßmann, A. Pelster, and G. Wunner: *A General Model for the Development of Retinotopic Projections Between Manifolds of Different Geometries*. In: Dynamic Perception, R. P. Würtz and M. Lappe (eds.), Akademische Verlagsgesellschaft Berlin, p. 253 (2002)
- [59] M. Güßmann, A. Pelster, and G. Wunner: *Self-Organized Development of Retinotopic Projections*. In: Dynamic Perception, U. J. Ilg, H. H. Bülthoff, and H. A. Mallot (eds.), Akademische Verlagsgesellschaft Berlin, p. 239 (2004)

- [60] H. Kleinert: *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics and Financial Markets*. 3rd. ed. World Scientific, Singapore (2004)
- [61] I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart (1991)
- [62] W. Greiner: *Klassische Elektrodynamik*. 2. Aufl. Harri Deutsch-Verlag, Frankfurt am Main (1978)
- [63] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë: *Quantum Mechanics*. Vol. 2, Wiley-Interscience Publication, New York (1977)
- [64] M. Wagner: *Gruppentheoretische Methoden in der Physik*. Vieweg-Verlag, Braunschweig (1998)
- [65] W. Nolting: *Grundkurs Theoretische Physik. Band 3: Elektrodynamik*. 7. Aufl. Springer, Berlin (2004)
- [66] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik: *Table of Integrals, Series, and Products*. 4th. ed. Academic Press, New York (1965)
- [67] G. B. Arfken and H. J. Weber: *Mathematical Methods for Physicists*. 5.th. ed. Academic Press, London (2001)
- [68] T. Fliessbach: *Allgemeine Relativitätstheorie*. 4. Aufl. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (2003)
- [69] C. Bär: *Elementare Differentialgeometrie*. De Gruyter, Berlin (2001)
- [70] J. C. Eccles: *New Light on the Mind-Brain Problem: How Mental Events could influence Neural Events*. In: Complex Systems – Operational Approaches, H. Haken (ed.), Springer, Berlin (1985)
- [71] R. Penrose: *Computerdenken*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (2002)
- [72] R. Penrose: *Shadows of the Mind: A Search for the Missing Science of Consciousness*. Oxford University Press, Oxford (1994)
- [73] G. M. Edelman: *Göttliche Luft, vernichtendes Feuer*. 2. Aufl. Piper-Verlag, München (1995)
- [74] H. Risken: *The Fokker-Planck Equation. Methods of Solution and Applications*. 2nd. ed. Springer-Verlag, Berlin (1989)
- [75] K. Pyragas: *Continuous Control of Chaos by Self-Controlling Feedback*. Phys. Lett. A **170**, 421 (1992)
- [76] K. Pyragas: *Control of Chaos Via an Unstable Delayed Feedback-Controller*. Phys. Rev. Lett. **86**, 2265 (2001)

- [77] J. K. Hale: *Dynamics and Delays*. In: Functional Differential Equations, T. Yoshizawa (ed.), World Scientific, Singapore (1991)
- [78] V. Heine: *Group Theory in Quantum Mechanics*. Dover, New York (1993)

Danksagung

Prof. Dr. Günter Wunner danke ich für die Aufnahme an sein Institut, die interessante Aufgabenstellung, zahlreiche Anregungen sowie für die großzügige Unterstützung während der gesamten Arbeit.

Bei Herrn Priv.-Doz. Dr. Axel Pelster, Universität Duisburg-Essen, bedanke ich mich für die gute und fruchtbare Zusammenarbeit. Durch sein stetiges großes Engagement, das Beisteuern vieler Ideen, seine Diskussionsfreudigkeit und das große Interesse am Fortgang der Arbeit hat er in erheblichem Umfang zum Gelingen derselbigen beigetragen. Prof. Dr. Dr. h. c. Robert Graham danke ich in diesem Zusammenhang für die freundliche Bereitstellung eines Arbeitsplatzes während zweier Gastaufenthalte am Essener Fachbereich Physik.

Prof. Dr. Rudolf Friedrich, Universität Münster, danke ich für die freundliche Übernahme des Mitberichts.

Bei Frau Karin Fairgrieve bedanke ich mich für das gründliche Korrekturlesen der englischsprachigen Zusammenfassung.

Apl. Prof. Dr. Arne Wunderlin danke ich für mehrere interessante Hinweise und Diskussionen.

Den Systemadministratoren Dipl.-Phys. Steffen Bücheler und Dipl.-Phys. Dirk Engel danke ich für die Hilfe bei computertechnischen Fragen und Problemen.

Bei meinen Eltern bedanke ich mich dafür, dass sie mir das Studium der Physik ermöglichten und mich immer unterstützt haben.

