

# Zur Analytik und Numerik zeitlich verzögerter synergetischer Systeme

Von der Fakultät Physik der Universität Stuttgart  
zur Erlangung der Würde eines  
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)  
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von  
**Michael Schanz**  
aus Stuttgart

Hauptberichter:	Prof. Dr. Dr. h.c. mult. H. Haken
Mitberichter:	Prof. Dr. M. Föhnle
Tag der mündlichen Prüfung:	7. Februar 1997

Institut für Theoretische Physik und Synergetik der  
Universität Stuttgart

1997

*Im Gedenken an meine Mutter*

*Erika Schanz*

# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>1</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>5</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>7</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>8</b>
<b>1 Zusammenfassung</b>	<b>11</b>
<b>2 Einleitung</b>	<b>13</b>
<b>3 Synergetik</b>	<b>15</b>
3.1 Motivation . . . . .	15
3.2 Das mathematische Konzept der Synergetik . . . . .	18
3.2.1 Modellbildung . . . . .	18
3.2.2 Stationärer Referenzzustand . . . . .	20
3.2.3 Lineare Stabilitätsanalyse . . . . .	20
3.2.4 Projektion der Bewegungsgleichung . . . . .	22
3.2.5 Das Ordnungsparameterkonzept der Synergetik . . . . .	23
3.2.6 Die Zeitskalenhierarchie . . . . .	25
3.2.7 Das Versklavungsprinzip der Synergetik . . . . .	25
3.2.8 Elimination der stabilen Moden . . . . .	26
3.3 Ein Beispiel: Das Haken-Zwanzig-Modell . . . . .	27
3.4 Zusammenfassung . . . . .	32
3.5 Phänomenologische Synergetik . . . . .	34
<b>4 Dynamische Systeme</b>	<b>36</b>
4.1 Motivation . . . . .	36
4.2 Zeitdiskrete Systeme . . . . .	36
4.2.1 Definition . . . . .	37
4.2.2 Eigenschaften . . . . .	37
4.3 Zeitdiskrete Systeme mit zeitlicher Verzögerung . . . . .	38
4.4 Zeitkontinuierliche Systeme . . . . .	38
4.4.1 Definition . . . . .	38
4.4.2 Eigenschaften . . . . .	38

4.5	Zeitkontinuierliche zeitlich verzögerte Systeme . . . . .	39
4.5.1	Definition . . . . .	39
4.5.2	Eigenschaften . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Lyapunov-Exponenten</b>	<b>44</b>
5.1	Motivation . . . . .	44
5.2	Grundlagen . . . . .	45
5.3	Definitionen . . . . .	48
5.3.1	Zeitdiskrete Systeme . . . . .	48
5.3.2	Zeitkontinuierliche Systeme . . . . .	52
5.3.3	Lyapunov-Spektrum . . . . .	54
5.3.4	Lyapunov-Dimension . . . . .	55
5.4	Analytische Berechnung . . . . .	56
5.5	Numerische Berechnung . . . . .	56
5.5.1	Methodik . . . . .	57
5.5.2	Verifikation . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Der zeitlich verzögerte Phasenregelkreis</b>	<b>63</b>
6.1	Systembeschreibung . . . . .	64
6.2	Analyse im erweiterten Zustandsraum $\mathcal{C}$ . . . . .	66
6.2.1	Stationäre Zustände . . . . .	66
6.2.2	Lineare Stabilitätsanalyse . . . . .	66
6.2.3	Zeitskalenhierarchie . . . . .	72
6.2.4	Projektion der Bewegungsgleichung . . . . .	74
6.2.5	Versklavungsprinzip . . . . .	76
6.2.6	Elimination der stabilen Moden . . . . .	77
6.2.7	Ordnungsparametergleichungen . . . . .	79
6.2.8	Normalform der Ordnungsparametergleichungen . . . . .	81
6.2.9	Interpretation im Zustandsraum $\Gamma$ . . . . .	82
6.3	Numerische Verifikation der Hopf-Bifurkation . . . . .	84
6.4	Weitergehende numerische Untersuchungen . . . . .	88
<b>7</b>	<b>Das zeitlich verzögerte Verhulst-System</b>	<b>106</b>
7.1	Motivation . . . . .	106
7.2	Analyse im erweiterten Zustandsraum $\mathcal{C}$ . . . . .	107
7.2.1	Stationäre Zustände . . . . .	107
7.2.2	Lineare Stabilitätsanalyse . . . . .	108
7.2.3	Zeitskalenhierarchie . . . . .	112
7.2.4	Projektion der Bewegungsgleichung . . . . .	113
7.2.5	Versklavungsprinzip . . . . .	114
7.2.6	Elimination der stabilen Moden . . . . .	115
7.2.7	Ordnungsparametergleichungen . . . . .	116
7.2.8	Normalform der Ordnungsparametergleichungen . . . . .	116
7.2.9	Interpretation im Zustandsraum $\Gamma$ . . . . .	118
7.3	Numerische Verifikation der Hopf-Bifurkation . . . . .	120

7.4	Weitere numerische Untersuchungen . . . . .	121
<b>8</b>	<b>Die Gleichung von Wright</b>	<b>124</b>
8.1	Motivation . . . . .	124
8.2	Analyse im erweiterten Zustandsraum $\mathcal{C}$ . . . . .	125
8.2.1	Stationäre Zustände . . . . .	125
8.2.2	Lineare Stabilitätsanalyse . . . . .	125
8.2.3	Zeitskalenhierarchie . . . . .	126
8.2.4	Projektion der Bewegungsgleichung . . . . .	127
8.2.5	Versklavungsprinzip . . . . .	127
8.2.6	Ordnungsparametergleichungen . . . . .	128
8.2.7	Normalform der Ordnungsparametergleichungen . . . . .	128
8.2.8	Interpretation im Zustandsraum $\Gamma$ . . . . .	130
8.3	Numerische Verifikation . . . . .	131
8.4	Numerische Untersuchungen . . . . .	133
<b>9</b>	<b>Das „multiple scaling“-Verfahren</b>	<b>135</b>
9.1	Motivation . . . . .	135
9.2	Beschreibung des Verfahrens . . . . .	137
9.2.1	Vorüberlegungen . . . . .	137
9.2.2	Vorbereitungen . . . . .	138
9.2.3	Koeffizientenvergleich . . . . .	139
9.2.4	Lösung der Normalform . . . . .	142
9.3	Das zeitlich verzögerte Verhulst-System . . . . .	142
9.3.1	Vorbereitungen . . . . .	142
9.3.2	Koeffizientenvergleich . . . . .	143
9.3.3	Lösung der Normalform . . . . .	145
9.4	Die Gleichung von Wright . . . . .	146
9.4.1	Vorbereitungen . . . . .	146
9.4.2	Koeffizientenvergleich . . . . .	146
9.4.3	Lösung der Normalform . . . . .	148
<b>10</b>	<b>Diskussion</b>	<b>149</b>
<b>11</b>	<b>Ausblick</b>	<b>151</b>
11.1	Analytik . . . . .	151
11.2	Numerik . . . . .	152
<b>A</b>	<b>Testsysteme</b>	<b>153</b>
A.1	Zeitdiskrete Systeme . . . . .	153
A.1.1	Bernoulli-Abbildung . . . . .	153
A.1.2	Logistische Abbildung . . . . .	154
A.1.3	Hénon-Abbildung . . . . .	158
A.1.4	Dissipative Standard-Abbildung . . . . .	161
A.2	Zeitkontinuierliche Systeme . . . . .	162
A.2.1	Das Lorenz-System . . . . .	162

<b>B</b>	<b>Das Volumenelement im Zustandsraum</b>	<b>164</b>
<b>C</b>	<b>Numerische Integrationsverfahren für zeitlich verzögerte Systeme</b>	<b>166</b>
	C.1 Diskretisierung . . . . .	166
	C.2 Explizite Verfahren . . . . .	169
	C.2.1 Euler-Vorwärts-Verfahren . . . . .	169
	C.2.2 Verbesserte Euler-Vorwärts-Verfahren . . . . .	170
	C.2.3 Verfahren vom Runge-Kutta-Typ . . . . .	172
	C.3 Implizite Verfahren . . . . .	172
	C.3.1 Euler-Rückwärts-Verfahren . . . . .	172
<b>D</b>	<b>Lyapunov-Exponenten zeitlich verzögerter Systeme</b>	<b>175</b>
	D.1 Das zeitkontinuierliche System . . . . .	175
	D.2 Definition der Lyapunov-Exponenten . . . . .	175
	D.3 Diskretisierung . . . . .	177
	D.4 Die zeitdiskrete Abbildung . . . . .	178
	D.5 Die linearisierte zeitdiskrete Abbildung . . . . .	179
<b>E</b>	<b>Zur Normalform der Hopf-Bifurkation</b>	<b>181</b>
	E.1 Behandlung der kubischen Terme . . . . .	182
	E.2 Behandlung der quadratischen Terme . . . . .	184
	E.3 Behandlung höherer Terme . . . . .	186
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>187</b>

# Abbildungsverzeichnis

3.1	Synergetisches System . . . . .	17
3.2	Wirkungsgebiet der Synergetik . . . . .	18
3.3	Situation an einer Instabilität . . . . .	24
3.4	Haken-Zwanzig-Modell: Eigenwerte . . . . .	29
3.5	Haken-Zwanzig-Modell: Potential und Bifurkationsdiagramm . . . . .	31
3.6	Haken-Zwanzig-Modell: Analytische Lösungen der Ordnungsparametergleichung . . . . .	32
3.7	Zirkuläre Kausalität . . . . .	33
4.1	Klappprozeß . . . . .	41
5.1	Zur Definition des Lyapunov-Exponenten . . . . .	49
5.2	Hénon-Abbildung: Lyapunov-Exponenten (I) . . . . .	51
5.3	Dissipative Standardabbildung: Lokale Divergenzrate . . . . .	52
5.4	Divergenz zweier Trajektorien beim Lorenz-System . . . . .	53
5.5	Gedämpfter harmonischer Oszillator: Lyapunov-Exponenten . . . . .	60
5.6	Hénon-Abbildung: Lyapunov-Exponenten (II) . . . . .	62
6.1	Blockdiagramm des Phasenregelkreises mit zeitlicher Verzögerung . . . . .	64
6.2	Grafische Darstellung des Resultats von Hayes beim Phasenregelkreis . . . . .	70
6.3	Verhalten der Eigenwerte bei Veränderung des Kontrollparameters . . . . .	71
6.4	Numerische Analyse der Hopf-Bifurkation . . . . .	86
6.5	Numerische Analyse I: Grenzzyklen . . . . .	95
6.6	Numerische Analyse I: Powerspektren . . . . .	96
6.7	Numerische Analyse II: Periodenverdopplungs-Szenario (Grenzzyklen) . . . . .	97
6.8	Numerische Analyse II: Periodenverdopplungs-Szenario (Powerspektren) . . . . .	98
6.9	Numerische Analyse III: Periodenverdopplungs-Szenario (Lyapunov-Exponenten) . . . . .	99
6.10	Numerische Analyse IV: Chaotisches Regime I . . . . .	100
6.11	Numerische Analyse IV: Powerspektren . . . . .	101
6.12	Numerische Analyse V: Chaotisches Regime II . . . . .	102
6.13	Numerische Analyse V: Powerspektren . . . . .	103
6.14	Numerische Lyapunov-Dimensionen . . . . .	104
7.1	Grafische Darstellung des Resultats von Hayes beim Verhulst-System . . . . .	110

7.2	Verhalten der Eigenwerte bei Veränderung des Kontrollparameters . . . . .	112
7.3	Numerische Analyse der Hopf-Bifurkation . . . . .	120
7.4	Oszillatorische Lösungen . . . . .	122
7.5	Bifurkationsdiagramm . . . . .	123
8.1	Numerische Analyse der Hopf-Bifurkation . . . . .	132
8.2	Oszillatorische Lösungen . . . . .	134
A.1	Logistische Abbildung: Bifurkationsdiagramm . . . . .	156
A.2	Hénon-Abbildung: Bifurkationsdiagramm . . . . .	160
A.3	Dissipative Standard-Abbildung: Lyapunov-Exponenten . . . . .	161
A.4	Lorenz-System: Lyapunov-Exponenten . . . . .	163
C.1	Schematische Diskretisierung der Zeitintervalle $[t - \tau, t], [t - 1, t]$ . . . . .	167
C.2	Sukzessive Belegung der „Gedächtnis“-Matrix . . . . .	168
D.1	Erzeugung einer diskreten Abbildung . . . . .	178



# Tabellenverzeichnis

3.1	Beispiele synergetischer Systeme . . . . .	16
3.2	Haken-Zwanzig-Modell: Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	28
3.3	Haken-Zwanzig-Modell: Stabilität der stationären Referenzzustände . . . . .	28
5.1	Symbolische Lyapunov-Spektren verschiedener Attraktoren . . . . .	54
6.1	Selbstkonsistenz-Betrachtung . . . . .	78
6.2	Allgemeine Ordnungs-Betrachtung . . . . .	79
6.3	Ordnungs-Betrachtung bei einer Hopf-Bifurkation . . . . .	80
6.4	Ordnungs-Betrachtung beim Zustandsvektor . . . . .	85
6.5	Vergleich der analytischen und numerischen Resultate . . . . .	87
6.6	Bifurkationspunkte des Periodenverdopplungs-Szenarios . . . . .	91
7.1	Vergleich der analytischen und numerischen Resultate . . . . .	121
8.1	Vergleich der analytischen und numerischen Resultate . . . . .	133
9.1	Gegenüberstellung: Synergetische Systemanalyse - „multiple scaling“ . . . . .	136
A.1	Logistische Abbildung: Parameterwerte der Bifurkationspunkte des Periodenverdopplungs-Szenarios . . . . .	157
A.2	Logistische Abbildung: Parameterwerte der superstabilen Zyklen des Periodenverdopplungs-Szenarios . . . . .	157
A.3	Hénon-Abbildung: Parameterwerte der Bifurkationspunkte des Periodenverdopplungs-Szenarios . . . . .	159
A.4	Hénon-Abbildung: Lyapunov-Exponenten und Lyapunov-Dimension für die Standard-Parameter $a = 1.4, b = 0.3$ . . . . .	159
A.5	Dissipative Standard-Abbildung: Lyapunov-Exponenten und Lyapunov-Dimension für die Standard-Parameter $a = 1.4, b = 0.3$ . . . . .	162

# Symbolverzeichnis

## Kapitel 3: Synergetik

$\Gamma$	Zustandsraum
$\{\sigma_k\}$	Satz äußerer Parameter (Kontrollparameter)
$\underline{f}$	nichtlineares Vektorfeld
$\underline{z}(t)$	Zustandsvektor
$\underline{\sigma}$	stochastische Kraft
$\underline{z}_{ref}$	zeitunabhängiger Referenzzustand
$\underline{\zeta}$	Zustandsvektor des linearisierten Problems
$\underline{L}$	um den Referenzzustand linearisierte Matrix
$\underline{L}^\dagger$	zu $\underline{L}$ adjungierte Matrix
$\underline{T}$	Transformationsmatrix
$\underline{T}^{-1}$	inverse Transformationsmatrix
$\underline{\Lambda}$	Diagonalmatrix der Eigenwerte
$\underline{I}$	Einheitsmatrix
$\delta_{ij}$	Kroneckersymbol
$\phi^{\lambda_i}$	Eigenvektor
$ \phi^{\lambda_i}\rangle$	Ket-Schreibweise
$\psi^{\dagger\lambda_i}$	adjungierter Eigenvektor
$\langle\psi^{\lambda_i} $	Bra-Schreibweise
$\langle\psi \phi\rangle$	gewöhnliches Skalarprodukt
$\lambda$	Eigenwert
$\lambda_{\Re}$	Realteil des Eigenwertes
$\lambda_{\Im}$	Imaginärteil des Eigenwertes
$\xi(t)$	Modenamplituden
$\tilde{f}$	effektives nichtlineares Vektorfeld
$\underline{\tau}$	Relaxationszeit
$\underline{s}(t)$	Vektor der stabilen Modenamplituden
$\underline{u}(t)$	Vektor der instabilen Modenamplituden
$\Re$	Realteil
$\Im$	Imaginärteil
$\underline{h}(\underline{u}(t))$	zentrale Mannigfaltigkeit
$H_{ij_1, \dots, j_k}$	Entwicklungskoeffizienten der zentralen Mannigfaltigkeit

**Kapitel 4: Dynamische Systeme**

$\underline{F}^{[n]}$	Fluß eines zeitdiskreten dynamischen Systems
$\underline{F}^{[t]}$	Fluß eines zeitkontinuierlichen dynamischen Systems
$\tau$	zeitliche Verzögerung
$\mathcal{C}$	erweiterter Zustandsraum
$\mathcal{U}$	Teilraum der linear instabilen Moden
$\mathcal{S}$	Teilraum der linear stabilen Moden
$\Theta$	unabhängige Variable im erweiterten Zustandsraum
$\underline{z}_t(\Theta)$	Zustandsvektor im erweiterten Zustandsraum $\mathcal{C}$
$\underline{F}^{[t]}$	Fluß eines zeitlich verzögerten dynamischen Systems
$\mathcal{G}$	infinitesimaler Generator
$\mathcal{G}_L$	linearisierter infinitesimaler Generator
$\mathcal{F}[\underline{z}_t]$	Funktional des Zustandsvektors im erweiterten Zustandsraum $\mathcal{C}$
$\delta$	Diracsche „Deltafunktion“
$\omega_{ij_1 \dots j_k}^{(k)}(\Theta_1, \dots, \Theta_k)$	Dichten des Funktionals $F$

**Kapitel 5: Lyapunov-Exponenten**

$\underline{F}^{[t]}$	Fluß eines dynamischen Systems
$M$	Teilmenge des Zustandsraums $\Gamma$
$\mathcal{S}$	Separatrix
$\mathbb{A}$	Attraktor
$A$	attraktive Menge
$U$	Umgebung einer Menge
$E(A)$	Einzugsgebiet der attraktiven Menge $A$
$\mu$	Wahrscheinlichkeitsmaß
$\mathbb{B}$	Teilmenge eines Attraktors $\mathbb{A}$
$\rho_\mu(\underline{z})$	Dichte des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mu$
$\mathfrak{p}$	natürliches Maß
$D_H$	Hausdorff-Dimension
$D_L$	Lyapunov-Dimension
$D_K$	Kapazität
$\lambda$	Lyapunov-Exponent

**Kapitel 6: Der zeitlich Verzögerte Phasenregelkreis**

$\Phi(t)$	Phase eines Oszillators
$R$	effektiver Kontrollparameter
$R_c$	kritischer Wert des effektiven Kontrollparameters
$\frac{\delta}{\delta z_t(\Theta)}$	Funktionalableitung
$\underline{z}_t(\Theta)$	Zustandsvektor des linearisierten Problems im erweiterten Zustandsraum $\mathcal{C}$
$\mathcal{L}[\underline{z}_t]$	um den Referenzzustand linearisiertes Funktional
$\omega(\Theta)$	Dichte des linearen Funktionals $calL$
$\underline{z}_t(\Theta)$	adjungierter Zustandsvektor des linearisierten Problems
$\underline{\mathcal{G}}_L$	adjungierter linearisierter infinitesimaler Generator
$\mathcal{L}[\underline{z}_t]$	zu $\mathcal{L}$ adjungiertes Funktional
$\underline{\phi}^\lambda(\Theta)$	Eigenvektor des linearisierten Problems im erweiterten Zustandsraum
$ \underline{\phi}^\lambda(\Theta)\rangle$	Ket-Schreibweise
$\underline{\psi}^{\dagger\lambda}(s)$	Eigenvektor des adjungierten linearisierten Problems im erweiterten Zustandsraum
$\langle \underline{\psi}^\lambda  $	Bra-Schreibweise
$(\underline{\psi}   \underline{\phi})$	Bilinearform im erweiterten Zustandsraum
$\mathcal{F}^{\text{eff}}$	effektives nichtlineares Funktional
$\mathcal{P}_u$	Projektor in den instabilen Teilraum $\mathcal{U}$
$\mathcal{P}_s$	Projektor in den instabilen Teilraum $\mathcal{S}$
$\mathcal{I}$	Identität im erweiterten Zustandsraum

**Anhang**

$\underline{\mathcal{M}}$	„Gedächtnis“-Matrix
$\Delta t$	Zeitintervall der Diskretisierung
$\underline{F}_{\Delta t}$	Approximationsfunktion
$\rho$	Dichte des invarianten natürlichen Maßes
$\alpha$	universelle Skalierungs-Konstante des Ordnungsparameters
$\delta$	universelle Skalierungs-Konstante des Kontrollparameters
$Z$	Zeitordnungsoperator
$\underline{\mathcal{Z}}$	Zeitordnungsoperator im erweiterten Zustandsraum
$\underline{G}$	einem zeitlich verzögerten System zugeordnete zeitdiskrete Abbildung
$\underline{G}_L$	einem zeitlich verzögerten System zugeordnete linearisierte zeitdiskrete Abbildung

# Kapitel 1

## Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich sowohl mit analytischen als auch numerischen Konzepten zur Untersuchung dynamischer Systeme mit zeitlicher Verzögerung. Zeitliche Verzögerungen treten in dynamischen Systemen beispielsweise dann auf, wenn Laufzeiteffekte relevant werden. Der mathematisch adäquate Rahmen für die Behandlung dieser Systeme ist ein erweiterter, unendlich-dimensionaler Zustandsraum. Die Bewegungsgleichungen werden dadurch im allgemeinen zu Funktionaldifferentialgleichungen in diesem Zustandsraum.

Die analytischen Untersuchungen werden im Rahmen des Konzeptes der Synergetik durchgeführt. Die numerischen Untersuchungen basieren im wesentlichen auf dem Konzept der Fourieranalyse und dem der Lyapunov-Exponenten. Auch der visuellen Darstellung der numerisch simulierten Trajektorien im Zustandsraum kommt eine nicht zu vernachlässigende Bedeutung zu.

Die Notwendigkeit bei der mathematischen Beschreibung zeitlich verzögerter Systeme den bereits erwähnten unendlich-dimensionalen Zustandsraum zu verwenden, hat zwei entscheidende Konsequenzen:

- 1.) Das Konzept der Synergetik genauso wie das der Lyapunov-Exponenten muß auf diese Systemklasse erweitert werden.
- 2.) Die analytischen und numerischen Untersuchungen sind sehr aufwendig.

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich daher auf Delay-Differentialgleichungen, die eine Unterklasse der Funktionaldifferentialgleichungen bilden. Außerdem werden nur skalare Systeme untersucht. Zum einen zeigen sich die durch die Zeitverzögerung entstehenden, neuen charakteristischen Eigenschaften schon bei diesen relativ einfachen Systemen und zum anderen kann ihre Dynamik schon äußerst vielfältig und kompliziert sein.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert:

In Kapitel 3 wird das Konzept der Synergetik für Systeme ohne zeitliche Verzögerung vorgestellt und an einem einfachen Beispiel veranschaulicht. Anschließend werden

in Kapitel 4 einige notwendigen Grundbegriffe dynamischer Systeme erläutert und der angesprochene erweiterte unendlich-dimensionale Zustandsraum eingeführt. Das Konzept der Lyapunov-Exponenten für dynamische Systeme ohne zeitliche Verzögerung wird in Kapitel 5 und die Erweiterung auf dynamische Systeme mit zeitlicher Verzögerung in Anhang D dargestellt.

In der grundlegenden Arbeit [177], [178] wurde der zeitlich verzögerte Phasenregelkreis erster Ordnung erstmals ausführlich untersucht und das auf dynamische Systeme mit zeitlicher Verzögerung erweiterte Konzept der Synergetik entwickelt. Bei dieser Untersuchung zeigte es sich, daß das Ordnungsparameterkonzept der Synergetik auch bei Systemen mit zeitlicher Verzögerung Gültigkeit besitzt. Es stellte sich aber auch heraus, daß bei diesem System in der niedersten Ordnung nicht überprüft werden kann, ob der Einfluß der zentralen Mannigfaltigkeit auf die Ordnungsparametergleichungen durch den erweiterten Formalismus richtig erfaßt wird. Dieser Nachweis wird erst in der vorliegenden Arbeit an zwei anderen Systemen erbracht.

Der erste Teil des Kapitels 6 ist bis auf die lineare Stabilitätsanalyse im wesentlichen eine Zusammenfassung der erwähnten Arbeit [177], [178], um den Formalismus zu erläutern. Im zweiten Teil des Kapitels 6 wird die mit Hilfe der Methodik der Synergetik hergeleitete Normalform der ersten oszillatorischen Instabilität numerisch überprüft. Außerdem werden weitergehende numerische Analysen durchgeführt, die zu einem detaillierteren qualitativen Überblick über die vielfältige komplizierte Dynamik dieses skalaren Systems im gesamten Parameterraum führt. Schließlich wird ein auftretendes Periodenverdopplungs-Szenario mit Hilfe des Konzeptes der Lyapunov-Exponenten genauer studiert und die Skalierungskonstante  $\delta$  im Parameterraum numerisch bestimmt sowie die Lyapunov-Dimension  $D_L$  über einen weiten Bereich des effektiven Kontrollparameters  $R$  ermittelt. In Kapitel 7 wird das zeitlich verzögerte Verhulst-System behandelt, das explizit gewählt wurde, um den oben erwähnten Einfluß der zentralen Mannigfaltigkeit auf die Ordnungsparametergleichungen zu überprüfen. Schließlich wird in Kapitel 8 die Gleichung von Wright untersucht. Auch bei diesem System läßt sich der Einfluß der zentralen Mannigfaltigkeit auf die Ordnungsparametergleichungen überprüfen. Die analytischen Ergebnisse der Kapitel 7 und 8 werden wie in Kapitel 6 durch numerische Untersuchungen verifiziert.

Mit Hilfe des in Kapitel 9 vorgestellten Verfahrens ist es möglich, die Normalform der Hopf-Bifurkation auf eine zweite von der synergetischen Systemanalyse unabhängige Art abzuleiten. Auf diese Weise werden die Ergebnisse der Kapitel 6 – 8 nicht nur numerisch sondern auch analytisch verifiziert.

In Kapitel 10 werden die wesentlichen Ergebnisse noch einmal kurz zusammengefaßt und in Kapitel 11 wird ein kurzer Ausblick über weitere Aufgabenstellungen gegeben.

# Kapitel 2

## Einleitung

In komplexen dynamischen Systemen kommt es an Instabilitäten häufig zu selbstorganisierten, makroskopischen Strukturbildungsprozessen. In der Umgebung der Instabilitäten kann das Verhalten des Systems dann durch wenige, sogenannte Ordnungsparameter beschrieben werden. Im Rahmen des Konzepts der Synergetik wurde ein systematisches Verfahren entwickelt, die Bewegungsgleichungen der Ordnungsparameter zu bestimmen (siehe [69], [70], [71], [76]). Dabei wird vorausgesetzt, daß die Systeme auf einer mikro- oder mesoskopischen Ebene durch gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen beschrieben werden. Die systematische Methodik der Synergetik beruht im wesentlichen auf zwei Schritten:

- 1.) Die Bewegungsgleichungen werden auf kollektive Moden projiziert, die der makroskopischen Ordnungsstruktur angepaßt sind.
- 2.) Die Ordnungsparametergleichungen entstehen dadurch, daß sich die stabil bleibenden kollektiven Moden in der Umgebung einer Instabilität durch die instabilen Moden ausdrücken lassen. Sie können dadurch aus den Gleichungen für die instabilen Moden eliminiert werden.

Es ergibt sich somit ein geschlossenes Gleichungssystem für die instabilen Moden, nämlich die Ordnungsparametergleichungen. Die stabilen kollektiven Moden wirken über die zentrale Mannigfaltigkeit indirekt auf die Ordnungsparametergleichungen zurück, wodurch eine zyklische Kausalkette entsteht.

In den bisherigen Arbeiten zu Delay-Differentialgleichungen [14], [81] wurde diese Methode in zu enger Analogie übertragen und der unendlich-dimensionale Charakter nicht korrekt berücksichtigt. Durch die auf Krasovskii [103] und Hale [77], [78] zurückgehende grundlegende Idee, die Dynamik zeitlich verzögerter Systeme in einem erweiterten, unendlich-dimensionalen Zustandsraum zu formulieren, wurde der mathematisch adäquate Rahmen bereitgestellt. Die Bewegungsgleichungen werden dadurch zu Funktionaldifferentialgleichungen in diesem erweiterten Zustandsraum, für die ein entsprechendes Eliminationsverfahren neu entwickelt und formuliert werden mußte. Diese Erweiterung wurde in der Arbeit von Wischert et al. [177], [178] durchgeführt und am Beispiel des zeitlich verzögerten Phasenregelkreises überprüft.

Mit Hilfe des auf zeitlich verzögerte Systeme erweiterten Konzeptes der Synergetik gelang es, die Ordnungsparametergleichungen der ersten oszillatorischen Instabilität herzuleiten. Damit wurde gezeigt, daß auch die Dynamik eines zeitlich verzögerten und damit unendlich-dimensionalen dynamischen Systems in der Nähe einer Instabilität durch die Dynamik weniger Freiheitsgrade beschrieben werden kann. Darüber hinaus wurde gezeigt, daß die Ordnungsparametergleichungen gewöhnliche Differentialgleichungen sind, die keine Retardierungseffekte mehr aufweisen. Der Einfluß der stabilen Moden auf die Ordnungsparametergleichungen konnte bei diesem System allerdings nicht gezeigt werden, da die stabilen Moden in niederster Ordnung keinen Einfluß auf die Ordnungsparametergleichungen haben und daher die zyklische Kausalkette nicht geschlossen ist. In der vorliegenden Arbeit wird durch numerische Untersuchungen einerseits und eine weitere analytische Methode andererseits gezeigt, daß die in [177], [178] hergeleiteten Ordnungsparametergleichungen korrekt sind. Außerdem wird an zwei anderen Systemen gezeigt, daß das auf zeitlich verzögerte Systeme erweiterte Konzept der Synergetik auch den Einfluß der stabilen Moden auf die Ordnungsparametergleichungen korrekt erfaßt. Inzwischen konnte die Methodik so erweitert werden, daß der Referenzzustand auch zeitlich periodisch sein kann (siehe [152], [154], [153]).

Zeitlich verzögerte Systeme treten in vielen wissenschaftlichen Disziplinen auf. Im Bereich der Physik findet man sie in mechanischen, elektro- und akusto-optischen sowie optisch bistabilen Systemen [13], [14], [19], [26], [50], [64], [89], [94], [123], [124], [167]. In der Biologie sind vor allem physiologische Kontrollmechanismen die Ursache zeitlicher Verzögerungen [5], [51], [52], [54], [116], [121], [122], [164]. Bei ökonomischen und soziologischen Systemen führt beispielsweise die endliche Ausbreitungs- und Verarbeitungsgeschwindigkeit von Information zu Retardierungseffekten [10], [55], [88], [117]. In Modellen zur Populationsdynamik oder der Ökologie werden sie verwendet, um der endlichen Zeitdauer für die Erneuerung bestimmter Ressourcen Rechnung zu tragen [28], [53], [83], [104]. Neuere Arbeiten zeigen schließlich, daß es durch zeitlich verzögerte Rückkopplungen möglich ist, sowohl instabile stationäre Zustände, als auch instabile Grenzzyklen zu stabilisieren. Insbesondere gelingt es dadurch, chaotisches Verhalten zu kontrollieren oder zu verhindern [124], [135], [137]. Diese Methode zeichnet sich gegenüber der bekannten Methode von Ott et al. [127] dadurch aus, daß sie wesentlich einfacher anzuwenden ist und weniger Information über das System nötig ist. Daher ist sie von besonderer Bedeutung für experimentelle Untersuchungen. In diesem Zusammenhang ist zu erwähnen, daß das auf zeitlich verzögerte Systeme verallgemeinerte Konzept der Synergetik somit eine analytische Methodik zur Untersuchung der Stabilisierung instabiler Referenzzustände bereitstellt.



# Kapitel 3

## Synergetik

### 3.1 Motivation

In der belebten und unbelebten Natur beobachtet man eine Vielzahl von Prozessen, die durch *Selbstorganisation* spontan zeitliche, räumliche, raum-zeitliche oder funktionale *makroskopische Ordnungsstrukturen* ausbilden. In Tabelle 3.1 sind einige Beispiele aufgeführt. Obwohl sie den unterschiedlichsten Fachdisziplinen zuzuordnen sind, besitzen sie alle ganz bestimmte charakteristische Eigenschaften:

**Offenheit** Die Systeme sind offen, das heißt, es findet ein Austausch von Energie und/oder Materie und/oder Information mit der Umgebung statt. Sie befinden sich durch diesen *unspezifischen* Fluß in einem Nichtgleichgewichtszustand oder Fließgleichgewicht fern vom thermodynamischen Gleichgewicht.

**Untersysteme** Die Systeme sind aus vielen, miteinander wechselwirkenden Unterbeziehungsweise Teilsystemen zusammengesetzt. Es handelt sich im allgemeinen also um sehr komplexe Systeme.

**Nichtlinearität** Die Dynamik ist nichtlinear, das heißt, daß bereits die Dynamik der Unterbeziehungsweise Teilsysteme und/oder die Wechselwirkungen beziehungsweise Kopplungen der Untersysteme miteinander nichtlinear sind.

Um eine einheitliche und adäquate mathematische Beschreibung zu formulieren und gleichzeitig dem interdisziplinären Charakter sowie der fundamentalen Bedeutung von *Selbstorganisationsprozessen* gebührend Rechnung zu tragen, entwickelte H. Haken im Jahre 1969 die *Synergetik*, die Lehre vom Zusammenwirken (siehe [69], [70], [71], [76]).

Befindet sich ein synergetisches System (vgl. Abb. 3.1) in einem *stationären Zustand*, so ist diesem eine bestimmte makroskopischen Ordnungsstruktur zugeordnet. Die Offenheit ermöglicht nun eine Beeinflussung des Systems von außen durch sogenannte *Kontrollparameter*, beispielsweise durch Veränderung der Energiezufuhr. Dabei wird eine stetige Veränderung der Kontrollparameter im allgemeinen zu stetigen

quantitativen Zustandsänderungen führen. Beispiele hierfür sind die stetige Änderung der Koordinaten eines stationären Zustandes oder die stetige Formveränderung eines Grenzyklus oder eines komplizierteren Attraktors (siehe Kap. 5). Bei bestimmten kritischen Werten der Kontrollparameter kann es allerdings auch zu *Instabilitäten* und damit qualitativen Zustandsänderungen sogenannten *Bifurkationen* kommen: Die bestehende Ordnungsstruktur wird instabil und eine neue wird stabil. Dabei tritt ein Wettbewerb zwischen den instabil werdenden *kollektiven Moden* des Systems auf, den im allgemeinen nur wenige dieser Moden für sich entscheiden können<sup>1</sup>. Diese qualitativen Zustandsänderungen können auch unstetig verlaufen und zu *Hystereseeffekten* führen.

System oder Systemklasse	Disziplin	Untersysteme	Makroskopische Ordnungsstruktur
Laser	Physik	Atome	Laserlicht
Halbleiter	Physik	Elektronen und Phononen	Stromfilamente
BZ-Reaktion <sup>2</sup>	Chemie	Moleküle	Spiralmuster
Bénard-Experiment <sup>3</sup>	Hydrodynamik	Moleküle	Rollenmuster
Taylor-Experiment <sup>4</sup>	Hydrodynamik	Moleküle	Rollenmuster
Populations-systeme	Ökologie	Spezies	Oszillationen
morphogenetische Systeme <sup>5</sup>	Biologie	Zellen	funktionales Zellaggregat
Herzmuskel	Physiologie	Zellen	Pumpbewegung
Wolken	Meteorologie	Wassermoleküle	Wolkenstraßen
Galaxie	Kosmologie	Sterne	Spiralmuster

Tabelle 3.1: *Beispiele synergetischer Systeme*

<sup>1</sup>Dies kann entweder eine einzelne „überlebende“ Mode sein oder mehrere, sich gegenseitig stabilisierende, koexistierende Moden.

<sup>2</sup>**Belousov-Zhabotinsky-Reaktion:** Von Belousov im Jahr 1959 und später von Zhabotinsky und Mitarbeitern untersuchte chemische Reaktion, die auffällige Konzentrationsoszillationen zeigt (siehe z.B. [169]).

<sup>3</sup>**Bénard-Instabilität:** Von Bénard im Jahr 1900 erstmals untersuchte hydrodynamische Konvektionsinstabilität [12].

<sup>4</sup>**Taylor-Instabilität:** Von Taylor im Jahr 1923 erstmals untersuchte hydrodynamische Couette-Strömungsinstabilität.

<sup>5</sup>Systeme mit der Fähigkeit zur Entwicklung eines pflanzlichen oder tierischen Organismus oder eines Teiles (Organe, Organellen) davon. Ein Beispiel sind Schleimpilzzellen in einer geeigneten Nährlösung.

Abbildung 3.1: *Synergetisches System*

Schließlich kann ein System bei kontinuierlicher Veränderung der Kontrollparameter eine ganze Sequenz von Instabilitäten mit entsprechenden Ordnungsstrukturen durchlaufen (siehe Abb. 3.2). Die sich ausbildenden Ordnungsstrukturen können dabei auch durch kompliziertere chaotische Attraktoren (siehe Kap. 5) charakterisiert sein.

Um der geforderten Interdisziplinarität und Universalität gerecht zu werden, ist die Formulierung der Synergetik so allgemein gehalten, daß ihre Methoden auf die unterschiedlichsten Systeme, unabhängig von der speziellen Natur der Untersysteme, angewendet werden können. Diese können z.B. Elektronen, Atome, Moleküle, Zellen, Zellcluster, Sandkörner ja sogar Tiere oder Menschen sein. Die Dynamik der Systeme kann dann an den Instabilitäten näherungsweise in Form einer Entwicklung nach einem *Kleinheitsparameter* beschrieben werden. Diese Entwicklung spiegelt den lokalen Charakter der Methodik der Synergetik wieder<sup>6</sup>. Obwohl dieser lokale Charakter ein Nachteil ist, besteht die eigentliche Stärke der Methodik der Synergetik darin, daß sie gerade an den interessanten Bifurkationsstellen eines Systems angewendet werden kann.

---

<sup>6</sup>Anmerkung: Diese Einschränkung gilt für die in Abschnitt 3.5 eingeführte *Top-Down* Strategie der phänomenologischen Synergetik nicht mehr.

Abbildung 3.2: **Wirkungsgebiet der Synergetik**

*Ein synergetisches System kann bei Veränderung der Kontrollparameter eine ganze Sequenz von Instabilitäten mit entsprechenden Ordnungszuständen durchlaufen. An den durch Kreise markierten Bifurkationsstellen kann die Dynamik des Systems mit Hilfe der Konzepte und Methoden der Synergetik analysiert werden.*

## 3.2 Das mathematische Konzept der Synergetik

### 3.2.1 Modellbildung

Die Beschreibung der Dynamik eines Prozesses erfolgt in den Naturwissenschaften durch *Bewegungsgleichungen*<sup>7</sup>. Sie werden im allgemeinen durch ein mehr oder weniger vereinfachtes Modell des realen Systems motiviert, mit dessen Hilfe es möglich ist, das Problem auf eine adäquate mathematische Struktur abzubilden. Die Modellbildung wird dabei durch die Wahl der Betrachtungsebene (mikro-, meso- oder makroskopisch) mit ihren typischen Zeit- und Längenskalen und die Beschreibungsform auf dieser Ebene (klassisch, semiklassisch, oder quantenmechanisch) entscheidend beeinflusst.

---

<sup>7</sup>Im Fall des Lasers sind dies beispielsweise die semiklassischen Bewegungsgleichungen für die Polarisation  $\underline{P}$ , die Inversion  $D$  und die elektrische Feldstärke  $\underline{E}$  (siehe z.B. [67], [68], [72]).

- mikroskopisch** Hier werden die Bewegungsgleichungen der einzelnen Untersysteme betrachtet, entsprechend sind die typischen Zeit- und Längenskalen durch die der Untersysteme bestimmt<sup>8</sup>. Hier werden meist die fundamentalen Wechselwirkungen berücksichtigt. Die Zahl der Freiheitsgrade des Systems, also die Zahl der zur Beschreibung notwendigen Variablen, ist sehr groß<sup>9</sup>. Die Information über das System ist hier am größten.
- mesoskopisch** Hier sind viele der mikroskopischen Untersysteme bereits zu größeren Einheiten zusammengefaßt. Diese übernehmen nun selbst die Rolle der Untersysteme, daher sind die typischen Zeit- und Längenskalen größer als die der mikroskopischen Untersysteme, jedoch immer noch deutlich kleiner als die des Gesamtsystems. Die Wechselwirkungen zwischen diesen Untersystemen sind oft zeitlich und räumlich gemittelte fundamentale Wechselwirkungen. Durch die Zusammenfassung beziehungsweise Mittelung ist die Zahl der Freiheitsgrade kleiner als auf der mikroskopischen Betrachtungsebene, jedoch immer noch sehr groß. Aus mikroskopischer Sicht ist die Information über das System nicht mehr vollständig.
- makroskopisch** Hier werden meist phänomenologisch eingeführte Bewegungsgleichungen und Wechselwirkungen betrachtet. Die typischen Zeit- und Längenskalen sind durch das makroskopische Gesamtsystem bestimmt. Im allgemeinen kommt man hier mit wenigen Freiheitsgraden aus. Man erhält nur makroskopische Information über das System.

Die Bewegungsgleichungen können *zeitdiskret* oder *zeitkontinuierlich* sein<sup>10</sup>. In diesem Kapitel werden wir uns auf die zeitkontinuierlichen beschränken. Faßt man auf einer bestimmten Betrachtungsebene alle Variablen des Systems zu einem Zustandsvektor  $\underline{z}$  zusammen, dann läßt sich die Dynamik des Systems durch die Bewegungsgleichung dieses Zustandsvektors in einem  $n$ -dimensionalen Zustandsraum  $\Gamma$  beschreiben, die bei Berücksichtigung von Fluktuationen<sup>11</sup> folgende allgemeine Form annimmt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{z}(\underline{x}, t) = \underline{f}(\underline{z}(\underline{x}, t), \underline{x}, t, \underline{\nabla}, \{\sigma_k\}) + \underline{\sigma}(\underline{z}(\underline{x}, t), t). \quad (3.1)$$

Die nichtlinearen Wechselwirkungen der Untersysteme miteinander und/oder ihre nichtlineare Dynamik resultieren in einem nichtlinearen Vektorfeld  $\underline{f}$ . Dieses kann vom Zustandsvektor  $\underline{z}$ , seinen Ableitungen nach den Ortskoordinaten, repräsentiert durch den Nabla-Operator  $\underline{\nabla}$ , als auch, wie der Zustandsvektor selbst, explizit

<sup>8</sup>Beim Laser sind die einzelnen Untersysteme Atome, dementsprechend ist die typische Zeitbeziehungsweise Längenskala der mikroskopischen Betrachtungsebene die quantenmechanische.

<sup>9</sup>Das sind für den Fall eines makroskopischen Gesamtsystems in der Größenordnung von  $10^{23}$ .

<sup>10</sup>Siehe hierzu auch Kap. 4.

<sup>11</sup>Fluktuationen treten in realen Systemen immer auf. Letztendlich rühren sie von Prozessen her, die entweder bei der Modellbildung unberücksichtigt bleiben, oder die durch Mittelungen summarisch als stochastische Kraft in die Bewegungsgleichungen eingehen.

von den Orts- und Zeitkoordinaten  $\underline{x}$  und  $t$  abhängen. Ferner beschreibt  $\{\sigma_k\}$  den Satz der Kontrollparameter, während durch das Vektorfeld  $\underline{g}$  stochastische Prozesse berücksichtigt werden, die sowohl additiver<sup>12</sup> als auch multiplikativer<sup>13</sup> Natur sein können.

Die Bewegungsgleichung (3.1) stellt einen Satz von nichtlinearen, gekoppelten, partiellen und stochastischen Differentialgleichungen dar. Um die Methodik der Synergetik darzustellen, ist es jedoch nicht nötig, dieses komplizierte allgemeine System von Differentialgleichungen zu betrachten. Wir beschränken uns daher im folgenden auf die einfachere Klasse der räumlich homogenen, autonomen, deterministischen Systeme, deren allgemeine Bewegungsgleichung durch einen Satz von nichtlinearen, gekoppelten, gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\underline{z}(t) = \underline{f}(\underline{z}(t), \{\sigma_k\}) \quad (3.2)$$

beschrieben wird. Die verbleibende Aufgabe ist es nunmehr, das System von Differentialgleichungen (3.2) zu lösen. Da es sich um einen Satz von nichtlinearen Differentialgleichungen handelt, ist es meistens unmöglich, eine analytische Lösung anzugeben, vor allem nicht für beliebige Werte der Kontrollparameter. Beschränkt man sich aber auf die Nähe der Instabilitäten, also auf die Werte der Kontrollparameter, bei denen sich das Verhalten des System qualitativ ändert (vgl. Abb. 3.2), dann stellt die Synergetik ein geeignetes Konzept für die Analyse bereit.

### 3.2.2 Stationärer Referenzzustand

Um die Darstellung der Methodik der Synergetik so einfach wie möglich zu halten, beschränken wir uns auf die Analyse eines Systems in der Nähe eines zeitunabhängigen stationären Referenzzustandes  $\underline{z}_{ref}$ . Es ist anzumerken, daß dies ein Spezialfall ist und die allgemeine Formulierung der Synergetik auch Analysen um periodische oder quasiperiodische Orbits ermöglicht. Der zeitunabhängige stationäre Referenzzustand ist nun wegen des Verschwindens der linken Seite der Gleichung (3.2) gegeben durch:

$$\underline{f}(\underline{z}_{ref}, \{\sigma_k\}) = 0. \quad (3.3)$$

Aus (3.3) folgt:

$$\underline{z}_{ref} = \underline{z}_{ref}(\{\sigma_k\}), \quad (3.4)$$

das heißt, der stationäre Referenzzustand wird im allgemeinen von den Kontrollparametern abhängen.

### 3.2.3 Lineare Stabilitätsanalyse

Um die Stabilität des stationären Referenzzustandes (3.4) gegenüber äußeren Störungen zu untersuchen, führt man eine lineare Stabilitätsanalyse durch. Dazu lenkt man

<sup>12</sup>Dies sind im allgemeinen Fluktuationen der Zustandsvariablen.

<sup>13</sup>Dies sind im allgemeinen Fluktuationen der Kontrollparameter.

das System um eine kleine Größe  $\underline{\zeta}$  aus dem stationären Referenzzustand aus. Der Zustandsvektor ist dann durch

$$\underline{z}(t) = \underline{z}_{ref}(\{\sigma_k\}) + \underline{\zeta}(t) \quad (3.5)$$

gegeben.

Setzt man (3.5) in (3.2) ein, beachtet Gleichung (3.4) und führt die Linearisierung durch, das heißt, berücksichtigt man alle Terme bis zur ersten Ordnung in den Auslenkungen  $\zeta_i$ , dann erhält man ein System von linearen Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\underline{\zeta}(t) = \underline{L}(\underline{z}_{ref}(\{\sigma_k\}), \{\sigma_k\})\underline{\zeta}(t), \quad (3.6)$$

wobei die Matrix  $\underline{L}$  in diesem speziellen Fall zeitunabhängig ist und ihre Elemente durch

$$L_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial z_j} \right|_{\underline{z}=\underline{z}_{ref}(\{\sigma_k\})} \quad (3.7)$$

gegeben sind. Die Lösung der Gleichung (3.6) ergibt sich zu:

$$\underline{\zeta}(t) = e^{\underline{L}t}\underline{\zeta}(0). \quad (3.8)$$

Um die Darstellung nicht zu überfrachten, wollen wir annehmen, daß die Matrix  $\underline{L}$  mit Hilfe einer geeigneten, ebenfalls zeitunabhängigen Transformationsmatrix  $\underline{T}$  auf Diagonalform gebracht werden kann, wobei anzumerken ist, daß der allgemeine Formalismus der Synergetik nicht auf diesen Spezialfall beschränkt ist. Multipliziert man die Gleichung (3.7) von links mit  $\underline{T}^{-1}$  und fügt nach der Exponentialfunktion die Identität in Form des Matrixproduktes  $\underline{T}\underline{T}^{-1}$  ein, so erhält man:

$$\underline{T}^{-1}\underline{\zeta}(t) = e^{\underline{T}^{-1}\underline{L}\underline{T}t}\underline{T}^{-1}\underline{\zeta}(0) \quad (3.9)$$

$$\underline{\eta}(t) = e^{\underline{\Lambda}t} \cdot \underline{\eta}(0). \quad (3.10)$$

Die Diagonalmatrix  $\underline{\Lambda}$  ist dabei gegeben durch:

$$\underline{\Lambda} = \underline{T}^{-1}\underline{L}\underline{T} \quad \text{mit} \quad \Lambda_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}, \quad (3.11)$$

wobei die  $\lambda_i(\{\sigma_k\})$  die Eigenwerte der Matrix  $\underline{L}$  sind und im allgemeinen vom Satz der Kontrollparameter  $\{\sigma_k\}$  abhängen. Die Stabilität des stationären Referenzzustandes  $\underline{z}_{ref}(\{\sigma_k\})$  ist daher ebenfalls von den Kontrollparametern abhängig. Der Referenzzustand  $\underline{z}_{ref}(\{\sigma_k\})$  ist stabil, wenn alle Störungen  $\underline{\zeta}(t)$  im Laufe der Zeit wieder abklingen. Dies ist der Fall, wenn die Realteile aller Eigenwerte negativ sind, das heißt, wenn für alle Eigenwerte  $\lambda_i(\{\sigma_k\})$  gilt:

$$\Re(\lambda_i(\{\sigma_k\})) < 0. \quad (3.12)$$

Die Eigenwerte ergeben sich zusammen mit den Eigenvektoren  $\underline{\phi}^{\lambda_i}$  von  $\underline{L}$ , den Spaltenvektoren der Transformationsmatrix  $\underline{T}$ , aus dem linearen algebraischen Eigenwertproblem

$$\underline{L}\underline{\phi}^\lambda = \lambda\underline{\phi}^\lambda \quad (3.13)$$

der Matrix  $\underline{\underline{L}}$ . Da  $\underline{\underline{L}}$  nicht selbstadjungiert sein muß, betrachten wir auch noch das zu (3.13) *adjungierte* Eigenwertproblem

$$\underline{\underline{L}}^\dagger \underline{\underline{\psi}}^\lambda = \lambda \underline{\underline{\psi}}^\lambda. \quad (3.14)$$

Für das Eigenvektoren-System  $\{\underline{\underline{\phi}}^\lambda, \underline{\underline{\psi}}^\lambda\}$  im  $n$ -dimensionalen Zustandsraum  $\Gamma$  gilt dann:

$$\underline{\underline{\psi}}^{\dagger\lambda_i} \cdot \underline{\underline{\phi}}^{\lambda_j} = \langle \underline{\underline{\psi}}^{\lambda_i} | \underline{\underline{\phi}}^{\lambda_j} \rangle = \sum_{l=1}^n \psi_l^{\lambda_i*} \phi_l^{\lambda_j} = \delta_{ij} \quad \text{Orthonormalität,} \quad (3.15)$$

$$\left( \sum_{l=1}^n | \underline{\underline{\phi}}^{\lambda_l} \rangle \langle \underline{\underline{\psi}}^{\lambda_l} | \right)_{ij} = \sum_{l=1}^n \phi_i^{\lambda_l} \psi_j^{\lambda_l*} = \delta_{ij} \quad \text{Vollständigkeit.} \quad (3.16)$$

### 3.2.4 Projektion der Bewegungsgleichung

Mit Hilfe der Beziehung (3.16) ist es möglich, die Bewegungsgleichung (3.2) auf das *Modenskelett* der um den Referenzzustand  $\underline{z}_{ref}(\{\sigma_k\})$  linearisierten Bewegungsgleichung (3.6) zu projizieren. Zunächst ergibt sich aus der Anwendung der Identität in Form des Projektors

$$\underline{\underline{I}} = \sum_{l=1}^n | \underline{\underline{\phi}}^{\lambda_l} \rangle \langle \underline{\underline{\psi}}^{\lambda_l} | \quad (3.17)$$

auf den Vektor  $\underline{\underline{\zeta}}(t)$  in Gleichung (3.5):

$$\underline{\underline{z}}(t) = \underline{z}_{ref}(\{\sigma_k\}) + \sum_{l=1}^n | \underline{\underline{\phi}}^{\lambda_l} \rangle \langle \underline{\underline{\psi}}^{\lambda_l} | \underline{\underline{\zeta}}(t) \rangle \quad (3.18)$$

$$= \underline{z}_{ref}(\{\sigma_k\}) + \sum_{l=1}^n \xi_l(t) \underline{\underline{\phi}}^{\lambda_l}. \quad (3.19)$$

Die  $\xi_l(t) = \langle \underline{\underline{\psi}}^{\lambda_l} | \underline{\underline{\zeta}}(t) \rangle$  sind die zeitabhängigen Entwicklungskoeffizienten der Störung  $\underline{\underline{\zeta}}(t)$  des stationären Referenzzustandes  $\underline{z}_{ref}(\{\sigma_k\})$ . Sie werden auch als Modenamplituden bezeichnet. Aus der Gleichung (3.2) folgt dann mit (3.4), (3.7) und (3.13):

$$\sum_{l=1}^n \frac{d}{dt} \xi_l(t) \underline{\underline{\phi}}^{\lambda_l} = \underline{f} \left( \underline{z}_{ref}(\{\sigma_k\}) + \sum_{l=1}^n \xi_l(t) \underline{\underline{\phi}}^{\lambda_l}, \{\sigma_k\} \right) \quad (3.20)$$

$$= \sum_{l=1}^n \lambda_l \xi_l(t) \underline{\underline{\phi}}^{\lambda_l} + \tilde{\underline{f}}(\{\xi_m(t)\}, \{\sigma_k\}). \quad (3.21)$$

Dabei ist das Vektorfeld  $\tilde{\underline{f}}$  nichtlinear in den Argumenten  $\xi_m$ , da der lineare Anteil des Vektorfeldes  $\underline{f}$  bereits im ersten Term der linken Seite von (3.21) berücksichtigt ist. Multipliziert man nun Gleichung (3.21) von links mit  $\langle \underline{\underline{\psi}}^{\lambda_i} |$  und verwendet



(3.15), so erhält man schließlich das folgende Differentialgleichungssystem für die Entwicklungskoeffizienten beziehungsweise Modenamplituden  $\xi_i(t)$ :

$$\frac{d}{dt}\xi_i(t) = \lambda_i\xi_i(t) + f_i^{\text{eff}}(\{\xi_m(t)\}, \{\sigma_k\}), \quad (3.22)$$

mit

$$f_i^{\text{eff}}(\{\xi_m(t)\}, \{\sigma_k\}) = \langle \underline{\psi}^{\lambda_i} | \underline{\tilde{f}}(\{\xi_m(t)\}, \{\sigma_k\}) \rangle \quad (3.23)$$

$$= \sum_{l=2}^n \sum_{j_1, \dots, j_l=1} f_{ij_1 \dots j_l}^{\text{eff}}(\{\sigma_k\}) \xi_{j_1}(t) \cdots \xi_{j_l}(t). \quad (3.24)$$

Das System von Differentialgleichungen (3.22) ist äquivalent zu (3.2). Während (3.2) die Dynamik der einzelnen Untersysteme beschreibt, ist (3.22) der sich ausbildenden Ordnungsstruktur adäquater angepaßt, da sie eine Bewegungsgleichung für die Entwicklungskoeffizienten  $\xi_i(t)$  der kollektiven Moden  $\underline{\phi}^{\lambda_i}$  darstellt.

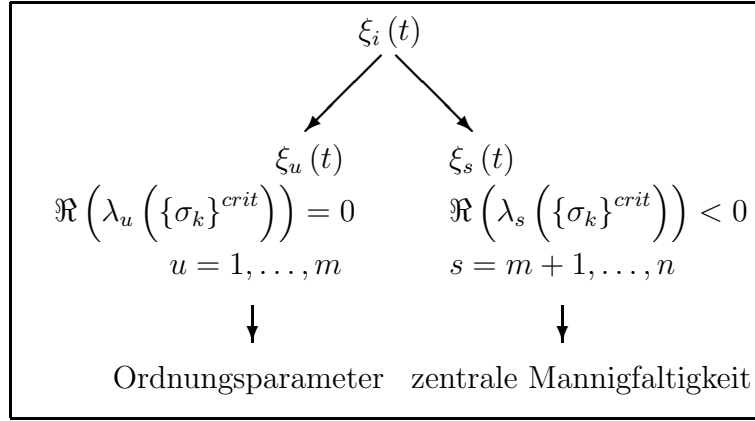
### 3.2.5 Das Ordnungsparameterkonzept der Synergetik

Wie bereits erwähnt, kann es bei Veränderung der Kontrollparameter bei Erreichen eines kritischen Wertes  $\{\sigma_k\}^{\text{crit}}$  zur spontanen Änderung des makroskopischen Ordnungszustandes kommen, ohne daß diese Ordnung dem System von außen aufgeprägt wurde. Der stabile Referenzzustand  $\underline{z}_{\text{ref}}(\{\sigma_k\})$  wird also am kritischen Wert  $\{\sigma_k\}^{\text{crit}}$  instabil. Betrachtet man an dieser Stelle die Eigenwerte, so zeigt sich: Der Realteil einiger weniger Eigenwerte wird verschwinden, während die übrigen nach wie vor einen negativen Realteil besitzen. Es tritt also folgende Situation ein:

$$\Re\left(\lambda_u\left(\{\sigma_k\}^{\text{crit}}\right)\right) = 0, \quad u = 1, \dots, m, \quad (3.25)$$

$$\Re\left(\lambda_s\left(\{\sigma_k\}^{\text{crit}}\right)\right) < 0, \quad s = m + 1, \dots, n. \quad (3.26)$$

Dieses charakteristische Unterscheidungsmerkmal der Eigenwerte des linearisierten Problems (3.6) wird nun verwendet, um die den Eigenwerten zugeordneten Eigenvektoren beziehungsweise Moden  $\underline{\phi}^{\lambda_i}$  in zwei Klassen einzuteilen - in linear stabile (*stable*) und linear instabile (*unstable*). Die Entwicklungskoeffizienten oder Modenamplituden  $\xi_u(t)$  der instabilen Moden werden, wie in Abschnitt 3.2.7 gezeigt wird, zu den *Ordnungsparametern* des Systems, während die der stabilen Moden die Bestimmung der *zentralen Mannigfaltigkeit* erlauben. Diese Situation an einer Instabilität ist in der folgenden Abbildung 3.3 noch einmal schematisch dargestellt, um diesen zentralen Punkt der Synergetik deutlich hervorzuheben.

Abbildung 3.3: *Situation an einer Instabilität*

Faßt man nun die Modenamplituden  $\xi_u(t)$  der linear instabilen Moden  $\underline{\phi}^{\lambda_u}$  und die zugehörigen  $f_u^{\text{eff}}(\{\xi_u(t), \xi_s(t)\}, \{\sigma_k\})$  zu  $m$ -dimensionalen Vektoren

$$\underline{u}(t), \underline{f}_u^{\text{eff}}(\underline{u}(t), \underline{s}(t), \{\sigma_k\}) \quad (3.27)$$

und die Modenamplituden  $\xi_s(t)$  der linear stabilen Moden  $\underline{\phi}^{\lambda_s}$  und die zugehörigen  $f_s^{\text{eff}}(\{\xi_u(t), \xi_s(t)\}, \{\sigma_k\})$  zu  $(n - m)$ -dimensionalen Vektoren

$$\underline{s}(t), \underline{f}_s^{\text{eff}}(\underline{u}(t), \underline{s}(t), \{\sigma_k\}) \quad (3.28)$$

zusammen und ordnet die zugehörigen Eigenwerte  $\lambda_u$  beziehungsweise  $\lambda_s$  in einer  $m \times m$ -Matrix  $\underline{\underline{\Lambda}}_u$  beziehungsweise  $(n - m) \times (n - m)$ -Matrix  $\underline{\underline{\Lambda}}_s$  an

$$\underline{\underline{\Lambda}}_u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\Lambda}}_s = \begin{pmatrix} \lambda_{m+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

so läßt sich das System von Differentialgleichungen (3.22) auch folgendermaßen schreiben:

$$\frac{d}{dt} \underline{u}(t) = \underline{\underline{\Lambda}}_u \underline{u}(t) + \underline{f}_u^{\text{eff}}(\underline{u}(t), \underline{s}(t), \{\sigma_k\}), \quad (3.30)$$

$$\frac{d}{dt} \underline{s}(t) = \underline{\underline{\Lambda}}_s \underline{s}(t) + \underline{f}_s^{\text{eff}}(\underline{u}(t), \underline{s}(t), \{\sigma_k\}). \quad (3.31)$$

An der Instabilität ist es also möglich, die Gesamtdynamik in zwei Teilräume, den linear stabilen und den linear instabilen Unterraum, zu projizieren. Diese Aufspaltung ist der sich ausbildenden Ordnungsstruktur angepaßt. Wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, dominiert die Dynamik der linear instabilen Moden die Dynamik des gesamten Systems und führt somit zum *Versklavungsprinzip* der Synergetik.

### 3.2.6 Die Zeitskalenhierarchie

Die charakteristische Eigenschaften der Eigenwerte der kollektiven linearen Moden am kritischen Wert der Kontrollparameter  $\{\sigma_k\}^{crit}$  führt zu einer Zeitskalenhierarchie beziehungsweise Zeitskalentrennung der Dynamik der Moden in der Nähe dieses kritischen Wertes. Aus (3.25) und (3.26) folgt nämlich:

$$|\Re(\lambda_u)| \ll |\Re(\lambda_s)|. \quad (3.32)$$

Die Eigenwerte  $\lambda_i$  des linearisierten Systems von Differentialgleichungen (3.6) bestimmen das exponentielle Abklingen der Störung  $\underline{\zeta}(t)$  des stationären Referenzzustandes  $\underline{z}_{ref}$  mit den entsprechenden Relaxationszeiten

$$\mathfrak{t}_i = \frac{1}{|\Re(\lambda_i)|} \quad (3.33)$$

und damit die Dynamik der linearen Moden  $\underline{\phi}^{\lambda_i}$ . Die  $\mathfrak{t}_i$  werden daher auch die *intrinsische Dynamik* der Modenamplituden  $\xi_i(t)$  des nichtlinearen Systems von Differentialgleichungen (3.30), (3.31) bestimmen und wegen (3.32) führt dies zur erwähnten Zeitskalenhierarchie, die mathematisch durch die Ungleichung

$$\mathfrak{t}_u \gg \mathfrak{t}_s \quad (3.34)$$

charakterisiert ist.

### 3.2.7 Das Versklavungsprinzip der Synergetik

Wie wir gesehen haben, läuft die Dynamik der instabilen Moden also auf einer viel größeren Zeitskala ab, als die der stabilen, daher werden sie auch als die *langsamen Moden* bezeichnet und die stabilen als die *schnellen Moden*. Da die beiden *Modensysteme* über das System von Differentialgleichungen (3.30), (3.31) gekoppelt sind, können sie sich nicht unabhängig voneinander entwickeln - ihre Dynamiken beeinflussen sich gegenseitig. Die Zeitskalenhierarchie führt nun dazu, daß die Dynamik der stabilen Moden nach einem, gemäß dem Unterschied der charakteristischen Relaxationszeiten (3.34) kurzen, transienten Verhalten der Dynamik der instabilen Moden quasi instantan folgt. Dieses charakteristische Verhalten bezeichnet man als das *Versklavungsprinzip* der Synergetik. Die Dynamik der stabilen Moden wird durch die der instabilen *versklavt*. Die instabilen Moden bestimmen die sich ausbildende makroskopische Ordnungsstruktur, daher werden sie als die Ordnungsparameter des Systems bezeichnet. Die mathematische Formulierung des Versklavungsprinzips lautet:

$$\underline{s}(t) = \underline{h}(\underline{u}(t)), \quad (3.35)$$

wobei die *zentrale Mannigfaltigkeit*  $\underline{h}(\underline{u}(t))$  (siehe z.B. [75], [100]) die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$\underline{h}(\underline{0}) = \underline{0}, \quad (3.36)$$

$$\left. \frac{d\underline{h}(\underline{u})}{d\underline{u}} \right|_{\underline{u}=\underline{0}} = \underline{0}. \quad (3.37)$$

Das heißt, die stabilen Modenamplituden  $\xi_s(t)$  hängen nur über die Dynamik der instabilen  $\xi_u(t)$  von der Zeit  $t$  ab.

### 3.2.8 Elimination der stabilen Moden

Setzt man nun den Ansatz (3.35) in die Gleichungen (3.30) und (3.31) ein, dann erhält man aus (3.31) eine implizite Bestimmungsgleichung für die zentrale Mannigfaltigkeit  $\underline{h}(\underline{u}(t))$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\underline{u}} \underline{h}(\underline{u}(t)) \left[ \underline{\Lambda}_{\underline{u}} \underline{u}(t) + \underline{f}_{\underline{u}}^{\text{eff}}(\underline{u}(t), \underline{h}(\underline{u}(t)), \{\sigma_k\}) \right] = \\ \underline{\Lambda}_{\underline{s}} \underline{h}(\underline{u}(t)) + \underline{f}_{\underline{s}}^{\text{eff}}(\underline{u}(t), \underline{h}(\underline{u}(t)), \{\sigma_k\}) \end{aligned} \quad (3.38)$$

und aus (3.30) die *Ordnungsparametergleichungen*

$$\frac{d}{dt} \underline{u}(t) = \underline{\Lambda}_{\underline{u}} \underline{u}(t) + \underline{f}_{\underline{u}}^{\text{eff}}(\underline{u}(t), \underline{h}(\underline{u}(t)), \{\sigma_k\}), \quad (3.39)$$

die nun keine stabilen Moden mehr enthalten.

Die Ordnungsparametergleichungen (3.39) beschreiben die sich an einer Instabilität ausbildenden makroskopischen Ordnungsstrukturen. Da im allgemeinen nur sehr wenige Moden instabil werden, ist dies gleichbedeutend mit einer *Reduktion der Freiheitsgrade*. Während das System (3.2)  $n$  Freiheitsgrade besitzt, wobei  $n$  sehr groß sein kann, sind es bei den Ordnungsparametergleichungen (3.39) nur noch die  $m$  Freiheitsgrade der linear instabilen Moden. Damit ist es gelungen, die hochdimensionale Dynamik des Systems (3.2) auf die niederdimensionale Dynamik der  $m$  Ordnungsparameter  $\underline{u}(t)$  abzubilden und damit drastisch zu reduzieren. Die Gleichungen der stabilen Moden wurden *eliminiert*.

Die implizite Bestimmungsgleichung (3.38) für die zentrale Mannigfaltigkeit kann im allgemeinen nur näherungsweise gelöst werden. Daher verwendet man für die Komponenten von  $\underline{h}(\underline{u}(t))$  den folgenden Ansatz

$$h_i(\underline{u}(t)) = \sum_{k=2}^r \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^m H_{ij_1, \dots, j_k} u_{j_1}(t) \cdots u_{j_k}(t) \quad (3.40)$$

und setzt diesen in die Bestimmungsgleichung für die zentrale Mannigfaltigkeit (3.38) ein. Anschließend bestimmt man durch einen Koeffizientenvergleich bis zur gewünschten Ordnung  $r$  die im Ansatz (3.40) auftretenden Koeffizienten  $H_{ij_1, \dots, j_r}$ . Dabei setzt man voraus, daß die höheren Terme der Entwicklung (3.40) kleinere Beiträge liefern. Dies ist aber nur dann gewährleistet, wenn in der Nähe der Instabilität die Ordnungsparameter  $\underline{u}(t)$  von einem *Kleinheitsparameter*  $\varepsilon$  abhängen. Dieser Kleinheitsparameter entspricht dem Abstand des Kontrollparameters<sup>14</sup>  $\{\sigma_k\}$

<sup>14</sup>In der Regel wird man nur einen Kontrollparameter verändern und die übrigen fixiert lassen, weshalb wir hier nur von einem relevanten Kontrollparameter ausgehen.

vom kritischen Wert  $\{\sigma_k\}^{crit}$ . Mit dem so gewonnenen Ergebnis für  $\underline{h}(\underline{u}(t))$  verbleibt nun das Problem, die Gleichung für die Ordnungsparameter zu lösen. Dies ist aber im allgemeinen ebenfalls nur näherungsweise möglich und zwar in Form einer Entwicklung nach dem Kleinheitsparameter  $\varepsilon$ , da sowohl die Eigenwerte  $\lambda_u$  als auch die Koeffizienten der nichtlinearen Terme in (3.39) von diesem abhängen. Dabei zeigt sich dann auch explizit die vorausgesetzte Abhängigkeit der Ordnungsparameter  $\underline{u}(t)$  vom Kleinheitsparameter  $\varepsilon$ . Betrachtet man nun noch einmal die Gleichungen (3.38), (3.39) und entwickelt mit den gewonnenen Ergebnissen alle Terme konsequent nach dem Kleinheitsparameter  $\varepsilon$ , so stellt man fest:

- ▶ Der Ansatz (3.35)  $\underline{s}(t) = \underline{h}(\underline{u}(t))$  ist gerechtfertigt, da die linke Seite von (3.31) und daraus resultierend die Gleichung (3.38) einer höheren Ordnung der Entwicklung nach  $\varepsilon$  entspricht als die rechte Seite von (3.31).
- ▶ Der funktionale Zusammenhang zwischen Ordnungsparameter  $\underline{u}(t)$  und Kleinheitsparameter  $\varepsilon$  ist selbstkonsistent. Das bedeutet, daß man auch durch die richtig gewählte Abhängigkeit vom Kleinheitsparameter eine Ordnungsparametergleichung erhält, deren stationäre Lösung diese Abhängigkeit wieder reproduziert. In bestimmten Fällen kann man also auch durch Intuition<sup>15</sup> ohne den Ansatz (3.40) die Ordnungsparametergleichung ableiten.

In der niedersten Ordnung der Entwicklung nach dem Kleinheitsparameter  $\varepsilon$  spricht man auch von der sogenannten *adiabatische Näherung*<sup>16</sup>. Das Verfahren der Elimination der stabilen Moden heißt in diesem Fall dann auch *adiabatische Elimination*.

### 3.3 Ein Beispiel: Das Haken-Zwanzig-Modell

Um das im vorangegangenen Abschnitt 3.2.7 beschriebene *Eliminationsverfahren* etwas genauer zu erläutern, werden wir ein Beispiel betrachten, das bereits in der Form (3.30), (3.31) vorliegt – das *Haken-Zwanzig-Modell*:

$$\frac{d}{dt}u(t) = \alpha u(t) - u(t)s(t), \quad (3.41)$$

$$\frac{d}{dt}s(t) = -\beta s(t) + u(t)^2. \quad (3.42)$$

Die Kontrollparameter des Systems sind  $\alpha$  und  $\beta$ . Durch eine Skalierung der Zeit sowie der beiden abhängigen Variablen  $u(t)$  und  $s(t)$  ergibt sich das vereinfachte System

$$\frac{d}{dt}z(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u(t) \\ s(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon u(t) - u(t)s(t) \\ -s(t) + u(t)^2 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

$$(3.44)$$

<sup>15</sup>Das ist die Kenntnis der richtigen Abhängigkeit der Ordnungsparameter  $\underline{u}(t)$  vom Kleinheitsparameter  $\varepsilon$ .

<sup>16</sup>Sind die Eigenwerte  $\lambda_u$  der linear instabilen Moden alle reell, dann erhält man die adiabatische Näherung auch auf eine etwas pragmatischere Weise, indem man die linke Seite der Gleichung (3.38) einfach vernachlässigt und die rechte Seite nach  $\underline{h}(\underline{u}(t))$  auflöst.

mit dem einzigen effektiven Kontrollparameter  $\varepsilon = \frac{\alpha}{\beta}$ . Die stationären Referenzzustände dieses Systems sind:

$$\underline{z}_{ref}^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{z}_{ref}^{II,III} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\varepsilon} \\ \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Aus der linearen Stabilitätsanalyse erhält man die zugehörigen Eigenwerte (EW) und Eigenvektoren (EV):

	$\lambda_1^I$	$\lambda_2^I$	$\lambda_{1,2}^{II}$	$\lambda_{1,2}^{III}$
EW	$\varepsilon$	-1	$\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8\varepsilon}}{2}$	$\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8\varepsilon}}{2}$
EV	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{-\lambda_{2,1}^{II}}{2\sqrt{\varepsilon}} \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\lambda_{2,1}^{III}}{2\sqrt{\varepsilon}} \\ 1 \end{pmatrix}$

Tabelle 3.2: **Haken-Zwanzig-Modell: Eigenwerte und Eigenvektoren**

*Eigenwerte und Eigenvektoren des um die stationären Referenzzustände  $\underline{z}_{ref}^I, \underline{z}_{ref}^{II,III}$  linearisierten Haken-Zwanzig-Modells*

Abbildung 3.4 zeigt die Abhängigkeit der Eigenwerte des linearisierten Systems vom effektiven Kontrollparameter  $\varepsilon$ . Daraus läßt sich folgendes Stabilitätsverhalten ablesen:

	$\varepsilon < 0$	$\varepsilon > 0$
$\underline{z}_{ref}^I$	<b>stabil</b>	instabil
$\underline{z}_{ref}^{II,III}$	instabil	<b>stabil</b>

Tabelle 3.3: **Haken-Zwanzig-Modell: Stabilität der stationären Referenzzustände**

Der stationäre Referenzzustand  $\underline{z}_{ref}^1$  verliert beim kritischen Wert  $\varepsilon^{crit} = 0$  des Kontrollparameters seine Stabilität. Die Bezeichnungen  $u$  und  $s$  dieses Modells sind somit konsistent mit den in Abschnitt 3.2.5 eingeführten instabilen beziehungsweise stabilen Modenamplituden (vgl. auch Abb. 3.3). Die hier auftretende Zeitskalenhierarchie

$$|\lambda_1^I| = |\lambda_u| = |\varepsilon| \ll |\lambda_2^I| = |\lambda_s| = 1 \quad (3.46)$$

erlaubt es, in der Nähe der Instabilität das Versklavungsprinzip der Synergetik (vgl. 3.2.7) anzuwenden. Um nun die Ordnungsparametergleichung für  $u(t)$  abzuleiten, setzt man den auf dieses Beispiel angepaßten und bis zur zweiten Ordnung in  $u(t)$  entwickelten Ansatz (3.40)

$$h(u(t)) = H_{11}u(t)^2 \quad (3.47)$$

in die aus (3.44) resultierende Gleichung (3.38) ein und erhält die folgende Bestimmungsgleichung für den unbekanntem Koeffizienten  $H_{11}$ :

$$2H_{11}u(\varepsilon u - H_{11}u^3) = -H_{11}u^2 + u^2. \quad (3.48)$$

Abbildung 3.4: **Haken-Zwanzig-Modell: Eigenwerte**

Dargestellt sind die Eigenwerte des linearisierten Systems in Abhängigkeit vom effektiven Kontrollparameter  $\varepsilon$ .

Aufgrund der Abhängigkeit des Ordnungsparameters  $u$  vom Kleinheitsparameter  $\varepsilon$  ist die linke Seite der Gl. (3.48) von höherer Ordnung in  $\varepsilon$  als die rechte Seite und kann daher für die Bestimmung von  $H_{11}$  vernachlässigt werden. Dadurch läßt sich  $H_{11}$  sofort bestimmen und man erhält in niederster Ordnung in  $\varepsilon$ :

$$H_{11} = 1. \quad (3.49)$$

Für die zentrale Mannigfaltigkeit ergibt sich dann

$$h(u) = u^2 \quad (3.50)$$

und für die Ordnungsgleichung

$$\frac{d}{dt}u(t) = \varepsilon u(t) - u(t)^3. \quad (3.51)$$

Da (3.51) nur noch eine Zustandsvariable enthält, hat man eine Dimensionsreduktion des ursprünglichen Systems (3.41), (3.42) erreicht. Die Gleichung (3.51) stellt die Normalform einer *Pitchfork-Bifurkation* dar und läßt sich auch als die eindimensionale überdämpfte Bewegung eines Massepunktes<sup>17</sup> in einem Potential

$$\frac{d}{dt}u = -\frac{d}{du}V(u, \varepsilon) \quad (3.52)$$

---

<sup>17</sup>Bei einem überdämpften System ist der kinetische Anteil ( $\sim \frac{d^2}{dt^2}$ ) in der Bewegungsgleichung gegenüber dem Dämpfungsterm ( $\sim \frac{d}{dt}$ ) zu vernachlässigen.

mit

$$V(u, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{2}u^2 + \frac{1}{4}u^4 \quad (3.53)$$

auffassen. Die Existenz eines solchen Potentials hat einen großen Vorteil: Ist man am exakten Zeitverlauf des Systems nicht interessiert, so muß man die Ordnungsparametergleichung (3.51) nicht explizit lösen, vielmehr kann man sich auf eine sehr anschauliche, qualitative Diskussion in diesem Potentialbild beschränken. Die stationären Zustände der Ordnungsparametergleichung (3.51) sind dann durch die lokalen Minima des Potentials  $V(u, \varepsilon)$  gegeben. In Abbildung 3.5 (oben) ist das Potential  $V(u, \varepsilon)$  für den interessanten Bereich des Kontrollparameters  $-0.5 \leq \varepsilon \leq 0.5$  dargestellt. Anhand der Abbildung 3.5 (oben) ist leicht einzusehen, daß das Verhalten des Systems vor beziehungsweise nach dem kritischen Wert des Kontrollparameters  $\varepsilon^{crit} = 0$  sehr unterschiedlich sein wird. Für  $\varepsilon < 0$  existiert nur eine einzige stabile stationäre Lösung der Ordnungsparametergleichung (3.51)

$$u_{stat} = 0 \quad (\varepsilon < \varepsilon^{crit} = 0),$$

die für  $\varepsilon > 0$  instabil wird, wobei gleichzeitig zwei neue stabile stationäre Lösungen

$$u_{stat}^{\pm} = \pm\sqrt{\varepsilon} \quad (\varepsilon > \varepsilon^{crit} = 0)$$

entstehen. Das System wird für  $\varepsilon < 0$  nach einem *transienten Verhalten* den stabilen stationären Zustand  $u_{stat} = 0$  einnehmen.

Verändert man nun den Kontrollparameter  $\varepsilon$  von negativen zu positiven Werten hin, so wird das System in diesem Zustand verharren, da Fluktuationen hier nicht berücksichtigt werden. Fluktuationen sind aber in realen Systemen immer vorhanden und werden dazu führen, daß das System in einen der beiden für  $\varepsilon > 0$  stabilen Zustände  $u_{stat}^{\pm}$  getrieben wird. Diese *kritischen Fluktuationen* entscheiden letztendlich, welchen Zustand das System einnimmt. Es tritt eine *Symmetriebrechung* auf, da keiner der beiden stationären Zustände vor dem anderen ausgezeichnet ist [49]:

► Symmetrie **vor** der Bifurkation:

$$V(u) = V(-u) \quad u_{stat} = -u_{stat}. \quad (3.54)$$

► Symmetrie **nach** der Bifurkation:

$$V(u) = V(-u) \quad u_{stat}^{\pm} = -u_{stat}^{\mp}. \quad (3.55)$$



Abbildung 3.5: **Haken-Zwanzig-Modell: Potential und Bifurkationsdiagramm**

**Oben:** Dargestellt ist das Potential  $V(u, \varepsilon)$  mit Höhenlinien (schwarz) und drei Schnitten durch das Potential (weiß) bei den Werten  $\varepsilon = -0.25$  (a),  $\varepsilon = 0.0$  (b) und  $\varepsilon = 0.25$  (c). Die mit Kreuzen markierten Kurven geben die Lage der lokalen Minima (schwarz) beziehungsweise Maxima (weiß) wieder. Diese entsprechen den stationären Zuständen.

**Unten:** Auf die Ebene  $V = -0.25$  projiziertes Bifurkationsdiagramm des Ordnungsparameters  $u$ . Für  $\varepsilon < 0$  ist nur der stationäre Zustand  $u_{stat} = 0$  stabil. Bei  $\varepsilon^{crit} = 0$  wird dieser instabil und es entstehen gleichzeitig zwei neue stabile stationäre Zustände  $u_{stat}^{\pm}$ .

Ein weiteres interessantes Phänomen ist anhand der Abbildung 3.5 des Potentials (3.53) zu erkennen: Da das Minimum des Potentials für  $\varepsilon^{crit} = 0$  sehr flach ist, wird ein System, einmal aus dem stabilen stationären Zustand  $u_{stat} = 0$  ausgelenkt, nur sehr langsam wieder in diesen zurück relaxieren (siehe auch Abb. 3.6). Dieses Verhalten des Systems in der Nähe des kritischen Kontrollparameterwertes  $\varepsilon^{crit}$ , also in der Nähe der Instabilität, nennt man *kritisches Langsamerwerden* oder *critical slowing down*.

Kritische Fluktuationen, Symmetriebrechung und kritisches Langsamerwerden sind als charakteristische Merkmale von Gleichgewichts-Phasenübergängen in der Thermodynamik bekannt. Die Gleichungen (3.41), (3.42) sind aber ein einfaches Beispiel für die gekoppelten Modenamplitudengleichungen (3.30) und (3.31) eines offenen Sy-

stems (vgl. Abschnitt 3.1). Daher spricht man hier von einem *Nichtgleichgewichts-Phasenübergang*, dessen *Bifurkationsdiagramm* in Abbildung 3.5 (unten) zu sehen ist.

Abbildung 3.6: **Haken-Zwanzig-Modell: Analytische Lösungen der Ordnungsgleichung**

Dargestellt sind die Lösungen der Ordnungsgleichung (3.51) zum Anfangswert  $u(0) = 1.5$  für die drei Werte des Kontrollparameters  $\varepsilon = -0.25$  (a),  $\varepsilon = 0.0$  (b) und  $\varepsilon = 0.25$  (c). Die langsame Annäherung der Trajektorie im Fall (b) an den stationären Zustand  $u_{stat} = 0$  spiegelt das Phänomen des kritischen Langsamerwerdens wider.

### 3.4 Zusammenfassung

Einerseits bestimmt, wie in Abschnitt 3.2.7 gezeigt wurde, die Dynamik der Ordnungsparameter  $\underline{u}(t)$ , also die Modenamplituden  $\xi_u(t)$  der langsamen, linear instabilen Moden  $\underline{\phi}^{\lambda_u}$ , in der Nähe einer Instabilität die Dynamik des gesamten nichtlinearen Systems. Durch die in der Nähe der Instabilität entstehende Zeitskalenhierarchie (3.34) versklaven sie die Dynamik der Modenamplituden  $\xi_s(t)$  der schnellen, linear stabilen Moden  $\underline{\phi}^{\lambda_s}$  (vgl. 3.35). Andererseits wirken diese über die zentrale Mannigfaltigkeit  $\underline{h}(\underline{u}(t))$  wieder auf die Ordnungsparameter zurück (siehe (3.39)). Dieses charakteristische Verhalten der Systeme in der Nähe einer Instabilität wird als *zirkuläre Kausalität* bezeichnet (siehe Abb. 3.7).

Abbildung 3.7: **Zirkuläre Kausalität**

Anmerkung: Das exakte System (3.1) zeigt in allen mikroskopischen Freiheitsgraden eine zirkuläre Kausalität. Die Methodik der Synergetik ermöglicht es, an Instabilitäten Näherungslösungen (3.39) des exakten Problems zu konstruieren, die ebenfalls eine zirkuläre Kausalität aufweisen und damit in sich geschlossen sind.

Die Synergetik ermöglicht somit an einer Instabilität die *systematische Reduktion* der Zahl der Freiheitsgrade eines offenen, nichtlinearen Systems. Handelt es sich dabei um ein komplexes, aus sehr vielen miteinander wechselwirkenden Untersystemen zusammengesetztes System, so bedeutet die Beschreibung auf der makroskopisch relevanten Ebene der Ordnungsparameter eine immense Reduktion der Freiheitsgrade. Es sei an dieser Stelle noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, daß das System an der Instabilität selbstorganisiert den oder die Ordnungsparameter und die damit verbundene neue makroskopische Ordnungsstruktur ausbildet. Sie wird dem System nicht von außen aufgeprägt, da die Änderung der Kontrollparameter unspezifisch ist.

Die Ordnungsparametergleichungen ermöglichen außerdem eine Klasseneinteilung verschiedener Systeme. Diese wird durch die sogenannte *Normalform* induziert, die eine vom Bifurkationstyp abhängige Ordnungsparametergleichung mit universeller

Struktur ist<sup>18</sup> (siehe die Kap. 6 – 9 und Anhang E). Das Auffinden der Normalform der Ordnungsparametergleichungen ermöglicht somit die Zuordnung eines Systems in eine bestimmte Klasse mit ihren charakteristischen Eigenschaften.

### 3.5 Phänomenologische Synergetik

Ausgangspunkt der bisherigen Betrachtungen war die Modellbildung, also die Aufstellung von Bewegungsgleichungen, die die Beschreibung der Dynamik eines Prozesses auf einer bestimmten Betrachtungsebene (siehe Abschnitt 3.2.1) mit ihren charakteristischen Zeit- und Längenskalen ermöglicht.

Die detaillierteste und umfassendste Beschreibung wird erreicht, wenn man dabei auf Grundgleichungen<sup>19</sup> oder *first principles* der mikroskopischen Betrachtungsebene zurückgreifen kann.<sup>20</sup> Die Lösung eines Problems auf dieser Ebene bedeutet im allgemeinen aber einen erheblichen Aufwand und ist nicht immer möglich.

Ist man nur an den makroskopischen Strukturen des Systems interessiert, so ist es oft gar nicht nötig, das Problem auf der mikroskopischen Ebene anzugehen. Man wird vielmehr versuchen, eine den auftretenden Phänomenen angepaßtere, meso- oder makroskopische Beschreibungsebene zu wählen. Bei Kenntnis der mikroskopischen Wechselwirkungen und Grundgleichungen erreicht man diese Beschreibungsebene durch entsprechende Mittelungen beziehungsweise Näherungen. Diese Vorgehensweise bezeichnet man als *Bottom-Up* Strategie.

Untersucht man hingegen Systeme unbekannter mikroskopischer Grundgleichungen, so kann man in vielen Fällen dennoch, durch die universelle Struktur selbstorganisierter Prozesse geleitet, einen phänomenologischen Beschreibungsansatz finden. Beispiele hierfür sind:

- ▶ Physiologische, neuronale oder motorische Systeme, deren Untersysteme Zellorganellen, Zellen, Zellverbände oder Organe mit ihren vielfältigen Wechselwirkungen untereinander sind (siehe beispielsweise [18], [31], [43], [44], [45], [46], [48], [73], [74], [92], [93], [146], [157], [162], [163]).
- ▶ Soziologische Systeme, bei denen Menschen und Gruppen von Menschen die Untersysteme bilden (siehe beispielsweise [174], [175]).
- ▶ Populationssysteme mit den einzelnen Spezies als Untersystemen (siehe beispielsweise [6], [42], [130], [165]).

---

<sup>18</sup>Es können zu einem bestimmten Bifurkationstyp auch mehrere Normalformen existieren.

<sup>19</sup>Im Fall des Lasers sind dies die quantenmechanischen Bewegungsgleichungen der Atome oder Moleküle des laseraktiven Materials und der Photonen des elektromagnetischen Feldes.

<sup>20</sup>Es ist anzumerken, daß diese auch nur empirisch sehr gut abgesicherte, mathematische Modelle der Realität darstellen und eine in sich konsistente und widerspruchsfreie Beschreibung ermöglichen. Aus ihnen kann man die Bewegungsgleichungen der meso- oder makroskopischen Ebene als Spezialfälle oder durch Mittelungsprozesse beziehungsweise Näherungen systematisch ableiten.

- ▶ Ökonomische Systeme, mit Maschinen oder Teilen von Maschinenstraßen oder anderen Produktionseinheiten als Untersysteme.

Methoden der Zeitreihenanalyse wie die

- ▶ Zustandsraumanalyse:  
[40], [115], [128], [161]
- ▶ Bestimmung verallgemeinerter Dimensionen:  
[3], [56], [57], [58], [80], [118], [119], [139], [166]
- ▶ Bestimmung verallgemeinerter Entropien:  
[102], [155]
- ▶ Bestimmung von Lyapunov-Exponenten aus Zeitreihen:  
[1], [2], [21], [35], [41], [96], [97], [98], [125], [131], [141], [144], [159]
- ▶ Karhunen-Loève Entwicklung:  
[20], [99], [111], [173]

oder Symmetriebetrachtungen können wichtige Informationen über die makroskopische Dynamik liefern und so die Modellbildung entscheidend unterstützen. Die aus den rein phänomenologischen Modellen erhaltenen Bewegungsgleichungen können dann mit der in den Abschnitten 3.2.2 – 3.2.7 beschriebenen Methodik untersucht werden, um die Modelle in einem iterativen Prozeß ständig weiter zu verbessern. Die Ziele der *Top-Down* Strategie sind:

- ▶ Die auftretenden makroskopischen Ordnungsstrukturen zunächst qualitativ und durch Vergleiche mit empirischen Ergebnissen und Anpassung der freien Parameter auch quantitativ zu beschreiben.
- ▶ Durch intensives Studium der Modelle Rückschlüsse zu ziehen, auf die der makroskopischen Dynamik zugrundeliegenden Prozesse der meso- oder mikroskopischen Betrachtungsebene.

In manchen Fällen ist es sogar möglich, die phänomenologischen Beobachtungen direkt mit dem charakteristischen Verhalten einer bestimmten Klasse von Systemen und damit der entsprechenden Normalform in Verbindung zu bringen, wodurch man unmittelbar eine Bewegungsgleichung erhält, deren freie Parameter dann angepaßt werden können.

# Kapitel 4

## Dynamische Systeme

### 4.1 Motivation

Wie wir im vorangehenden Kapitel gesehen haben, läßt sich die makroskopische Dynamik vieler Prozesse in der unbelebten wie in der belebten Natur unter bestimmten Voraussetzungen mit niederdimensionalen Differentialgleichungssystemen beschreiben. Der Analyse dieser *dynamischen Systeme* kommt also eine große Bedeutung zu. Bevor wir auf die in dieser Arbeit intensiver studierten Systeme eingehen, müssen noch einige Grundbegriffe und Untersuchungsmethoden erläutert werden. Dabei wollen wir uns auf Systeme beschränken, bei denen stochastische Prozesse sowie räumliche Inhomogenitäten keine Rolle spielen. Die Bewegungsgleichungen sind dann gewöhnliche und im allgemeinen nichtlineare Differential- beziehungsweise Differenzgleichungen.  $\{\sigma_k\}$  soll im folgenden wieder einen Satz von Kontrollparametern repräsentieren.

### 4.2 Zeitdiskrete Systeme

Systeme dieses Typs werden in der vorliegenden Arbeit nicht nur als Test- bzw. Vergleichssysteme herangezogen (siehe Abschnitt A.1) sie treten auch bei der Berechnung der Lyapunov-Exponenten zeitkontinuierlicher zeitlich verzögerter Systeme auf (siehe Anhang D). Da bei der numerischen Lösung zeitkontinuierlicher Differentialgleichungen immer eine Diskretisierung vorgenommen werden muß (siehe Anhang C), arbeitet man letztendlich mit zeitdiskreten Systemen.

Anmerkungen: A1 : Einige Begriffe der Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme lassen sich bei zeitdiskreten Systemen einfacher und anschaulicher definieren als im zeitkontinuierlichen Fall. Dies liegt unter anderem daran, daß bei bestimmten zeitdiskreten dynamischen Systemen schon im eindimensionalen Fall chaotisches Verhalten auftreten kann (siehe Abschnitt A.1.1, A.1.2).

A2: Auch die Dynamik von höherdimensionalen zeitkontinuierlichen Systemen (siehe Abschnitt 4.4) kann in eingeschränktem Umfang im Rahmen der zeitdiskreten Systeme studiert werden. Mit Hilfe sogenannter *stroboskopischer Darstellungen*, beispielsweise der Poincaré-Abbildung, lassen sich zeitkontinuierliche Systeme auf zeitdiskrete Systeme niedrigerer Dimension abbilden. Dabei ist anzumerken, daß diese diskreten Systeme nur in Ausnahmefällen exakt konstruierbar sind<sup>1</sup> und daher meistens mit Methoden der Störungstheorie ermittelt werden müssen.

### 4.2.1 Definition

Ein System von  $m \in \mathbb{N}$  gewöhnlichen Differenzgleichungen

$$\underline{z}_{n+1} = \underline{f}(n, \underline{z}_n, \{\sigma_k\}) \quad (4.1)$$

mit  $\underline{z}_n \in \Gamma$  und der vektorwertigen Funktion  $\underline{f} : \Gamma \mapsto \Gamma$ , bezeichnet man als ein  $m$ -dimensionales zeitdiskretes dynamisches System oder als  $m$ -dimensionale zeitdiskrete Abbildung. Dabei ist  $\underline{z}_n$  der Zustandsvektor im Zustandsraum  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^m$  zur diskreten Zeit  $n$ .

### 4.2.2 Eigenschaften

- ▶ Ist  $\underline{f}$  invertierbar, so ist  $n \in \mathbb{Z}$  und man nennt das System (4.1) determiniert, andernfalls ist  $n \in \mathbb{N}_0$  und man nennt das System (4.1) halbdeterminiert. Wie bereits erwähnt, kann bei den halbdeterminierten Systemen schon im eindimensionalen Fall chaotisches Verhalten auftreten.
- ▶ Hängt die Funktion  $\underline{f}$  nicht explizit von der diskreten Zeit  $n$  ab, dann nennt man das System autonom, andernfalls nichtautonom.
- ▶ Das System ist lösbar, wenn die Rekursionsformel aufgelöst werden kann, das heißt, wenn man den Zustandsvektor  $\underline{z}_n$  zu einer beliebigen Zeit  $n$  und einem bestimmten Parametersatz  $\{\sigma_k\}$  explizit als Funktion des Zustandsvektors  $\underline{z}_0$  zur Zeit 0 angeben kann<sup>2</sup>:

$$\underline{z}_n = \underline{F}^{[n]}(\underline{z}_0, \{\sigma_k\}) . \quad (4.2)$$

- ▶ Die  $m$ -dimensionale Abbildung  $\underline{F}^{[n]}$ , die jedem beliebigen Zustandsvektor zur Zeit 0 eindeutig einen Zustandsvektor zur Zeit  $n$  zuordnet, wird als Fluß auf dem Zustandsraum  $\Gamma$  bezeichnet. Für determinierte Systeme bildet die Menge  $\{\underline{F}^{[n]}\}$  eine einparametrische, diskrete abelsche Gruppe, während sie für halbdeterminierte Systeme nur Halbgruppeneigenschaften besitzt.

<sup>1</sup>Ein Beispiel hierfür ist die in Abschnitt A.1.4 aufgeführte dissipative Standardabbildung.

<sup>2</sup>Bezüglich der diskreten Zeit  $n$  gelten dabei die Voraussetzungen für determinierte bzw. halbdeterminierte Systeme.

- Die Folge der Zustandsvektoren  $\underline{z}_n$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots$  wird Trajektorie des Flusses  $\underline{F}^{[n]}$  zur Anfangsbedingung  $\underline{z}_0$  genannt.

### 4.3 Zeitdiskrete Systeme mit zeitlicher Verzögerung

Ein System von  $m \in \mathbb{N}$  Differenzgleichungen der Form

$$\underline{z}_{n+1} = \underline{f}(n, \underline{z}_n, \underline{z}_{n-1}, \dots, \underline{z}_{n-m}, \{\sigma_k\}) \quad (4.3)$$

mit  $\underline{z}_n \in \Gamma$  und der vektorwertigen Funktion  $\underline{f} : \Gamma \mapsto \Gamma$ , bezeichnet man als ein  $m$ -dimensionales zeitdiskretes zeitlich verzögertes dynamisches System. Systeme dieses Typs lassen sich den zeitdiskreten Systemen ohne zeitliche Verzögerung zuordnen und stellen somit keine neue Klasse dar. Führt man hier nämlich einen neuen  $(m+1)m$ -dimensionalen Zustandsvektor  $\tilde{\underline{z}}_n$  ein, dessen Komponenten zur diskreten Zeit  $n$  sich aus den  $(m+1)m$  Komponenten des alten Zustandsvektors  $\underline{z}_n$  zu den diskreten Zeiten  $n = n, n-1, \dots, n-m$  gemäß

$$\tilde{\underline{z}}_n^T = (\underline{z}_n^T, \underline{z}_{n-1}^T, \dots, \underline{z}_{n-m}^T) \quad (4.4)$$

ergeben, dann läßt sich das  $m$ -dimensionale zeitdiskrete System mit zeitlicher Verzögerung (4.3) in das folgende  $(m+1)m$ -dimensionale zeitdiskrete System ohne zeitliche Verzögerung

$$\tilde{\underline{z}}_n = \tilde{\underline{f}}(n, \tilde{\underline{z}}_n, \{\sigma_k\}) \quad (4.5)$$

überführen mit  $\tilde{\underline{z}}_n \in \tilde{\Gamma} \subseteq \mathbb{R}^{(m+1)m}$  und der vektorwertigen Funktion  $\tilde{\underline{f}} : \tilde{\Gamma} \mapsto \tilde{\Gamma}$ .

## 4.4 Zeitkontinuierliche Systeme

### 4.4.1 Definition

Ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \underline{z}(t) = \underline{f}(t, \underline{z}(t), \{\sigma_k\}) \quad (4.6)$$

mit  $\underline{z}(t) \in \Gamma$  und der vektorwertigen Funktion  $\underline{f} : \Gamma \mapsto \Gamma$ , bezeichnet man als ein  $m$ -dimensionales zeitkontinuierliches dynamisches System.  $\underline{z}(t)$  ist der Zustandsvektor zur kontinuierlichen Zeit  $t \in \mathbb{R}$  im Zustandsraum  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^m$ .

### 4.4.2 Eigenschaften

- Hängt die Funktion  $\underline{f}$  nicht explizit von der Zeit  $t$  ab, dann nennt man das System autonom, andernfalls nichtautonom<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Nichtautonome System können durch Einführung der Zeit  $t$  als neue Zustandsvariable  $z_{m+1} = t$  in autonome überführt werden. Es können dann jedoch Besonderheiten auftreten, die mit dem kontinuierlichen Anwachsen dieser neuen Zustandsvariablen zusammenhängen.



- ▶ Die meisten nichtlinearen dynamischen System sind nichtintegabel, daher basieren viele Ergebnisse auf Methoden der Störungstheorie und auf numerischen Untersuchungsmethoden.
- ▶ Analog zum zeitdiskreten Fall nennt man die  $m$ -dimensionale Abbildung  $\underline{F}^{[t]}$  mit

$$\underline{z}(t) = \underline{F}^{[t]}(\underline{z}(0), \{\sigma_k\}) \quad (4.7)$$

Fluß auf dem Zustandsraum  $\Gamma$ , wobei die Menge  $\{\underline{F}^{[t]}\}$  eine einparametrische abelsche Gruppe bildet.

- ▶ Die Zustandsvektoren  $\underline{z}(t)$  beschreiben eine Kurve im Zustandsraum  $\Gamma$ , die durch die Zeit parametrisiert ist, sie wird Trajektorie des Flusses  $\underline{F}^{[t]}$  zur Anfangsbedingung  $\underline{z}(0)$  genannt<sup>4</sup>.

## 4.5 Zeitkontinuierliche zeitlich verzögerte Systeme

Wir beschränken uns hier auf Systeme von *Delay-Differentialgleichungen*, die eine Unterklasse der retardierten Funktionaldifferentialgleichungen darstellen (siehe [78]).

### 4.5.1 Definition

Ein System von Differentialgleichungen des folgenden Typs

$$\frac{d}{dt}\underline{z}(t) = \underline{f}(\underline{z}(t), \underline{z}(t - \tau), \{\sigma_k\}) \quad (4.8)$$

mit  $\underline{z}(t - \tau), \underline{z}(t) \in \Gamma$  und der vektorwertigen Funktion  $\underline{f} : \Gamma \mapsto \Gamma$ , bezeichnet man als ein  $m$ -dimensionales zeitkontinuierliches zeitlich verzögertes dynamisches System oder Delay-Differentialgleichungssystem<sup>5</sup>. Das Anfangswertproblem ist dabei durch die Vorgabe einer Funktion  $\underline{g}(t) \in \Gamma$  im gesamten Intervall  $[-\tau, 0]$  eindeutig definiert.  $\underline{z}(t)$  und  $\underline{z}(t - \tau)$  repräsentieren den Zustandsvektor im Zustandsraum  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^m$  zu den Zeiten  $t$  bzw.  $t - \tau$ . Das System (4.8) kann durch Skalierung der Zeit  $t$  unter Einführung der dimensionslosen Zeit  $t'$  mit  $t = \tau t'$  und des neuen Zustandsvektors

---

<sup>4</sup>Bei der in Abschnitt 4.2 erwähnten stroboskopischen Darstellung wird die Trajektorie des zeitkontinuierlichen dynamischen Systems (4.6) nur zu ganz bestimmten diskreten Zeiten  $t_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) betrachtet. Aus  $\underline{x}_i = \underline{x}(t_i)$  folgt dann mittels des Flusses  $\underline{F}^{[t]}$  auf  $\Gamma$  eindeutig  $\underline{x}_{i+1} = \underline{F}^{[t_{i+1}-t_i]}(\underline{x}_i, \{\sigma_k\})$ . Gelingt es nun, die Funktion  $\underline{F}^{[t_{i+1}-t_i]}$  zu bestimmen oder mit Näherungsmethoden zu approximieren (siehe z.B. [66]), so kann man bestimmte Aspekte der Dynamik des zeitkontinuierlichen Systems (beispielsweise Periodenverdopplungs-Szenarien) im Rahmen des einfacheren zeitdiskreten Systems untersuchen.

<sup>5</sup>Im folgenden werden wir unter einem zeitlich verzögerten System immer ein zeitkontinuierliches zeitlich verzögertes System verstehen.

$\underline{z}'(t') = \underline{z}(\tau t')$  in das folgende äquivalente System überführt werden, wenn man die gestrichenen Größen wieder durch ungestrichene ersetzt (siehe auch Anhang C.1):

$$\frac{d}{dt}\underline{z}(t) = \tau \underline{f}(\tau t, \underline{z}(t), \underline{z}(t-1), \{\sigma_k\}). \quad (4.9)$$

Dabei haben wir ein explizit zeitabhängiges System vorausgesetzt, um den Einfluß der Zeitskalierung auf die Zeitabhängigkeit zu verdeutlichen. Im folgenden werden wir also ohne Beschränkung der Allgemeinheit von dieser zeitskalierten Form ausgehen.

### 4.5.2 Eigenschaften

- ▶ Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen nennt man das System autonom, wenn die Funktion  $\underline{f}$  nicht explizit von der Zeit  $t$  abhängt, andernfalls nichtautonom.
- ▶ Zeitkontinuierliche Systeme mit zeitlicher Verzögerung sind in den meisten Fällen nicht analytisch lösbar, weshalb der numerischen Analyse hier eine große Bedeutung zukommt.
- ▶ Das System ist unendlich-dimensional, da für die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems eine auf dem Intervall  $[-1, 0]$  definierte Funktion  $\underline{g}(t)$  als Anfangsbedingung vorgegeben werden muß. Das führt dazu, daß das Anfangswertproblem im  $m$ -dimensionalen Zustandsraum  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^m$  nicht mehr eindeutig lösbar ist. Der mathematisch adäquate Rahmen für die Beschreibung der Dynamik des Systems (4.9) ist nach [103] der erweiterte unendlich-dimensionale Zustandsraum  $\mathcal{C}$  der auf dem Intervall  $[-1, 0]$  definierten vektorwertigen Funktionen (siehe auch [77], [78]). Verfolgt man die Trajektorie in  $\Gamma$  ausgehend vom Zustandsvektor  $\underline{z}(t)$  im Retardierungsintervall zurück bis zum Zustand  $\underline{z}(t-1)$ , so bilden die dadurch auf dem Intervall  $[-1, 0]$  definierten  $m$  Funktionen die Komponenten des Zustandsvektors zur Zeit  $t$  im erweiterten Zustandsraum  $\mathcal{C}$ . Der Zustandsvektor in diesem Raum ist somit definiert durch:

$$\underline{z}_t(\Theta) = \underline{z}(t + \Theta), \quad \text{für} \quad -1 \leq \Theta \leq 0 \quad (4.10)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\underline{z}_0(\Theta) = \underline{z}(\Theta) = \underline{g}(\Theta), \quad \text{für} \quad -1 \leq \Theta \leq 0. \quad (4.11)$$

In Abbildung 4.1 ist dies am Beispiel eines skalaren Zustandsvektors verdeutlicht. Durch einen *Klappprozeß* wird zu jedem Zeitpunkt die in diesem Fall einzige Komponente des Zustandsvektors  $z_t(\Theta) \in \mathcal{C}$  aus der  $\Gamma-t$ -Ebene herausgeklappt. Zu jedem Zeitpunkt  $t$  wird dadurch dem Zustandsvektor  $z_t(\Theta) \in \mathcal{C}$  die gesamte zeitliche Entwicklung des Zustandsvektors  $z(t + \Theta) \in \Gamma$  mit  $-1 \leq \Theta \leq 0$  im Intervall  $[t-1, t]$  zugeordnet.

Abbildung 4.1: **Klappprozeß**

Die Komponente des in diesem Fall skalaren Zustandsvektors  $z_t(\Theta)$  wird durch die auf dem Retardierungsintervall  $[-1, 0]$  definierte Funktion  $z(t + \Theta)$  mit  $-1 \leq \Theta \leq 0$  gebildet, was durch den angedeuteten Klappprozeß aus der  $\Gamma - t$ -Ebene heraus verdeutlicht wird. Die Anfangsbedingung  $g(t)$  mit  $-1 \leq t \leq 0$  ist ohnehin eine auf dem Intervall  $[-1, 0]$  definierte Funktion  $g(\Theta)$  und damit ein Element des erweiterten Zustandsraums  $\mathcal{C}$ .

- Das zeitlich verzögerte dynamische System (4.9) muß nun im erweiterten Zustandsraum  $\mathcal{C}$  formuliert werden. Wir werden uns hier auf die notwendigsten Definitionen und Begriffe beschränken und verweisen auf die ausführliche und grundlegende Arbeit von Wischert et al. [177], [178]. Die Abbildung

$$\underline{z}_t(\Theta) = (F^{[t]} \underline{z}_0)(\Theta), \quad t \geq 0, \quad \text{für} \quad -1 \leq \Theta \leq 0, \quad (4.12)$$

die dem Zustandsvektor  $\underline{z}_0(\Theta) = \underline{g}(\Theta)$  zur Zeit  $t = 0$  den Zustandsvektor  $\underline{z}_t(\Theta)$  zur Zeit  $t$  zuordnet, nennt man den Fluß auf dem erweiterten Zustandsraum  $\mathcal{C}$ . Aus den Halbgruppeneigenschaften des Flusses  $F^{[t]}$

$$F^{[t_1+t_2]} = F^{[t_1]} F^{[t_2]}, \quad t_1, t_2 \geq 0 \quad \text{mit} \quad F^{[0]} = \mathcal{I} \quad (4.13)$$

folgt die Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems (4.9) im erweiterten Zustandsraum  $\mathcal{C}$ . Die Bewegungsgleichung in  $\mathcal{C}$  ergibt sich dann aus dem

zu  $F^{[t]}$  gehörenden infinitesimalen Generator  $\mathcal{G}$ , der durch

$$(\mathcal{G} \underline{z}_t)(\Theta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{[(F^{[\varepsilon]} \underline{z}_t)(\Theta) - \underline{z}_t(\Theta)]}{\varepsilon} \quad (4.14)$$

definiert ist, zu

$$\frac{d}{dt} \underline{z}_t(\Theta) = (\mathcal{G} \underline{z}_t)(\Theta), \quad \text{für } -1 \leq \Theta \leq 0. \quad (4.15)$$

Wie in [177], [178] gezeigt wird, erhält man

$$(\mathcal{G} \underline{z}_t)(\Theta) = \begin{cases} \frac{d}{d\Theta} \underline{z}_t(\Theta) & , \quad -1 \leq \Theta < 0 \\ \mathcal{F}[\underline{z}_t] & , \quad \Theta = 0 \end{cases}, \quad (4.16)$$

wobei  $\mathcal{F}$  für synergetische Systeme ein nichtlineares Funktional des Zustandsvektors  $\underline{z}_t(\Theta)$  ist.  $\mathcal{F}$  ergibt sich aus der Taylorentwicklung der rechten Seite der Gleichung (4.9), also im wesentlichen aus der nichtlinearen Funktion  $f(\tau t, \underline{z}(t), \underline{z}(t-1), \{\sigma_k\})$ , wobei man die Zustandsvektoren  $\underline{z}(t)$  bzw.  $\underline{z}(t-1)$  des Zustandsraums  $\Gamma$  durch die beiden folgenden Identitäten ersetzt:

$$\underline{z}(t) = \int_{-1}^0 d\Theta \delta(\Theta) \underline{z}_t(\Theta), \quad (4.17)$$

$$\underline{z}(t-1) = \int_{-1}^0 d\Theta \delta(\Theta + 1) \underline{z}_t(\Theta). \quad (4.18)$$

Die  $i$ -te Komponente der Ordnung  $k$  des Funktionals  $\mathcal{F}$  lautet dann:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i^{(k)}[\underline{z}_t] &= \int_{-1}^0 d\Theta_1 \cdots \int_{-1}^0 d\Theta_k \\ &\sum_{j_1, \dots, j_k=1}^m \omega_{ij_1 \dots j_k}^{(k)}(\Theta_1, \dots, \Theta_k) z_{t,j_1}(\Theta_1) \cdots z_{t,j_k}(\Theta_k). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Für Delay-Differentialgleichungssysteme sind die hier auftretenden Dichten  $\omega_{ij_1 \dots j_k}^{(k)}$  Tensoren  $k$ -ter Stufe, deren Komponenten Linearkombinationen von Produkten aus jeweils  $k$  Deltafunktionen sind (siehe (6.15), (7.6), (7.7), (8.6) und (8.7)).

Anmerkung: Das nichtlineare Funktional  $\mathcal{F}$  stellt die einzige systemspezifische Größe des infinitesimalen Generators (4.16) dar.

- Die Zustandsvektoren  $\underline{z}_t(\Theta)$  beschreiben eine durch die Zeit  $t$  parametrisierte Kurve im erweiterten Zustandsraum  $\mathcal{C}$ , die als Trajektorie des Flusses  $F^{[t]}$  zur Anfangsbedingung  $\underline{z}_0(\Theta)$  bezeichnet wird. Die Projektion auf den Zustandsraum  $\Gamma$  oder einen Phasenraum, der entweder durch  $\{\underline{z}(t), \dot{\underline{z}}(t)\}$  oder  $\{\underline{z}(t), \underline{z}(t-1)\}$  aufgespannt wird, wobei die  $\underline{z}(t)$  durch Gleichung (4.10) mit

den Zustandsvektoren  $\underline{z}_t(\Theta)$  zusammenhängen, wird ebenfalls Trajektorie genannt. Die Trajektorie im Zustandsraum  $\Gamma$  kann durchaus Schnittpunkte aufweisen, da das Anfangswertproblem hier nicht eindeutig lösbar ist. Da der physikalisch relevante Raum der Zustandsraum  $\Gamma$  ist, werden wir letztendlich alle Ergebnisse in ihm zu interpretieren haben.

# Kapitel 5

## Lyapunov-Exponenten

### 5.1 Motivation

Von den bekanntesten Konzepten der quantitativen Charakterisierung dynamischer Systeme

- ▶ Fraktale Dimensionen:  
[56], [80], [118], [139]
  
- ▶ Entropien:  
[102], [155]
  
- ▶ Lyapunov-Exponenten:  
[35], [97], [125], [131], [141]

(siehe auch die Übersichtsarbeiten [22], [33], [108], [109], [126], [147]) beschränken wir uns in dieser Arbeit auf das der Lyapunov-Exponenten. Bei Kenntnis der Bewegungsgleichungen ist die Bestimmung der Lyapunov-Exponenten im allgemeinen die einfachste und eleganteste Möglichkeit, um quantitative Aussagen über die Dynamik des betrachteten Systems zu machen. Sie ermöglichen sowohl eine Klassifikation der verschiedenen dynamischen Zustände als auch die Bestimmung einer im allgemeinen fraktalen Dimension - der Lyapunov- oder Kaplan-Yorke-Dimension [15], [41]. Durch Parameterstudien ist es außerdem möglich, Bifurkationen im Parameterraum zu lokalisieren und ebenfalls zu klassifizieren.

Zunächst erläutern wir nur sehr kurz die notwendigen Grundlagen und Begriffe, wobei wir uns auf Systeme ohne zeitliche Verzögerung beschränken. Anschließend berechnen wir für den gedämpften harmonischen Oszillator die Lyapunov-Exponenten analytisch und stellen das in dieser Arbeit verwendete numerische Verfahren zur Bestimmung der Lyapunov-Exponenten vor, wobei wir seine Effizienz an zwei Beispielen verdeutlichen.

## 5.2 Grundlagen

Allgemeine Aussagen über die Dynamik eines Systems erhält man durch die Untersuchung der Wirkung des Flusses  $\underline{F}^{[n]}$  (4.2) oder  $\underline{F}^{[t]}$  (4.7) eines dynamischen Systems auf einen oder mehrere präparierte Anfangszustände beziehungsweise ganze Teilmengen des Zustandsraums  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^m$ . Eine ausgebaute Integrationstheorie existiert bisher nur für lineare Systeme (siehe z.B. [7]). Für die im Rahmen der Synergetik behandelten nichtlinearen Systeme kann der Fluß nur in ganz wenigen Ausnahmefällen explizit angegeben werden, dennoch können aus der Untersuchung des Flusses einige wichtige Aussagen gewonnen werden:

- ▶ Die Wirkung des Flusses kann, ausgehend vom Anfangszustand, in zwei Bereiche eingeteilt werden - in die *transiente* und die *asymptotische* Dynamik, wobei asymptotisch hier nicht im streng mathematischen Sinn zu verstehen ist. Da sich diese beiden Bereiche gegenseitig definieren, kann die Grenze zwischen ihnen mathematisch nicht klar definiert werden. Man spricht daher von transientem Verhalten, wenn die Dynamik charakteristische Eigenschaften aufweist, die durch den Anfangszustand mitbestimmt werden. Ist der Einfluß des Anfangszustandes auf die Dynamik nicht mehr festzustellen, spricht man von asymptotischer Dynamik, obwohl diese streng mathematisch erst für  $n \rightarrow \infty$  (bei zeitdiskreten Systemen) beziehungsweise  $t \rightarrow \infty$  (bei zeitkontinuierlichen Systemen) erreicht ist.
- ▶ Die Wirkung des Flusses auf verschiedene Anfangsbedingungen, also verschiedene Teilmengen  $M$  des Zustandsraums  $\Gamma$  kann unterschiedlich sein, das heißt, eine unterschiedliche asymptotische Dynamik aufweisen. Dies führt zu einer Aufteilung des Zustandsraums in Teilräume, die auch sehr zerklüftet und fraktal sein kann. Die „Grenzfläche“ zwischen solchen Teilgebieten im Zustandsraum  $\Gamma$  wird *Separatrix*  $S$  genannt. Die Vereinigung aller Teilräume, die zur gleichen asymptotischen Dynamik führen, wird als deren *Einzugsgebiet* bezeichnet (siehe beispielsweise [62], [108], [109]).
- ▶ Bleibt das Volumen einer Teilmenge  $M$  des Zustandsraums  $\Gamma$  unter der Wirkung des Flusses konstant, so nennt man das dynamische System *konservativ*. Ist die Volumenänderung von  $M$  negativ, wird es als *dissipatives* dynamisches System bezeichnet. Mathematisch läßt sich diese Unterscheidung folgendermaßen formulieren:

- Für die zeitdiskreten Systeme 4.1 gilt:

$$\left| \det \left( \frac{\partial \underline{f}(n, \underline{z}_n, \{\sigma_k\})}{\partial \underline{z}_n} \right) \right| \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge \underline{z}_n \in \Gamma \subseteq \mathbb{R}^m. \quad (5.1)$$

- Für die zeitkontinuierlichen Systeme 4.6 erhalten wir gemäß Gleichung B.10 in Anhang B:

$$\operatorname{div} \underline{f}(t, \underline{z}(t), \{\sigma_k\}) \leq 0, \quad \forall t \geq 0 \wedge \underline{z}(t) \in \Gamma \subseteq \mathbb{R}^m. \quad (5.2)$$

In beiden Fällen steht das Gleichheitszeichen für konservative Systeme.

- ▶ Die asymptotische Dynamik kann instabil oder stabil sein, wobei wir zwischen lokaler, orbitaler und globaler Stabilität unterscheiden. Instabilität liegt vor, wenn kleine Störungen des Zustandes durch die Zeitentwicklung verstärkt oder vergrößert werden. Wir können nun analog zur linearen Stabilitätsanalyse 3.2.3 eine Linearisierung um eine repräsentative Trajektorie der asymptotischen Dynamik vornehmen und die sich dabei ergebenden Eigenwerte untersuchen. Haben alle Eigenwerte einen negativen Realteil, dann liegt lokale Stabilität vor, ist der Realteil eines oder mehrerer Eigenwerte identisch Null, dann liegt orbitale Stabilität vor [70]. Bei lokaler Stabilität werden infinitesimal benachbarte Punkte durch die Zeitentwicklung benachbart bleiben, sich sogar einander nähern. Im Grenzfall  $t \rightarrow \infty$  werden sie ineinander übergehen. Bei orbitaler Stabilität können sich zwei benachbarte Punkte durch die Zeitentwicklung voneinander entfernen, ihre Trajektorien werden jedoch benachbart bleiben. Die globale Stabilität schließlich kann natürlich nicht mehr durch die Eigenwerte einer linearen Analyse definiert werden. Sie läßt sich mit Hilfe eines Potentials veranschaulichen, ist jedoch nicht auf Systeme beschränkt, für die ein Potential existiert. Die Minima eines Potentials sind alle lokal stabil, nur das absolute Minimum ist global stabil.
- ▶ Die asymptotische Dynamik dissipativer Systeme wird im allgemeinen auf einem *Attraktor*  $A$  ablaufen. Da bislang keine allgemein akzeptierte Definition eines Attraktors existiert (siehe [108], [109], [118], [142], [143]), werden wir hier nur eine pragmatische Definition angeben, die im wesentlichen [108] entnommen ist:

- Eine abgeschlossene und echte Teilmenge  $A$  des Zustandsraums  $\Gamma$  heißt *attraktive Menge*, falls

$$\underline{\mathbb{F}}^{[t]} A = A, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (5.3)$$

gilt, sie also invariant bezüglich des Flusses  $\underline{\mathbb{F}}^{[t]}$  ist<sup>1</sup> und außerdem eine Umgebung  $U \supset A$  besitzt, so daß gilt:

$$\underline{\mathbb{F}}^{[t]}(\underline{z}) \in U, \quad \forall t \geq 0 \wedge \underline{z} \in U, \quad (5.4)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{\mathbb{F}}^{[t]}(\underline{z}) = A, \quad \forall \underline{z} \in U. \quad (5.5)$$

- Die Menge  $E(A)$  mit

$$E(A) = \bigcup_{t \leq 0} \underline{\mathbb{F}}^{[t]} U, \quad (5.6)$$

wobei  $U$  die obigen Bedingungen erfüllt, nennt man das Einzugsgebiet der attraktiven Menge  $A$ . Falls  $E(A) = \Gamma$  ist, nennt man  $A$  globale attraktive Menge. In diesem Fall existiert die weiter oben angegebene Unterteilung des Zustandsraums nicht.

---

<sup>1</sup> $\underline{\mathbb{F}}^{[t]}$  steht dabei stellvertretend für einen der Flüsse  $\underline{F}^{[n]}, \underline{F}^{[t]}$  (siehe Kap. 4).



- Attraktive Mengen können Teilmengen enthalten, die nicht attraktiv sind, daher wird die asymptotische Dynamik möglicherweise nicht auf der ganzen attraktiven Menge  $A$  ablaufen, sondern nur auf einer echten Teilmenge davon, dem eigentlichen Attraktor  $\mathbb{A}$ .
- Durch die stationäre Dynamik auf einem Attraktor  $\mathbb{A}$  wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  definiert.  $\mu(\mathbb{B})$  bezeichnet dabei die Wahrscheinlichkeit, das System zu einem beliebigen Zeitpunkt in dem Bereich  $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$  anzutreffen. Für das Maß  $\mu$  muß gelten:

$$\mu(\mathbb{A}) = \int_{\mathbb{A}} d\mu = \int_{\mathbb{A}} \rho(\underline{z}) d^m z = 1, \quad (5.7)$$

wobei  $\rho(\underline{z})$  die Dichte des Maßes  $\mu$  ist. Man nennt das Wahrscheinlichkeitsmaß invariant bezüglich des Flusses  $\mathbb{F}^{[t]}$ , falls die Gleichung

$$\mu(\mathbb{B}) = \mu(\mathbb{F}^{[-t]}\mathbb{B}), \quad t > 0, \quad (5.8)$$

erfüllt ist. Im allgemeinen gibt es zu einem dynamischen System eine Vielzahl invarianter Maße, aber nur ein sogenanntes *natürliches Maß*. Dieses wird einer Idee Kolmogorovs folgend durch den Grenzübergang

$$\mu = \lim_{\underline{\sigma} \rightarrow 0} \mu^{\underline{\sigma}} \quad (5.9)$$

definiert.  $\underline{\sigma}$  repräsentiert dabei eine stochastische Kraft, deren Stärke so gewählt werden muß, daß vor dem Grenzübergang genau ein einziges stationäres Maß existiert. Mit Hilfe des natürlichen Maßes können alle charakteristischen dynamischen Größen, also auch die Lyapunov-Exponenten, berechnet werden (vgl. Abschnitte A.1.1 und A.1.2). Das natürliche Maß kann nur in ganz wenigen Ausnahmefällen analytisch angegeben werden, und auch die numerische Bestimmung bereitet im allgemeinen so große Schwierigkeiten, daß die quantitative Analyse eines dynamischen Systems unter Verwendung dieses Zugangs nur sehr selten möglich ist (siehe beispielsweise [32]).

- Wie sich durch die Arbeiten von Poincaré [132], [133] und später Lorenz [112], [113], [114] herausgestellt hat, ist die Wirkung des Flusses auf benachbarte Zustände von besonderer Bedeutung. Sie erkannten, daß bei nichtlinearen dynamischen Systemen sehr komplizierte und nicht reguläre, also weder periodische noch quasi-periodische Lösungen der Bewegungsgleichungen möglich werden. Auch diese Bewegungen finden auf einem Attraktor statt und verletzen dann fast immer<sup>2</sup> das *Prinzip der starken Kausalität* [29]. Dieses Prinzip besagt, daß zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t_0$  benachbarte Trajektorien auch zu einem beliebigen späteren Zeitpunkt  $t > t_0$  benachbart sind. Da Poincaré nicht über die graphischen und numerischen Möglichkeiten eines Computers

---

<sup>2</sup>Siehe hierzu die Bemerkung zum Feigenbaum-Attraktor der logistischen Abbildung auf S. 154 des Anhangs A.

verfügte, blieben seine Entdeckungen lange Zeit unbeachtet. Erst die Untersuchungen mit Computern, die von Lorenz an Modellen zur Wetterprognose vorgenommen wurden, führten zur Wiederentdeckung des Phänomens, das man als *deterministisches Chaos* bezeichnet. Die entsprechenden Attraktoren werden als *chaotische* Attraktoren bezeichnet. Die Verletzung der starken Kausalität führt zu einer Sensitivität des Systems gegenüber kleinen Störungen oder kleinen Abweichungen der Anfangsbedingungen. Diese führen zu einer zeitlichen Abnahme der Shannonschen Information über das System und damit zu einer Zunahme der Kolmogorov-Entropie. Diese beiden Begriffe werden wir hier nicht näher erläutern und verweisen daher auf [90], [91], [106], [149], [150], beziehungsweise [9], [172]. Da bei realen Systemen die Anfangszustände mathematisch nicht exakt bekannt sind, ist die Prognose auch bei deterministischen Systemen prinzipiell beschränkt. Alle genannten Phänomene können mit Hilfe des Konzepts der Lyapunov-Exponenten quantitativ erfaßt werden. Die Lyapunov-Exponenten  $\lambda$  sind reelle Zahlen, die das im zeitlichen Mittel exponentiell konvergente ( $\lambda < 0$ ), indifferente ( $\lambda = 0$ ), oder exponentiell divergente ( $\lambda > 0$ ) Verhalten der Trajektorien eines dynamischen Systems quantitativ charakterisieren.

- Verbunden mit der für eine chaotische Dynamik charakteristischen Sensitivität gegenüber kleinen Störungen ist das Auftreten mindestens eines positiven Lyapunov-Exponenten. Da die Dynamik auf einem Attraktor stattfindet, der im allgemeinen beschränkt ist<sup>3</sup>, müssen die Trajektorien hier notwendigerweise komplizierten Streck-, Stauch- und Faltungsprozessen unterworfen sein. Aufgrund der durch diese Prozesse erzeugten zerklüfteten fraktalen geometrischen Struktur werden chaotische Attraktoren auch als *seltsame Attraktoren* bezeichnet<sup>4</sup>.

Damit beenden wir unsere allgemeinen Betrachtungen und wenden uns nun der Definition der Lyapunov-Exponenten zu.

## 5.3 Definitionen

### 5.3.1 Zeitdiskrete Systeme

In Anhang D wird gezeigt, daß die Berechnung der Lyapunov-Exponenten bei zeitkontinuierlichen zeitverzögerten Systemen auf eine durch die Diskretisierung des Retardierungsintervalls  $[-1, 0]$  festgelegte, hochdimensionale, zeitdiskrete Abbildung führt. Der Definition der Lyapunov-Exponenten für zeitdiskrete Systemen kommt daher in dieser Arbeit eine besondere Bedeutung zu.

---

<sup>3</sup>Bei Systemen die eine Phasendynamik beschreiben, können auch unbeschränkte Attraktoren auftreten. Beispielsweise bleibt die relevante dynamische Variable des zeitlich verzögerten Phasenregelkreises in Kapitel 6 nicht auf das  $2\pi$ -Intervall beschränkt (siehe Abb. 6.12).

<sup>4</sup>Siehe hierzu die Bemerkung zum Feigenbaum Attraktor der logistischen Abbildung auf S. 154 des Anhangs A

### Eindimensionaler Fall

Wie bereits in Kapitel 4 erwähnt, kann chaotisches Verhalten bei zeitdiskreten Systemen schon im eindimensionalen Fall auftreten (siehe [36], [37], [65] und Anhang A). Daher werden wir diesen relativ einfachen Fall zuerst behandeln. Die folgende Abbildung 5.1 soll die Definition des Lyapunov-Exponenten einer eindimensionalen zeitdiskreten Abbildung  $z_{n+1} = f(n, z_n, \{\sigma_k\})$  veranschaulichen.

Abbildung 5.1: **Zur Definition des Lyapunov-Exponenten**

*Die im zeitlichen Mittel exponentielle Divergenz zweier benachbarter Anfangszustände  $z_0$  und  $z_0 + \epsilon$  einer eindimensionalen zeitdiskreten Abbildung  $z_{n+1} = f(n, z_n, \{\sigma_k\})$  und der damit verbundene positive Lyapunov-Exponent  $\lambda$  ist schematisch dargestellt.*

Ausgangspunkt unserer Betrachtungen sind zwei benachbarte Anfangszustände  $z_0$  und  $z_0 + \epsilon$ . Nach  $n$  Iterationen wird sich das System im Zustand  $F^{[n]}(z_0)$  beziehungsweise  $F^{[n]}(z_0 + \epsilon)$  befinden. Wir fordern nun, daß für den Abstand dieser beiden Zustände die folgende Definitionsgleichung des Lyapunov-Exponenten

$$\epsilon e^{n\lambda(z_0, \{\sigma_k\})} = |F^{[n]}(z_0 + \epsilon) - F^{[n]}(z_0)| \quad (5.10)$$

gilt. Führen wir nun die beiden Grenzübergänge  $\epsilon \rightarrow 0$  und  $n \rightarrow \infty$  durch, dann erhalten wir:

$$\lambda(z_0, \{\sigma_k\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| \frac{dF^{[n]}(z)}{dz} \Big|_{z=z_0} \right|. \quad (5.11)$$

Berücksichtigen wir außerdem, daß

$$F^{[n]}(z_0) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-mal}}(0, z_0, \{\sigma_k\}) \quad (5.12)$$

ist, dann ergibt sich für den Lyapunov-Exponenten in diesem Fall:

$$\lambda(z_0, \{\sigma_k\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \left| \frac{df(i, z, \{\sigma_k\})}{dz} \Big|_{z=z_i} \right|. \quad (5.13)$$

Der so definierte Lyapunov-Exponent eindimensionaler zeitdiskreter Systeme wird im allgemeinen vom Wert der Kontrollparameter  $\{\sigma_k\}$  und vom Anfangswert  $z_0$

abhängen. Da mehrere Attraktoren bei einem Parametersatz  $\{\sigma_k\}$  koexistieren können und der Anfangswert  $z_0$  natürlich nur im Einzugsgebiet eines Attraktors liegen kann, wird durch (5.13) nur der Lyapunov-Exponent des entsprechenden Attraktors berechnet. Für autonome ergodische Systeme können wir die in (5.13) auftretende Zeitmittelung durch die Mittelung bezüglich des natürlichen Maßes  $\mu$  des entsprechenden Attraktors  $\mathbb{A}$  ersetzen und erhalten

$$\lambda(z_0, \{\sigma_k\}) = \int_{\mathbb{A}} \log \left| \frac{df(z, \{\sigma_k\})}{dz} \right| d\mu. \quad (5.14)$$

Mit Hilfe der Dichte des natürlichen Maßes

$$\rho(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta(z - z_i) \quad (5.15)$$

erhalten wir schließlich aus (5.14) die folgende, unter den genannten Einschränkungen zu (5.13) äquivalente Definition für den Lyapunov-Exponenten

$$\lambda(z_0, \{\sigma_k\}) = \int_{\mathbb{A}} \log \left| \frac{df(z, \{\sigma_k\})}{dz} \right| \rho(z) dz. \quad (5.16)$$

In Abschnitt A.1.1 wird für die Bernoulli-Abbildung (A.1) der Lyapunov-Exponent sowohl nach (5.13) als auch nach (5.16) für den gesamten Bereich des Kontrollparameters  $r$  analytisch bestimmt. Außerdem wird in Abschnitt A.1.2 der Lyapunov-Exponent der logistischen Abbildung (A.4) für ausgezeichnete Parameterbereiche nach (5.16) ebenfalls analytisch bestimmt und für das Intervall  $[1, 4]$  des Kontrollparameters  $a$  numerisch nach (5.13) berechnet (siehe Abb. A.1).

Anmerkung: Die Gleichungen (5.13) beziehungsweise (5.16) lassen sich als Mittelungen über die zeitlich lokalen Größen

$$\log \left| \frac{df(i, z, \{\sigma_k\})}{dz} \right|_{z=z_i} \quad (5.17)$$

beziehungsweise räumlich lokalen Größen

$$\log \left| \frac{df(z, \{\sigma_k\})}{dz} \right| \quad (5.18)$$

auffassen, die wir daher als lokale Divergenzraten bezeichnen (siehe Abb. 5.3).

### Mehrdimensionaler Fall

Um die Definition der Lyapunov-Exponenten einer  $m$ -dimensionalen zeitdiskreten Abbildung (4.1) zu motivieren, formulieren wir zunächst die Definition (5.13) des Lyapunov-Exponenten für eindimensionale zeitdiskrete Abbildungen um:

$$e^{\lambda(z_0, \{\sigma_k\})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \prod_{i=0}^{n-1} \left| \frac{df(i, z, \{\sigma_k\})}{dz} \right|_{z=z_i} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (5.19)$$

Tragen wir den  $m$  räumlichen Richtungen Rechnung, dann lautet die Verallgemeinerung auf  $m$  Dimensionen:

$$e^{\lambda_j(z_0, \{\sigma_k\})} = \lim_{n \rightarrow \infty} (|\lambda_j(n)|)^{\frac{1}{n}} \quad j = 1, \dots, m, \quad (5.20)$$

wobei  $\lambda_j(n)$  der  $j$ -te Eigenwert der Matrix

$$\prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{\partial f(i, z, \{\sigma_k\})}{\partial z} \Big|_{z=z_i} \right) \quad (5.21)$$

ist. Die Existenz des Grenzwertes ist durch das multiplikative Ergodentheorem von Oseledec [125] gesichert. Die folgende Abbildung 5.2 zeigt die beiden nach (5.20) berechneten Lyapunov-Exponenten der in Abschnitt A.1.3 angeführten zweidimensionalen Hénon-Abbildung (A.13) als Funktion des Kontrollparameters  $a$ .

Abbildung 5.2: **Hénon-Abbildung: Lyapunov-Exponenten (I)**

*Dargestellt sind die beiden nach (5.20) mit großem numerischen Aufwand bestimmten Lyapunov-Exponenten der zweidimensionalen Hénon-Abbildung (A.13) als Funktion des Kontrollparameters  $a$  im Intervall  $[0, 1.4]$  beim Parameterwert  $b = 0.3$  (vgl. Abb. 5.6).*

Dabei wurden für jeden Wert des Kontrollparameters zu fest gewählten Anfangsbedingungen  $n = 1000$  Iterationen zur Berechnung der Matrix (5.21) ausgeführt und die Eigenwerte bestimmt. Dabei mußten die Berechnungen mit dem Programm Maple im chaotischen Bereich wegen der im Mittel exponentiellen Divergenz mit einer Präzision von 1000 gültigen Dezimalstellen durchgeführt werden, damit die

Eigenwerte korrekt bestimmt werden konnten. Selbst bei der zweidimensionalen Hénon-Abbildung benötigte diese Berechnung auf einer gewöhnlichen Workstation mehrere Tage. Dies verdeutlicht auf anschauliche Weise, weshalb es bei hochdimensionalen Abbildungen sehr aufwendig ist, die Lyapunov-Exponenten direkt nach (5.20) zu bestimmen. Man ist daher gezwungen, ein anderes Verfahren zu verwenden. Abbildung 5.3 zeigt die lokale Divergenzrate des größten Lyapunov-Exponenten der dissipative Standardabbildung (A.16) bei den Parameterwerten ( $K = 4.1$ ,  $b = 0.1$ ), aufgetragen über dem chaotischen Attraktor. Wie man sieht, gibt es sowohl lokal divergente als auch lokal konvergente Gebiete auf dem Attraktor. Gemäß (5.20) erhalten wir bei diesen Parameterwerten die Lyapunov-Exponenten  $\lambda_1 \approx 0.6519$ ,  $\lambda_2 \approx -2.9545$ .

Abbildung 5.3: *Dissipative Standardabbildung: Lokale Divergenzrate*

*Dargestellt ist die lokale Divergenzrate des größten Lyapunov-Exponenten der zweidimensionalen dissipativen Standardabbildung (A.16) bei den Parameterwerten ( $K = 4.1$ ,  $b = 0.1$ ). Sie ist aufgetragen über dem chaotischen Attraktor.*

### 5.3.2 Zeitkontinuierliche Systeme

Im Unterschied zu zeitdiskreten Systemen kann chaotisches Verhalten hier erst in drei- oder mehrdimensionalen Zustandsräumen auftreten. Dies liegt an der Eindeutigkeit der Lösung der zugrundeliegenden Bewegungsgleichungen. Nur wenn der Zustandsraum drei oder mehr Dimensionen aufweist, werden komplizierte überschneidungsfreie und damit eindeutige Trajektorien möglich. Abbildung 5.4 veranschaulicht das im zeitlichen Mittel exponentiell divergente Verhalten der Trajektorien des dreidimensionalen Lorenz-Systems (A.17) (siehe Abschnitt A.2.1).

Abbildung 5.4: **Divergenz zweier Trajektorien beim Lorenz-System**

Dargestellt sind zwei numerische Simulationen des bekannten Lorenz-Systems (A.17) im chaotischen Bereich ( $R = 35.0$ ,  $\sigma = 16.0$ ,  $b = 4.0$ ) für zwei leicht unterschiedliche Anfangsbedingungen ( $|\underline{z}_1(0) - \underline{z}_2(0)| = 10^{-12}$ ).

**Oben:** Zeitliche Entwicklung der  $x$ -Koordinaten

**Unten:** Zeitliche Entwicklung des Abstands  $|\underline{z}_2(t) - \underline{z}_1(t)|$  der Zustandsvektoren

Diese im zeitlichen Mittel exponentielle Divergenz benachbarter Trajektorien im Zustandsraum führt bei der Definition der Lyapunov-Exponenten für zeitkontinuierliche Systeme wie bei den zeitdiskreten sofort auf die linearisierte Dynamik. Betrachten wir wieder das  $m$ -dimensionale nichtlineare Differentialgleichungssystem (4.6), dann werden sich die Lyapunov-Exponenten aus der Dynamik des linearisierten Systems

$$\frac{d}{dt} \underline{\Delta z}(t) = \underline{L}(t, \underline{z}(0), \{\sigma_k\}) \underline{\Delta z}(t) \quad (5.22)$$

mit

$$\underline{L}(t, \underline{z}(0), \{\sigma_k\}) = \left. \frac{\partial \underline{f}(t, \underline{z}, \{\sigma_k\})}{\partial \underline{z}} \right|_{\underline{z}=\underline{z}(t, \underline{z}(0))} \quad (5.23)$$

berechnen lassen. Dabei wurde die Linearisierung um den sich auf der Trajektorie bewegenden repräsentativen Punkt  $\underline{z}(t)$  vorgenommen, der natürlich vom Anfangs-

zustand  $\underline{z}(0)$  abhängt. Wir können nun Gleichung (5.22) formal integrieren und erhalten

$$\underline{\Delta z}(t) = \left( Z e^{\int_0^t \underline{L}(t', \underline{z}(0), \{\sigma_k\}) dt'} \right) \underline{\Delta z}(0), \quad (5.24)$$

wobei  $Z$  den Zeitordnungsoperator darstellt. Dieser muß eingeführt werden, weil die Matrizen  $\underline{L}(t, \underline{z}(0), \{\sigma_k\})$  zu verschiedenen Zeiten  $t$  und  $t'$  im allgemeinen nicht kommutieren. Wie im mehrdimensionalen zeitdiskreten Fall (5.20) können wir nun die Lyapunov-Exponenten wie folgt definieren

$$e^{\lambda_j(\underline{z}(0), \{\sigma_k\})} = \lim_{t \rightarrow \infty} (|\lambda_j(t)|)^{\frac{1}{t}} \quad j = 1, \dots, m, \quad (5.25)$$

wobei  $\lambda_j(t)$  der  $j$ -te Eigenwert der Matrix  $\underline{L}(t, \underline{z}(0), \{\sigma_k\})$  ist. Die Existenz des in (5.25) auftretenden Grenzwertes ist hier wie bei Definition (5.20) durch das multiplikative Ergodentheorem von Oseledec [125] gesichert.

### 5.3.3 Lyapunov-Spektrum

Ordnen wir die Lyapunov-Exponenten der Größe nach, so daß

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \quad (5.26)$$

gilt, dann wird die Gesamtheit der  $m$  Lyapunov-Exponenten eines  $m$ -dimensionalen dynamischen Systems als *Lyapunov-Spektrum* des entsprechenden Attraktors  $\mathbb{A}$  bezeichnet. Verwendet man für positive beziehungsweise negative Lyapunov-Exponenten die Symbole  $+$  und  $-$ , dann erhält man das symbolische Lyapunov-Spektrum.

Dimension des Zustandsraums	symbolisches Lyapunov-Spektrum	Attraktortyp
2	$(-, -)$	Fixpunkt
	$(0, -)$	Grenzyklus
3	$(-, -, -)$	Fixpunkt
	$(0, -, -)$	Grenzyklus
	$(0, 0, -)$	Torus
	$(+, 0, -)$	chaotischer Attraktor
4	$(-, -, -, -)$	Fixpunkt
	$(0, -, -, -)$	Grenzyklus
	$(0, 0, -, -)$	2-Torus
	$(0, 0, 0, -)$	3-Torus
	$(+, 0, -, -)$	chaotischer Attraktor
	$(+, 0, 0, -)$	chaotischer Attraktor
	$(+, +, 0, -)$	chaotischer Attraktor

Tabelle 5.1: *Symbolische Lyapunov-Spektren verschiedener Attraktoren dissipativer zeitkontinuierlicher dynamischer Systeme*



Dieses ermöglicht die in Abschnitt 5.1 erwähnte Klassifikation verschiedener Attraktortypen. In Tabelle 5.1 ist eine Klassifikation der möglichen Attraktoren zwei-, drei- und vierdimensionaler dissipativer zeitkontinuierlicher dynamischer Systeme mit Hilfe des symbolischen Lyapunov-Spektrums zusammengestellt.

### 5.3.4 Lyapunov-Dimension

Wie bereits in Abschnitt 5.1 erwähnt, läßt sich aus den Lyapunov-Exponenten eines Attraktors eine Dimension, die sogenannte Lyapunov- oder Kaplan-Yorke-Dimension bestimmen. Wie sich zeigen läßt, gilt für chaotische Attraktoren  $\mathbb{A}$  dissipativer zeitkontinuierlicher dynamischer Systeme, die sich als kartesisches Produkt aus einer kontinuierlichen Menge und einer fraktalen Menge wie der *Cantor-Menge*<sup>5</sup> darstellen lassen

$$D_L(\mathbb{A}) = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}, \quad (5.27)$$

mit

$$\sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0 \quad (5.28)$$

(siehe beispielsweise [33], [145]). Kaplan und Yorke [97], [98] stellten die Hypothese auf, daß in „typischen“ Fällen<sup>6</sup>

$$D_H(\mathbb{A}) = D_K(\mathbb{A}) = D_L(\mathbb{A}) \quad (5.29)$$

gilt, wobei  $D_H(\mathbb{A})$  die *Hausdorff-Dimension* des Attraktors  $\mathbb{A}$  ist [80], auf die wir hier nicht näher eingehen werden und  $D_K(\mathbb{A})$  die *Kapazität*. Die Kapazität einer Menge  $M \in \mathbb{R}^m$  ist durch den Grenzwert

$$D_K(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \frac{\log N(\varepsilon, M)}{\log \varepsilon} \quad (5.30)$$

definiert, wobei  $N(\varepsilon, M)$  die Anzahl der  $m$ -dimensionalen Kugeln mit Radius  $\varepsilon$  ist, die nötig sind, um die Menge  $M$  vollständig zu überdecken. Sowohl die Kapazität  $D_K(\mathbb{A})$  als auch die Hausdorff-Dimension  $D_H(\mathbb{A})$  eines seltsamen Attraktors  $\mathbb{A}$  sind wegen der fraktalen Struktur des Attraktors im allgemeinen nur mit sehr großem numerischen Aufwand zu berechnen. Gelingt es also mit einem effizienten Verfahren, die Lyapunov-Exponenten zu bestimmen, dann stellt die Lyapunov-Dimension nach (5.27) wegen (5.29) eine interessante Alternative dar.

<sup>5</sup>Entfernt man aus dem abgeschlossenen reellen Intervall  $[0, 1]$  das offene mittlere Intervall  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  und wiederholt diesen Prozeß mit den jeweils entstehenden Restintervallen unendlich oft, dann erhält man die nach G. Cantor [24] benannte fraktale Menge.

<sup>6</sup>Siehe hierzu die kritischen Anmerkungen in [108] S. 88.

## 5.4 Analytische Berechnung

Die Güte numerischer Verfahren zur Bestimmung der Lyapunov-Exponenten eines dynamischen Systems läßt sich am besten durch Vergleich mit analytisch berechneten Lyapunov-Exponenten ermitteln. Allerdings ist die analytische Berechnung prinzipiell nur für sehr einfache Systeme möglich. So kann man beispielsweise für die zeitdiskrete eindimensionale Bernoulli-Abbildung die Lyapunov-Exponenten für das gesamte Parameterintervall bestimmen, also selbst im chaotischen Regime (siehe Abschnitt A.1.1). Bei der zeitdiskreten ebenfalls eindimensionalen logistischen Abbildung ist dies im nicht chaotischen Regime nur eingeschränkt und im chaotischen Regime bisher sogar nur für einen ausgezeichneten Parameterwert möglich (siehe Abschnitt A.1.2). Für den zeitkontinuierlichen harmonischen Oszillator mit Dämpfung lassen sich die Lyapunov-Exponenten ebenfalls für den gesamten Parameterraum analytisch berechnen. Dies soll im folgenden kurz ausgeführt werden.

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung des gedämpften harmonischen Oszillators

$$\ddot{z}(t) + \gamma \dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = 0 \quad (5.31)$$

mit  $\gamma \geq 0$ ,  $\omega_0 > 0$  läßt sich in das äquivalente zweidimensionale dynamische System erster Ordnung

$$\frac{d}{dt} \underline{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 \\ -\omega_0 & -\gamma \end{pmatrix} \underline{z}(t) = \underline{\underline{L}} \underline{z}(t) \quad (5.32)$$

überführen. Durch Transformation auf Normalkoordinaten<sup>7</sup> erhält man daraus:

$$\frac{d}{dt} \tilde{\underline{z}}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\gamma + i\omega) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(\gamma - i\omega) \end{pmatrix} \tilde{\underline{z}}(t) = \tilde{\underline{\underline{L}}} \tilde{\underline{z}}(t) \quad (5.33)$$

mit  $\omega = \sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}$ . Die Matrix  $\tilde{\underline{\underline{L}}}$  ist bereits linear und außerdem diagonal und zeitunabhängig, daher folgt unmittelbar:

$$e^{\int_0^t \tilde{\underline{\underline{L}}} dt'} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}(\gamma+i\omega)t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}(\gamma-i\omega)t} \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

Für die Lyapunov-Exponenten ergibt sich daraus gemäß (5.25):

$$\lambda_{1,2} = \log \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \left| e^{-\frac{1}{2}(\gamma \pm i\omega)t} \right| \right)^{\frac{1}{t}} \right] = \begin{cases} -\frac{1}{2}\gamma & , \quad \gamma \leq 2\omega_0 \\ -\frac{1}{2}(\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}) & , \quad \gamma > 2\omega_0 \end{cases}. \quad (5.35)$$

## 5.5 Numerische Berechnung

Wie in Abschnitt 5.3.1 bereits erwähnt, ist die direkte numerische Berechnung der Lyapunov-Exponenten nach (5.20) für mehrdimensionale Abbildungen ein sehr aufwendiges Verfahren. Anhand der Lyapunov-Exponenten (5.35) des gedämpften harmonischen Oszillators läßt sich leicht einsehen, daß für zeitkontinuierliche dynamische Systeme im chaotischen Regime dieselben Schwierigkeiten auftreten. Aufgrund

<sup>7</sup>Die Lyapunov-Exponenten sind invariant unter stetig differenzierbaren Koordinatentransformationen.

der exponentiellen Divergenz benachbarter Trajektorien ist die direkte Bestimmung der Lyapunov-Exponenten nach (5.25) wegen der notwendigen äußerst hohen Genauigkeit, mit der die Berechnung ausgeführt werden müssen, zu aufwendig. Das Verfahren von Wolf et al. [179], das wir im folgenden kurz skizzieren werden, bietet eine elegante und sehr effiziente Möglichkeit, die Lyapunov-Exponenten mit wesentlich geringerem numerischen Aufwand zu berechnen. Das Verfahren besteht im wesentlichen darin, die Bildung des Grenzwertes in (5.20) beziehungsweise (5.25) und die des Logarithmus zu vertauschen, ohne das Ergebnis zu verfälschen.

### 5.5.1 Methodik

- 1.) Die vollständig nichtlinearen  $m$ -dimensionalen dynamischen Systeme (4.1) beziehungsweise (4.6) werden ausgehend von den Anfangsbedingungen wenige Zeitschritte  $j$  iteriert beziehungsweise ein kleines Zeitintervall  $j\Delta t$  integriert.
- 2.) An diesen repräsentativen Punkt auf der Trajektorie denken wir uns einen  $m$ -Kubus mit infinitesimaler Kantenlänge befestigt. Dieser wird simuliert, durch die gleichzeitige Iteration von  $m$  um den repräsentativen Punkt herum linearisierten Systemen zu  $m$  orthonormalen Anfangsbedingungen  $\underline{z}_0^{\{i\}}$  beziehungsweise  $\underline{z}(0)^{\{i\}}$ . Durch die Dynamik wird sich der  $m$ -Kubus zu einem  $m$ -Parallelepipid verformen.
- 3.) Durch das Gram-Schmidt-Verfahren wird das  $m$ -Parallelepipid wieder in einen  $m$ -Kubus überführt. Dadurch werden die aus den Anfangsbedingungen  $\underline{z}_0^{\{i\}}$  beziehungsweise  $\underline{z}(0)^{\{i\}}$  durch Iteration beziehungsweise Integration des linearisierten Systems entstandenen Vektoren wieder orthonormal.
- 4.) Die Logarithmen der einzelnen Normierungsfaktoren werden aufsummiert.
- 5.) Auf die so gewonnenen wieder orthonormalen Vektoren der linearisierten Systeme werden die Schritte 1.) – 4.) immer wieder angewendet. Dabei bewegt sich der repräsentative Punkt entsprechend der vollständig nichtlinearen Dynamik auf der Trajektorie weiter.

Die Lyapunov-Exponenten  $\lambda_i$  berechnen wir nun wie folgt:

#### Zeitdiskreter Fall

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nj} \sum_{l=1}^n \log N_l^{\{i\}} \quad (5.36)$$

mit

$$N_l^{\{i\}} = \left| \underline{L}(z_{lj}) \underline{L}(z_{lj-1}) \cdots \underline{L}(z_{(l-1)j}) z_{(l-1)j}^{\{i\}} \right| \quad (5.37)$$

und

$$\underline{L}(z_l) = \left. \frac{\partial \underline{f}(n, \underline{z}, \{\sigma_k\})}{\partial \underline{z}} \right|_{\underline{z}=z_l} \quad (5.38)$$

**Zeitkontinuierlicher Fall**

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nj\Delta t} \sum_{l=1}^n \log N_l^{\{i\}} \quad (5.39)$$

mit

$$N_l^{\{i\}} = \left| \underline{\underline{L}}(\underline{z}(lj\Delta t)) \underline{\underline{L}}(\underline{z}((l-1)\Delta t)) \cdots \underline{\underline{L}}(\underline{z}((l-1)j\Delta t)) \underline{z}((l-1)j\Delta t)^{\{i\}} \right| \quad (5.40)$$

und

$$\underline{\underline{L}}(\underline{z}(l\Delta t)) = \left. \frac{\partial \underline{f}(t, \underline{z}, \{\sigma_k\})}{\partial \underline{z}} \right|_{\underline{z}=\underline{z}(l\Delta t)}. \quad (5.41)$$

Anmerkungen: A1 : Die beiden Berechnungsvorschriften (5.36) und (5.39) sind fast identisch. Dies liegt daran, daß ein zeitkontinuierliches dynamisches System bei der numerischen Integration diskretisiert wird. Durch das jeweils verwendete Integrationsverfahren (siehe hierzu auch Anhang C) ist dem zeitkontinuierlichen System somit ein zeitdiskretes zugeordnet.

A2 : Wie wir bereits wissen, ist chaotisches Verhalten durch das Auftreten positiver Lyapunov-Exponenten definiert. Sie erhalten ihren Hauptbeitrag an den Stellen des Attraktors, die durch die Dynamik erzeugte Streckprozesse aufweisen, welche im allgemeinen nicht gleichmäßig auf dem Attraktor verteilt sind. Daher werden die positiven Lyapunov-Exponenten nur dann konvergieren, wenn diese Stellen mehrmals erfaßt werden, d.h., wenn mehrere „Umläufe“ auf dem Attraktor durch die numerische Simulation realisiert werden.

A3 : Die übrigen Lyapunov-Exponenten sollten schneller konvergieren, da ihre Beiträge nicht von den im allgemeinen selten auftretenden Streckprozessen herrühren. Durch das Gram-Schmidt-Verfahren kann allerdings nur der willkürlich herausgegriffene erste Vektor  $\underline{z}_0^{\{1\}}$  beziehungsweise  $\underline{z}(0)^{\{1\}}$  seine Richtung beibehalten, alle anderen werden durch ihn ausgerichtet. Der erste

Vektor wird also nach einer transienten Zeit in Richtung des größten Lyapunov-Exponenten weisen und diesen somit bestimmen. Der ebenfalls willkürlich herausgegriffene zweite Vektor  $\underline{z}_0^{\{2\}}$  beziehungsweise  $\underline{z}(0)^{\{2\}}$  wird von diesem ersten beeinflusst, er kann somit nicht mehr nur in Richtung des zweiten Lyapunov-Exponenten weisen. Da die beiden Vektoren aber den Unterraum des größten Flächenwachstums aufspannen, wird er durch mehrere Umläufe auf dem Attraktor im Mittel aber doch in diese zweite Richtung weisen und damit den entsprechenden Lyapunov-Exponenten bestimmen. Diese Argumentation läßt sich sofort auf alle weiteren Vektoren übertragen. Damit ist klar, daß das Verfahren tatsächlich alle Lyapunov-Exponenten korrekt erfaßt und der Größe nach sortiert. Gleichzeitig wird so auch die relativ langsame Konvergenz der negativen Lyapunov-Exponenten erklärt.

A4 : Falls die willkürlich gewählten Vektoren für die Berechnung der Lyapunov-Exponenten bestimmte Unterräume nicht verlassen können, versagt die oben angeführte Argumentation und die Lyapunov-Exponenten werden nicht alle korrekt bestimmt. Dies kann für ungünstig gewählte Startvektoren  $\underline{z}_0^{\{i\}}$  bei den ausgedünnten, zeitdiskreten Abbildungen der Fall sein, die bei der Bestimmung der Lyapunov-Exponenten zeitkontinuierlicher zeitverzögerter dynamischer Systeme auftreten (siehe Anhang D).

### 5.5.2 Verifikation

Drei einfache Beispiele sollen die Effizienz und die Genauigkeit des erläuterten Verfahrens demonstrieren.

#### Vergleich mit der Analytik

Wie wir in Abschnitt 5.4 gesehen haben, lassen sich für den gedämpften harmonischen Oszillator (5.31) beziehungsweise (5.32) die beiden Lyapunov-Exponenten analytisch berechnen (siehe (5.35)) und mit den numerisch bestimmten vergleichen. Anhand der folgenden Abbildung 5.5, die die numerisch bestimmten Lyapunov-Exponenten als Funktion des Dämpfungsparameters  $\gamma$  zeigt, halten wir fest:

- ▶ Für  $\gamma = 0$  ist der Attraktor dieses dynamischen Systems ein Zentrum und entsprechend nehmen beide Lyapunov-Exponenten den Wert Null an.
- ▶ Für  $\gamma > 0$  ist der einzige Attraktor ein stabiler Fixpunkt und daher müssen die beiden Lyapunov-Exponenten negativ sein.
  - Für das Parameterintervall  $0 < \gamma < 2$  handelt es sich um einen stabilen Fokus, was man daran erkennt, daß die beiden Lyapunov-Exponenten ent-

artet sind. Dies liegt an den mit der Oszillation verbundenen konjugiert-komplexen Eigenwerten der Matrix  $\underline{\underline{L}}(t)$ .

- Der aperiodische Grenzfall bei  $\gamma = 2$  markiert den Übergang des Attraktors in einen stabilen Knoten.
- Die Divergenz des Vektors  $\underline{\underline{L}} \tilde{\underline{\underline{z}}}(t)$  der rechten Seite der Gleichung (5.33) ist  $-\gamma$ , also wie bei allen dissipativen Systemen negativ. Der bereits erwähnte Zusammenhang (siehe Gleichung (B.13)) mit der Summe der Lyapunov-Exponenten

$$\sum_i \lambda_i = -\gamma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{div} \left( \underline{\underline{L}} \tilde{\underline{\underline{z}}}(t') \right) dt'$$

ist daher erfüllt.

- Die Abweichungen von den analytisch berechneten Werten (5.35) liegt in der Größenordnung von  $10^{-6}$  und kann durch Erhöhung der Zahl der Iterationen noch weiter verbessert werden. Dies demonstriert überzeugend die Effizienz des verwendeten Algorithmus.

**Abbildung 5.5: Gedämpfter harmonischer Oszillator: Lyapunov-Exponenten**

*Dargestellt sind die beiden numerisch bestimmten Lyapunov-Exponenten (5.35) als Funktion des Dämpfungsparameters  $\gamma$  beim Parameterwert  $\omega_0 = 1$ .*

### Vergleich mit anderen numerischen Resultaten

- Für das Lorenz-System (A.17) erhalten wir beispielsweise für den Parametersatz ( $R = 45.92$ ,  $\sigma = 16.0$ ,  $b = 4.0$ ) das folgende numerisch bestimmte Lyapunov-Spektrum

$$(1.5037, 0.0001, -22.5058) \quad (5.42)$$

und damit aus (5.27) die Lyapunov-Dimension

$$D_L \approx 2.07. \quad (5.43)$$

Dieses Resultat stimmt sehr gut mit dem in [145] angegebenen Näherungswert für die Hausdorff-Dimension

$$D_H \approx 2.08 \quad (5.44)$$

überein. Die Summe der Lyapunov-Exponenten ist  $-21.002$ . Für die Divergenz des Vektorfeldes  $\underline{f} = (f_x, f_y, f_z)$  (siehe Abschnitt A.2.1) des Lorenz-Systems ergibt sich bei diesen Parameterwerten aus (A.20) der Wert  $-21$ . Wegen der in Anhang B abgeleiteten Gleichung (B.13) ist die Übereinstimmung dieser beiden Werte eine weitere Bestätigung der Genauigkeit des Verfahrens.

- Die folgende Abbildung 5.6 zeigt die mit dem Verfahren von Wolf et al. numerisch bestimmten Lyapunov-Exponenten der zweidimensionalen Hénon-Abbildung (A.13) als Funktion des Kontrollparameters  $a$  im Intervall  $[0, 1.4]$  beim Parameterwert  $b = 0.3$ .

Ein Vergleich mit Abbildung 5.2 zeigt die qualitativ und quantitativ sehr gute Übereinstimmung. Der numerische Aufwand hingegen ist so unterschiedlich, daß wir für die Berechnungen gemäß (5.20) (Abb. 5.2) wesentlich weniger Iterationen durchführen konnten. Daher sind die Ergebnisse dieser Berechnung auch nicht so genau wie die der Berechnung gemäß (5.36) (Abb. 5.6).

Abbildung 5.6: **Hénon-Abbildung: Lyapunov-Exponenten (II)**

Dargestellt sind die beiden gemäß (5.36) numerisch bestimmten Lyapunov-Exponenten der zweidimensionalen Hénon-Abbildung (A.13) als Funktion des Kontrollparameters  $a$  im Intervall  $[0, 1.4]$  beim Parameterwert  $b = 0.3$  (vgl. Abb. 5.2).

Anmerkung: Die kritischen Werte des Kontrollparameters der Bifurkationspunkte der Periodenverdopplungs-Szenarien

- ▶ der Logistischen Abbildung (siehe Abschnitt A.1.2 Abb. A.1 und Tabellen A.1, A.2)
- ▶ der Hénon-Abbildung (siehe Abbn. 5.2 und 5.6 und Abschnitt A.1.3 Tabelle A.3)
- ▶ des zeitlich verzögerten Phasenregelkreises (siehe Abschnitt 6.4 Abb. 6.14 und Tabelle 6.6)

wurden ausschließlich mit dem Verfahren von Wolf et al. [179] bestimmt.



# Kapitel 6

## Der zeitlich verzögerte Phasenregelkreis

Ein Phasenregelkreis ist ein elektronisches System, das der Synchronisation der Phasen zweier Oszillatoren dient (vgl. Abb. 6.1). In [177], [178] wird ein Phasenregelkreis erster Ordnung<sup>1</sup> mit zeitlicher Verzögerung sowohl theoretisch als auch experimentell ausführlich untersucht. Insbesondere werden die Ordnungsparametergleichungen und die zugehörige Normalform der ersten oszillatorischen Instabilität, einer *Hopf-Bifurkation*<sup>2</sup>, hergeleitet. Dazu war eine Verallgemeinerung der in Kapitel 3 dargestellten Methodik der Synergetik auf zeitkontinuierliche zeitlich verzögerte dynamische Systeme notwendig. Der in Abschnitt 4.5 eingeführte unendlich-dimensionale Zustandsraum  $\mathcal{C}$  der auf dem Intervall  $[-\tau, 0]$  bzw.  $[-1, 0]$  definierten Funktionen, stellt dabei den adäquaten mathematischen Rahmen für die verallgemeinerten Formulierungen dar (siehe z.B. [77], [78], [103]).

In diesem Kapitel werden wir die wichtigsten Resultate der erwähnten Arbeiten wiederholen, wobei wir die zeitskalierte Version des in [177], [178] behandelten Systems verwenden. Anschließend werden wir die Normalform der ersten oszillatorischen Instabilität numerisch überprüfen. Außerdem werden wir im Rahmen unserer numerischen Untersuchungen kurz auf die in [152], [154], [153] ausführlich behandelte, zweite oszillatorische Instabilität eingehen, die zu einer Verallgemeinerung der *Floquet-Theorie* [39] (siehe auch [69], [140]) im erweiterten Zustandsraum  $\mathcal{C}$  führt. Da dieses relativ einfache nichtlineare System mit zeitlicher Verzögerung ein reichhaltiges dynamisches Verhalten zeigt, werden wir schließlich weitere Instabilitäten numerisch untersuchen.

---

<sup>1</sup>Ein Phasenregelkreis erster Ordnung enthält einen idealisierten Tiefpaßfilter mit unendlicher Bandbreite (nach [17]).

<sup>2</sup>Bei einer Hopf-Bifurkation kreuzen zwei zueinander konjugiert komplexe Eigenwerte des um einen Referenzzustand linearisierten Systems gleichzeitig die reelle Achse. Die Realteile werden also gleichzeitig positiv und der Referenzzustand verliert seine Stabilität.

## 6.1 Systembeschreibung

Die folgende Abbildung 6.1 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines Phasenregelkreises mit zeitlicher Verzögerung:

Abbildung 6.1: **Blockdiagramm des Phasenregelkreises mit zeitlicher Verzögerung**

Als Referenzsignal  $y_1(t)$  dient ein ungedämpfter harmonischer Oszillator mit der Kreisfrequenz  $\omega_1$

$$y_1(t) = a_1 \sin(\Phi_1(t)) \quad \text{mit} \quad \frac{d}{dt}\Phi_1(t) = \omega_1 \quad \text{und} \quad a_1 > 0. \quad (6.1)$$

Für den spannungskontrollierten Oszillator, dessen Kreisfrequenz sich aus der zentralen Kreisfrequenz  $\omega_2$  und einem zu der anliegenden Spannung  $y_3(t)$  proportionalen Anteil zusammensetzt, gilt:

$$y_4(t) = a_4 \sin(\Phi_2(t)) \quad \text{mit} \quad \frac{d}{dt}\Phi_2(t) = \omega_2 + a_3 y_3(t) \quad \text{und} \quad a_3, a_4 > 0. \quad (6.2)$$

Für die am Mischer anliegende Spannung  $y_5(t)$  ergibt sich durch die zeitliche Verzögerung

$$y_5(t) = a_5 y_4(t - \tau) \quad \text{mit} \quad a_5 > 0. \quad (6.3)$$

Der Mischer, der bei dieser Anordnung das einzige nichtlineare Element darstellt, multipliziert die beiden anliegenden Spannungen. Die Spannung  $y_2(t)$  ist daher:

$$y_2(t) = a_2 y_1(t) y_5(t) \quad \text{mit} \quad a_2 > 0. \quad (6.4)$$

Mit (6.1) - (6.3) folgt daraus:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= a_1 a_2 a_4 a_5 \sin(\Phi_1(t)) \sin(\Phi_2(t - \tau)) \\ &= \frac{1}{2} a_1 a_2 a_4 a_5 [\cos(\Phi_1(t) - \Phi_2(t - \tau)) - \cos(\Phi_1(t) + \Phi_2(t - \tau))] . \end{aligned}$$

Die Filterung durch den idealisierten Tiefpaß führt dann schließlich auf das Ausgangssignal

$$y_3(t) = \frac{1}{2} a_1 a_2 a_4 a_5 \cos(\Phi_1(t) - \Phi_2(t - \tau)) . \quad (6.5)$$

Die uns nun interessierende dynamische Größe ist die Phasendifferenz

$$\Phi(t) = \Phi_1(t) - \Phi_2(t - \tau) , \quad (6.6)$$

die ein Maß für die Synchronisation der beiden am Mischer anliegenden Signale  $y_1(t)$  und  $y_5(t)$  darstellt. Ihre Dynamik ergibt sich mit (6.1), (6.2) und (6.5) zu

$$\frac{d}{dt} \Phi(t) = \omega_1 - \omega_2 + A \cos(\Phi(t - \tau)) \quad (6.7)$$

mit

$$A = \frac{1}{2} a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 > 0 . \quad (6.8)$$

Um mit [177], [178] konform zu bleiben, führen wir noch die einfache Transformation

$$z(t) = \Phi(t) + \frac{\pi}{2} \quad (6.9)$$

durch, die lediglich eine Verschiebung des Koordinatenursprungs darstellt. Mit der bereits in Abschnitt 4.5 erwähnte Skalierung der Zeit  $t$  ergibt sich dann:

$$\frac{d}{dt} z(t) = (\omega_1 - \omega_2) \tau - A \tau \sin(z(t - 1)) . \quad (6.10)$$

Wir gehen nun im folgenden davon aus, daß sich die beiden Kreisfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  nicht unterscheiden und führen den nunmehr einzigen effektiven Kontrollparameter

$$R = A \tau \quad (6.11)$$

ein. Es verbleibt somit das folgende System

$$\frac{d}{dt} z(t) = -R \sin(z(t - 1)) \quad \text{mit} \quad R > 0 , \quad (6.12)$$

das wir nun genauer untersuchen werden.

## 6.2 Analyse im erweiterten Zustandsraum $\mathcal{C}$

Im erweiterten Zustandsraum  $\mathcal{C}$  wird aus (6.12)

$$\frac{d}{dt}z_t(\Theta) = (\mathcal{G} z_t)(\Theta) = \begin{cases} \frac{d}{d\Theta}z_t(\Theta) & , \quad -1 \leq \Theta < 0 \\ \mathcal{F}[z_t] & , \quad \Theta = 0 \end{cases} \quad (6.13)$$

mit dem aus der Taylorentwicklung der rechten Seite der Gleichung (6.12) bestimmten nichtlinearen Funktional

$$\mathcal{F}[z_t] = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-1}^0 d\Theta_1 \cdots \int_{-1}^0 d\Theta_k \omega^{(k)}(\Theta_1, \dots, \Theta_k) \prod_{l=1}^k z_t(\Theta_l) \quad (6.14)$$

und den in diesem Fall skalaren Dichten

$$\omega^{(k)}(\Theta_1, \dots, \Theta_k) = \begin{cases} R \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{k!} \prod_{l=1}^k \delta(\Theta_l + 1) & \text{für ungerade } k \\ 0 & \text{für gerade } k \end{cases} . \quad (6.15)$$

### 6.2.1 Stationäre Zustände

Die stationären Zustände des Systems sind

$$z_{stat} = l\pi, \quad \text{mit } l \in \mathbb{Z}. \quad (6.16)$$

Wie in [177], [178] ausführlich dargestellt, ergibt die lineare Stabilitätsanalyse im Zustandsraum  $\mathcal{C}$ , daß die stationären Zustände  $z_{stat} = \pi \pmod{2\pi}$  für alle  $R$  instabil sind, während die Stabilität der übrigen stationären Zustände  $z_{stat} = 0 \pmod{2\pi}$  vom Kontrollparameter  $R$  abhängt. Deshalb beschränken wir uns hier auf die Untersuchung des stationären Referenzzustandes

$$z_{ref} = 0. \quad (6.17)$$

### 6.2.2 Lineare Stabilitätsanalyse

Es muß nun untersucht werden, unter welchen Bedingungen der stationäre Referenzzustand stabil ist. Dazu betrachten wir das um diesen Referenzzustand linearisierte System in  $\mathcal{C}$ :

$$\frac{d}{dt}\zeta_t(\Theta) = (\mathcal{G}_L \zeta_t)(\Theta) = \begin{cases} \frac{d}{d\Theta}\zeta_t(\Theta) & , \quad -1 \leq \Theta < 0 \\ \mathcal{L}[\zeta_t] & , \quad \Theta = 0 \end{cases} \quad (6.18)$$

mit dem linearen Funktional

$$\mathcal{L}[\zeta_t] = \int_{-1}^0 d\Theta \omega(\Theta) \zeta_t(\Theta) \quad (6.19)$$

und der skalaren Dichte

$$\omega(\Theta) = \left. \frac{\delta \mathcal{F}[z_t]}{\delta z_t(\Theta)} \right|_{z_t(\Theta)=z_{ref}=0} = -R\delta(\Theta + 1). \quad (6.20)$$

Setzt man zur Lösung den folgenden Ansatz

$$\zeta_t(\Theta) = \phi^\lambda(\Theta)e^{\lambda t} \quad (6.21)$$

in das linearisierte System (6.18) ein, so erhält man zunächst das Eigenwertproblem des linearisierten infinitesimalen Generators  $\mathcal{G}_L$ :

$$\lambda \phi^\lambda(\Theta) = (\mathcal{G}_L \phi^\lambda)(\Theta), \quad -1 \leq \Theta \leq 0. \quad (6.22)$$

Berücksichtigt man die unterschiedliche Wirkung von  $\mathcal{G}_L$  in den beiden Bereichen  $-1 \leq \Theta < 0$  und  $\Theta = 0$ , so folgt

$$\begin{aligned} \phi^\lambda(\Theta) &= e^{\lambda\Theta} \phi^\lambda(0), \\ \lambda &= L(\lambda), \end{aligned} \quad (6.23)$$

mit

$$L(\lambda) = \int_{-1}^0 d\Theta \omega(\Theta) e^{\lambda\Theta}. \quad (6.24)$$

Dies führt uns auf die transzendente charakteristische Bestimmungsgleichung

$$-Re^{-\lambda} - \lambda = 0 \quad (6.25)$$

für die Eigenwerte  $\lambda$ . Wie in [177], [178] angegeben, hat das Spektrum des linearisierten infinitesimalen Generators  $\mathcal{G}_L$  folgende Eigenschaften:

- Es ist nach oben beschränkt.
- Es ist ein reines Punktspektrum abzählbar unendlich vieler Eigenwerte.
- Die Eigenwerte häufen sich für  $\Re(\lambda) \rightarrow -\infty$ .

Zur weiteren Berechnung der Eigenwerte  $\lambda$  trennt man Gleichung (6.25) in Realteil

$$\Re(\lambda) + Re^{-\Re(\lambda)} \cos(\Im(\lambda)) = 0 \quad (6.26)$$

und Imaginärteil

$$\Im(\lambda) - Re^{-\Re(\lambda)} \sin(\Im(\lambda)) = 0 \quad (6.27)$$

auf. An einer Instabilitätsstelle muß der Realteil des Eigenwerts  $\lambda$  verschwinden. Aus Gleichung (6.26) folgt dann

$$\cos(\Im(\lambda)) = 0 \Rightarrow \Im(\lambda) = \pm \left(2n + \frac{1}{2}\right) \pi \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_0, \quad (6.28)$$

und damit aus Gleichung (6.27)

$$R = \left(2n + \frac{1}{2}\right) \pi. \quad (6.29)$$

Da  $R$  den einzigen Kontrollparameter des Systems darstellt, ist die erste Instabilität bei

$$R_c = \frac{\pi}{2} \quad (6.30)$$

möglich, wenn die übrigen Eigenwerte des linearisierten Systems alle einen negativen Realteil haben.

Um dies zu überprüfen, können wir auf eine Reihe von Untersuchungen zurückgreifen [47], [82], [95], [134]. In diesen Arbeiten werden im Rahmen der Funktionentheorie die Nullstellen der komplexen Gleichung

$$H(c) = pe^c + q - ce^c \quad \text{mit } c \in \mathbb{C} \quad \text{und } p, q \in \mathbb{R} \quad (6.31)$$

untersucht (siehe [11]). Hayes [82] konnte als erster eine vollständige Lösung des Problems angeben und das folgende Theorem beweisen:

### Theorem T.1

*Alle Nullstellen des komplexen Quasipolynoms  $pe^c + q - ce^c$  haben einen negativen Realteil dann und nur dann, wenn*

(a)  $p < 1$  und

$$(b) \underbrace{p < -q}_{(b.1)} < \overbrace{\sqrt{a_1^2 + p^2}}^{(b.2)},$$

wobei  $a_1$  die im Intervall  $[0, \pi)$  liegende Lösung der transzendenten Gleichung  $a_1 = p \tan(a_1)$  ist. Für den Spezialfall  $p = 0$  ist  $a_1 = \frac{\pi}{2}$ .

Anmerkungen: A1 : Für alle autonomen, skalaren Delay-Differentialgleichungen des Typs

$$\frac{d}{dt}z(t) = \tau f(z(t), z(t-1), \{\sigma_k\}), \quad (6.32)$$

stellt (6.31) die allgemeine Form der charakteristischen transzendenten Gleichung dar, die sich aus dem Eigenwertproblem der zu (6.32) gehörenden linearisierten Delay-Differentialgleichung ergibt. Wir werden daher in Kapitel 7 und 8 ebenfalls auf das Theorem von Hayes zurückgreifen können.

A2 : Der Realteil eines einzigen Eigenwertes der Gleichung (6.31) wird positiv, falls die Ungleichung (b.1) des Theorems (T.1) verletzt wird.

A3 : Die Realteile zweier zueinander konjugiert komplexer Eigenwerte werden positiv, falls die Ungleichung (b.2) des Theorems (T.1) verletzt wird.

Eine Identifikation der Parameter  $R, \lambda$  der Gleichung (6.25) mit den Parametern  $p, q$  der Gleichung (6.31) ergibt für das in diesem Kapitel behandelte System

$$p = 0, q = -R. \quad (6.33)$$

Zu jedem Wert des Kontrollparameters  $R$  ergibt sich nun aus dem Eigenwertproblem des um den Referenzzustand linearisierten Systems (6.18) eine transzendent charakteristische Gleichung (6.25) und daraus über die Zuordnung (6.33) ein Punkt in der  $(p, q)$ -Ebene. Variiert man den Kontrollparameters  $R$ , so verändert sich dieser Punkt und man kann von einer Kurve in der  $(p, q)$ -Ebene sprechen, die durch den Kontrollparameter  $R$  parametrisiert ist. Der betrachtete stationäre Referenzzustand wird demnach solange stabil sein, bis diese Kurve den Stabilitätsbereich verläßt, der durch die Bedingungen (a) und (b) des Theorems von Hayes definiert wird.

In Abbildung 6.2 ist die Situation auf unseren Fall spezialisiert dargestellt. Da der Kontrollparameter  $R$  stets positiv ist, ist der stationäre Referenzzustand  $z_{ref} = 0$  für kleine  $R$ -Werte zunächst stabil. Erhöht man den Wert des Kontrollparameters, so wandert der zugeordnete Punkt in der  $(p, q)$ -Ebene vom Ursprung ausgehend entlang der negativen  $q$ -Achse, bis er beim kritischen Kontrollparameterwert  $R_c = \frac{\pi}{2}$  das Stabilitätsgebiet verläßt. Somit ist gezeigt, daß für diesen Wert des Kontrollparameters tatsächlich die erste Instabilität auftritt. Bei  $R = R_c$  ist die Bedingung (b.2) des Theorems von Hayes verletzt, was nach Anmerkung A3 zur Folge hat, daß zwei zueinander konjugiert komplexe Eigenwerte die imaginäre Achse durchkreuzen. Es tritt bei  $R_c = \frac{\pi}{2}$  also eine Hopf-Bifurkation auf. Da in den effektiven Kontrollparameter des Systems  $R = A\tau$  die zeitliche Verzögerung  $\tau$  eingeht, spricht man von einer *verzögerungsinduzierten* Instabilität und im Fall dieser speziellen Instabilität von einer verzögerungsinduzierten Hopf-Bifurkation.

Die Abbildung 6.3 demonstriert dies und bestätigt außerdem exemplarisch das Theorem (T.1) auf anschauliche Weise. Zu jedem Wert des Kontrollparameters  $R$  wurden die 10 Eigenwerte mit dem größten Realteil der transzendenten charakteristischen Gleichung (6.25) des linearisierten Systems (6.18) mit Hilfe des Newton-Verfahrens numerisch ermittelt. Der Kontrollparameter  $R$  wurde dabei in äquidistanten Schritten im Intervall  $[0, \frac{\pi}{2}]$  variiert. Die sich dadurch ergebenden Bahnkurven der Eigenwerte sind in der komplexen Ebene dargestellt.

Abbildung 6.2: **Grafische Darstellung des Resultats von Hayes beim Phasenregelkreis**

Für den schraffierten Bereich der  $(p, q)$ -Ebene sind die beiden Bedingungen (a) und (b) des Theorems (T.1) erfüllt, alle Eigenwerte haben hier einen negativen Realteil. Die Kurve, die bei Veränderung des Kontrollparameters  $R$  von 0 nach  $\frac{\pi}{2}$  durchlaufen wird, ist durch den Pfeil dargestellt. Längs dieser Kurve ist der stationäre Referenzzustand  $z_{ref} = 0$  stabil. Bei  $R_c = \frac{\pi}{2}$  wird die Bedingung (b.2) verletzt. Die Realteile zwei zueinander konjugiert komplexer Eigenwerte werden positiv, es tritt also eine Hopf-Bifurkation auf.



Abbildung 6.3: **Verhalten der Eigenwerte bei Veränderung des Kontrollparameters  $R$**

Dargestellt sind die Bahnkurven in der komplexen Ebene der 10 Eigenwerte mit dem größten Realteil des linearisierten Systems (6.18). Der Kontrollparameter  $R$  wurde von 0 bis  $\frac{\pi}{2}$  in äquidistanten Schritten verändert. Zu jedem Wert von  $R$  wurden die 10 Eigenwerte der Gleichung (6.25) mit Hilfe des Newton-Verfahrens numerisch bestimmt.

Die Ergebnisse der numerischen Analyse des für die Hopf-Bifurkation relevanten Teils des Eigenwertspektrums lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

- ▶ Für  $R = 0$  existiert nur der einzige reelle Eigenwert 0, da (6.12) für diesen Spezialfall eine triviale Gleichung darstellt.
- ▶ Die übrigen Eigenwerte existieren erst für  $R > 0$ , wobei ein weiterer rein reeller Eigenwert entsteht und abzählbar unendlich viele Paare zueinander konjugiert komplexer Eigenwerte mit der Eigenschaft:  $\Re(\lambda) \rightarrow -\infty$  für  $R \rightarrow 0$ .
- ▶ Bei  $R = \frac{1}{\epsilon}$  treffen sich die beiden reellen Eigenwerte im Punkt  $(-1, 0)$ . Sie bilden dann für  $R > \frac{1}{\epsilon}$  ebenfalls ein Paar zueinander konjugiert komplexer Eigenwerte, die wir in der Nähe des Kontrollparameterwertes  $R_c = \frac{\pi}{2}$  mit den Eigenwerten  $\lambda_u^\pm$  identifizieren können. Sie sind diejenigen Eigenwerte, deren Realteile bei Veränderung des Kontrollparameters über die kritische Stelle  $R_c = \frac{\pi}{2}$  hinweg positiv werden.
- ▶ Die übrigen Eigenwerte kreuzen die imaginäre Achse erst bei größeren Werten des Kontrollparameters  $R$ , daher sind die beiden Eigenwerte  $\lambda_u^\pm$  tatsächlich

für die Hopf-Bifurkation bei  $R_c = \frac{\pi}{2}$  verantwortlich.

Um das Verhalten der beiden Eigenwerte  $\lambda_u^\pm$  in der Nähe der Instabilität weiter analytisch zu untersuchen, nehmen wir eine Entwicklung der Eigenwerte um die kritische Stelle  $R_c = \frac{\pi}{2}$  vor, wobei wir den durch

$$\varepsilon = \frac{R - R_c}{R_c} \Leftrightarrow R = R_c(1 + \varepsilon) \quad (6.34)$$

definierten Kleinheitsparameter einführen, der den relativen Abstand des Kontrollparameters  $R$  vom kritischen Wert  $R_c$  angibt. Wir setzen also den folgenden Ansatz

$$\lambda_u^\pm(\varepsilon) = c_1\varepsilon \pm iR_c(1 + c_2\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (6.35)$$

in die Gleichungen (6.26) und (6.27) ein, führen einen Koeffizientenvergleich bis zur ersten Ordnung in  $\varepsilon$  durch und bestimmen anschließend die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$ . Dann erhält man:

$$\lambda_u^{1,2}(\varepsilon) = \lambda_u^\pm(\varepsilon) = \frac{R_c^2}{1 + R_c^2} \varepsilon \pm iR_c \left( 1 + \frac{1}{1 + R_c^2} \varepsilon \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (6.36)$$

Die zwei zueinander konjugiert komplexen Eigenwerte  $\lambda_u^\pm$  kreuzen also bei  $R_c = \frac{\pi}{2}$  die imaginäre Achse. Da die restlichen abzählbar unendlich vielen Eigenwerte bei diesem Wert des Kontrollparameters  $R$  alle einen negativen Realteil besitzen, handelt es sich hier tatsächlich um eine Hopf-Bifurkation.

### 6.2.3 Zeitskalenhierarchie

Wie wir bereits in Kapitel 3 erwähnt haben, führt die charakteristische Eigenschaft der Eigenwerte des linearisierten Systems (6.18)

$$\Re(\lambda_u^i(R_c)) = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (6.37)$$

$$\Re(\lambda_s^j(R_c)) < 0 \quad j = 1, \dots, \infty \quad (6.38)$$

beim kritischen Wert  $R_c = \frac{\pi}{2}$  des Kontrollparameters zu einer Zeitskalentrennung bzw. Zeitskalenhierarchie. Für die linearen Moden des Systems ergeben sich daher in der Nähe der Instabilität sehr unterschiedliche Relaxationszeiten

$$\mathbb{t}_u^i = \frac{1}{|\Re(\lambda_u^i)|} \gg \mathbb{t}_s^j = \frac{1}{|\Re(\lambda_s^j)|} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, \infty \end{array} \quad (6.39)$$

Analog zu den Ausführungen in Kapitel 3 resultiert daraus eine Aufspaltung des unendlich-dimensionalen Raums  $\mathcal{C}$  in einen  $m$ -dimensionalen Unterraum  $\mathcal{U}$  der  $m$  linear instabilen Moden und einen dazu orthogonalen, weiterhin unendlich-dimensionalen Unterraum  $\mathcal{S}$  der linear stabilen Moden. In unserem Beispiel ist, wie wir bereits festgestellt haben,  $m = 2$ . In der Nähe der Instabilität läßt sich der Zustandsvektor  $z_t(\Theta)$  gemäß

$$z_t(\Theta) = z_{ref} + \tilde{z}_t(\Theta) \quad (6.40)$$

in zwei Anteile zerlegen – in den stationären Referenzzustand  $z_{ref}$  einerseits und den *reduzierten Zustandsvektor*  $\tilde{z}_t(\Theta)$  andererseits. Der stationäre Referenzzustand war bei diesem System  $z_{ref} = 0$ . Der reduzierte Zustandsvektor  $\tilde{z}_t(\Theta)$  läßt sich dann seinerseits aufspalten in die beiden Anteile  $u_t(\Theta)$  und  $s_t(\Theta)$  des instabilen beziehungsweise stabilen Unterraumes, wodurch wir die folgende Darstellung

$$\tilde{z}_t(\Theta) = u_t(\Theta) + s_t(\Theta) \quad (6.41)$$

erhalten. Bei der synergetischen Systemanalyse (vgl. Kap. 3) müssen wir das vollständige nichtlineare System (6.13) auf das Modenskelett der linear instabilen Moden projizieren. Dies geschieht mit Hilfe geeigneter Projektoren in die Unterräume  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{S}$ . Für die Projektoren benötigen wir sowohl die linear instabilen Moden

$$\phi^{\lambda_i}(\Theta) = N_{\lambda_i} e^{\lambda_i \Theta} \quad \text{mit} \quad -1 \leq \Theta \leq 0 \quad \text{und} \quad i = 1, \dots, m \quad (6.42)$$

des Systems (6.18), als auch die linear instabilen Moden

$$\psi^{\dagger \lambda_i}(s) = N_{\lambda_i} e^{-\lambda_i s} \quad \text{mit} \quad 0 \leq s \leq 1 \quad \text{und} \quad i = 1, \dots, m \quad (6.43)$$

des dazu adjungierten Systems

$$\frac{d}{dt} \zeta_t^\dagger(s) = - \left( \mathcal{G}_L^\dagger \zeta_t^\dagger \right) (s) = \begin{cases} \frac{d}{ds} \zeta_t^\dagger(s) & , \quad 0 < s \leq 1 \\ -\mathcal{L}^\dagger \left[ \zeta_t^\dagger \right] & , \quad s = 0 \end{cases} \quad (6.44)$$

mit dem linearen Funktional

$$\mathcal{L}^\dagger \left[ \zeta_t^\dagger \right] = \int_0^1 ds \omega(-s) \zeta_t^\dagger(s), \quad (6.45)$$

da der infinitesimale Generator  $\mathcal{G}_L$  nicht selbstadjungiert ist.  $\psi^{\dagger \lambda}(s)$  und  $\zeta_t^\dagger(s)$  sind dabei Elemente des zu  $\mathcal{C}$  dualen Raums  $\mathcal{C}^\dagger$  der auf dem Intervall  $[0, 1]$  definierten Funktionen. Die  $\psi^{\dagger \lambda}(s)$  sind die Eigenfunktionen des zu (6.22) adjungierten Eigenwertproblems

$$\lambda \psi^{\dagger \lambda}(s) = \left( \mathcal{G}_L^\dagger \psi^{\dagger \lambda} \right) (s), \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (6.46)$$

Die Verbindung zwischen den beiden Räumen ist, wie in [177], [178] gezeigt wird, nicht durch das gewöhnliche Skalarprodukt gegeben, sondern durch eine spezielle *Bilinearform*, die auf [77] zurückgeht. Sie nimmt die folgende Form an

$$(\psi | \phi) = \langle \psi(0) | \phi(0) \rangle - \int_{-1}^0 d\Theta \int_0^\Theta ds \langle \psi(s - \Theta) | \omega(\Theta) \phi(s) \rangle, \quad (6.47)$$

wobei  $\langle | \rangle$  das gewöhnliche Skalarprodukt darstellt. Für die in der vorliegenden Arbeit ausschließlich behandelten skalaren Gleichungen geht das Skalarprodukt in ein gewöhnliches Produkt über.

Anmerkung: Im Gegensatz zu gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen, bei denen die Bilinearform für jedes System und jeden Referenzzustand dieselbe ist, erzeugt jedes zeitlich verzögerte System bei jedem Referenzzustand seine eigene Bilinearform (6.47), da die Dichte  $\omega(\Theta)$  in der Bilinearform (6.47) nach (6.20) durch

$$\omega(\Theta) = \left. \frac{\delta \mathcal{F}[z_t]}{\delta z_t(\Theta)} \right|_{z_t(\Theta)=z_{ref}} \quad (6.48)$$

definiert ist.

Mit Hilfe der Bilinearform (6.47) ist es möglich, die Biorthonormalität

$$(\psi^{\lambda_i} | \phi^{\lambda_j}) = \delta_{ij} \quad (6.49)$$

der Eigenfunktionen  $\psi^{\lambda_i}, \phi^{\lambda_j}$  zu zeigen und dadurch die in (6.42) und (6.43) auftretenden Normierungskonstanten  $N_{\lambda_u}$  zu bestimmen. Setzt man die rechten Seiten der Gleichungen (6.42) und (6.43) in die Bilinearform ein, dann folgt für die Normierungskonstanten:

$$N_{\lambda_u^\pm} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_u^\pm}}. \quad (6.50)$$

Da wir die Eigenwerte  $\lambda_u^i$  analytisch<sup>3</sup> kennen, sind die linear instabilen Eigenfunktionen  $\phi^{\lambda_u^i}(\Theta)$  des linearisierten Systems (6.18) und die  $\psi^{\lambda_u^i}(s)$  des dazu adjungierten Systems (6.44) vollständig bestimmt. Analog zu Abschnitt 3.2.4, sind wir somit in der Lage, die nichtlineare Bewegungsgleichung (6.13) auf das Modenskelett der linear instabilen Moden zu projizieren.

### 6.2.4 Projektion der Bewegungsgleichung

Die nichtlineare Bewegungsgleichung (6.13) läßt sich in ihren linearen und einen verbleibenden effektiv nichtlinearen Anteil zerlegen:

$$\frac{d}{dt} \tilde{z}_t(\Theta) = (\mathcal{G}_L \tilde{z}_t)(\Theta) + X_0(\Theta) \mathcal{F}^{\text{eff}}[\tilde{z}_t], \quad -1 \leq \Theta \leq 0 \quad (6.51)$$

mit der für skalare Delay-Differentialgleichungen skalaren Funktion

$$X_0(\Theta) = \begin{cases} 0 & , \quad -1 \leq \Theta < 0 \\ 1 & , \quad \Theta = 0 \end{cases}. \quad (6.52)$$

Die Projektoren können durch die Bilinearform (6.47) nun definiert werden durch

$$\mathcal{P}_u = \sum_{i=1}^m \left( \phi^{\lambda_u^i}(\Theta) \right) \left( \psi^{\lambda_u^i}(s) \right), \quad (6.53)$$

$$\mathcal{P}_s = (\mathcal{I} - \mathcal{P}_u). \quad (6.54)$$

---

<sup>3</sup>In Form einer Entwicklung nach dem Kleinheitsparameter  $\varepsilon$ .

Anmerkung: Da die Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen von (6.18) und (6.44) nicht gesichert ist, werden wir bei der Projektion der nicht-linearen Bewegungsgleichung (6.13) auch nur die Gleichungen für die Entwicklungskoeffizienten der linear instabilen Moden explizit angeben. Die anschließende Elimination der stabilen Moden führt ohnehin dazu, daß wir ein geschlossenes Gleichungssystem für diese Entwicklungskoeffizienten erhalten. Wir benötigen die explizite Kenntnis der Entwicklungskoeffizienten der linear stabilen Moden also nicht.

Mit den eingeführten Projektoren (6.53) und (6.54) ist es möglich, die Bewegungsgleichung (6.51) auf die beiden Unterräume  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{S}$  zu projizieren. Bei Anwendung des Projektors  $\mathcal{P}_u$  auf den reduzierten Zustandsvektor  $\tilde{z}_t(\Theta)$  ergibt sich:

$$(\mathcal{P}_u \tilde{z}_t)(\Theta) = u_t(\Theta) = \sum_{i=1}^m u^i(t) \left| \phi^{\lambda_u^i}(\Theta) \right\rangle, \quad (6.55)$$

wobei

$$u^i(t) = \left( \psi^{\lambda_u^i} \left| \tilde{z}_t \right. \right) \quad (6.56)$$

der Entwicklungskoeffizient der linear instabilen Mode  $\phi^{\lambda_u^i}(\Theta)$  ist. Wendet man nun den Projektor  $\mathcal{P}_u$  auf die Gleichung (6.51) an, so ergibt sich die folgende Bewegungsgleichung für den Anteil  $u_t(\Theta)$  des reduzierten Zustandsvektors  $\tilde{z}_t(\Theta)$  im Unterraum  $\mathcal{U}$ :

$$\frac{d}{dt} u_t(\Theta) = (\mathcal{G}_L (\mathcal{P}_u \tilde{z}_t))(\Theta) + (\mathcal{P}_u X_0)(\Theta) \mathcal{F}^{\text{eff}}[\tilde{z}_t], \quad (6.57)$$

da sich zeigen läßt, daß  $\mathcal{G}_L$  und  $\mathcal{P}_u$  kommutieren. Mit (6.47), (6.52) und (6.53) ergibt sich aus (6.57)

$$\frac{d}{dt} u^i(t) = \lambda_u^i u^i(t) + \left\langle \psi^{\lambda_u^i}(0) \left| \mathcal{F}^{\text{eff}}[\tilde{z}_t] \right. \right\rangle, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6.58)$$

Bei Anwendung des Projektors  $\mathcal{P}_s$  auf die Gleichung (6.51) folgt mit

$$s_t(\Theta) = (\mathcal{P}_s \tilde{z}_t)(\Theta) \quad (6.59)$$

die Bewegungsgleichung für den Anteil  $s_t(\Theta)$  des reduzierten Zustandsvektors  $\tilde{z}_t(\Theta)$  im Unterraum  $\mathcal{S}$

$$\frac{d}{dt} s_t(\Theta) = (\mathcal{G}_L s_t)(\Theta) + ((\mathcal{I} - \mathcal{P}_u) X_0)(\Theta) \mathcal{F}^{\text{eff}}[\tilde{z}_t], \quad (6.60)$$

da  $\mathcal{G}_L$  und  $\mathcal{P}_u$  kommutieren. Berücksichtigt man nun noch, daß sich der reduzierte Zustandsvektor  $\tilde{z}_t(\Theta)$  gemäß (6.40) mit (6.17), (6.53) und (6.56) schreiben läßt als

$$\tilde{z}_t(\Theta) = \sum_{j=1}^m \phi^{\lambda_u^j}(\Theta) u^j(t) + s_t(\Theta), \quad (6.61)$$

dann erhält man aus (6.58) und (6.60) das folgende System von gekoppelten nicht-linearen Modenamplitudengleichungen:

$$\frac{d}{dt}u^i(t) = \lambda_u^i u^i(t) + \left\langle \psi^\dagger \lambda_u^i(0) \left| \mathcal{F}^{\text{eff}} \left[ \sum_{j=1}^m \phi^{\lambda_u^j} u^j(t) + s_t \right] \right. \right\rangle, \quad (6.62)$$

$$\frac{d}{dt}s_t(\Theta) = (\mathcal{G}_L s_t)(\Theta) + ((\mathcal{I} - \mathcal{P}_u) X_0)(\Theta) \mathcal{F}^{\text{eff}} \left[ \sum_{j=1}^m \phi^{\lambda_u^j} u^j(t) + s_t \right]. \quad (6.63)$$

Die Gleichungen (6.62) und (6.63) sind das Analogon zu den Gleichungen (3.30) und (3.31) in Kapitel 3. Sie sind vollständig äquivalent zu den Bewegungsgleichungen (6.13) bzw. (6.51) und beschreiben die Dynamik des zeitlich verzögerten Systems exakt. Eine Lösung der Gleichungen ist im allgemeinen aber nur näherungsweise möglich. Eine der Näherungslösungen basiert auf dem Versklavungsprinzip der Synergetik, das im nächsten Abschnitt erläutert wird.

### 6.2.5 Versklavungsprinzip

Wie in [177], [178] gezeigt wird, ist es nun möglich, das Versklavungsprinzip der Synergetik (vgl. Abschnitt 3.2.7) auch hier anzuwenden. Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen folgt aus der Zeitskalenhierarchie (6.39), daß die intrinsische Dynamik der stabilen Moden viel schneller ist als die der instabilen. Dies führt dazu, daß die stabilen Moden den instabilen quasi instantan folgen – sie werden von den instabilen Moden „versklavt“. Die mathematische Formulierung des Versklavungsprinzips (vgl. (3.35)) in der für Delay-Differentialgleichungen erweiterten Form lautet:

$$s_t(\Theta) = h(\Theta, u^1(t), \dots, u^m(t)) = h(\Theta, \underline{u}(t)), \quad (6.64)$$

wobei die zentrale Mannigfaltigkeit  $h(\Theta, \underline{u}(t))$  die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$h(\Theta, \underline{0}) = 0, \quad (6.65)$$

$$\left. \frac{\partial h(\Theta, \underline{u})}{\partial \underline{u}} \right|_{\underline{u}=0} = \underline{0}. \quad (6.66)$$

Setzt man (6.64) in (6.63) ein, dann folgt daraus die implizite Bestimmungsgleichung für die zentrale Mannigfaltigkeit  $h(\Theta, \underline{u}(t))$ :

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial h}{\partial u^i} \left( \underbrace{\lambda_u^i u^i(t)}_{ZM_2} + \underbrace{\left\langle \psi^\dagger \lambda_u^i(0) \left| \mathcal{F}^{\text{eff}} \left[ \sum_{j=1}^m \phi^{\lambda_u^j} u^j(t) + h \right] \right. \right\rangle}_{ZM_3} \right) = \underbrace{(\mathcal{G}_L h)(\Theta)}_{ZM_4} + \underbrace{((\mathcal{I} - \mathcal{P}_u) X_0)(\Theta) \mathcal{F}^{\text{eff}} \left[ \sum_{j=1}^m \phi^{\lambda_u^j} u^j(t) + h \right]}_{ZM_5}. \quad (6.67)$$

Aus den Gleichungen (6.62) werden mit (6.64) die  $m$  Ordnungsparametergleichungen

$$\frac{d}{dt}u^i(t) = \underbrace{\lambda_u^i u^i(t)}_{O_1} + \left\langle \underbrace{\psi^{\dagger \lambda_u^i}(0)}_{O_2} \left| \underbrace{\mathcal{F}^{\text{eff}} \left[ \sum_{j=1}^m \phi^{\lambda_u^j} u^j(t) + h \right]}_{O_3} \right. \right\rangle, \quad (6.68)$$

die dann keine Retardierungseffekte mehr enthalten. Damit ist es möglich, in der Nähe einer Instabilität die Dynamik der ursprünglichen Delay-Differentialgleichung im unendlich-dimensionalen Raum  $\mathcal{C}$  auf ein niederdimensionales System gewöhnlicher Differentialgleichungen abzubilden.

### 6.2.6 Elimination der stabilen Moden

Um die implizite Bestimmungsgleichung (6.67) für die zentrale Mannigfaltigkeit  $h(\Theta, \underline{u}(t))$  zu lösen, müssen wir, wie in Kapitel 3 bereits erwähnt, zunächst eine Selbstkonsistenz-Betrachtung durchführen. Wie wir ebenfalls aus Kapitel 3 bereits wissen, werden die Ordnungsparameter eine bestimmte Abhängigkeit vom Kleinheitsparameter  $\varepsilon$  der Form

$$u \sim \mathcal{O}(\varepsilon^\alpha) \quad (6.69)$$

aufweisen. Dieses Wissen erlaubt es uns, Gleichung (6.67) zu vereinfachen und schließlich zu lösen. Sei nun  $r$  die niederste Ordnung des nichtlinearen Funktionals  $\mathcal{F}^{\text{eff}}[\tilde{z}_t]$ , dann wird man zur Bestimmung der zentrale Mannigfaltigkeit  $h(\Theta, \underline{u}(t))$  in niederster Ordnung den folgenden Ansatz verwenden:

$$h(\Theta, \underline{u}(t)) = \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m H_{j_1 \dots j_r}(\Theta) u^{j_1}(t) \cdots u^{j_r}(t) \sim \mathcal{O}(\varepsilon^{r\alpha}). \quad (6.70)$$

Daraus folgt unmittelbar, daß wir für das in (6.67) auftretende nichtlineare Funktional die Näherung

$$\mathcal{F}^{\text{eff}} \left[ \sum_{j=1}^m \phi^{\lambda_u^j} u^j(t) + s_t \right] \approx \mathcal{F}^{\text{eff} (r)} \left[ \sum_{j=1}^m \phi^{\lambda_u^j} u^j(t) \right] \quad (6.71)$$

verwenden können, was dann gemäß (6.14), (6.15) zu der expliziten Darstellung:

$$\mathcal{F}^{\text{eff} (r)} \left[ \sum_{j=1}^m \phi^{\lambda_u^j} u^j(t) \right] = \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m F_{j_1 \dots j_r}^{\text{eff}} u^{j_1}(t) \cdots u^{j_r}(t) \sim \mathcal{O}(\varepsilon^{r\alpha}) \quad (6.72)$$

mit

$$F_{j_1 \dots j_r}^{\text{eff}} = \int_{-1}^0 d\Theta_1 \cdots \int_{-1}^0 d\Theta_r \omega^{(r)}(\Theta_1, \dots, \Theta_r) \phi^{\lambda_u^{j_1}}(\Theta_1) \cdots \phi^{\lambda_u^{j_r}}(\Theta_r) \quad (6.73)$$

führt. Für die in (6.67) gekennzeichneten Terme können wir nun die niedersten Ordnungen explizit angeben:

Term	$ZM_1$	$ZM_2$	$ZM_3$	$ZM_4$	$ZM_5$
Ordnung	$\mathcal{O}(\varepsilon^{(r-1)\alpha})$	$\mathcal{O}(\varepsilon^\alpha)$	$\mathcal{O}(\varepsilon^{r\alpha})$	$\mathcal{O}(\varepsilon^{r\alpha})$	$\mathcal{O}(\varepsilon^{r\alpha})$

Tabelle 6.1: **Selbstkonsistenz-Betrachtung**

Vergleich der Terme der Gleichung (6.67) in niederster Ordnung des Kleinheitsparameters  $\varepsilon$ .

Es ist ersichtlich, daß Term  $ZM_3$  in Verbindung mit Term  $ZM_1$  von höherer Ordnung ist als die übrigen Terme in (6.67) und daher vernachlässigt werden kann. Mit (6.70), (6.72) und (6.73) ist es nun möglich, aus Gleichung (6.67) die Koeffizienten der zentralen Mannigfaltigkeit zu bestimmen. Zunächst erhält man:

$$0 = \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^m C_{j_1 \dots j_r}(\Theta) u^{j_1}(t) \cdots u^{j_r}(t) \quad (6.74)$$

mit der Abkürzung

$$C_{j_1 \dots j_r}(\Theta) = \left[ ((\mathcal{G}_L - \lambda \mathcal{I}) H_{j_1 \dots j_r})(\Theta) + ((\mathcal{I} - \mathcal{P}_u) X_0)(\Theta) F_{j_1 \dots j_r}^{\text{eff}} \right] \quad (6.75)$$

und

$$\lambda = \sum_{k=1}^r \lambda_u^{j_k}. \quad (6.76)$$

Da die Gleichung (6.74) für beliebige Zeiten erfüllt sein muß, folgt schließlich für die einzelnen Koeffizienten  $H_{j_1 \dots j_r}(\Theta)$  der zentralen Mannigfaltigkeit

$$H_{j_1 \dots j_r}(\Theta) = F_{j_1 \dots j_r}^{\text{eff}} K_{j_1 \dots j_r}(\Theta) \quad (6.77)$$

mit

$$K_{j_1 \dots j_r}(\Theta) = \left( \underbrace{[\mathcal{G}_L]}_{\text{I}} - \underbrace{\lambda \mathcal{I}}_{\text{II}} \right)^{-1} (\mathcal{P}_u X_0 - X_0)(\Theta). \quad (6.78)$$

Anmerkung: Die zu den instabilen Moden  $\phi^{\lambda_u^i}(\Theta)$  gehörenden zueinander konjugiert komplexen Eigenwerte  $\lambda_u^i$  führen dazu, daß der pragmatische Zugang zur Berechnung der zentralen Mannigfaltigkeit (vgl. Fußnote auf S. 27) ein falsches Resultat liefert. Vernachlässigt man nämlich die linke Seite der Gleichung (6.63) beziehungsweise (6.67), dann tritt der Beitrag II in Gleichung (6.78) nicht auf. Er stellt somit einen zusätzlichen Term dar, der durch die konsequente Entwicklung der in (6.62) und (6.63) auftretenden Terme nach dem Kleinheitsparameter  $\varepsilon$  und die stringente und selbstkonsistente Berücksichtigung der relevanten Ordnungen entsteht.



In [177], [178] wird gezeigt, daß sich der Operator  $[\mathcal{G}_L - \lambda \mathcal{I}]^{-1}$  wie folgt darstellen läßt

$$([\mathcal{G}_L - \lambda \mathcal{I}]^{-1} \chi)(\Theta) = \int_0^\Theta ds e^{\lambda(\Theta-s)} \chi(s) + [L(\lambda) - \lambda]^{-1} \left( \chi(0) - \int_{-1}^0 d\Theta \int_0^\Theta ds e^{\lambda(\Theta-s)} \omega(\Theta) \chi(s) \right) e^{\lambda\Theta}, \quad (6.79)$$

woraus sich für die Koeffizienten  $K_{j_1 \dots j_r}(\Theta)$  der Gleichung (6.77) nach kurzer Rechnung unter Verwendung von (6.24), (6.42), (6.43), (6.52) und (6.53) ergibt:

$$K_{j_1 \dots j_r}(\Theta) = \sum_{j=1}^m \frac{N_{\lambda_u^j}^2}{\lambda_u^j - \lambda} e^{\lambda_u^j \Theta} - \frac{e^{\lambda\Theta}}{L(\lambda) - \lambda}. \quad (6.80)$$

Damit ist die Berechnung der zentralen Mannigfaltigkeit in niederster Ordnung der Ordnungsparameter  $u_i(t)$  abgeschlossen und wir wenden uns nun den  $m$  Ordnungsgleichungen (6.68) zu.

### 6.2.7 Ordnungsgleichungen

In der folgenden Tabelle ist eine allgemeine Betrachtung der niedersten Ordnungen der Terme  $O_1, O_2$  und  $O_3$  der rechten Seiten der Gleichungen (6.68) durchgeführt:

$u$	Term $O_1$	Term $O_2$	Term $O_3$
$\varepsilon^\alpha$	$\varepsilon^\alpha + \varepsilon^{\alpha+1} + \varepsilon^{\alpha+2}$	$1 + \varepsilon + \varepsilon^2$	$\varepsilon^{r\alpha} + \underbrace{\varepsilon^{(2r-1)\alpha} + \varepsilon^{(3r-2)\alpha} + \dots + \varepsilon^{r^2\alpha}}_{\text{„h“}}$

Tabelle 6.2: **Allgemeine Ordnungs-Betrachtung**

*Vergleich der niedersten Ordnungen der Terme der rechten Seiten der Gleichungen (6.68). Die unterklammerten Terme rühren vom Einfluß der zentralen Mannigfaltigkeit her.*

Da die Terme  $O_2$  und  $O_3$  miteinander multipliziert werden, ist es nicht möglich, für beliebige Werte von  $\alpha$  und  $r$  die für die Ordnungsgleichungen relevanten Terme anzugeben. Daher beschränken wir die Ordnungs-Betrachtungen auf die in dieser Arbeit behandelte Hopf-Bifurkation bei quadratischen und kubischen Nichtlinearitäten. Der Parameter  $\alpha$  nimmt dann den Wert  $\frac{1}{2}$  an. Berücksichtigt man nun, daß bei dem in diesem Kapitel behandelten System des zeitlich verzögerten Phasenregelkreises die niederste Ordnung der in (6.13) bzw. (6.51) auftretenden Nichtlinearität  $r = 3$  ist, dann läßt sich anhand der Tabelle 6.3 feststellen, daß die zentrale Mannigfaltigkeit  $h(\Theta, \underline{u}(t))$  in der hier relevanten Ordnung  $\mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right)$  keinen Einfluß auf die Ordnungsgleichungen hat.

$r$	Term $O_1$	Term $O_2O_3$
2	$\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{\frac{3}{2}}$	$\varepsilon^1 + \underbrace{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}_{\text{„h“}}$
3	$\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{\frac{3}{2}}$	$\underbrace{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}_{\text{„h“}} + \varepsilon^{\frac{5}{2}}$

Tabelle 6.3: **Ordnungs-Betrachtung bei einer Hopf-Bifurkation**

Vergleich der niedersten Ordnungen der Terme der rechten Seiten der Gleichungen (6.68). Die unterklammerten Terme rühren für  $r = 2$  vom Einfluß der zentralen Mannigfaltigkeit her und für  $r = 3$  von der zentralen Mannigfaltigkeit und der ersten Ordnung der Normierungskonstanten  $N_{\lambda_u^i}$  des Terms  $O_2$  und der Koeffizienten  $F^{\text{eff}}$  des nichtlinearen Funktionals. Die Umrahmung gibt an, welche Terme für die Bestimmung der Ordnungsparametergleichungen in niederster Ordnung relevant sind.

Dies hat zwei Konsequenzen:

- 1.) Die zentrale Mannigfaltigkeit  $h(\Theta, \underline{u}(t))$  muß nicht bestimmt werden, um die Ordnungsparametergleichungen in niederster Ordnung abzuleiten.
- 2.) Es kann an diesem System in niederster Ordnung nicht überprüft werden, ob der Einfluß der zentralen Mannigfaltigkeit  $h(\Theta, \underline{u}(t))$  durch das auf zeitlich verzögerte Systeme verallgemeinerte Ordnungsparameterkonzept korrekt erfaßt wird.

Für die in diesem Fall  $m = 2$  Ordnungsparametergleichungen ergibt sich damit aus (6.68) mit (6.15), (6.71) und (6.72)

$$\frac{d}{dt}u^i(t) = \lambda_u^i u^i(t) + \frac{RN_{\lambda_u^i}}{6} \left( \sum_{j=1}^m \phi^{\lambda_u^i}(-1)u^j(t) \right)^3. \quad (6.81)$$

Definieren wir nun noch

$$u^\pm(t) = u^{1,2}(t), \quad (6.82)$$

um eine kompaktere Schreibweise zu ermöglichen, dann erhalten wir aus (6.81)

$$\frac{d}{dt}u^\pm(t) = \lambda_u^\pm u^\pm(t) + k_0^\pm u^\pm(t)^3 + k_1^\pm u^\pm(t)^2 u^\mp(t) + k_2^\pm u^\pm(t) u^\mp(t)^2 + k_3^\pm u^\mp(t)^3 \quad (6.83)$$

mit den aus (6.15), (6.25), (6.42), (6.50) und (6.73) berechneten Koeffizienten

$$k_0 = N_{\lambda_u^\pm} F_{111}^{\text{eff}} = N_{\lambda_u^\pm} \frac{R}{6} \left( \phi^{-\lambda_u^\pm}(-1) \right)^3 = N_{\lambda_u^\pm} \frac{R}{6} \left( N_{\lambda_u^\pm} e^{-\lambda_u^\pm} \right)^3$$

$$= -\frac{1}{6R^2} \frac{\lambda_u^{\pm 3}}{(1 + \lambda_u^{\pm})^2}, \quad (6.84)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= N_{\lambda_u^{\pm}} \left( F_{112}^{\text{eff}} + F_{121}^{\text{eff}} + F_{211}^{\text{eff}} \right) = 3N_{\lambda_u^{\pm}} \frac{R}{6} \left( \phi^{-\lambda_u^{\pm}}(-1) \right)^2 \left( \phi^{-\lambda_u^{\mp}}(-1) \right) \\ &= 3N_{\lambda_u^{\pm}} \frac{R}{6} \left( N_{\lambda_u^{\pm}} e^{-\lambda_u^{\pm}} \right)^2 \left( N_{\lambda_u^{\mp}} e^{-\lambda_u^{\mp}} \right) = -\frac{1}{2R^2} \frac{\lambda_u^{\pm 2} \lambda_u^{\mp}}{(1 + \lambda_u^{\pm})^{\frac{3}{2}} (1 + \lambda_u^{\mp})^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (6.85)$$

$$k_2 = N_{\lambda_u^{\pm}} \left( F_{122}^{\text{eff}} + F_{212}^{\text{eff}} + F_{221}^{\text{eff}} \right) = 3N_{\lambda_u^{\pm}} F_{122}^{\text{eff}} = 3N_{\lambda_u^{\pm}} F_{112}^{\text{eff}*}, \quad (6.86)$$

$$k_3 = N_{\lambda_u^{\pm}} F_{222}^{\text{eff}} = N_{\lambda_u^{\pm}} F_{111}^{\text{eff}*}. \quad (6.87)$$

Die  $m = 2$  Gleichungen (6.83) sind zueinander konjugiert komplex und stellen ein nichtlineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen dar, das in der Nähe der Instabilität die Dynamik des Systems (6.12) bzw. (6.13) oder (6.51) vollständig beschreibt. Es enthält keine Retardierungseffekte mehr. Mit Hilfe des Versklavungsprinzips der Synergetik ist es somit gelungen, die mit dem Retardierungseffekt verbundenen unendlich vielen Freiheitsgrade des Systems in der Nähe der Instabilität drastisch zu reduzieren und die „versklavten“ stabilen Moden auf systematische Weise zu eliminieren.

### 6.2.8 Normalform der Ordnungsparametergleichungen

Die Ordnungsparametergleichungen (6.83) können durch eine nichtlineare Variablentransformation auf Normalform gebracht werden. Die in (6.83) auftretenden Potenzen bestimmen dabei die Struktur der Transformation. In Anhang E Abschnitt E.1 wird gezeigt, daß sich durch eine sogenannte „near identity transformation“

$$u^{\pm}(t) = v^{\pm}(t) + \beta_0^{\pm} v^{\pm}(t)^3 + \beta_1^{\pm} v^{\pm}(t)^2 v^{\mp}(t) + \beta_2^{\pm} v^{\pm}(t) v^{\mp}(t)^2 + \beta_3^{\pm} v^{\mp}(t)^3 \quad (6.88)$$

neue Ordnungsparameter  $v^{\pm}(t)$  einführen lassen. Die Koeffizienten  $\beta_0 - \beta_3$  der Transformation (6.88) sollen nun so gewählt werden, daß in den aus (6.83) folgenden neuen Ordnungsparametergleichungen keine kubischen Terme mehr auftreten. Es zeigt sich, daß von diesen nur ein einziger nicht eliminiert werden kann. Dies führt dazu, daß der zugehörige Koeffizient  $\beta_1$  der Transformation (6.88) Null gesetzt werden muß. Für die *Normalform der Hopf-Bifurkation* erhält man daher aus (6.83) mit (6.88)

$$\frac{d}{dt} v^{\pm}(t) = \lambda_u^{\pm}(\varepsilon) v^{\pm}(t) + \mathfrak{b}^{\pm}(\varepsilon) v^{\pm}(t)^2 v^{\mp}(t), \quad (6.89)$$

wobei sich die komplexen Koeffizienten  $\mathfrak{b}^{\pm}$  aus (6.85) wegen (E.15) mit

$$R(\varepsilon) = R_c + \mathcal{O}(\varepsilon^1), \quad (6.90)$$

$$\lambda_u^{\pm}(\varepsilon) = \pm i R_c + \mathcal{O}(\varepsilon^1), \quad (6.91)$$

$$N_{\lambda_u^{\pm}} = \frac{1}{\sqrt{1 \pm i R_c}} + \mathcal{O}(\varepsilon^1) \quad (6.92)$$

$$(6.93)$$

zu

$$\mathfrak{b}^\pm(\varepsilon) = -\frac{R_c^2}{2(1+R_c^2)^{\frac{3}{2}}} \mp i\frac{R_c}{2(1+R_c^2)^{\frac{3}{2}}} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (6.94)$$

berechnen lassen. Dieses Resultat erhält man auch durch die „rotating-wave-approximation“, indem man die zum linearen Term nicht resonanten Terme vernachlässigt. In Abschnitt E.2 wird gezeigt, daß diese naive Näherung jedoch für den Fall quadratischer Terme in den Ordnungsparametergleichungen nicht zum korrekten Ergebnis führt.

Die Normalform (6.89) läßt sich durch den Ansatz

$$v^\pm(t) = r(t)e^{\pm i\varphi(t)} \quad (6.95)$$

auf Polarkoordinaten transformieren mit

$$\frac{d}{dt}r(t) = r(t) \{ \Re(\lambda_u^\pm(\varepsilon)) + \Re(b^\pm(\varepsilon))r(t)^2 \}, \quad (6.96)$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \pm \left\{ \underbrace{\Im(\lambda_u^\pm(\varepsilon))}_1 + \underbrace{\Im(b^\pm(\varepsilon))r(t)^2}_2 \right\}. \quad (6.97)$$

Für die stationäre oszillatorische Lösung ergibt sich also:

$$r_{stat}^2 = -\frac{\Re(\lambda_u^\pm(\varepsilon))}{\Re(b^\pm(\varepsilon))} = 2\sqrt{1+R_c^2}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (6.98)$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = R_c + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (6.99)$$

Anmerkung: Das Verschwinden der Ordnung  $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$  in Gleichung (6.99) liegt daran, daß sich bei diesem System der von den Eigenwerten  $\lambda_u^\pm(\varepsilon)$  herrührende lineare Anteil 1 der Gleichung (6.97) gegen den nichtlinearen Anteil 2 weghebt. Diese spezielle Eigenschaft muß sich natürlich auch in den numerischen Untersuchungen zeigen und stellt somit eine leicht überprüfbare Kontrollmöglichkeit der numerischen Ergebnisse dar.

### 6.2.9 Interpretation im Zustandsraum $\Gamma$

Wie wir bereits in Kapitel 4 erwähnt haben, ist der physikalisch relevante Raum in diesem Fall der skalare Zustandsraum  $\Gamma$  und nicht der erweiterte Zustandsraum  $\mathcal{C}$ . Es verbleibt daher die Aufgabe, die Ergebnisse in  $\Gamma$  darzustellen, da unsere numerischen Untersuchungen ebenfalls nur Aussagen in  $\Gamma$  ermöglichen. Zunächst folgt für den Zustandsvektor  $z_t(\Theta) \in \mathcal{C}$  der stationären oszillatorischen Lösung in der Nähe der Instabilität bei  $R_c = \frac{\pi}{2}$  aus (6.40) mit (6.17), (6.53), (6.55) und (6.64):

$$z_t(\Theta) = \tilde{z}_t(\Theta) = u_t(\Theta) + s_t(\Theta) = \sum_{j=1}^m \phi^{\lambda_u^j}(\Theta)u^j(t) + h(\Theta, \underline{u}(t)). \quad (6.100)$$

Da für die zentrale Mannigfaltigkeit in niederster Ordnung gilt:

$$h(\Theta, \underline{u}(t)) \sim \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right), \quad (6.101)$$

hat sie in der für den Zustandsvektor relevanten niedersten Ordnung  $\mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$  keinen Einfluß und kann daher vernachlässigt werden. Da sich der Zustandsvektor nun näherungsweise als

$$z_t(\Theta) = \sum_{j=1}^m \phi^{\lambda_u^j}(\Theta) u^j(t) \quad (6.102)$$

schreiben läßt, hat dies allerdings die Konsequenz, daß die aus der Verbindung der beiden Räume  $\Gamma$  und  $\mathcal{C}$  (siehe (4.10) und Abb. 4.1) herrührende Bedingung

$$z_t(\Theta) = z(t + \Theta) = z_{t+\Theta}(0) \quad (6.103)$$

verletzt ist. Berücksichtigt man jedoch, daß sich die Ordnungsparameter  $u^\pm(t)$  aufgrund der „near identity transformation“ (6.88) erst in der Ordnung  $\mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right)$  von den neuen Ordnungsparametern  $v^\pm(t)$  unterscheiden und sich daher wegen (6.95) und (6.99) in der Nähe der Instabilität bei  $R_c = \frac{\pi}{2}$  wie  $e^{\lambda_u^\pm t}$  verhalten, dann ist die Bedingung (6.103) näherungsweise erfüllt. Dies stellt aber keine prinzipielle Schwierigkeit dar, da die Ordnungsparametergleichungen (6.89) ohnehin nur in der Nähe der Instabilität gültig sind.

In niederster Ordnung in  $\varepsilon$  erhält man somit für den Zustandsvektor  $z_t(\Theta) \in \mathcal{C}$  aus (6.102) mit (6.42), (6.88), (6.91), (6.92), (6.95), (6.98) und (6.99):

$$z_t(\Theta) = r_{stat} \left( N_{\lambda_u^+} e^{\lambda_u^+ \Theta} e^{i\varphi(t)} + N_{\lambda_u^-} e^{\lambda_u^- \Theta} e^{-i\varphi(t)} \right), \quad (6.104)$$

$$= \sqrt{8} \sqrt{\varepsilon} \cos(R_c(t + \Theta) + \psi + \varphi_0), \quad (6.105)$$

da

$$N_{\lambda_u^\pm} = N e^{\pm i\psi}, \quad (6.106)$$

$$N = |N_{\lambda_u^\pm}| = \frac{1}{\sqrt[4]{1 + R_c^2}}, \quad (6.107)$$

$$r_{stat} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{N}, \quad (6.108)$$

$$\varphi(t) = \Omega(\varepsilon) t + \varphi_0 = (\Omega_0 + \Omega_1 \varepsilon) t + \varphi_0 = R_c t + \varphi_0. \quad (6.109)$$

In niederster Ordnung in  $\varepsilon$  ergibt sich dann für den Zustandsvektor  $z(t) \in \Gamma$  wegen (4.10) letztendlich

$$z(t) = \mathbf{c}_1(\varepsilon) \cos(\varphi(t) + \psi) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right), \quad (6.110)$$

mit

$$c_1(\varepsilon) = \sqrt{8}\sqrt{\varepsilon}. \quad (6.111)$$

(6.110) stellt die oszillatorische Lösung nach der Hopf-Bifurkation dar. In den Koeffizienten  $c_1(\varepsilon)$  geht dabei einerseits die für eine Hopf-Bifurkation typische  $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ -Abhängigkeit des Ordnungsparameters ein und andererseits die systemspezifische Größe  $\sqrt{8}$ , die für dieses System unabhängig vom Kontrollparameter ist.

### 6.3 Numerische Verifikation der Hopf-Bifurkation

Um nun unser analytisches Ergebnis zu überprüfen, haben wir die Delay-Differentialgleichung (6.12) numerisch integriert. Dabei wurde der Kontrollparameter  $R$  des Systems in der Nähe der Instabilität so variiert, daß der Kleinheitsparameter  $\varepsilon = \frac{R-R_c}{R_c}$  200 verschiedene, äquidistante Werte zwischen  $10^{-5}$  und  $10^{-1}$  annahm. Als Integrationsverfahren wurde das in Abschnitt C.2.3 erwähnte Runge-Kutta-Verner Verfahren der *IMSL*-Bibliothek mit linearer Interpolation der Zwischenwerte verwendet. Die Schrittweite betrug  $10^{-3}s$ . Um transientes Verhalten auszuschließen, wurde das System für jeden Wert des Kontrollparameters zunächst  $10^6$  mal iteriert<sup>4</sup>. Anschließend wurde anhand des durch eine komplexe *FFT* gewonnenen Powerspektrums mit entsprechend hoher Auflösung die Grundfrequenz  $\Omega$  der oszillatorischen Lösung bestimmt, um dann an genau einer Periode des simulierten Signals eine reelle *FFT* durchzuführen. Die reelle Fouriertransformation ist wie folgt definiert:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\Omega t) + b_k \sin(k\Omega t)) \quad (6.112)$$

mit

$$f(t) = f(t + T), \quad (6.113)$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (6.114)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) \cos(k\Omega t) \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}_0, \quad (6.115)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) \sin(k\Omega t) \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}. \quad (6.116)$$

$$(6.117)$$

In der Spektraldarstellung erhält man daraus

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\Omega t + \phi_k) \quad (6.118)$$

---

<sup>4</sup>Wegen des Phänomens des kritischen Langsamerwerdens (siehe Abschnitt 3.3) ist dies vor allem für die Kontrollparameterwerte nahe der Instabilität notwendig.

wobei

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad (6.119)$$

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad (6.120)$$

$$\phi_k = -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right). \quad (6.121)$$

Berücksichtigt man nun, daß sich die Gleichung (6.110) als Spezialfall der allgemeinen Darstellung des Zustandsvektors der oszillatorischen Lösung

$$z(t) = c_0(\varepsilon) + c_1(\varepsilon) \cos(\Omega(\varepsilon)t + \psi_1) + c_2(\varepsilon) \cos(2\Omega(\varepsilon)t + \psi_2) + \dots \quad (6.122)$$

mit

$$c_0(\varepsilon) = 0, \quad (6.123)$$

$$c_1(\varepsilon) = \sqrt{8}\sqrt{\varepsilon}, \quad (6.124)$$

$$c_2(\varepsilon) = 0, \quad (6.125)$$

$$\Omega(\varepsilon) = (\Omega_0 + \Omega_1\varepsilon)t = R_c t \quad (6.126)$$

interpretiert werden kann, dann wird der Zusammenhang mit der Frequenz  $\Omega$  und den Fourierkoeffizienten  $c_0 - c_2$  der Spektraldarstellung (6.118) deutlich. Bei der in Gleichung (6.122) auftretenden Frequenz  $\Omega(\varepsilon)$  beziehungsweise den Koeffizienten  $c_0(\varepsilon) - c_2(\varepsilon)$  handelt es sich offensichtlich um die niedersten Ordnungen der entsprechenden Frequenz  $\Omega$  beziehungsweise der Fourierkoeffizienten  $c_0 - c_2$  der Spektraldarstellung (6.118). Sie können daher aus diesen bestimmt werden.

Die folgenden Tabelle 6.4 gibt die bei unseren analytischen Auswertungen auftretenden Ordnungen der Frequenz  $\Omega(\varepsilon)$  sowie der Koeffizienten  $c_0(\varepsilon) - c_2(\varepsilon)$  des Zustandsvektors (6.122) wieder.

Größe	auftretende Ordnungen
$\Omega(\varepsilon)$	$\mathcal{O}(\varepsilon^0), \mathcal{O}(\varepsilon^1)$
$c_0(\varepsilon)$	$\mathcal{O}(\varepsilon^0), \mathcal{O}(\varepsilon^1)$
$c_1(\varepsilon)$	$\mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$
$c_2(\varepsilon)$	$\mathcal{O}(\varepsilon^1)$

Tabelle 6.4: **Ordnungs-Betrachtung beim Zustandsvektor**

*In der allgemeinen Darstellung (6.122) des Zustandsvektors  $z(t) \in \Gamma$  der oszillatorischen Lösung nach der Hopf-Bifurkation treten die Frequenz  $\Omega(\varepsilon)$  sowie die Koeffizienten  $c_0(\varepsilon) - c_2(\varepsilon)$  auf. Die Tabelle enthält die möglichen auftretenden Ordnungen dieser Größen.*

In der folgenden Abbildung 6.4 sind die Fourierkoeffizienten  $c_0 - c_2$  der Spektraldarstellung zusammen mit der über das Powerspektrum ermittelten Frequenz  $\Omega$  in Abhängigkeit des Kleinheitsparameters  $\varepsilon$  aufgetragen. Trägt man den Koeffizient  $c_1$  doppelt-logarithmisch auf, dann sollte sich aufgrund der für die Hopf-Bifurkation typischen  $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ -Abhängigkeit des Koeffizienten  $c_1(\varepsilon)$  für kleine Werte von  $\varepsilon$  eine Gerade mit der Steigung  $\frac{1}{2}$  ergeben, wobei der Achsenabschnitt dem Logarithmus der systemspezifischen Größe entspricht (siehe Gl. (6.111)).

Abbildung 6.4: **Numerische Analyse der Hopf-Bifurkation**

*Dargestellt sind die Frequenz  $\Omega$  und die mit Hilfe einer reellen FFT gewonnenen Koeffizienten  $c_0 - c_2$  der oszillatorischen Lösung des zeitlich verzögerten Phasenregelkreises nach der Hopf-Bifurkation in Abhängigkeit vom Kleinheitsparameter  $\varepsilon = \frac{R-R_c}{R_c}$ . Dabei wurde das Intervall des Kleinheitsparameters  $[10^{-5}, 10^{-1}]$  in 200 äquidistante Teilintervalle unterteilt.*

Bei unseren Auswertungen zeigten sich erwartungsgemäß sowohl für relativ kleine  $\varepsilon$ -Werte als auch für relativ große  $\varepsilon$ -Werte stets kleine Abweichungen von einer perfekten Geraden. Diese rühren für kleine  $\varepsilon$ -Werte von dem in Kapitel 3 erwähnten Phänomen des critical slowing down her – das System verharrt immer länger im transienten Zustand, je näher man sich der Instabilität nähert. Da wir uns der Instabilität bei unseren Auswertungen aus dem Bereich des Kontrollparameterraumes nähern, bei dem die oszillatorische Lösung bereits existiert, ist klar, daß das System eine immer größer werdende Zeitdauer benötigt, um den Grenzzyklus zu „erreichen“. Dies gilt umso mehr, da sich der Radius des Grenzzyklus mit kleiner werdendem  $\varepsilon$



auch verkleinert und wir die Anfangsbedingung stets gleich gewählt haben. Für kleine  $\varepsilon$ -Werte werden die Auswertungen also stets eine zu kleine Steigung und einen zu großen Achsenabschnitt ergeben. Für große  $\varepsilon$ -Werte dagegen macht sich der Einfluß der höheren Ordnungen bemerkbar und die Ergebnisse werden ebenfalls verfälscht. Wir haben daher bei unseren Auswertungen als untere Grenze für  $\varepsilon$  den Wert  $10^{-5}$  und als obere den Wert  $10^{-1}$  gewählt. Außerdem verwendeten wir unser Vorwissen über die Hopf-Bifurkation und ermittelten diejenige, durch 10 aufeinanderfolgende  $\varepsilon$ -Werte bestimmte Ausgleichsgerade, deren Steigung die kleinste Abweichung vom erwarteten Wert  $\frac{1}{2}$  aufweist. Die Frequenz  $\Omega(\varepsilon)$  und die beiden übrigen Koeffizienten  $c_0(\varepsilon)$  und  $c_2(\varepsilon)$  der allgemeinen Darstellung (6.122) haben wir dann durch Ausgleichsgeraden im selben  $\varepsilon$ -Bereich bestimmt. Der Vergleich der auf diese Weise gewonnenen numerischen Ergebnisse mit unseren analytischen ist in der folgenden Tabelle 6.5 zusammengestellt. Wir weisen an dieser Stelle noch einmal explizit darauf hin, daß die numerischen Werte für den Koeffizienten  $c_1(\varepsilon)$  aus der doppelt-logarithmischen Darstellung gewonnen wurden und nicht aus der in Abbildung 6.4 eingezeichneten Kurve. Auf einen Vergleich der in (6.110) beziehungsweise (6.122) auftretenden Phasen haben wir verzichtet, da diese abhängig von der Anfangsbedingung und der Zahl der Iterationen sind.

untersuchte Größe	analytische Ausdrücke		Wert		numerisches Resultat	
	Abschnitt	Steigung	Abschnitt	Steigung	Abschnitt	Steigung
$\Omega(\varepsilon)$	$R_c$	0	1.5708	0.0	1.5708	$10^{-8}$
$c_0(\varepsilon)$	0	0	0.0	0.0	$-3 \cdot 10^{-4}$	$-2 \cdot 10^{-3}$
$c_1(\varepsilon)$	$\sqrt{8}$	$\frac{1}{2}$	2.8284	0.5	2.817	0.4999
$c_2(\varepsilon)$	0	0	0.0	0.0	$2 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 6.5: **Vergleich der analytischen und numerischen Resultate**

*In der Tabelle sind die sich aus der analytischen und numerischen Untersuchung ergebenden Werte für die Frequenz  $\Omega(\varepsilon)$  und die Koeffizienten  $c_0(\varepsilon) - c_2(\varepsilon)$  der oszillatorischen Lösung (6.110) beziehungsweise (6.122) zusammengestellt.*

Die sehr gute Übereinstimmung der analytischen und numerischen Werte in Tabelle 6.5 bestätigt die Erweiterung der Methodik der Synergetik auf zeitlich verzögerte Systeme. An dieser Stelle muß allerdings darauf hingewiesen werden, daß streng genommen nur das Ordnungsparameterkonzept der Synergetik bestätigt ist, da bei diesem System die zentrale Mannigfaltigkeit  $h(\Theta, \underline{u}(t))$  (siehe (6.64) und (6.70)) in niederster Ordnung keinen Einfluß auf die Ordnungsparametergleichungen hat (siehe Gl. (6.81)). Die zirkuläre Kausalkette (vgl. Abb. 3.7) ist hier also nicht geschlossen. Durch Vergleich der analytischen Ergebnisse mit unseren numerischen

Untersuchungen der Kapitel 7 und 8 werden wir dann entscheiden können, ob der Einfluß der zentralen Mannigfaltigkeit ebenfalls richtig erfaßt wird und somit die Erweiterung der Methodik der Synergetik auf zeitlich verzögerte Systeme in diesem Sinn vollständig ist.

## 6.4 Weitergehende numerische Untersuchungen

Wie bereits in Kapitel 3 erwähnt, lassen sich im Rahmen des allgemeinen synergetischen Konzepts prinzipiell auch Instabilitäten komplizierterer Referenzzustände analytisch untersuchen. Dazu müssen die Referenzzustände allerdings analytisch bekannt sein oder in approximativer Form im Rahmen einer Störungstheorie vorliegen. Auf die analytische Untersuchung der zweiten oszillatorischen Instabilität dieses Systems, die zu einer Verallgemeinerung der Floquet-Theorie für zeitlich verzögerte Systeme führt, werden wir hier nicht näher eingehen, verweisen in diesem Zusammenhang aber auf [152], [154], [153].

Systeme mit zeitlicher Verzögerung können im Gegensatz zu gewöhnlichen dynamischen Systemen schon im skalaren Fall eine äußerst komplizierte Dynamik aufweisen. Dabei ist die in der Bewegungsgleichung auftretende Nichtlinearität entscheidend für das mögliche dynamische Verhalten des Systems. So konnte in [5] gezeigt werden, daß chaotisches Verhalten nur auftreten kann, falls die Nichtlinearität vom gemischten Typ ist, also weder strikt monoton fällt noch strikt monoton wächst.

Anmerkung: Sowohl beim Mackey-Glass-System [52]

$$\frac{d}{dt}z(t) = \frac{az(t-\tau)}{1+z(t-\tau)^c} - bz(t), \quad (6.127)$$

mit

$$a = 0.2, \quad b = 0.1, \quad c = 10.0,$$

als auch bei einem von uns generierten Test-System

$$\frac{d}{dt}z(t) = \begin{cases} az(t-\tau) & \text{für } z(t-\tau) < z_1, \\ ce^{-d(z(t-\tau)-z_2)^2} & \text{für } z(t-\tau) \geq z_1, \end{cases} \quad (6.128)$$

mit

$$\begin{aligned} c &= az_1 e^{\frac{z_2-z_1}{2z_1}}, \\ d &= \frac{1}{2z_1(z_2-z_1)}, \\ a &= 0.2, \quad b = 0.1, \quad z_1 = 20.0, \quad z_2 = 22.0, \end{aligned}$$

und dem in [164] aufgestellten physiologischen Modellsystem konnten wir außer chaotischem Verhalten auch die zuerst von Farmer [34] (siehe auch [15]) entdeckte Zunahme der Lyapunov-Dimension  $D_L$  mit der Zeitverzögerung  $\tau$  mit einer von den Parametern abhängigen, charakteristischen linearen Einhüllenden feststellen (siehe die Abbn. 6.14 **a** – **d**)).

Die Ergebnisse unserer numerischen Untersuchungen am zeitlich verzögerten Phasenregelkreis werden wir nun in tabellarischer Form darstellen. Die Simulationen wurden dabei im Zustandsraum  $\Gamma$  durchgeführt. Um die Ergebnisse zu überprüfen, wurden mehrere der in Anhang C vorgestellten Integrationsverfahren und verschiedene Diskretisierungen verwendet.

$$0 < R \leq R_c = \frac{\pi}{2}:$$

Die stationären Zustände (6.16)

$$z_{stat} = l\pi, \quad \text{mit } l \in \mathbb{Z},$$

sind für gerade  $l$  stabil und für ungerade  $l$  instabil. Bis  $R \approx 4.9$  können wir uns stellvertretend auf das Intervall  $[-\pi, \pi]$  beschränken.

### **$R = R_c$ : 1. Instabilität**

Es tritt eine Hopf-Bifurkation auf (siehe die Abschnitte 6.2.8 und 6.3).

$$R_c < R \lesssim 3.77:$$

Die durch die Hopf-Bifurkation bei  $R = R_c$  entstehende oszillatorische Lösung ist stabil. Der Grenzyklus im  $\dot{z}-z$ -Phasenportrait zeigt eine auffällige Punktsymmetrie bezüglich des Ursprungs (siehe Abb. 6.5 **a**)). Je größer der Kontrollparameter  $R$  ist, umso stärker wird der Einfluß der höheren Harmonischen der Hopf-Frequenz  $\Omega(\varepsilon)$  (siehe die Abbn. 6.6 **a**), **b**)). Damit geht eine zunehmende Verformung des Grenzyklus einher, die aber die Punktsymmetrie des Grenzyklus nicht zerstört (siehe Abb. 6.5 **b**)).

### **$R \approx 3.77$ : 2. Instabilität**

Hier ist eine Aufspaltung des stabilen Grenzyklus in zwei koexistierende stabile Grenzyklen festzustellen, die nun keine Punktsymmetrie mehr aufweisen. Es tritt eine Symmetriebrechung auf. Die beiden Grenzyklen können durch Punktspiegelung am Ursprung ineinander überführt werden und bleiben bis  $R \approx 4.9$  stabil.

$$3.77 \lesssim R \lesssim 4.105:$$

Der Einfluß der höheren Harmonischen nimmt weiter zu, was zu einer weiteren Deformation der beiden Grenzyklen führt (siehe Abb. 6.5 **d**)). In Abbildung 6.5 **c**) ist das transiente Verhalten für drei konstante Anfangsbedingungen  $-1$  (gestrichelt),

1 (gepunktet), und 2 (durchgezogen) dargestellt. Man erkennt, daß das System für die Anfangsbedingungen  $-1$  und  $1$  sehr schnell die beiden stabilen Grenzzyklen „erreicht“, während dies bei der Anfangsbedingung  $2$  länger dauert. Die transiente Trajektorie zur Anfangsbedingung  $2$  unterliegt zunächst dem Einfluß eines weiteren, bei diesem Kontrollparameterwert noch instabilen Grenzzyklus.

### **$R \approx 4.105$ : 3. Instabilität**

Der bereits erwähnte neue Grenzzyklus wird stabil. Er ist ebenfalls punktsymmetrisch zum Ursprung und koexistiert mit den beiden anderen stabilen Grenzzyklen (siehe Abb. 6.5 e)).

### **$R \approx 4.11$ : 4. Instabilität**

Hier ist eine erneute Aufspaltung festzustellen. Aus dem bei  $R \approx 4.105$  entstehenden stabilen Grenzzyklus gehen zwei koexistierende stabile Grenzzyklen hervor, die nun keine Punktsymmetrie mehr aufweisen. Auch diese beiden Grenzzyklen können aber durch Punktspiegelung am Ursprung ineinander überführt werden (siehe Abb. 6.5 f)).

Anmerkung: Unsere Untersuchungen mit 50 zufällig gewählten konstanten Anfangsbedingungen ergaben keine Hinweise auf weitere stabile Attraktoren in diesem Bereich des Parameterraums. Die Einzugsgebiete der Attraktoren wurden jedoch nicht bestimmt.

### **$4.11 \lesssim R \lesssim 4.165$ :**

Das Periodenverdopplungs-Szenario der beiden bei  $R \approx 4.11$  durch Aufspaltung entstehende Grenzzyklen beginnt (siehe hierzu auch [4]). Dargestellt ist dies für den Grenzzyklus, der sich aus der konstanten Anfangsbedingung  $2$  ergibt (siehe Abb. 6.7 a) und das zugehörige Powerspektrum Abb. 6.8 a)) Die ersten kritischen Werte  $R_0, R_1, \dots, R_7$  und die sich daraus ergebenden Werte für die Skalierungskonstante im Parameterraum sind in der Tabelle 6.6 zusammengestellt. Mit Hilfe der Skalierungskonstanten läßt sich dann auch der Wert für  $R_\infty$  abschätzen. Wir erhalten  $R_\infty \approx 4.173961$ , was in guter Übereinstimmung mit dem durch die Lyapunov-Exponenten numerisch bestimmten Wert  $4.1739$  ist.

### **$R = R_0$ : 5.1. Instabilität**

Es tritt die erste Periodenverdopplung auf (siehe Abb. 6.7 b) und das zugehörige Powerspektrum Abb. 6.8 b)).

### **$R = R_1$ : 5.2. Instabilität**

Hier tritt die zweite Periodenverdopplung auf (siehe Abb. 6.7 c) und das zugehörige Powerspektrum Abb. 6.8 c)).

**$R = R_2$ : 5.3. Instabilität**

Die dritte Periodenverdopplung tritt auf (siehe Abb. 6.7 **d**) und das zugehörige Powerspektrum Abb. 6.8 **d**)).

 **$R = R_\infty$ : 5.∞. Instabilität**

Hier endet des Periodenverdopplungs-Szenarios. Mit Hilfe des in Kapitel 5 beschriebenen und in Anhang D auf zeitlich verzögerte Systeme erweiterten Konzepts der Lyapunov-Exponenten haben wir dieses genauer untersucht. Abbildung 6.9 **a**) zeigt die beiden größten der abzählbar unendlich vielen Lyapunov-Exponenten des zeitlich verzögerten Phasenregelkreises für das Intervall  $[4.15, 4.25]$  des effektiven Kontrollparameters  $R$  und Abbildung 6.9 **b**) einen vergrößerten Ausschnitt. Ein Lyapunov-Exponent ist immer Null, wie es für oszillatorisches Verhalten sein muß (vgl. Tabelle 5.1). Die Nullstellen des zweiten bestimmen die Instabilitäten und damit die kritischen Kontrollparameterwerte  $R_0, R_1, \dots, R_\infty$ , für die Periodenverdopplungen festzustellen sind. In der Tabelle 6.6 sind, wie bereits erwähnt, die ersten kritischen Kontrollparameterwerte und die sich daraus ergebenden Werte  $\delta_n$  für die Skalierungskonstante im Parameterraum<sup>5</sup> zusammengestellt. Diese deuten darauf hin, daß sich für den zeitlich verzögerten Phasenregelkreis im Parameterraum dieselbe Skalierungskonstante  $\delta \approx 4.669$  ergibt wie im Fall der eindimensionalen zeitdiskreten logistischen Abbildung (siehe A.7 und die Tabellen A.1, A.2 und A.3). Dies kann mit dem Schrumpfen eines Volumenelementes im Zustandsraum dissipativer dynamischer Systeme zusammenhängen, das dazu führt, daß die asymptotische Dynamik gewissermaßen auf einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit stattfindet<sup>5</sup> [108], [109].

$n$	Parameter $R_n$	Periode vor der Bifurkation	$\delta_n = \frac{R_{n-1}-R_n}{R_n-R_{n+1}}$
0	$4.158 \pm 5 \cdot 10^{-5}$	1	—
1	$4.1705 \pm 5 \cdot 10^{-5}$	2	$4.63 \pm 2 \cdot 10^{-1}$
2	$4.1732 \pm 5 \cdot 10^{-5}$	4	$4.49 \pm 5 \cdot 10^{-1}$
3	$4.173802 \pm 5 \cdot 10^{-7}$	8	$4.81 \pm 4 \cdot 10^{-1}$
4	$4.1739272 \pm 2 \cdot 10^{-7}$	16	$4.76 \pm 10^{-1}$
5	$4.1739535 \pm 2.5 \cdot 10^{-7}$	32	$4.46 \pm 3 \cdot 10^{-1}$
6	$4.1739594 \pm 5 \cdot 10^{-8}$	64	$4.72 \pm 4 \cdot 10^{-1}$
7	$4.17396065 \pm 2.5 \cdot 10^{-8}$	128	—

Tabelle 6.6: **Bifurkationspunkte des Periodenverdopplungs-Szenarios**

Dargestellt sind die ersten kritischen Parameterwerte  $R_n$  der Bifurkationspunkte des Periodenverdopplungs-Szenarios und die daraus ermittelten Werte  $\delta_n$ . Die  $R_n$ -Werte entsprechen den Nullstellen des Lyapunov-Exponenten vor dem chaotischen Regime (siehe Abb. 6.9 und vergleiche hierzu auch die Tabellen A.1 und A.3).

<sup>5</sup>Siehe hierzu die Anmerkungen A1 und A2 auf S. 155 des Abschnitts A.1.2.

### $R_\infty < R \lesssim 4.24$ : Chaotisches Regime I

In Abbildung 6.9 **a)** sind in diesem Bereich des Parameterraums mindestens drei periodische Fenster bei  $R \approx 4.196$ ,  $R \approx 4.21$  und  $R \approx 4.23$  zu erkennen (siehe hierzu auch [168]).

Anmerkung: Da die Lyapunov-Exponenten keine stetigen Funktionen des Kontrollparameters sind, können „Ausreißer“ auftreten, die nicht von einem periodischen Fenster herrühren. Bei einer schlechten Auflösung kann dann die Fehlinterpretation eines periodischen Fensters resultieren. In Abbildung 6.9 **a)** könnte dies beispielsweise bei  $R \approx 4.23$  der Fall sein. Unsere Simulationen zeigen jedoch in diesem Bereich tatsächlich oszillatorisches Verhalten, weshalb es sich hier tatsächlich um ein periodisches Fenster handelt. Die Fehlinterpretation läßt sich natürlich vermeiden, wenn man die Berechnung der Lyapunov-Exponenten mit einer feineren Unterteilung des Parameterraums durchführt. Aufgrund des numerischen Aufwands ist dies jedoch selbst bei diesem einfachen System nicht für den gesamten Parameterraum möglich.

Der bei  $R = R_\infty$  entstehende beschränkte chaotische Attraktor beziehungsweise die in den periodischen Fenstern vorhandenen oszillatorischen Lösungen koexistieren also in diesem Intervall des Kontrollparameters mit den beiden bei  $R \approx 3.77$  entstehenden Grenzzyklen (siehe die Abbn. 6.10 **a)** – **e)**). Da wir wegen des numerischen Aufwands nicht alle periodischen Fenster erfassen können, verzichten wir im folgenden auf eine weitere Numerierung der Instabilitäten.

### $4.2095 \lesssim R \lesssim 4.213$ : Periodisches Fenster

Dieses periodische Fenster haben wir als einziges genauer untersucht.

- ▶ Bei  $R \approx 4.2095$  entsteht ein Grenzzyklus der Periode 3 (siehe Abb. 6.10 **b)** und das zugehörige Powerspektrum Abb. 6.11 **b)**).
- ▶ Ausgehend von dem bei  $R \approx 4.2095$  entstehenden Grenzzyklus der Periode 3 beginnt bei  $R \approx 4.2115$  ein Periodenverdopplungs-Szenario (siehe Abb. 6.10 **c)** und das zugehörige Powerspektrum Abb. 6.11 **c)**).
- ▶ Bei  $R \approx 4.213$  existiert wieder ein beschränkter chaotischer Attraktor (siehe Abb. 6.10 **d)** und das zugehörige Powerspektrum Abb. 6.11 **d)**). Im Unterschied zum Spektrum des chaotischen Attraktors bei  $R = 4.24$  (siehe Abb. 6.10 **e)** und das zugehörige Powerspektrum Abb. 6.11 **e)**) ist dem Spektrum des Attraktors bei  $R \approx 4.213$  sehr deutlich die Struktur der oszillatorischen Lösung der Periode 3 aufgeprägt.

**$R \approx 4.2405$ : Instabilität**

Durch eine globale Bifurkation (vgl. Abschnitt 7.4 und Abschnitt 8.4) oder durch einen Übergang via transientem Chaos<sup>6</sup> endet das chaotische Regime bei  $R \gtrsim 4.24$ .

 **$4.2405 \lesssim R \lesssim 4.85$ :**

In diesem Bereich koexistieren lediglich die beiden bei  $R \approx 3.77$  entstehenden Grenzzyklen (siehe Abbn. 6.10 *f*), 6.12 *a*) und die zugehörigen Powerspektren Abbn. 6.11 *f*), 6.12 *a*)).

 **$R \approx 4.85$ : Instabilität**

Es entstehen zwei neue koexistierende Grenzzyklen der Periode 2.

 **$4.85 \lesssim R \lesssim 4.90$ :**

In Abbildung 6.12 *b*) ist einer der beiden bei  $R \approx 4.85$  entstehenden Grenzzyklen zusammen mit den bei  $R \approx 3.77$  entstehenden immer noch stabilen Grenzzyklen dargestellt und in Abbildung 6.13 *a*) beziehungsweise *b*) die zugehörigen Powerspektren.

 **$R \approx 4.90$ : Instabilität**

Bis zu diesem Wert des Kontrollparameters  $R$  ist der Zustandsraum  $\Gamma$  in unendlich viele separate Teilräume  $[(l-1)\pi, (l+1)\pi]$ ,  $l \in \mathbb{N}$  unterteilt. In jedem dieser Teilräume findet das bisher beschriebene dynamische Gesamtszenario statt. Bei  $R \approx 4.9$  kommt es erstmals zu einer Verbindung der separaten Teilräume, wodurch schließlich ein völlig neues dynamisches Verhalten möglich wird.

 **$4.90 \lesssim R \lesssim 5.30$ :**

In diesem Bereich existieren sowohl stabile Grenzzyklen der Periode 1, als auch der Periode 2 in verschiedenen Teilräumen, obwohl die konstanten Anfangsbedingungen  $-2$ ,  $-1$ ,  $1$  und  $2$  aus dem Teilraum  $[-\pi, \pi]$  gewählt wurden. (siehe Abbn. 6.12 *c*), *d*)). Die transiente Dynamik kann sich also über mehrere Teilräume erstrecken, die asymptotische Dynamik bleibt jedoch auf einen Teilraum beschränkt.

 **$R \approx 5.30$ : Instabilität**

Bei diesem Wert des Kontrollparameters  $R$  tritt schließlich die letzte durch unsere Untersuchungen nachgewiesene Instabilität auf. Es findet erneut ein Übergang zu chaotischem Verhalten statt. Die Dynamik ist jedoch nicht mehr auf einen Teilraum des Zustandsraums  $\Gamma$  beschränkt. Die Dynamik des Systems verläuft eine gewisse Zeit in einem Teilraum und bewegt sich dann in den nächsten weiter, dabei ist die

---

<sup>6</sup>Welche der beiden Alternativen tatsächlich zutrifft, kann nur durch weitere numerische Untersuchungen entschieden werden.

Aufenthaltsdauer in einem Teilraum unbestimmt und von Teilraum zu Teilraum verschieden. Diese Dynamik bezeichnet man als *phase slipping* oder *cycle slipping*. Sie ist in den Abbildungen 6.12 **e**) und **f**) dargestellt. Da der Zustandsvektor  $z(t)$  im Zustandsraum  $\Gamma$  durch (6.9) definiert ist und daher wegen (6.6) letztlich eine Phasendifferenz darstellt, bedeutet diese Dynamik, daß die eine Phase von der anderen überholt wird.

### 5.30 $\lesssim R$ :

Unsere Untersuchungen deuten darauf hin, daß das „phase slipping“-Verhalten für Werte des Kontrollparameters  $R \gtrsim 5.30$  die einzige stabile Dynamik ist. Berechnet man die Lyapunov-Dimension  $D_L$  dieser Dynamik als Funktion des Kontrollparameters  $R$ , dann stellt man fest, daß sich die bereits erwähnte lineare Einhüllende ergibt. Die Lyapunov-Dimension  $D_L$  hängt also im wesentlichen linear vom effektiven Kontrollparameter und damit wegen (6.11) von der Verzögerungszeit  $\tau$  ab (siehe Abb. 6.14 **a**)).

Anmerkung: Die Abhängigkeit der Lyapunov-Dimension  $D_L$  von der Verzögerungszeit  $\tau$  mit der linearen Einhüllenden ist jedoch nicht auf Attraktoren dieses Typs beschränkt. So zeigen das Mackey-Glass-System (6.127) und unser Test-System (6.128) ebenfalls dieses Verhalten (siehe die Abbn. 6.14 **b**) und **c**)), obwohl der zugrundeliegende Attraktor in diesen beiden Fällen beschränkt ist.



Abbildung 6.5: *Numerische Analyse I: Grenzyklen*

*Beschreibung siehe S. 105*

Abbildung 6.6: **Numerische Analyse I: Powerspektren**

Dargestellt sind die Powerspektren der oszillatorischen Lösungen für die Kontrollparameterwerte  $R = 2.00$  **a**),  $R = 3.50$  **b**) und  $R = 4.105$  (gestrichelter oder gepunkteter Grenzzyklus aus Abb. 6.5 **e**)) **c**) (durchgezogener Grenzzyklus aus Abb. 6.5 **e**)) **d**).

Abbildung 6.7:

**Numerische Analyse II: Periodenverdopplungs-Szenario (Grenzzyklen)**

*Dargestellt sind vier Grenzzyklen mit den Perioden 1 a), 2 b), 4 c) und 8 d) des Periodenverdopplungs-Szenarios einer der beiden bei  $R \approx 4.11$  entstehenden Grenzzyklen (siehe Abb. 6.5 f)).*

Abbildung 6.8:

**Numerische Analyse II: Periodenverdopplungs-Szenario (Powerspektren)**

*Dargestellt sind die zu Abb. 6.7 gehörenden Powerspektren. Periode 1 a), Periode 2 b), Periode 4 c), Periode 8 d)*

Abbildung 6.9:

**Numerische Analyse III: Periodenverdopplungs-Szenario (Lyapunov-Exponenten)**

Dargestellt sind die beiden größten Lyapunov-Exponenten der Attraktoren des Periodenverdopplungs-Szenarios im Intervall  $[4.15, 4.25]$  des effektiven Kontrollparameters  $R$  **a)** und ein vergrößerter Ausschnitt **b)**. Die Lyapunov-Exponenten wurden dabei mit dem in Anhang D beschriebenen Verfahren numerisch bestimmt. Wie bei den Abbildungen A.1, 5.2, 5.6, A.2, A.3 und A.4 ist die selbstähnliche Struktur der Spitzen und das damit verbundene charakteristische Skalierungsverhalten deutlich zu erkennen. Außerdem erkennt man bei  $R \approx 4.196$ ,  $R \approx 4.21$  und  $R \approx 4.23$  die erwähnten periodischen Fenster im chaotischen Regime.

Abbildung 6.10: *Numerische Analyse IV: Chaotisches Regime I*  
*Beschreibung siehe S. 105*

Abbildung 6.11: *Numerische Analyse IV: Powerspektren*

*Dargestellt sind die zu Abb. 6.10 gehörenden Powerspektren.*

Abbildung 6.12: *Numerische Analyse V: Chaotisches Regime II*  
*Beschreibung siehe S. 105*



Abbildung 6.13: **Numerische Analyse V: Powerspektren**

Dargestellt sind die zu Abb. 6.12 gehörenden Powerspektren. Bei  $R = 4.88$  für die oszillatorischen Lösungen der Periode 1 (**a**) und 2 (**b**). Für  $R = 6.0$  wurde das Powerspektrum sowohl linear-logarithmisch **c**) als auch doppeltlogarithmisch **d**) dargestellt. In Abb. **d**) ist deutlich zu erkennen, daß die numerischen Simulationen das experimentell nachgewiesene  $\frac{1}{f}$ -Verhalten nicht aufweisen und daher das Modell verbessert werden muß.

Abbildung 6.14: **Lyapunov-Dimensionen**

Dargestellt sind die aus den Lyapunov-Exponenten berechneten Lyapunov-Dimensionen  $D_L$  des zeitlich verzögerten Phasenregelkreises (6.12) als Funktion des effektiven Kontrollparameters  $R$  **a)** sowie des Mackey-Glass-Systems (6.127) **b)**, des Test-Systems (6.128) **c)** und des in [164] aufgestellten physiologischen Systems **d)** als Funktion der Zeitverzögerung  $\tau$ . In allen Fällen ist die lineare Einhüllende deutlich zu erkennen.

**Zu Abb. 6.5: A:  $\hat{=}$  asymptotisches Verhalten T:  $\hat{=}$  transientes Verhalten**

- a) (A) Dargestellt ist der durch die Hopf-Bifurkation entstehende Grenzzyklus mit Punktsymmetrie bezüglich des Ursprungs.
- b) (A) Der Einfluß der höheren Harmonischen führt zu einer Verformung des Grenzzyklus aber nicht zur Zerstörung der Punktsymmetrie.
- c) (T) Für die beiden Anfangsbedingungen  $-1$  und  $1$  läuft das System sehr schnell auf die stabilen Grenzzyklen zu. Für die Anfangsbedingung  $2$  ist zunächst der Einfluß des hier noch instabilen weiteren Grenzzyklus deutlich erkennbar.
- d) (A) Dargestellt sind die beiden bei  $R \approx 3.77$  durch Aufspaltung entstehenden, zueinander punktsymmetrischen stabilen Grenzzyklen.
- e) (A) Abgebildet sind die drei koexistierenden Grenzzyklen. Der neue Grenzzyklus ist punktsymmetrisch zum Ursprung.
- f) (A) Zu sehen sind die bei  $R \approx 3.77$  und  $R \approx 4.11$  jeweils durch Aufspaltung eines einzelnen Grenzzyklus entstehenden vier stabilen Grenzzyklen.

**Zu Abb. 6.10:**

- a) Dargestellt ist der durch das Periodenverdopplungs-Szenario entstehende beschränkte chaotische Attraktor.
- b) Oszillatorische Lösung der Periode 3
- c) Beginn eines weiteren Periodenverdopplungs-Szenarios, die oszillatorische Lösung hat daher die Periode  $3 \cdot 2$ . Dies ist nur im zugehörigen Powerspektrum zu erkennen (siehe Abb. 6.11 c)).
- d) Beschränkter chaotischer Attraktor nach dem Periodenverdopplungs-Szenario in diesem Fenster. Dem zugehörigen Powerspektrum in Abb. 6.11 d) ist noch deutlich die Frequenz der oszillatorischen Lösung der Periode 3 aufgeprägt.
- e) Dieser beschränkte chaotische Attraktor hat die von der oszillatorischen Lösung der Periode 3 herrührende Struktur fast vollständig verloren.
- f) Dargestellt sind die beiden bei  $R \approx 3.77$  entstehenden Grenzzyklen. Sie sind in diesem Bereich wieder die einzig stabilen Attraktoren.

**Zu Abb. 6.12:**

- a) Dargestellt sind die beiden bei  $R \approx 3.77$  entstehenden Grenzzyklen. Sie sind in diesem Bereich die einzig stabilen Attraktoren.
- b) Einer der beiden bei  $R \approx 4.85$  entstehenden koexistierenden Grenzzyklen der Periode 2 ist zusätzlich dargestellt.
- c), d) Die vier unterschiedlichen Anfangsbedingungen führen zu oszillatorischen Lösungen der Periode 2. Diese liegen aber nicht mehr alle im Intervall  $[-\pi, \pi]$ .
- e), f) Dargestellt ist das bei  $R \approx 5.3$  erstmals auftretende „phase slipping“-Verhalten. Der zugehörige Attraktor ist nicht mehr beschränkt.

**Anfangsbedingungen:**

$-1$  (gestrichelt),  $1$  (gepunktet),  $2$  (durchgezogen) und  $-2$  (gestrichpunktet).

# Kapitel 7

## Das zeitlich verzögerte Verhulst-System

### 7.1 Motivation

In Kapitel 6 wurde die Normalform der Hopf-Bifurkation des Phasenregelkreises mit zeitlicher Verzögerung bestimmt. Dabei wurde die auf zeitlich verzögerte Systeme verallgemeinerte Methodik der Synergetik verwendet. Es zeigte sich, daß bei diesem System die zentrale Mannigfaltigkeit in niederster Ordnung des Kleinheitsparameters  $\varepsilon$  keinen Einfluß auf die Ordnungsparametergleichungen hat. Um zu überprüfen, ob dieser Einfluß korrekt erfaßt wird, muß man beim zeitlich verzögerten Phasenregelkreis die höheren Ordnungen betrachten. Da diese aber nur mit sehr großem Aufwand zu berechnen sind, haben wir dieses System nicht weiter analytisch untersucht. Um das Versklavungsprinzip der Synergetik für zeitlich verzögerte Systeme vollständig abzusichern, haben wir stattdessen ein möglichst einfaches System gesucht, bei dem schon in niederster Ordnung des Kleinheitsparameters  $\varepsilon$  ein Einfluß der zentralen Mannigfaltigkeit auf die Ordnungsparametergleichungen festzustellen ist und somit die in Kapitel 3 erwähnte und in Abbildung 3.7 veranschaulichte zirkuläre Kausalkette geschlossen ist. Die in Kapitel 6 durchgeführten Ordnungsbetrachtungen für eine Hopf-Bifurkation zeigen, daß dies für eine quadratische Nichtlinearität der Fall ist (siehe den Eintrag für  $r = 2$  in Tabelle 6.3). Wir werden im folgenden wie in Kapitel 6 vorgehen und in Abschnitt 7.2 zunächst die Ordnungsparametergleichungen analytisch bestimmen und diese dann in Abschnitt 7.3 durch unsere numerischen Untersuchungen bestätigen. Um die Ausführungen einfach zu halten, haben wir wieder ein skalares System gewählt, das Verhulst-System<sup>1</sup> mit zeit-

---

<sup>1</sup>Die Gleichung

$$\frac{d}{dt}z(t) = az(t) - bz(t)^2,$$

mit  $a, b, z \in \mathbb{R}$  ist benannt nach dem im 19. Jahrhundert lebenden belgischen Mathematiker P.F. Verhulst [171]. Sie stellt ein sehr vereinfachtes Modell für die Populationsdynamik einer einzelnen Spezies in einer Umgebung mit endlichem Nahrungsangebot dar (siehe z.B. [170]).

licher Verzögerung, dessen Dynamik durch die skalare Delay-Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}z(t) = az(t) - bz(t - \tau)^2, \quad (7.1)$$

mit  $a, b \neq 0$  beschrieben wird [129]. Wir führen wieder die bereits in Abschnitt 4.5 erwähnte Skalierung der Zeit  $t = \tau t'$  und außerdem eine Skalierung der Zustandsvariablen durch und erhalten für die damit eingeführte neue Zustandsvariable

$$z'(t') = \frac{b}{a}z(\tau t') \quad (7.2)$$

schließlich die Gleichung

$$\frac{d}{dt}z(t) = R(z(t) - z(t - 1)^2), \quad (7.3)$$

wobei wir gestrichene Größen wieder durch ungestrichene ersetzt haben und  $R = a\tau$  nunmehr der einzige Kontrollparameter des Systems ist.

## 7.2 Analyse im erweiterten Zustandsraum $\mathcal{C}$

Im erweiterten Zustandsraum  $\mathcal{C}$  wird aus (7.3)

$$\frac{d}{dt}z_t(\Theta) = (\mathcal{G} z_t)(\Theta) = \begin{cases} \frac{d}{d\Theta}z_t(\Theta) & , \quad -1 \leq \Theta < 0 \\ \mathcal{F}[z_t] & , \quad \Theta = 0 \end{cases} \quad (7.4)$$

mit dem nichtlinearen Funktional

$$\mathcal{F}[z_t] = \sum_{k=1}^2 \int_{-1}^0 d\Theta_1 \cdots \int_{-1}^0 d\Theta_k \omega^{(k)}(\Theta_1, \dots, \Theta_k) \prod_{l=1}^k z_t(\Theta_l) \quad (7.5)$$

und den zwei skalaren Dichten

$$\omega^{(1)}(\Theta_1) = R\delta(\Theta_1), \quad (7.6)$$

$$\omega^{(2)}(\Theta_1, \Theta_2) = -R\delta(\Theta_1 + 1)\delta(\Theta_2 + 1). \quad (7.7)$$

### 7.2.1 Stationäre Zustände

Die stationären Zustände des Systems sind

$$z_{stat}^I = 0, \quad (7.8)$$

$$z_{stat}^{II} = 1. \quad (7.9)$$

Um die Stabilität dieser stationären Zustände in Abhängigkeit des Kontrollparameters  $R$  zu untersuchen, führen wir eine lineare Stabilitätsanalyse durch.

### 7.2.2 Lineare Stabilitätsanalyse

Wir betrachten dazu das um den entsprechenden stationären Referenzzustand linearisierte System in  $\mathcal{C}$ :

$$\frac{d}{dt}\zeta_t(\Theta) = (\mathcal{G}_L \zeta_t)(\Theta) = \begin{cases} \frac{d}{d\Theta}\zeta_t(\Theta) & , \quad -1 \leq \Theta < 0 \\ \mathcal{L}^{I,II}[\zeta_t] & , \quad \Theta = 0 \end{cases} , \quad (7.10)$$

mit den linearen Funktionalen

$$\mathcal{L}^{I,II}[\zeta_t] = \int_{-1}^0 d\Theta \omega^{I,II}(\Theta)\zeta_t(\Theta) \quad (7.11)$$

und den skalaren Dichten

$$\omega^I(\Theta) = \left. \frac{\delta \mathcal{F}[z_t]}{\delta z_t(\Theta)} \right|_{z_t(\Theta)=z_{ref}^I=0} = R \delta(\Theta) , \quad (7.12)$$

$$\omega^{II}(\Theta) = \left. \frac{\delta \mathcal{F}[z_t]}{\delta z_t(\Theta)} \right|_{z_t(\Theta)=z_{ref}^{II}=1} = R (\delta(\Theta) - 2\delta(\Theta + 1)) . \quad (7.13)$$

Setzt man den Ansatz für die Eigenfunktionen

$$\zeta_t(\Theta) = \phi^\lambda(\Theta)e^{\lambda t} \quad (7.14)$$

in das linearisierte System (7.10) ein, dann erhält man:

$$\begin{aligned} \phi^\lambda(\Theta) &= e^{\lambda\Theta}\phi^\lambda(0) \\ \lambda\phi^\lambda(0) &= \int_{-1}^0 d\Theta \omega^{I,II}(\Theta)\phi^\lambda(0)e^{\lambda\Theta} , \end{aligned} \quad (7.15)$$

mit

$$L^{I,II}(\lambda) = \int_{-1}^0 d\Theta \omega^{I,II}(\Theta)e^{\lambda\Theta} , \quad (7.16)$$

was zu den folgenden transzendenten charakteristischen Gleichungen

$$L^I(\lambda) - \lambda = R - \lambda = 0 \quad (7.17)$$

$$L^{II}(\lambda) - \lambda = R(1 - 2e^{-\lambda}) - \lambda = 0 \quad (7.18)$$

führt. Wie in [177], [178] und in Kapitel 6 bereits angegeben, hat das Spektrum des linearisierten infinitesimalen Generators  $\mathcal{G}_L$  folgende Eigenschaften:

- ▶ Es ist nach oben beschränkt.
- ▶ Es ist ein reines Punktspektrum abzählbar unendlich vieler Eigenwerte.
- ▶ Die Eigenwerte häufen sich für  $\Re(\lambda) \rightarrow -\infty$ .

Im vorigen Kapitel 6 haben wir das Theorem (T.1) angegeben. Es ermöglicht Aussagen über die Realteile der Eigenwerte der komplexen Gleichung

$$H(c) = pe^c + q - ce^c \quad \text{mit } c \in \mathbb{C} \quad \text{und } p, q \in \mathbb{R}, \quad (7.19)$$

die auch bei der linearen Stabilitätsanalyse der skalaren Delay-Differentialgleichung (7.3) auftritt. Damit ist es möglich, den Stabilitätsbereich der entsprechenden stationären Referenzzustände anzugeben. Die Identifikation der Parameter ergibt hier:

$$p = R, q = 0 \quad \text{für } z_{ref}^I = 0, \quad (7.20)$$

$$p = R, q = -2R \quad \text{für } z_{ref}^{II} = 1. \quad (7.21)$$

In Abbildung 7.1 ist das Stabilitätsverhalten der beiden stationären Referenzzustände  $z_{ref}^I = 0$  und  $z_{ref}^{II} = 1$  bei Veränderung des Kontrollparameters  $R$  zusammen mit dem durch das Theorem (T.1) festgelegten Stabilitätsbereich dargestellt.

Anhand der Identifikation (7.20), (7.21) der Parameter  $p$  und  $q$  des Theorems von Hayes und der Abbildung 7.1 ist ersichtlich, daß der stationäre Referenzzustand  $z_{ref}^I = 0$  für  $R < 0$  stabil ist und beim kritischen Wert des Kontrollparameters  $R_c^I = 0$  seine Stabilität verliert, da an dieser Stelle der in diesem Fall reelle Eigenwert  $\lambda = R$  positiv wird. Dementsprechend wird in (7.20) die Ungleichung (b.1) des Theorems (T.1) für  $R > R_c^I$  verletzt. Der zugeordnete Punkt in der  $(p, q)$ -Ebene bewegt sich bei Veränderung des Kontrollparameters  $R$  im Intervall  $(-\infty, 0]$  entlang der negativen  $p$ -Achse bis zum Ursprung.

Der zweite stationäre Referenzzustand  $z_{ref}^{II} = 1$  ist für  $R < 0$  instabil, da die Ungleichung (b.1) verletzt ist. Der zugeordnete Punkt in der  $(p, q)$ -Ebene wandert bei Veränderung des Kontrollparameters  $R$  im Intervall  $(-\infty, 0]$  entlang der Geraden  $q = -2p$  bis zum Ursprung und ist hier außerhalb des Stabilitätsbereiches. Beim kritischen Kontrollparameterwert  $R = R_c^I$ , also genau an der Stelle, bei der der stationäre Referenzzustand  $z_{ref}^I = 0$  instabil wird, wird der stationäre Referenzzustand  $z_{ref}^{II} = 1$  stabil, da wegen (7.21) für  $R \geq R_c^I$  alle Bedingungen (a), (b.1) und (b.2) des Theorems von Hayes erfüllt sind. Beim kritischen Wert des Kontrollparameters  $R = R_c^I$  tritt also eine *transkritische Pitchfork-Bifurkation* auf, weil

- 1.) nur ein reeller Eigenwert  $\lambda = R$  die imaginäre Achse kreuzt und
- 2.) zwei stationäre Referenzzustände ihr Stabilitätsverhalten ändern.

Abbildung 7.1: **Grafische Darstellung des Resultats von Hayes beim Verhulst-System**

Für den schraffierten Bereich der  $(p, q)$ -Ebene sind die Bedingungen (a) und (b) des Theorems (T.1) aus Kapitel 6 erfüllt, alle Eigenwerte haben hier einen negativen Realteil. Die Kurven in der  $(p, q)$ -Ebene, die die repräsentativen Punkte der stationären Zustände  $z_{ref}^{I,II}$  bei Veränderung des Kontrollparameters  $R$  durchlaufen, sind durch die Pfeile dargestellt.

Der repräsentative Punkt in der  $(p, q)$ -Ebene des zweiten stationären Referenzzustandes  $z_{ref}^{II} = 1$  wandert für  $R > R_c^I$  weiter entlang der Geraden  $q = -2p$  und befindet sich zunächst innerhalb des Stabilitätsgebietes. Anhand der Abbildung 7.1 ist zu erkennen, daß auch der stationäre Referenzzustand  $z_{ref}^{II} = 1$  seine Stabilität bei einem zweiten kritischen Kontrollparameterwert  $R_c^{II} > 0$  wieder verliert, wobei zwei zueinander konjugiert komplexe Eigenwerte gleichzeitig die imaginäre Achse kreuzen. Es wird hier also wie beim zeitlich verzögerten Phasenregelkreis des vorangegangenen Kapitels 6 eine Hopf-Bifurkation auftreten. Die Ungleichung (b.2) des Theorems (T.1) wird an der Stelle  $R = R_c^{II}$  verletzt. Diese zweite Instabilität werden wir nun genauer untersuchen.

Die kritische Stelle ermitteln wir wieder wie in Kapitel 6, indem wir die Gl. (7.18) in Realteil

$$\Re(\lambda) - R(1 - 2e^{-\Re(\lambda)} \cos(\Im(\lambda))) = 0 \quad (7.22)$$

und Imaginärteil

$$\Im(\lambda) - 2Re^{-\Re(\lambda)} \sin(\Im(\lambda)) = 0 \quad (7.23)$$



auftrennen. An der Instabilitätsstelle muß der Realteil des Eigenwerts  $\lambda$  verschwinden. Aus Gl. (7.22) folgt dann

$$\cos(\Im(\lambda)) = \frac{1}{2} \Rightarrow \Im(\lambda) = \left(2z \pm \frac{1}{3}\right) \pi \quad \text{mit } z \in \mathbb{Z} \quad (7.24)$$

und damit aus Gl. (7.23)

$$R = (\pm 2z + 1) \frac{\sqrt{3}}{9} \pi. \quad (7.25)$$

Da  $R$  der einzige Kontrollparameter des Systems ist, tritt die gesuchte zweite Instabilität bei

$$R_c^{II} = \frac{\sqrt{3}}{9} \pi \approx 0.6046 \quad (7.26)$$

auf. Analog zu Kapitel 6 werden wir eine Entwicklung der Eigenwerte um diese kritische Stelle vornehmen. Dazu setzen wir den Gleichung (6.35) entsprechenden Ansatz

$$\lambda_u^\pm(\varepsilon) = c_1 \varepsilon \pm i\sqrt{3}R_c^{II}(1 + c_2 \varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (7.27)$$

mit dem durch

$$\varepsilon = \frac{R - R_c^{II}}{R_c^{II}} \quad (7.28)$$

definierten Kleinheitsparameter in die Gleichungen (7.22) und (7.23) ein und bestimmen die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  durch einen Koeffizientenvergleich bis zur ersten Ordnung in  $\varepsilon$ . Für die Eigenwerte  $\lambda_u^{1,2} = \lambda_u^\pm$  ergibt sich daraus:

$$\lambda_u^{1,2}(\varepsilon) = \frac{3R_c^{II^2}}{1 - 2R_c^{II} + 4R_c^{II^2}} \varepsilon \pm i\sqrt{3}R_c^{II} \left(1 + \frac{1 - R_c^{II}}{1 - 2R_c^{II} + 4R_c^{II^2}} \varepsilon\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (7.29)$$

Wie beim zeitlich verzögerten Phasenregelkreis haben wir auch bei diesem System den für die Hopf-Bifurkation relevanten Teil des Eigenwertspektrums numerisch ermittelt (siehe Abb. 7.2), wobei wir uns wieder auf die Eigenwerte mit den größten Realteilen beschränken, da sich die beiden für die Hopf-Bifurkation verantwortlichen Eigenwerte unter diesen befinden müssen. Die Ergebnisse der numerischen Analyse des für die Hopf-Bifurkation relevanten Teils des Eigenwertspektrums sind völlig analog zu den in Abschnitt 6.2.2 zusammengestellten (vgl. hierzu auch die Abbn. 6.3 und 7.2):

- Für  $R = 0$  existiert nur der einzige reelle Eigenwert 0, da die Gleichung (7.3) für diesen Spezialfall wie schon im vorangegangenen Kapitel 6 die Gleichung (6.12) trivial ist.
- Die übrigen Eigenwerte existieren erst für  $R > 0$ , wobei ein weiterer rein reeller Eigenwert entsteht und abzählbar unendlich viele Paare zueinander konjugiert komplexer Eigenwerte mit der Eigenschaft:  $\Re(\lambda) \rightarrow -\infty$  für  $R \rightarrow 0$ .

- ▶ Bei  $R_0 \approx 0.232$  treffen sich die beiden reellen Eigenwerte im Punkt  $(\ln(2R_0), 0)$ . Sie bilden dann für  $R > R_0$  ebenfalls ein Paar zueinander konjugiert komplexer Eigenwerte, die wir in der Nähe des Kontrollparameterwertes  $R_c = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi$  mit den Eigenwerten  $\lambda_u^\pm$  identifizieren können. Sie sind diejenigen Eigenwerte, deren Realteile bei Veränderung des Kontrollparameters über die kritische Stelle  $R_c = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi$  hinweg positiv werden.
- ▶ Die übrigen Eigenwerte kreuzen die imaginäre Achse erst bei größeren Werten des Kontrollparameters  $R$ , daher sind die beiden Eigenwerte  $\lambda_u^\pm$  tatsächlich für die Hopf-Bifurkation bei  $R_c = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi$  verantwortlich.

Abbildung 7.2: **Verhalten der Eigenwerte bei Veränderung des Kontrollparameters  $R$**

Dargestellt sind die Bahnkurven in der komplexen Ebene der 8 Eigenwerte mit dem größten Realteil des linearisierten Systems (7.10). Der Kontrollparameter  $R$  wurde von 0 bis  $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$  in äquidistanten Schritten verändert. Zu jedem Wert von  $R$  wurden die 8 Eigenwerte der Gleichung (7.18) mit Hilfe des Newton-Verfahrens numerisch bestimmt.

### 7.2.3 Zeitskalenhierarchie

Die charakteristische Eigenschaft der Eigenwerte des linearisierten Systems (7.10)

$$\Re(\lambda_u^i(R_c)) = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (7.30)$$

$$\Re(\lambda_s^j(R_c)) < 0 \quad j = 1, \dots, \infty \quad (7.31)$$

beim kritischen Wert  $R_c^{II} = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi$  des Kontrollparameters führt wieder zu einer Zeitskalenhierarchie. Der unendlich-dimensionale erweiterte Zustandsraum  $\mathcal{C}$  kann somit an der Instabilität wieder in den Teilraum  $\mathcal{U}$  der  $m = 2$  linear instabilen Moden und den Teilraum  $\mathcal{S}$  der unendlich vielen linear stabilen Moden aufgespalten werden. Der Zustandsvektor  $z_t(\Theta)$  läßt sich damit wie folgt schreiben:

$$z_t(\Theta) = z_{ref}^{II} + \tilde{z}_t(\Theta) = z_{ref}^{II} + u_t(\Theta) + s_t(\Theta). \quad (7.32)$$

$u_t(\Theta)$  ist dabei der Anteil des Zustandsvektors im Unterraum  $\mathcal{U}$  und  $s_t(\Theta)$  der im Unterraum  $\mathcal{S}$ . Für die synergetische Systemanalyse müssen wir nun das vollständige nichtlineare System (7.4) mit Hilfe der in Kapitel 6 eingeführten Projektoren (6.53) und (6.54) auf das Modenskelett der linear instabilen Moden projizieren. Dabei haben wir zu beachten, daß die Projektoren durch die ebenfalls in Kapitel 6 eingeführte Bilinearform (6.47)

$$(\psi|\phi) = \langle \psi(0)|\phi(0) \rangle - \int_{-1}^0 d\Theta \int_0^\Theta ds \langle \psi(s-\Theta)|\omega^{II}(\Theta)\phi(s) \rangle, \quad (7.33)$$

in die die Dichte  $\omega^{II}(\Theta)$  eingeht, sowohl vom System als auch vom betrachteten Referenzzustand abhängen (vgl. Anmerkung auf S. 74).

### 7.2.4 Projektion der Bewegungsgleichung

Um die Projektion durchzuführen, zerlegen wir das nichtlineare System (7.4) in einen linearen und einen verbleibenden effektiv nichtlinearen Anteil

$$\frac{d}{dt}\tilde{z}_t(\Theta) = (\mathcal{G}_L \tilde{z}_t)(\Theta) + X_0(\Theta)\mathcal{F}^{\text{eff}}[\tilde{z}_t], \quad -1 \leq \Theta \leq 0 \quad (7.34)$$

mit der skalaren Funktion

$$X_0(\Theta) = \begin{cases} 0 & , \quad -1 \leq \Theta < 0 \\ 1 & , \quad \Theta = 0 \end{cases} \quad (7.35)$$

und dem ebenfalls skalaren effektiv nichtlinearen Funktional

$$\mathcal{F}^{\text{eff}}[\tilde{z}_t] = \int_{-1}^0 d\Theta_1 \int_{-1}^0 d\Theta_2 \omega^{(2)}(\Theta_1, \Theta_2) \tilde{z}_t(\Theta_1) \tilde{z}_t(\Theta_2). \quad (7.36)$$

Für die Konstruktion der Projektoren benötigen wir sowohl die Eigenfunktionen des um den Referenzzustand  $z_{ref}^{II} = 1$  linearisierten Systems im erweiterten Zustandsraum  $\mathcal{C}$  als auch die des dazu adjungierten Systems im adjungierten Raum  $\mathcal{C}^\dagger$ . Diese sind gegeben durch (siehe (6.42) und (6.43)):

$$\phi^{\lambda_u^i}(\Theta) = N_{\lambda_u^i} e^{\lambda_u^i \Theta} \in \mathcal{C} \quad \text{mit} \quad -1 \leq \Theta \leq 0 \quad \text{und} \quad i = 1, \dots, m, \quad (7.37)$$

$$\psi^{\dagger \lambda_u^i}(s) = N_{\lambda_u^i} e^{-\lambda_u^i s} \in \mathcal{C}^\dagger \quad \text{mit} \quad 0 \leq s \leq 1 \quad \text{und} \quad i = 1, \dots, m. \quad (7.38)$$

Wenn man nun wieder die Biorthonormalität der Eigenfunktionen  $\phi^{\lambda_u^i}$  und  $\psi^{\dagger\lambda_u^i}$  fordert, dann ergibt sich mit (7.13) aus (7.33) für die Normierungskonstanten

$$N_{\lambda_u^\pm} = \frac{1}{\sqrt{1 - R + \lambda_u^\pm}}. \quad (7.39)$$

Die Projektion der nichtlinearen Bewegungsgleichung (7.34) führt dann wie beim zeitlich verzögerten Phasenregelkreis auf die gekoppelten, nichtlinearen Differentialgleichungen für die  $m$  Modenamplituden  $u^i(t)$  der linear instabilen Moden

$$\frac{d}{dt}u^i(t) = \lambda_u^i u^i(t) + \left\langle \psi^{\dagger\lambda_u^i}(0) \left| \mathcal{F}^{\text{eff}} \left[ \sum_{j=1}^m \phi^{\lambda_u^j} u^j(t) + s_t \right] \right. \right\rangle \quad (7.40)$$

$$(7.41)$$

und die weiterhin in  $\mathcal{C}$  formulierte Bewegungsgleichung der unendlich vielen Modenamplituden  $s_t(\Theta)$  der linear stabilen Moden

$$\frac{d}{dt}s_t(\Theta) = (\mathcal{G}_L s_t)(\Theta) + ((\mathcal{I} - \mathcal{P}_u) X_0)(\Theta) \mathcal{F}^{\text{eff}} \left[ \sum_{j=1}^m \phi^{\lambda_u^j} u^j(t) + s_t \right]. \quad (7.42)$$

Dabei sind die  $m$  Entwicklungskoeffizienten  $u^i(t)$  der linear instabilen Moden  $\phi^{\lambda_u^i}(\Theta)$  durch

$$u^i(t) = \left( \psi^{\dagger\lambda_u^i} \left| \tilde{z}_t \right. \right) \quad (7.43)$$

definiert. Das zu den Bewegungsgleichungen (7.4) beziehungsweise (7.34) vollständig äquivalente System der Modenamplituden (7.40) und (7.42) kann nun wieder näherungsweise mit Hilfe des Versklavungsprinzips gelöst werden.

## 7.2.5 Versklavungsprinzip

Wie bereits mehrfach erwähnt, führt die Zeitskalenhierarchie dazu, daß die intrinsische Dynamik der stabilen Moden viel schneller abläuft als die der instabilen. Die stabilen Moden folgen den instabilen quasi „instantan“. Aus dieser Tatsache folgt die Existenz einer zentralen Mannigfaltigkeit  $h(\Theta, \underline{u}(t))$  mit den in Kapitel 6 angegebenen Eigenschaften. Durch Einsetzen des Ansatzes

$$s_t(\Theta) = h(\Theta, u^1(t), \dots, u^m(t)) = h(\Theta, \underline{u}(t)) \quad (7.44)$$

in die Gleichungen (7.40) und (7.42) erhält man einerseits die implizite Bestimmungsgleichung für die zentrale Mannigfaltigkeit  $h(\Theta, \underline{u}(t))$  (siehe (6.67)), die wir hier nicht mehr angeben und andererseits die  $m$  Ordnungsparametergleichungen

$$\frac{d}{dt}u^i(t) = \underbrace{\lambda_u^i u^i(t)}_{O_1} + \underbrace{\left\langle \psi^{\dagger\lambda_u^i}(0) \left| \mathcal{F}^{\text{eff}} \left[ \sum_{j=1}^m \phi^{\lambda_u^j} u^j(t) + h \right] \right. \right\rangle}_{O_3}, \quad (7.45)$$

die nun keine Retardierungseffekte mehr enthalten.

Bevor wir die Ordnungsparametergleichungen explizit bestimmen, erinnern wir uns an die in Kapitel 6 durchgeführten Ordnungs-Betrachtungen. So können wir anhand der Tabelle 6.3 feststellen, daß im Gegensatz zum zeitlich verzögerten Phasenregelkreis beim zeitlich verzögerten Verhulst-System die zentrale Mannigfaltigkeit schon in niederster Ordnung des Kleinheitsparameters einen Einfluß auf die Ordnungsparametergleichungen haben wird. In der Tat war die durch dieses System gegebene Überprüfungsmöglichkeit des Einflusses der zentralen Mannigfaltigkeit auf die Ordnungsparametergleichungen der Grund für die synergetische Systemanalyse der Verhulst-Dynamik mit zeitlicher Verzögerung (siehe Abschnitt 7.1).

### 7.2.6 Elimination der stabilen Moden

Die Lösung der impliziten Bestimmungsgleichung (6.67) für die zentrale Mannigfaltigkeit  $h(\Theta, \underline{u}(t))$  ist gleichbedeutend mit der Elimination der stabilen Moden aus den Ordnungsparametergleichungen, da diese nach Einsetzen des Ergebnisses für die zentrale Mannigfaltigkeit die stabilen Moden nicht mehr enthalten.

Die Ordnung  $r = 2$  des effektiv nichtlinearen Funktionals  $\mathcal{F}^{\text{eff}}[\tilde{z}_t]$  des zeitlich verzögerten Verhulst-Systems (siehe (7.5) und (7.7)), legt für die zentrale Mannigfaltigkeit den Ansatz

$$h(\Theta, \underline{u}(t)) = \sum_{j_1, j_2=1}^m H_{j_1 j_2}(\Theta) u^{j_1}(t) u^{j_2}(t) \quad (7.46)$$

nahe. In Kapitel 6 haben wir die Koeffizienten  $H_{j_1 \dots j_r}(\Theta)$  für allgemeine Ordnungen  $r$  bestimmt (siehe Gleichung (6.77)). Für den Spezialfall  $r = 2$  folgt daraus:

$$H_{j_1 j_2}(\Theta) = F_{j_1 j_2}^{\text{eff}} K_{j_1 j_2}(\Theta), \quad (7.47)$$

mit

$$F_{j_1 j_2}^{\text{eff}} = \int_{-1}^0 d\Theta_1 \int_{-1}^0 d\Theta_2 \omega^{(2)}(\Theta_1, \Theta_2) \phi^{\lambda_u^{j_1}}(\Theta_1) \phi^{\lambda_u^{j_2}}(\Theta_2) \quad (7.48)$$

und

$$K_{j_1 j_2}(\Theta) = \sum_{j=1}^m \frac{N_{\lambda_u^j}^2}{\lambda_u^j - \lambda} e^{\lambda_u^j \Theta} - \frac{e^{\lambda \Theta}}{L(\lambda) - \lambda}, \quad (7.49)$$

wobei  $\lambda$  wie folgt definiert war

$$\lambda = \sum_{k=1}^r \lambda_u^{j_k}. \quad (7.50)$$

Aus (7.48) erhalten wir dann mit (7.7), (7.37) und (7.39)

$$F_{11}^{\text{eff}} = F_{22}^{\text{eff}*} = -RN_{\lambda_u^+}^2 e^{-2\lambda_u^+}, \quad (7.51)$$

$$F_{12}^{\text{eff}} = F_{21}^{\text{eff}} = -RN_{\lambda_u^+} N_{\lambda_u^-} e^{-(\lambda_u^+ + \lambda_u^-)} \quad (7.52)$$

und aus (7.49) mit (7.18), (7.37), (7.39) und (7.50)

$$K_{11}(\Theta) = -\frac{N_{\lambda_u^+}^2 e^{\lambda_u^+ \Theta}}{\lambda_u^+} + \frac{N_{\lambda_u^-}^2 e^{\lambda_u^- \Theta}}{\lambda_u^- - 2\lambda_u^+} - \frac{e^{2\lambda_u^+ \Theta}}{R(1 - 2e^{-2\lambda_u^+}) - 2\lambda_u^+}, \quad (7.53)$$

$$K_{12}(\Theta) = -\frac{N_{\lambda_u^+}^2 e^{\lambda_u^+ \Theta}}{\lambda_u^-} - \frac{N_{\lambda_u^-}^2 e^{\lambda_u^- \Theta}}{\lambda_u^+} - \frac{e^{(\lambda_u^+ + \lambda_u^-) \Theta}}{R(1 - 2e^{-(\lambda_u^+ + \lambda_u^-)}) - (\lambda_u^+ + \lambda_u^-)}, \quad (7.54)$$

$$K_{21}(\Theta) = K_{12}(\Theta), \quad (7.55)$$

$$K_{22}(\Theta) = K_{11}^*(\Theta). \quad (7.56)$$

Damit ist die zentrale Mannigfaltigkeit  $h(\Theta, \underline{u}(t))$  in niederster Ordnung der Ordnungsparameter  $u^i(t)$  bestimmt.

### 7.2.7 Ordnungsgleichungen

Für die Ordnungsgleichungen erhalten wir aus (7.45) mit (7.46) und den Ergebnissen (7.47), (7.51) - (7.54) für die zentrale Mannigfaltigkeit

$$\frac{d}{dt} u^i(t) = \lambda_u^i u^i(t) - RN_{\lambda_u^i} \left( \sum_{j=1}^m \phi^{\lambda_u^j}(-1) u^j(t) + \sum_{j_1, j_2=1}^m H_{j_1 j_2}(-1) u^{j_1}(t) u^{j_2}(t) \right)^2. \quad (7.57)$$

Da es sich bei der hier untersuchten Instabilität bei  $R = R_c^{II}$  um eine Hopf-Bifurkation handelt, besteht unsere weitere Aufgabe darin, die zu den beiden konjugiert komplexen Gleichungen (7.57) gehörende Normalform abzuleiten.

### 7.2.8 Normalform der Ordnungsgleichungen

Wie wir aus den in Kapitel 6 durchgeführten Ordnungs-Betrachtungen für den Fall einer Hopf-Bifurkation bei quadratischer Nichtlinearität bereits wissen, müssen wir alle Terme bis zur Ordnung  $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$  berücksichtigen. In Abschnitt E.2 wird gezeigt, wie man hierzu durch eine nichtlineare „near identity transformation“

$$u^{1,2}(t) = u^\pm(t) = v^\pm(t) + \alpha_0^\pm v^\pm(t)^2 + \alpha_1^\pm v^\pm(t) v^\mp(t) + \alpha_2^\pm v^\mp(t)^2 \quad (7.58)$$

neue Ordnungsparameter  $v^\pm(t)$  einführt und die Koeffizienten  $\alpha_0^\pm, \alpha_1^\pm$  und  $\alpha_2^\pm$  so bestimmt, daß die quadratischen Terme in den neuen Ordnungsgleichungen für  $v^\pm(t)$  verschwinden. Die neuen Ordnungsgleichungen enthalten dann kubische Terme, die gegenüber den kubischen Termen der Gleichungen für  $u^\pm(t)$  modifiziert sind. Wir halten uns hier an die im Anhang verwendete Notation, bei der die mit den Indizes  $\pm$  versehene Größen zueinander konjugiert komplex sind.

Außerdem wird, wie bereits in Kapitel 6 erwähnt, in Abschnitt E.1 gezeigt, daß durch eine zweite nichtlineare Transformation der Ordnungsparameter von den kubischen Termen nur ein Term nicht eliminiert werden kann und dieser durch die Transformation nicht modifiziert wird. Dieser Term ist neben dem linearen Anteil der einzig verbleibende Term in der Normalform der Hopf-Bifurkation.

Wir werden daher im weiteren Verlauf der Rechnung von den kubischen Termen nur den relevanten Term berücksichtigen und erhalten somit aus (7.57):

$$\frac{d}{dt}u^\pm(t) = \lambda_u^\pm u^\pm(t) + q_0^\pm u^\pm(t)^2 + q_1^\pm u^\pm(t)u^\mp(t) + q_2^\pm u^\mp(t)^2 + k_1^\pm u^\pm(t)^2 u^\mp(t), \quad (7.59)$$

mit

$$q_0^\pm = -RN_{\lambda_u^\pm} \phi^{\lambda_u^\pm}(-1)^2 = -RN_{\lambda_u^\pm}^3 e^{-2\lambda_u^\pm}, \quad (7.60)$$

$$q_1^\pm = -2RN_{\lambda_u^\pm} \phi^{\lambda_u^\pm}(-1) \phi^{\lambda_u^\mp}(-1) = -2RN_{\lambda_u^\pm}^2 N_{\lambda_u^\mp} e^{-\lambda_u^\pm - \lambda_u^\mp}, \quad (7.61)$$

$$q_2^\pm = -RN_{\lambda_u^\pm} \phi^{\lambda_u^\mp}(-1)^2 = -RN_{\lambda_u^\pm} N_{\lambda_u^\mp}^2 e^{-2\lambda_u^\mp}, \quad (7.62)$$

$$k_1^\pm = -2RN_{\lambda_u^\pm} \left( \phi^{\lambda_u^\pm}(-1) (H_{12}(-1) + H_{21}(-1)) + \phi^{\lambda_u^\mp}(-1) H_{11}(-1) \right), \quad (7.63)$$

wobei wir auf die explizite Angabe von  $k_1^\pm$  verzichtet haben, um die Ausführungen übersichtlich zu halten. Wir führen nun die Transformation (7.58) durch und eliminieren sämtliche quadratischen Terme. Wie in Anhang E gezeigt wird, ergibt sich für die zu bestimmenden Koeffizienten (siehe (E.10), (E.11), und (E.12)):

$$\alpha_0^\pm = \frac{q_0^\pm}{\lambda_u^\pm}, \quad (7.64)$$

$$\alpha_1^\pm = \frac{q_1^\pm}{\lambda_u^\mp}, \quad (7.65)$$

$$\alpha_2^\pm = \frac{q_2^\pm}{2\lambda_u^\mp - \lambda_u^\pm}. \quad (7.66)$$

Für die Ordnungsparametergleichungen der neuen Ordnungsparametern  $v^\pm(t)$  erhalten wir somit schließlich die folgende Normalform einer Hopf-Bifurkation

$$\frac{d}{dt}v^\pm(t) = \lambda_u^\pm v^\pm(t) + \mathbb{b}^\pm v^\pm(t)^2 v^\mp(t) \quad (7.67)$$

mit

$$\mathbb{b}^\pm = k_1^\pm + \frac{q_0^\pm q_1^\pm (4\lambda_u^{\pm 2} - \lambda_u^{\mp 2}) + q_1^\pm q_1^\mp (2\lambda_u^\pm \lambda_u^\mp - \lambda_u^{\mp 2}) + 2q_2^\pm q_2^\mp \lambda_u^\pm \lambda_u^\mp}{\lambda_u^\pm \lambda_u^\mp (2\lambda_u^\pm - \lambda_u^\mp)}. \quad (7.68)$$

Da die Ordnungsparameter  $v^\pm(t)$  von der Ordnung  $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$  sein werden, genügt es, die Koeffizienten  $\mathbb{b}^\pm$  in nullter Ordnung des Kleinheitsparameters  $\varepsilon$  zu bestimmen. Lediglich die im linearen Teil auftretenden Eigenwerte  $\lambda_u^\pm$  werden bis zur Ordnung  $\varepsilon^1$  benötigt. In Abschnitt 7.2.2 haben wir die Eigenwerte  $\lambda_u^\pm$  bereits bis zu dieser

Ordnung bestimmt (siehe Gleichung (7.29)).

Für die komplexen Koeffizienten  $\mathbb{b}^\pm$  ergibt sich mit

$$R(\varepsilon) = R_c^{II} + \mathcal{O}(\varepsilon^1), \quad (7.69)$$

$$\lambda_u^\pm(\varepsilon) = \pm i\sqrt{3}R_c^{II} + \mathcal{O}(\varepsilon^1), \quad (7.70)$$

$$N_{\lambda_u^\pm} = \frac{1}{\sqrt{1 - R_c^{II} \pm i\sqrt{3}R_c^{II}}} + \mathcal{O}(\varepsilon^1) \quad (7.71)$$

$$(7.72)$$

nach einigen Umformungen

$$\mathbb{b}^\pm = -\frac{6R_c^{II}}{7(1 - 2R_c^{II} + 4R_c^{II^2})^{\frac{3}{2}}} \left( 3(3R_c^{II} - 1) \pm i\sqrt{3}(R_c^{II} + 2) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (7.73)$$

Die Normalform (7.67) läßt sich nun wie die Gleichung (6.89) des Kapitels 6 durch den Ansatz

$$v^\pm(t) = r(t)e^{\pm i\varphi(t)} \quad (7.74)$$

auf Polarkoordinaten transformieren mit

$$\frac{d}{dt}r(t) = r(t) \left\{ \Re(\lambda_u^\pm(\varepsilon)) + \Re(b^\pm(\varepsilon))r(t)^2 \right\}, \quad (7.75)$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \pm \left\{ \underbrace{\Im(\lambda_u^\pm(\varepsilon))}_1 + \underbrace{\Im(b^\pm(\varepsilon))r(t)^2}_2 \right\}. \quad (7.76)$$

Für die stationäre oszillatorische Lösung erhalten wir in diesem Fall:

$$r_{stat}^2 = -\frac{\Re(\lambda_u^\pm(\varepsilon))}{\Re(\mathbb{b}^\pm(\varepsilon))} = \frac{7R_c^{II}\sqrt{1 - 2R_c^{II} + 4R_c^{II^2}}}{6(3R_c^{II} - 1)}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (7.77)$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \sqrt{3}R_c^{II} - \frac{\sqrt{3}R_c^{II}}{3R_c^{II} - 1}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (7.78)$$

Anmerkung: Im Gegensatz zu dem im vorangegangenen Kapitel 6 behandelten Phasenregelkreis mit zeitlicher Verzögerung verschwindet bei diesem System die Ordnung  $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$  in Gleichung (7.78) nicht, da sich hier der vom Eigenwert  $\lambda_u^\pm(\varepsilon)$  herrührende lineare Anteil 1 der Gleichung (7.76) nicht gegen den nichtlinearen Anteil 2 weghebt. In den numerischen Untersuchungen muß diese Abhängigkeit der Frequenz der oszillatorischen Lösung vom Kleinheitsparameter  $\varepsilon$  natürlich ebenfalls auftreten.

### 7.2.9 Interpretation im Zustandsraum $\Gamma$

Da wir auch bei diesem System unser analytisches Resultat durch numerische Untersuchungen überprüfen wollen, ist es notwendig, die Ergebnisse im Zustandsraum



$\Gamma$  darzustellen. Für den Zustandsvektor im erweiterten Zustandsraum  $\mathcal{C}$  gilt in der Nähe der Instabilität wegen (7.32), (7.44) und (7.46)

$$\begin{aligned} z_t(\Theta) &= z_{ref}^{II} + \tilde{z}_t(\Theta) \\ &= z_{ref}^{II} + \sum_{j=1}^m \phi^{\lambda_u^j}(\Theta) u^j(t) + \sum_{j_1, j_2=1}^m H_{j_1 j_2}(\Theta) u^{j_1}(t) u^{j_2}(t). \end{aligned} \quad (7.79)$$

Unter Beachtung der „near identity transformation“ (7.58) und (7.9) sowie (7.37) folgt daraus

$$\begin{aligned} z_t(\Theta) &= 1 + N_{\lambda_u^+} e^{\lambda_u^+ \Theta} v^+(t) + N_{\lambda_u^-} e^{\lambda_u^- \Theta} v^-(t) + \\ &\quad \mathbb{A}_0(\Theta) v^+(t)^2 + \mathbb{A}_1(\Theta) v^+(t) v^-(t) + \mathbb{A}_2(\Theta) v^-(t)^2, \end{aligned} \quad (7.80)$$

mit

$$\mathbb{A}_0(\Theta) = \left( N_{\lambda_u^+} e^{\lambda_u^+ \Theta} \alpha_0^+ + N_{\lambda_u^-} e^{\lambda_u^- \Theta} \alpha_2^- + H_{11}(\Theta) \right), \quad (7.81)$$

$$\mathbb{A}_1(\Theta) = \left( N_{\lambda_u^+} e^{\lambda_u^+ \Theta} \alpha_1^+ + N_{\lambda_u^-} e^{\lambda_u^- \Theta} \alpha_1^- + H_{12}(\Theta) + H_{21}(\Theta) \right), \quad (7.82)$$

$$\mathbb{A}_2(\Theta) = \left( N_{\lambda_u^+} e^{\lambda_u^+ \Theta} \alpha_2^+ + N_{\lambda_u^-} e^{\lambda_u^- \Theta} \alpha_0^- + H_{22}(\Theta) \right), \quad (7.83)$$

wobei wir alle Terme bis zur Ordnung  $\varepsilon$  berücksichtigt haben. Aus dem Zusammenhang  $z(t) = z_t(0)$  (siehe 4.10) zwischen dem Zustandsvektor  $z(t) \in \Gamma$  und dem Zustandsvektor  $z_t(\Theta) \in \mathcal{C}$  folgt dann

$$\begin{aligned} z(t) &= 1 + N_{\lambda_u^+} v^+(t) + N_{\lambda_u^-} v^-(t) + \\ &\quad \mathbb{A}_0(0) v^+(t)^2 + \mathbb{A}_1(0) v^+(t) v^-(t) + \mathbb{A}_2(0) v^-(t)^2. \end{aligned} \quad (7.84)$$

Aus (7.39), (7.47), (7.51) - (7.54), (7.64) - (7.66), (7.74), (7.77) und (7.78) erhalten wir

$$N_{\lambda_u^\pm} = N e^{\pm i \psi_1}, \quad (7.85)$$

$$N = |N_{\lambda_u^\pm}| = \frac{1}{\sqrt[4]{1 - 2R_c^{II} + 4R_c^{22}}}, \quad (7.86)$$

$$v^\pm(t) = r_{stat} e^{\pm i \varphi(t)}, \quad (7.87)$$

$$r_{stat} = \sqrt{\frac{7R_c^{II}}{6(3R_c^{II} - 1)}} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{N}, \quad (7.88)$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \Omega(\varepsilon)t + \varphi_0 = (\Omega_0 + \Omega_1 \varepsilon)t + \varphi_0 \\ &= \left( \sqrt{3}R_c^{II} - \frac{\sqrt{3}R_c^{II}}{3R_c^{II} - 1} \varepsilon \right) t + \varphi_0, \end{aligned} \quad (7.89)$$

$$\mathbb{A}_0(0) = \frac{1}{\sqrt{7}} N^2 e^{i \psi_2}, \quad (7.90)$$

$$\mathbb{A}_1(0) = -2N^2, \quad (7.91)$$

$$\mathbb{A}_2(0) = \frac{1}{\sqrt{7}} N^2 e^{-i \psi_2}. \quad (7.92)$$

Damit ergibt sich dann schließlich aus (7.84)

$$z(t) = c_0(\varepsilon) + c_1(\varepsilon) \cos(\varphi(t) + \psi_1) + c_2(\varepsilon) \cos(2\varphi(t) + \psi_2) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right), \quad (7.93)$$

mit

$$c_0(\varepsilon) = 1 - \frac{7R_c^{II}}{3(3R_c^{II} - 1)}\varepsilon, \quad (7.94)$$

$$c_1(\varepsilon) = \sqrt{\frac{14R_c^{II}}{3(3R_c^{II} - 1)}}\sqrt{\varepsilon}, \quad (7.95)$$

$$c_2(\varepsilon) = \frac{\sqrt{7}R_c^{II}}{3(3R_c^{II} - 1)}\varepsilon. \quad (7.96)$$

### 7.3 Numerische Verifikation der Hopf-Bifurkation

Die Methodik zur numerischen Untersuchungen der verzögerungsinduzierten Hopf-Bifurkation dieses Systems ist mit der in Abschnitt 6.3 ausführlich beschriebenen identisch. Daher geben wir hier nur die Ergebnisse an.

Abbildung 7.3: **Numerische Analyse der Hopf-Bifurkation**

Dargestellt sind die Frequenz  $\Omega$  und die mit Hilfe einer reellen FFT gewonnenen Koeffizienten  $c_0 - c_2$  der oszillatorischen Lösung des zeitlich verzögerten Verhulst-Systems nach der Hopf-Bifurkation in Abhängigkeit vom Kleinheitsparameter  $\varepsilon = \frac{R - R_c^{II}}{R_c^{II}}$ . Dabei wurde das Intervall des Kleinheitsparameters  $[10^{-5}, 10^{-1}]$  in 200 äquidistante Teilintervalle unterteilt.

Die Abbildung 7.3 zeigt die durch unsere Simulationen bestimmte Abhängigkeit der Frequenz  $\Omega$  sowie der Koeffizienten  $c_0 - c_2$  der oszillatorischen Lösung des zeitlich verzögerten Verhulst-Systems in Abhängigkeit vom Kleinheitsparameter  $\varepsilon$ . In der zugehörigen Tabelle 7.1 sind die numerischen Werte zum Vergleich gegenübergestellt, die sich einerseits aus den Simulationen ergeben und andererseits aus den analytischen Berechnungen.

Größe	analytische Ausdrücke		Wert		numerisches Resultat	
	Abschnitt	Steigung	Abschnitt	Steigung	Abschnitt	Steigung
$\Omega(\varepsilon)$	$\sqrt{3}R_c^{II}$	$-\frac{\sqrt{3}R_c^{II}}{3R_c^{II}-1}$	1.0472	-1.2868	1.0472	-1.309
$c_0(\varepsilon)$	1	$-\frac{7R_c^{II}}{3(3R_c^{II}-1)}$	1.0	-1.7335	1.00006	-1.746
$c_1(\varepsilon)$	$\sqrt{\frac{14R_c^{II}}{3(3R_c^{II}-1)}}$	$\frac{1}{2}$	1.8620	0.5	1.856	0.50005
$c_2(\varepsilon)$	0	$\frac{\sqrt{7}R_c^{II}}{3(3R_c^{II}-1)}$	0.0	0.6552	$10^{-5}$	0.657

Tabelle 7.1: **Vergleich der analytischen und numerischen Resultate**

In der Tabelle sind die sich aus der analytischen und numerischen Untersuchung ergebenden Werte für die Frequenz  $\Omega(\varepsilon)$  und die Koeffizienten  $c_0(\varepsilon) - c_2(\varepsilon)$  der oszillatorischen Lösung (7.93) zusammengestellt.

Auch bei diesem System stimmen die analytischen Werte qualitativ und quantitativ gut mit den numerischen überein (siehe hierzu auch die Tabellen 6.5 und 8.1). Im Unterschied zum zeitlich verzögerten Phasenregelkreis bestätigt die gute Übereinstimmung bei diesem System aber nicht nur das Ordnungsparameterkonzept der Synergetik für zeitlich verzögerte dynamische Systeme sondern auch den Einfluß der zentralen Mannigfaltigkeit auf die Ordnungsparametergleichungen.

## 7.4 Weitere numerische Untersuchungen

Wie schon in Abschnitt 6.4 angemerkt, können bei diesem System aufgrund der speziellen Nichtlinearität keine weiteren lokalen Bifurkationen auftreten. Unsere numerischen Simulationen bestätigen dies. Es zeigt sich allerdings, daß bei einem weiteren kritischen Wert des Kontrollparameters  $R_c^g \approx 0.693147$  eine *globale Bifurkation* auftritt<sup>2</sup> und die bei  $R_c^{II} = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi \approx 0.6046$  durch eine Hopf-Bifurkation entstehende oszillatorische Lösung instabil wird. Der kritische Wert  $R_c^g$  stimmt bis auf 6 signifikante Dezimalstellen mit dem Wert  $\ln 2$  überein, weshalb wir die nur durch unsere numerischen Untersuchungen begründete Hypothese aufstellen, daß die globale Bifurkation exakt bei diesem Wert auftritt. Die Abbildung 7.4 zeigt für die drei Werte 0.61,

<sup>2</sup>Globale Bifurkationen werden auch als Krisen bezeichnet (siehe [60], [61]).

0.65, 0.693147 des Kontrollparameters  $R$  die oszillatorischen Lösungen. Deutlich ist die mit größer werdendem  $R$  zunehmende Deformation des bei  $R_c^{II}$  entstehenden anfänglich ellipsenförmigen Grenzzyklus zu erkennen. Außerdem sieht man, wie die oszillatorische Lösung beim Wert  $R_c^g$  den instabilen stationären Zustand  $z_{stat}^I = 0$  gerade „tangiert“. Für größere Werte des Kontrollparameters  $R$  existieren keine beschränkten Lösungen mehr. Die Trajektorien nähern sich dem instabilen stationären Zustand  $z_{stat}^I = 0$  längs einer stabilen Richtung und entfernen sich dann wieder von ihm entlang einer instabilen Richtung.

Abbildung 7.4: **Oszillatorische Lösungen**

*Dargestellt sind oszillatorische Lösungen des zeitlich verzögerten Verhulst-Systems (7.3) für die drei Werte des Kontrollparameters  $R$ : 0.61 (gepunktet), 0.65 (gestrichelt) und 0.693147 (durchgezogen).*

Die Abbildung 7.5 zeigt schließlich noch das Bifurkationsdiagramm für den relevanten Kontrollparameterbereich  $-0.05 \leq R \leq 0.65$ . Mit zunehmendem Abstand des Kontrollparameters  $R$  vom kritischen Wert  $R_c^{II}$  differieren die in Abb. 7.5 eingezeichneten Werte  $z_{min}, z_{max}$  des Minimums beziehungsweise Maximums der oszillatorischen Lösung nach der Hopf-Bifurkation von den tatsächlichen Werten immer mehr wegen des zunehmenden Einflusses der höheren Harmonischen und der höheren Ordnungen des Kleinheitsparameters, die zu den in Abbildung 7.4 ersichtlichen Deformationen der oszillatorischen Lösung führen.

Abbildung 7.5: **Bifurkationsdiagramm des zeitlich verzögerten Verhulst-Systems**

Dargestellt sind die stationären Lösungen des zeitlich verzögerten Verhulst-Systems (7.3) in Abhängigkeit vom einzigen effektiven Kontrollparameter  $R$ . Für  $R < R_c^I$  ist der stationäre Zustand  $z_{stat}^I = 0$  stabil und der stationäre Zustand  $z_{stat}^{II} = 1$  instabil. Für  $R_c^I < R < R_c^{II}$  ist die Situation gerade umgekehrt, das heißt, bei  $R_c^I = 0$  tritt eine transkritische Pitchfork-Bifurkation auf. Bei  $R = R_c^{II}$  wird der stationäre Zustand  $z_{stat}^{II} = 1$  erneut instabil und es findet eine Hopf-Bifurkation statt. Die an dieser Stelle entstehende oszillatorische Lösung bleibt dann für alle Werte  $R_c^{II} < R < R_c^g$  stabil. Die eingezeichnete gepunktete Linie nach der Hopf-Bifurkation gibt den Einfluß des  $c_0(\varepsilon)$ -Terms wieder.  $z_{min}$  und  $z_{max}$  repräsentieren das Minimum und Maximum der oszillatorischen Lösung.

# Kapitel 8

## Die Gleichung von Wright

### 8.1 Motivation

In den beiden vorangegangenen Kapiteln wurde die Normalform der verzögerungsinduzierten Hopf-Bifurkation beim Phasenregelkreis (Kap. 6) und beim Verhulst-System (Kap. 7) abgeleitet. Durch die numerische Überprüfung konnten wir so die auf zeitlich verzögerte Systeme verallgemeinerte Methodik der Synergetik bestätigen. In diesem Kapitel wollen wir die synergetische Systemanalyse auf ein System anwenden, das in der Literatur zu den bekanntesten und am genauesten untersuchten gehört – die *Gleichung von Wright* [180].

$$\frac{d}{dt}z(t) = -Rz(t-1)(1+z(t)). \quad (8.1)$$

Auch dieses System zeigt eine verzögerungsinduzierte Hopf-Bifurkation. Die oscillatorische Lösung in der Nähe der Instabilität wurde bereits 1976 mit Hilfe von *averaging*-Techniken zu

$$z(t) = A\sqrt{R - \frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \mathcal{O}\left(R - \frac{\pi}{2}\right) \quad (8.2)$$

mit

$$A = \sqrt{\frac{40}{3\pi - 2}} \approx 2.3211 \quad (8.3)$$

bestimmt (siehe [120] S. 159 f). Unsere Aufgabe ist es nun, nicht nur diese Lösung zu verifizieren, sondern auch die Normalform wie in den beiden vorangegangenen Kapiteln auf systematische Weise abzuleiten und schließlich das Ergebnis wieder numerisch zu überprüfen. Wie wir aus den Ordnungs-Betrachtungen des Kapitels 6 bereits wissen (siehe Tabelle 6.3), wird die quadratische Nichtlinearität dieses Systems zu einem Einfluß der zentralen Mannigfaltigkeit auf die Ordnungsparametergleichungen führen. Die in Kapitel 3 erwähnte und in Abbildung 3.7 veranschaulichte zirkuläre Kausalkette wird bei diesem System wie schon beim Verhulst-System geschlossen sein. Da wir bereits zwei zeitlich verzögerte Systeme ausführlicher behandelt haben und die Bearbeitung dieses Systems völlig analog verläuft, werden wir in diesem Kapitel lediglich die wichtigsten Resultate zusammenstellen.

## 8.2 Analyse im erweiterten Zustandsraum $\mathcal{C}$

Das (8.1) zugeordnete System im erweiterten Zustandsraum  $\mathcal{C}$  ist

$$\frac{d}{dt}z_t(\Theta) = (\mathcal{G} z_t)(\Theta) = \begin{cases} \frac{d}{d\Theta}z_t(\Theta) & , \quad -1 \leq \Theta < 0 \\ \mathcal{F}[z_t] & , \quad \Theta = 0 \end{cases} \quad (8.4)$$

mit dem nichtlinearen Funktional

$$\mathcal{F}[z_t] = \sum_{k=1}^2 \int_{-1}^0 d\Theta_1 \cdots \int_{-1}^0 d\Theta_k \omega^{(k)}(\Theta_1, \dots, \Theta_k) \prod_{l=1}^k z_t(\Theta_l) \quad (8.5)$$

und den zwei skalaren Dichten

$$\omega^{(1)}(\Theta_1) = -R\delta(\Theta_1 + 1), \quad (8.6)$$

$$\omega^{(2)}(\Theta_1, \Theta_2) = -R\delta(\Theta_1 + 1)\delta(\Theta_2). \quad (8.7)$$

### 8.2.1 Stationäre Zustände

Die stationären Zustände des Systems sind

$$z_{stat}^I = 0, \quad (8.8)$$

$$z_{stat}^{II} = -1, \quad (8.9)$$

wobei wir hier nur den stationären Zustand  $z_{stat}^I = 0$  untersuchen. Im Unterschied zum zeitlich verzögerten Verhulst-System geben wir hier kein vollständiges Bifurkationsdiagramm an. Deshalb werden wir im folgenden den oberen Index wieder weglassen.

### 8.2.2 Lineare Stabilitätsanalyse

Das um den stationären Referenzzustand  $z_{ref} = 0$  linearisierte System in  $\mathcal{C}$  lautet

$$\frac{d}{dt}\zeta_t(\Theta) = (\mathcal{G}_L \zeta_t)(\Theta) = \begin{cases} \frac{d}{d\Theta}\zeta_t(\Theta) & , \quad -1 \leq \Theta < 0 \\ \mathcal{L}[\zeta_t] & , \quad \Theta = 0 \end{cases} \quad (8.10)$$

mit dem linearen Funktional

$$\mathcal{L}[\zeta_t] = \int_{-1}^0 d\Theta \omega(\Theta)\zeta_t(\Theta) \quad (8.11)$$

und der skalaren Dichte

$$\omega(\Theta) = \left. \frac{\delta \mathcal{F}[z_t]}{\delta z_t(\Theta)} \right|_{z_t(\Theta)=z_{ref}=0} = -R\delta(\Theta + 1). \quad (8.12)$$

Ein Vergleich mit (6.20) in Kapitel 6 zeigt, daß das um den stationären Referenzzustand  $z_{ref} = 0$  linearisierte Problem (8.10) identisch mit dem des zeitlich verzögerten Phasenregelkreises ist. Die Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse sind somit ebenfalls identisch und können von dort übernommen werden. Im einzelnen sind dies

- ▶ die transzendente charakteristische Bestimmungsgleichung der Eigenwerte des linearisierten Problems (siehe (6.25))

$$-Re^{-\lambda} - \lambda = 0, \quad (8.13)$$

- ▶ der kritischer Wert des Kontrollparameters (siehe (6.30))

$$R_c = \frac{\pi}{2}, \quad (8.14)$$

- ▶ die Eigenwerte in der Umgebung der Instabilität (siehe (6.36))

$$\lambda_u^{1,2}(\varepsilon) = \lambda_u^\pm(\varepsilon) = \frac{R_c^2}{1 + R_c^2} \varepsilon \pm iR_c \left( 1 + \frac{1}{1 + R_c^2} \varepsilon \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (8.15)$$

Der Kleinheitsparameter  $\varepsilon$  ist dabei wie beim Phasenregelkreis und dem Verhulst-System durch  $\varepsilon = \frac{R - R_c}{R_c}$  definiert.

- ▶ die  $m = 2$  linear instabilen Moden (siehe (6.42) und (6.43))

$$\phi^{\lambda_u^i}(\Theta) = N_{\lambda_u^i} e^{\lambda_u^i \Theta} \quad \text{mit} \quad -1 \leq \Theta \leq 0 \quad \text{und} \quad i = 1, \dots, m, \quad (8.16)$$

$$\psi^{\dagger \lambda_u^i}(s) = N_{\lambda_u^i} e^{-\lambda_u^i s} \quad \text{mit} \quad 0 \leq s \leq 1 \quad \text{und} \quad i = 1, \dots, m, \quad (8.17)$$

- ▶ die Normierungskonstanten (siehe (6.50))

$$N_{\lambda_u^\pm} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_u^\pm}}, \quad (8.18)$$

- ▶ die Projektoren  $\mathcal{P}_u$  und  $\mathcal{P}_s$  (siehe (6.53) und (6.54))

$$\mathcal{P}_u = \sum_{i=1}^m \left| \phi^{\lambda_u^i}(\Theta) \right\rangle \left\langle \psi^{\dagger \lambda_u^i}(s) \right|, \quad (8.19)$$

$$\mathcal{P}_s = (\mathcal{I} - \mathcal{P}_u). \quad (8.20)$$

### 8.2.3 Zeitskalenhierarchie

Der Zustandsvektor  $z_t(\Theta)$  läßt sich nun wieder aufgrund der durch die Eigenwerte vorgegebenen Zeitskalenhierarchie in der Nähe der Instabilität wie folgt zerlegen (vgl. (6.40) und (7.32)):

$$z_t(\Theta) = z_{ref} + \tilde{z}_t(\Theta) = u_t(\Theta) + s_t(\Theta). \quad (8.21)$$

$u_t(\Theta)$  ist dabei der Anteil des Zustandsvektors im Unterraum  $\mathcal{U}$  der linear instabilen Moden und  $s_t(\Theta)$  der im Unterraum der linear stabilen Moden  $\mathcal{S}$ .



### 8.2.4 Projektion der Bewegungsgleichung

Um die nichtlineare Bewegungsgleichung (8.4) mit Hilfe der Projektoren (8.19) und (8.20) auf das Modenskelett der linear instabilen Moden (8.16) und (8.17) zu projizieren, wird es in einen linearen und einen verbleibenden effektiv nichtlinearen Anteil zerlegt (vgl. (6.51) und (7.34))

$$\frac{d}{dt}\tilde{z}_t(\Theta) = (\mathcal{G}_L \tilde{z}_t)(\Theta) + X_0(\Theta)\mathcal{F}^{\text{eff}}[\tilde{z}_t], \quad -1 \leq \Theta \leq 0 \quad (8.22)$$

mit der skalaren Funktion

$$X_0(\Theta) = \begin{cases} 0 & , \quad -1 \leq \Theta < 0 \\ 1 & , \quad \Theta = 0 \end{cases} \quad (8.23)$$

und dem ebenfalls skalaren effektiv nichtlinearen Funktional

$$\mathcal{F}^{\text{eff}}[\tilde{z}_t] = \int_{-1}^0 d\Theta_1 \int_{-1}^0 d\Theta_2 \omega^{(2)}(\Theta_1, \Theta_2) \tilde{z}_t(\Theta_1) \tilde{z}_t(\Theta_2). \quad (8.24)$$

### 8.2.5 Versklavungsprinzip

Aus dem Versklavungsprinzip der Synergetik folgt, daß sich die stabilen Moden  $s_t(\Theta)$  aus den Gleichungen für die  $m = 2$  Projektionskoeffizienten

$$u^i(t) = u^\pm(t) = \left( \psi^{\dagger \lambda_u^i} \Big| \tilde{z}_t \right) \quad (8.25)$$

der linear instabilen Moden (vgl. 6.62) mit Hilfe der zentralen Mannigfaltigkeit  $h(\Theta, \underline{u}(t))$  gemäß

$$s_t(\Theta) = h(\Theta, \underline{u}(t)) = \sum_{j_1, j_2=1}^m H_{j_1 j_2}(\Theta) u^{j_1}(t) u^{j_2}(t) \quad (8.26)$$

eliminieren lassen. Hierbei sind die  $H_{j_1 j_2}(\Theta)$  für das hier betrachtete System wie folgt definiert (vgl. (6.77) und (7.47)):

$$H_{j_1 j_2}(\Theta) = F_{j_1 j_2}^{\text{eff}} K_{j_1 j_2}(\Theta), \quad (8.27)$$

mit

$$F_{j_1 j_2}^{\text{eff}} = \int_{-1}^0 d\Theta_1 \int_{-1}^0 d\Theta_2 \omega^{(2)}(\Theta_1, \Theta_2) \phi^{\lambda_u^{j_1}}(\Theta_1) \phi^{\lambda_u^{j_2}}(\Theta_2) \quad (8.28)$$

und

$$K_{j_1 j_2}(\Theta) = \sum_{j=1}^m \frac{N_{\lambda_u^j}^2}{\lambda_u^j - \lambda} e^{\lambda_u^j \Theta} - \frac{e^{\lambda \Theta}}{L(\lambda) - \lambda}, \quad (8.29)$$

$$\lambda = \sum_{k=1}^r \lambda_u^{j_k}. \quad (8.30)$$

Aus (8.28) ergibt sich dann mit (8.7), (8.16) und (8.18) für die Koeffizienten des effektiv nichtlinearen Funktionals

$$F_{11}^{\text{eff}} = F_{22}^{\text{eff}*} = -RN_{\lambda_u^+}^2 e^{-\lambda_u^+}, \quad (8.31)$$

$$F_{12}^{\text{eff}} = F_{21}^{\text{eff}} = -RN_{\lambda_u^+} N_{\lambda_u^-} e^{-\lambda_u^+}. \quad (8.32)$$

Für die  $K_{j_1 j_2}(\Theta)$  erhalten wir aus (8.29) mit (8.13), (8.16), (8.18) und (8.30)

$$K_{11} = K_{22}^* = -\frac{N_{\lambda_u^+}^2 e^{\lambda_u^+ \Theta}}{\lambda_u^+} + \frac{N_{\lambda_u^-}^2 e^{\lambda_u^- \Theta}}{\lambda_u^- - 2\lambda_u^+} + \frac{e^{2\lambda_u^+ \Theta}}{Re^{-2\lambda_u^+} + 2\lambda_u^+}, \quad (8.33)$$

$$K_{12} = K_{21} = -\frac{N_{\lambda_u^+}^2 e^{\lambda_u^+ \Theta}}{\lambda_u^-} - \frac{N_{\lambda_u^-}^2 e^{\lambda_u^- \Theta}}{\lambda_u^+} + \frac{e^{(\lambda_u^+ + \lambda_u^-) \Theta}}{Re^{-(\lambda_u^+ + \lambda_u^-)} + (\lambda_u^+ + \lambda_u^-)}, \quad (8.34)$$

womit die Bestimmung der zentralen Mannigfaltigkeit  $h(\Theta, \underline{u}(t))$  in niederster Ordnung abgeschlossen ist.

## 8.2.6 Ordnungsgleichungen

Führen wir die Elimination der stabilen Moden durch, dann erhalten wir aus den Gleichungen für die Projektionskoeffizienten  $u^i(t)$  (vgl. (6.62)) die folgenden Ordnungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} u^i(t) = \lambda_u^i u^i(t) - RN_{\lambda_u^i} \prod_{l=1}^2 \left( \sum_{j=1}^m \phi^{\lambda_u^j}(\vartheta_l) u^j(t) + \sum_{j_1, j_2=1}^m H_{j_1 j_2}(\vartheta_l) u^{j_1}(t) u^{j_2}(t) \right) \quad (8.35)$$

mit

$$\vartheta_l = \begin{cases} -1 & , \quad l = 1 \\ 0 & , \quad l = 2 \end{cases}, \quad (8.36)$$

die nun keine Retardierungseffekte mehr enthalten (vgl. (6.81) und (7.57)).

## 8.2.7 Normalform der Ordnungsgleichungen

Um die zu (8.35) gehörende Normalform abzuleiten, gehen wir wie beim zeitlich verzögerten Verhulst-System vor. Wenn wir uns also aufgrund der Ausführungen in Anhang E auf die für die Normalform relevanten Terme beschränken, dann erhalten wir aus (8.35):

$$\frac{d}{dt} u^\pm(t) = \lambda_u^\pm u^\pm(t) + q_0^\pm u^\pm(t)^2 + q_1^\pm u^\pm(t) u^\mp(t) + q_2^\pm u^\mp(t)^2 + k_1^\pm u^\pm(t)^2 u^\mp(t), \quad (8.37)$$

mit

$$\begin{aligned} q_0^\pm &= -RN_{\lambda_u^\pm} \phi^{\lambda_u^\pm}(-1) \phi^{\lambda_u^\pm}(0) = -RN_{\lambda_u^\pm}^3 e^{-\lambda_u^\pm}, \\ q_1^\pm &= -RN_{\lambda_u^\pm} \left( \phi^{\lambda_u^\pm}(-1) \phi^{\lambda_u^\mp}(0) + \phi^{\lambda_u^\pm}(0) \phi^{\lambda_u^\mp}(-1) \right) = \end{aligned} \quad (8.38)$$

$$-RN_{\lambda_u^\pm}{}^2 N_{\lambda_u^\mp} \left( e^{-\lambda_u^\pm} + e^{-\lambda_u^\mp} \right), \quad (8.39)$$

$$q_2^\pm = -RN_{\lambda_u^\pm} \phi^{\lambda_u^\mp}(-1) \phi^{\lambda_u^\mp}(0) = -RN_{\lambda_u^\pm} N_{\lambda_u^\mp}{}^2 e^{-\lambda_u^\mp}, \quad (8.40)$$

$$k_1^\pm = -RN_{\lambda_u^\pm} \left( \phi^{\lambda_u^\pm}(-1) (H_{12}(0) + H_{21}(0)) + \phi^{\lambda_u^\mp}(-1) H_{11}(0) + \phi^{\lambda_u^\pm}(0) (H_{12}(-1) + H_{21}(-1)) + \phi^{\lambda_u^\mp}(0) H_{11}(-1) \right), \quad (8.41)$$

wobei wir wie schon beim Verhulst-System auf die explizite Angabe von  $k_1^\pm$  verzichtet haben. Auch bei diesem System führen wir die nichtlineare „near identity transformation“

$$u^\pm(t) = v^\pm(t) + \alpha_0^\pm v^\pm(t)^2 + \alpha_1^\pm v^\pm(t) v^\mp(t) + \alpha_2^\pm v^\mp(t)^2 \quad (8.42)$$

durch und erhalten schließlich für die neuen Ordnungsparameter  $v^\pm(t)$  die Normalform der Hopf-Bifurkation

$$\frac{d}{dt} v^\pm(t) = \lambda_u^\pm v^\pm(t) + \mathbb{b}^\pm v^\pm(t)^2 v^\mp(t) \quad (8.43)$$

mit

$$\mathbb{b}^\pm = k_1^\pm + \frac{q_0^\pm q_1^\pm (4\lambda_u^{\pm 2} - \lambda_u^{\mp 2}) + q_1^\pm q_1^\mp (2\lambda_u^\pm \lambda_u^\mp - \lambda_u^{\mp 2}) + 2q_2^\pm q_2^\mp \lambda_u^\pm \lambda_u^\mp}{\lambda_u^\pm \lambda_u^\mp (2\lambda_u^\pm - \lambda_u^\mp)}. \quad (8.44)$$

Wir wie bereits wissen (vgl. (6.94) und (7.73)) benötigen wir diese Koeffizienten nur in nullter Ordnung des Kleinheitsparameters  $\varepsilon$ . Mit

$$R(\varepsilon) = R_c + \mathcal{O}(\varepsilon^1), \quad (8.45)$$

$$\lambda_u^\pm(\varepsilon) = \frac{R_c^2}{1 + R_c^2} \varepsilon \pm i R_c \left( 1 + \frac{1}{1 + R_c^2} \varepsilon \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (8.46)$$

$$N_{\lambda_u^\pm} = \frac{1}{\sqrt{1 \pm i R_c}} + \mathcal{O}(\varepsilon^1) \quad (8.47)$$

lassen sie sich zu

$$\mathbb{b}^\pm = -\frac{R_c}{5(1 + R_c^2)^{\frac{3}{2}}} \left( (3R_c^{II} - 1) \pm i(R_c + 3) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (8.48)$$

berechnen. Durch den Ansatz

$$v^\pm(t) = r(t) e^{\pm i\varphi(t)} \quad (8.49)$$

transformieren wir die Normalform (8.43) auf Polarkoordinaten

$$\frac{d}{dt} r(t) = r(t) \left\{ \Re(\lambda_u^\pm(\varepsilon)) + \Re(b^\pm(\varepsilon)) r(t)^2 \right\}, \quad (8.50)$$

$$\frac{d}{dt} \varphi(t) = \pm \left\{ \underbrace{\Im(\lambda_u^\pm(\varepsilon))}_1 + \underbrace{\Im(b^\pm(\varepsilon)) r(t)^2}_2 \right\} \quad (8.51)$$

und erhalten in diesem Fall für die stationäre oszillatorische Lösung:

$$r_{stat}^2 = -\frac{\Re(\lambda_u^\pm(\varepsilon))}{\Re(\mathbb{b}^\pm(\varepsilon))} = \frac{5R_c\sqrt{1+R_c^2}}{3R_c-1}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (8.52)$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = R_c - \frac{R_c}{3R_c-1}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (8.53)$$

Anmerkung: Wie beim zeitlich verzögerten Verhulst-System verschwindet die Ordnung  $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$  in Gleichung (8.53) nicht, da sich der vom Eigenwert  $\lambda_u^\pm(\varepsilon)$  herrührende lineare Anteil 1 der Gleichung (8.51) nicht gegen den nicht-linearen Anteil 2 weghebt. Wie dort muß sich diese Abhängigkeit der Frequenz der oszillatorischen Lösung vom Kleinheitsparameter  $\varepsilon$  in den numerischen Untersuchungen zeigen (vgl. die Anmerkung zu Gleichung (7.78) auf S. 118).

### 8.2.8 Interpretation im Zustandsraum $\Gamma$

Um die analytischen Ergebnisse sowohl mit dem in 8.1 angegebenen Resultat als auch mit unseren numerischen Untersuchungen vergleichen zu können, müssen wir wie schon beim Phasenregelkreis (siehe Abschnitt 6.2.9) und beim Verhulst-System (siehe Abschnitt 7.2.9) die Ergebnisse im Zustandsraum  $\Gamma$  darstellen. Für den Zustandsvektor im erweiterten Zustandsraum  $\mathcal{C}$  erhalten wir in der Nähe der Instabilität

$$\begin{aligned} z_t(\Theta) &= z_{ref} + \tilde{z}_t(\Theta) \\ &= z_{ref} + \sum_{j=1}^m \phi^{\lambda_u^j}(\Theta) u^j(t) + \sum_{j_1, j_2=1}^m H_{j_1 j_2}(\Theta) u^{j_1}(t) u^{j_2}(t). \end{aligned} \quad (8.54)$$

Beachten wir die „near identity transformation“ (8.42) sowie (8.8) und (8.16), dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} z_t(\Theta) &= N_{\lambda_u^+} e^{\lambda_u^+ \Theta} v^+(t) + N_{\lambda_u^-} e^{\lambda_u^- \Theta} v^-(t) + \\ &\quad \mathbb{A}_0(\Theta) v^+(t)^2 + \mathbb{A}_1(\Theta) v^+(t) v^-(t) + \mathbb{A}_2(\Theta) v^-(t)^2, \end{aligned} \quad (8.55)$$

mit

$$\mathbb{A}_0(\Theta) = \left( N_{\lambda_u^+} e^{\lambda_u^+ \Theta} \alpha_0^+ + N_{\lambda_u^-} e^{\lambda_u^- \Theta} \alpha_2^- + H_{11}(\Theta) \right), \quad (8.56)$$

$$\mathbb{A}_1(\Theta) = \left( N_{\lambda_u^+} e^{\lambda_u^+ \Theta} \alpha_1^+ + N_{\lambda_u^-} e^{\lambda_u^- \Theta} \alpha_1^- + H_{12}(\Theta) + H_{21}(\Theta) \right), \quad (8.57)$$

$$\mathbb{A}_2(\Theta) = \left( N_{\lambda_u^+} e^{\lambda_u^+ \Theta} \alpha_2^+ + N_{\lambda_u^-} e^{\lambda_u^- \Theta} \alpha_0^- + H_{22}(\Theta) \right), \quad (8.58)$$

wobei wir wieder alle Terme bis zur Ordnung  $\varepsilon$  berücksichtigt haben. Aus dem Zusammenhang  $z(t) = z_t(0)$  (siehe (4.10)) zwischen dem Zustandsvektor  $z(t) \in \Gamma$  und dem Zustandsvektor  $z_t(\Theta) \in \mathcal{C}$  folgt für dieses System:

$$\begin{aligned} z(t) &= N_{\lambda_u^+} v^+(t) + N_{\lambda_u^-} v^-(t) + \\ &\quad \mathbb{A}_0(0) v^+(t)^2 + \mathbb{A}_1(0) v^+(t) v^-(t) + \mathbb{A}_2(0) v^-(t)^2, \end{aligned} \quad (8.59)$$

wobei sich mit (8.18), (8.27), (8.31) - (8.34), (7.64) - (7.66) (8.49), (8.52) und (8.53) im einzelnen ergibt:

$$N_{\lambda_u^\pm} = N e^{\pm i\psi_1}, \quad (8.60)$$

$$N = |N_{\lambda_u^\pm}| = \frac{1}{\sqrt[4]{1 + R_c^2}}, \quad (8.61)$$

$$v^\pm(t) = r_{stat} e^{\pm i\varphi(t)}, \quad (8.62)$$

$$r_{stat} = \sqrt{\frac{5R_c}{3R_c - 1}} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{N}, \quad (8.63)$$

$$\varphi(t) = (\omega_0 + \omega_1 \varepsilon) t + \varphi_0 = \left( R_c - \frac{R_c}{3R_c - 1} \varepsilon \right) t + \varphi_0, \quad (8.64)$$

$$\mathbb{A}_0(0) = \frac{1}{\sqrt{5}} N^2 e^{i\psi_2}, \quad (8.65)$$

$$\mathbb{A}_1(0) = 0, \quad (8.66)$$

$$\mathbb{A}_2(0) = \frac{1}{\sqrt{5}} N^2 e^{-i\psi_2}. \quad (8.67)$$

Schließlich erhalten wir für den Zustandsvektor  $z(t) \in \Gamma$  als Endresultat:

$$z(t) = \mathfrak{c}_0(\varepsilon) + \mathfrak{c}_1(\varepsilon) \cos(\varphi(t) + \psi_1) + \mathfrak{c}_2(\varepsilon) \cos(2\varphi(t) + \psi_2) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right), \quad (8.68)$$

mit

$$\mathfrak{c}_0(\varepsilon) = 0, \quad (8.69)$$

$$\mathfrak{c}_1(\varepsilon) = 2 \sqrt{\frac{5R_c}{3R_c - 1}} \sqrt{\varepsilon}, \quad (8.70)$$

$$\mathfrak{c}_2(\varepsilon) = 2 \frac{\sqrt{5} R_c}{3R_c - 1} \varepsilon. \quad (8.71)$$

Vergleicht man nun Gleichung (8.68) mit Gleichung (8.2) und berücksichtigt den kritischen Wert des Kontrollparameters  $R_c = \frac{\pi}{2}$ , dann stellt man fest, daß die beiden Resultate in der Ordnung  $\mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$  identisch sind. Darüber hinaus ist unser Resultat jedoch bis zur Ordnung  $\mathcal{O}\left(\varepsilon^1\right)$  exakt, was sich durch unsere numerischen Untersuchungen bestätigen läßt.

### 8.3 Numerische Verifikation

Die Methodik zur numerischen Untersuchungen der verzögerungsinduzierten Hopf-Bifurkation dieses Systems ist wie schon in Kapitel 7 mit der im Abschnitt 6.3 vorgestellten identisch. Auch hier werden wir nur die Ergebnisse angeben. Die Abbildung 8.1 zeigt die durch unsere Simulationen bestimmte Abhängigkeit der Frequenz  $\Omega$  sowie der Koeffizienten  $c_0 - c_2$  der oszillatorischen Lösung der Gleichung von Wright in Abhängigkeit vom Kleinheitsparameter  $\varepsilon$ . In der zugehörigen Tabelle 8.1 sind

die numerischen Werte zum Vergleich gegenübergestellt, die sich einerseits aus den Simulationen und andererseits aus den analytischen Berechnungen ergeben.

Abbildung 8.1: **Numerische Analyse der Hopf-Bifurkation**

*Dargestellt sind die Frequenz  $\Omega$  und die mit Hilfe einer reellen FFT gewonnenen Koeffizienten  $c_0 - c_2$  der oszillatorischen Lösung der Gleichung von Wright nach der Hopf-Bifurkation in Abhängigkeit vom Kleinheitsparameter  $\varepsilon = \frac{R-R_c}{R_c}$ . Dabei wurde das Intervall des Kleinheitsparameters  $[10^{-5}, 10^{-1}]$  in 200 äquidistante Teilintervalle unterteilt.*

Auch hier ist, wie bereits beim Phasenregelkreis und dem Verhulst-System eine gute qualitative und quantitative Übereinstimmung zwischen Analytik und Numerik festzustellen (vgl. die Tabellen 6.5 und 7.1).

Damit haben wir mit unseren Untersuchungen die in der Arbeit [178] vorgestellte Erweiterung der Methodik der Synergetik auf zeitlich verzögerte Systeme an drei unterschiedlichen Beispielen numerisch überprüft und bestätigt, wobei anzumerken ist, daß die zentrale Mannigfaltigkeit in allen drei Fällen einen unterschiedlichen Einfluß auf die Ordnungsparametergleichungen hat (vgl. (6.81) (7.57) und (8.35)).

untersuchte Größe	analytische Ausdrücke		Wert		numerisches Resultat	
	Abschnitt	Steigung	Abschnitt	Steigung	Abschnitt	Steigung
$\omega(\varepsilon)$	$R_c$	$\frac{R_c}{3R_c-1}$	1.5708	-0.4231	1.5707	-0.4024
$c_0(\varepsilon)$	0	0	0.0	0.0	$-2 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-2}$
$c_1(\varepsilon)$	$2\sqrt{\frac{5R_c}{3R_c-1}}$	$\frac{1}{2}$	2.9090	0.5	2.890	0.4999
$c_2(\varepsilon)$	0	$2\frac{\sqrt{5}R_c}{3R_c-1}$	0.0	1.8923	$2 \cdot 10^{-4}$	1.832

Tabelle 8.1: *Vergleich der analytischen und numerischen Resultate*

In der Tabelle sind die sich aus der analytischen und numerischen Untersuchung ergebenden Werte für die Frequenz  $\Omega(\varepsilon)$  und die Koeffizienten  $c_0(\varepsilon) - c_2(\varepsilon)$  der oszillatorischen Lösung (8.68) zusammengestellt.

## 8.4 Numerische Untersuchungen

Auch bei diesem System haben wir die oszillatorische Lösung für verschiedene Werte des Kontrollparameters untersucht. Wir stellen fest, daß bei einem kritischen Wert  $R_c^g \approx 3.247$  des Kontrollparameters  $R$  eine globale Bifurkation auftritt und die bei  $R_c = \frac{\pi}{2}$  aus einer Hopf-Bifurkation entstehende oszillatorische Lösung instabil wird. Wie beim zeitlich verzögerten Verhulst-System stellen wir fest, daß bei diesem Wert des Kontrollparameters die oszillatorische Lösung den instabilen Fixpunkt tangiert und für größere Kontrollparameterwerte keine beschränkten Lösungen mehr existieren. Die folgende Abbildung 8.2 zeigt für die drei Werte 1.7, 2.0, 3.247 des Kontrollparameters  $R$  die oszillatorischen Lösungen (vgl. Abb. 7.4).

Damit sind die Untersuchungen im Rahmen des auf zeitlich verzögerte Systeme erweiterten Konzepts der Synergetik abgeschlossen. Im nächsten Kapitel werden wir ein technisches Verfahren vorstellen, mit dem sich die Normalform einer Bifurkation ebenfalls ableiten läßt. Dies ermöglicht es uns, die Ergebnisse der Kapitel 6, 7 und 8 nicht nur numerisch sondern auch analytisch zu überprüfen.

Abbildung 8.2: *Oszillatorische Lösungen*

Dargestellt sind oszillatorische Lösungen der Gleichung von Wright (8.1) für drei Werte des Kontrollparameters  $R$ : 1.7 (gepunktet), 2.0 (gestrichelt) und 3.247 (durchgezogen).



# Kapitel 9

## Das „multiple scaling“-Verfahren

### 9.1 Motivation

In diesem Kapitel werden wir eine weitere störungstheoretische Methode zur Ableitung der Normalform einer Bifurkation vorstellen - das „multiple scaling“-Verfahren [101], [110], [181]. Es läßt sich wie die synergetische Systemanalyse sowohl auf gewöhnliche als auch auf zeitlich verzögerte Systeme von Differentialgleichungen anwenden [63]. Wir machen an dieser Stelle ausdrücklich darauf aufmerksam, daß diesem Verfahren kein dem Versklavungsprinzip oder dem Ordnungsparameterkonzept der Synergetik vergleichbares Analogon zugrundeliegt. Es handelt sich hier vielmehr um ein technisches Verfahren zur Ableitung der Normalform, in das die Kenntnis des Bifurkationstyps und seiner charakteristischen Eigenschaften a priori eingeht, insbesondere die spezifischen Abhängigkeiten vom Kleinheitsparameter  $\varepsilon$ , den wir wie in den Kapiteln 6 - 8 durch den relativen Abstand des Kontrollparameters  $R$  vom kritischen Kontrollparameterwert  $R_c$  durch

$$\varepsilon = \frac{R - R_c}{R_c} \quad (9.1)$$

definieren. Das Verfahren beruht im wesentlichen darauf, daß man einen speziellen Ansatz wählt, der die Lösung der Differentialgleichung in der Nähe der Instabilität in Form einer Entwicklung nach dem Kleinheitsparameter  $\varepsilon$  approximiert. Der Ansatz ist dabei dem Lösungstyp (stationäres Verhalten, Oszillationen usw.) angepaßt. Außerdem werden durch den Bifurkationstyp bekannte, spezifische Abhängigkeiten vom Kleinheitsparameter  $\varepsilon$  berücksichtigt. Beispielsweise wird die charakteristische  $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ -Abhängigkeit des Radius der oszillatorischen Lösung bei einer Hopf-Bifurkation explizit im Ansatz verwendet. Bei der Anwendung des Verfahrens auf Delay-Differentialgleichungen werden wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen alle notwendigen Berechnungen im endlich-dimensionalen Zustandsraum  $\Gamma$  ausgeführt. Dies hat zur Folge, daß sie zwar einfacher sind als die entsprechenden Berechnungen bei der synergetischen Systemanalyse, zum anderen aber tritt der unendlich-dimensionale Charakter der Delay-Differentialgleichungen und ihrer Lösungen gar nicht in Erscheinung (siehe Kap. 4). Die Möglichkeit, die Lösungen von Delay-Differentialgleichungen in der Nähe einer Instabilität mit Hilfe gewöhnlicher Dif-

ferentialgleichungen zu beschreiben, wird hier also vorausgesetzt, während dies bei der synergetischen Systemanalyse durch Selbstkonsistenz-Betrachtungen explizit gezeigt wird.

Die folgende Tabelle soll die auftretenden Unterschiede bei der Herleitung der Normalform einer Bifurkation bei zeitlich verzögerten Systemen mit Hilfe der synergetischen Systemanalyse einerseits und dem „multiple scaling“-Verfahren andererseits verdeutlichen.

	synergetische Systemanalyse	„multiple scaling“-Verfahren
Formulierung in $\mathcal{C}$	Ja	Nein
charakteristische Gleichung	Ja	Ja
Lösung des linearen Problems: Eigenwerte Eigenfunktionen	Ja	Eigenwerte: Ja Eigenfunktionen: Nein
Verwendung einer Zeitskalenhierarchie	Ja	Ja
Aufspaltung in stabile und instabile Moden	Ja	Nein
Bestimmung der zentralen Mannigfaltigkeit	Ja	Nein
Ordnungsparametergleichung	Ja	Nein
Normalform der Ordnungsparametergleichung	Ja	Ja
Interpretation der Ergebnisse in $\Gamma$	Ja	Ja

Tabelle 9.1: **Gegenüberstellung:**

**Synergetische Systemanalyse - „multiple scaling“**

Unterschiede bei der Ableitung der Normalform einer Bifurkation durch eine synergetische Systemanalyse und das „multiple scaling“-Verfahren.

## 9.2 Beschreibung des Verfahrens

Um unsere Ausführungen einfach zu halten, werden wir das Verfahren an einem konkreten Beispiel erläutern - dem Phasenregelkreises mit zeitlicher Verzögerung aus Kapitel 6 - unsere Ergebnisse jedoch so allgemein wie möglich formulieren. Außerdem werden wir uns in dieser Arbeit bei der Anwendung des „multiple scaling“-Verfahrens auf die Untersuchung der Hopf-Bifurkation beschränken, da wir unsere synergetische Systemanalyse auch nur bei diesem Bifurkationstyp durchgeführt haben.

Wie in 9.1 bereits erwähnt, werden wir einen auf den Bifurkationstyp angepaßten Ansatz für die Lösung der Differentialgleichung verwenden. Wie wir einerseits aus unseren Untersuchungen der Kapitel 6 - 8 und andererseits natürlich aus vielen Arbeiten in der Literatur (siehe z.B. [8], [66], [69], [84], [105], [120], [176]) wissen, zeigt die Amplitude der periodischen Lösung nach der Hopf-Bifurkation eine charakteristische  $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ -Abhängigkeit vom Kleinheitsparameter. Außerdem wissen wir, daß sich in der Nähe der Instabilität die Trajektorien sehr langsam dem Grenzzyklus nähern, weshalb wir in unserem Ansatz zwei verschiedene Zeitskalen verwenden werden. Die erste „schnelle“ Zeitskala wird durch die Periode  $\Omega_0$  der oszillatorischen Lösung charakterisiert und die zweite „langsame“ durch die Veränderung der Amplitude während des transienten Verhaltens. Dabei sind die beiden Zeitskalen durch den Faktor  $\varepsilon$  des Kleinheitsparameters getrennt. Diese Vorüberlegungen motivieren somit den folgenden Ansatz für die oszillatorische Lösung nach der Hopf-Bifurkation:

$$\begin{aligned} z(t) = & z_{stat} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left( z_0^+(t')e^{i\Omega_0 t} + z_0^-(t')e^{-i\Omega_0 t} \right) + \\ & \varepsilon^1 \left( z_2^+(t')e^{2i\Omega_0 t} + z_1^+(t') + z_2^-(t')e^{-2i\Omega_0 t} \right) + \\ & \varepsilon^{\frac{3}{2}} \left( z_4^+(t')e^{3i\Omega_0 t} + z_3^+(t')e^{i\Omega_0 t} + z_3^-(t')e^{-i\Omega_0 t} + z_4^-(t')e^{-3i\Omega_0 t} \right) + \\ & \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (9.2)$$

mit

$$t' = \varepsilon t \quad (9.3)$$

und

$$z_k^\pm(t') = z_k^\mp(t')^* \quad k = 0, 2, 3, 4, \quad (9.4)$$

$$z_1^\pm(t') = z_1^\pm(t')^* = z_1(t'). \quad (9.5)$$

Dabei haben wir uns an die in Kapitel 6 eingeführte kompakte Schreibweise gehalten, damit ein besserer Vergleich der Ergebnisse dieses Kapitels mit denen der Kapitel 6 - 8 möglich ist.

### 9.2.1 Vorüberlegungen

V1: Da wir an einer approximativen Lösung in der Nähe der Instabilität in Form einer Entwicklung nach dem Kleinheitsparameter  $\varepsilon$  interessiert sind, muß der

in der Delay-Differentialgleichung auftretende Kontrollparameter wie folgt umgeschrieben werden

$$R = R_c(1 + \varepsilon). \quad (9.6)$$

V2: Um mit den Ausführungen in den vorangegangenen Kapiteln konform zu bleiben, sprechen wir von einem Zustandsvektor  $z(t)$ , obwohl es sich hier wegen der skalaren Delay-Differentialgleichung (6.12) natürlich um eine skalare Größe handelt. Für die Anwendung des „multiple scaling“-Verfahrens auf vektorielle Gleichungen ist es ohnehin zweckmäßig, sie in die entsprechende skalare Gleichung höherer Ordnung zu überführen (siehe beispielsweise [88]). Da der Zustandsvektor  $z(t)$  gemäß (9.2) vom Kleinheitsparameter  $\varepsilon$  abhängt, entwickeln wir die in (6.12) auftretende Nichtlinearität formal um den stationären Zustand  $z_{stat}$  entsprechend den Ordnungs-Betrachtungen in Abschnitt 6.2.6 bis zur relevanten dritten Ordnung. Der stationäre Zustand wird bei der formalen Entwicklung nicht als bekannt vorausgesetzt, er wird sich vielmehr aus unseren weiteren Betrachtungen ergeben.

V3: Die zeitliche Differentiation der im Zustandsvektor auftretenden langsam veränderlichen Größen  $z_i^\pm(t')$  ergibt:

$$\frac{d}{dt} z_i^\pm(t') = \varepsilon \frac{d}{dt'} z_i^\pm(t'). \quad (9.7)$$

V4: Für die zeitverzögerten Terme erhalten wir

$$z_i^\pm(\varepsilon(t-1)) = z_i^\pm(t' - \varepsilon) = z_i^\pm(t') - \varepsilon \frac{dz_i^\pm(t')}{dt'} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (9.8)$$

### 9.2.2 Vorbereitungen

Mit den Vorüberlegungen V1 und V2 resultiert aus der in Kapitel 6 abgeleiteten Gleichung (6.12) die folgende nichtlineare Delay-Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} z(t) = & -R_c(1 + \varepsilon) \left( \sin(z_{stat}) + \cos(z_{stat})(z(t-1) - z_{stat}) - \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \sin(z_{stat})(z(t-1) - z_{stat})^2 - \frac{1}{6} \cos(z_{stat})(z(t-1) - z_{stat})^3 \right). \end{aligned} \quad (9.9)$$

Wir setzen nun den Ansatz (9.2) in die Gleichung (9.9) ein, beachten dabei die Vorüberlegungen V3 und V4 und führen einen Koeffizientenvergleich der Ordnungen des Kleinheitsparameters  $\varepsilon$  durch. Die in jeder Ordnung auftretenden Fourierkoeffizienten verschiedener Frequenz müssen natürlich getrennt betrachtet werden. Da den negativen Frequenzen die entsprechen konjugiert komplexen Gleichungen zugeordnet sind, betrachten wir nur die positiven Frequenzen, formulieren unsere Resultate jedoch auch für die konjugiert komplexen Größen.

### 9.2.3 Koeffizientenvergleich

- **Ordnung:**  $\varepsilon^0$

- **Frequenz:** 0

$$R_c \sin(z_{stat}) = 0, \quad (9.10)$$

mit den Lösungen

$$z_{stat} = l\pi, \quad \text{mit } l \in \mathbb{Z} \quad (9.11)$$

(vgl. (6.16)). Wie in Kapitel 6 betrachten wir auch hier nur den stationären Referenzzustand  $z_{ref} = 0$  (vgl. (6.17)).

- **Ordnung:**  $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$

- **Frequenz:** 0  
(siehe Anmerkung A1 auf S. 141)
- **Frequenz:**  $\Omega_0$

$$\pm i\Omega_0 z_0^\pm(t') = -R_c e^{\mp i\Omega_0 t'} z_0^\pm(t'). \quad (9.12)$$

Da die Funktionen  $z_0^\pm(t')$  nicht verschwinden sollen, ist diese Bedingung nur durch

$$-R_c e^{\mp i\Omega_0 t'} \mp i\Omega_0 = 0 \quad (9.13)$$

zu erfüllen. Diese Ordnung liefert also offensichtlich die charakteristische transzendente Eigenwertgleichung (vgl. (6.25)), wenn man berücksichtigt, daß für die Eigenwerte  $\lambda$  an der Instabilität  $\lambda = i\Omega_0$  gilt (vgl. (6.25), (6.26) und (6.27)). Der Realteil der Gleichungen (9.13)

$$\cos(\Omega_0) = 0 \quad (9.14)$$

führt dann wie in Kapitel 6 unmittelbar auf die Frequenz

$$\Omega_0 = \frac{\pi}{2}, \quad (9.15)$$

während sich aus dem Imaginärteil der kritische Wert des Kontrollparameters

$$R_c = \Omega_0 \quad (9.16)$$

ergibt (vgl. (6.30)).

- **Ordnung:**  $\varepsilon^1$

- **Frequenz:** 0

$$0 = -R_c z_1^\pm(t'), \quad (9.17)$$

$$\Rightarrow z_1(t') = 0. \quad (9.18)$$

- **Frequenz:**  $\Omega_0$

(siehe Anmerkung A1 auf S. 141)

- **Frequenz:**  $2\Omega_0$

$$\pm 2i\Omega_0 z_2^\pm(t') = -R_c e^{\mp 2i\Omega_0 t'} z_2^\pm(t'). \quad (9.19)$$

Mit der charakteristischen transzendenten Gleichung (9.13) erhalten wir aus (9.19):

$$0 = R_c (1 \mp 2i) z_2^\pm(t'), \quad (9.20)$$

$$\Rightarrow z_2^\pm(t') = 0. \quad (9.21)$$

Die in dieser Ordnung auftretenden unbekannt Funktionen  $z_1(t')$  und  $z_2^\pm(t')$  sind nur dann ungleich Null, wenn die niederste Ordnung der zentralen Mannigfaltigkeit zwei ist.  $z_1(t')$  lässt sich dann durch eine Funktion  $f(z_0^+(t')z_0^-(t'))$  ausdrücken und die Funktionen  $z_2^\pm(t')$  lassen sich in der Form  $f^\pm(z_0^\pm(t')^2)$  schreiben. Dadurch können sie aus den übrigen Termen eliminiert werden. Beim zeitlich verzögerten Phasenregelkreis ist die niederste Ordnung der zentralen Mannigfaltigkeit drei, weshalb  $z_1(t')$  und  $z_2^\pm(t')$  hier verschwinden. Eine genauere Diskussion der Funktionen  $z_1(t')$  und  $z_2^\pm(t')$  werden wir in Abschnitt 9.3.2 des zeitlich verzögerten Verhulst-Systems vornehmen.

- **Ordnung:**  $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$

- **Frequenz:** 0

(siehe Anmerkung A1 auf S. 141)

- **Frequenz:**  $\Omega_0$

$$\begin{aligned} \left(-R_c e^{\mp i\Omega_0 t'}\right) \frac{d}{dt'} z_0^\pm(t') &= \left(-R_c e^{\mp i\Omega_0 t'} \mp i\Omega_0\right) z_3^\pm(t') - \\ &\quad \frac{1}{2} R_c e^{\mp i\Omega_0 t'} \left(2z_0^\pm(t') - z_0^\pm(t')^2 z_0^\mp(t')\right). \end{aligned} \quad (9.22)$$

Die Faktoren vor den Funktionen  $z_3^\pm(t')$  sind identisch mit den linken Seite der Gleichungen (9.13) und verschwinden daher. Die Funktionen  $z_3^\pm(t')$  sind also in dieser Ordnung nicht bestimmbar. Die verbleibenden Gleichungen enthalten im allgemeinen Fall neben  $z_0^\pm(t')$  noch die Funktionen  $z_1^\pm(t')$  und  $z_2^\pm(t')$ . Da diese aber Funktionen von  $z_0^\pm(t')$  sind, stellen die Gleichungen (9.22) letztlich gewöhnliche nichtlineare Differentialgleichungen der Funktionen  $z_0^\pm(t')$  dar. Verwenden wir die charakteristische

transzendente Eigenwertgleichung noch zur Vereinfachung der Faktoren vor  $\frac{d}{dt'}z_0^\pm(t')$  auf den linken Seiten der Gleichungen (9.22) und außerdem die Beziehungen (9.15) und (9.16), dann erhalten wir aus (9.22) schließlich die folgenden, bereits in Normalform vorliegenden Ordnungsparametergleichungen

$$\frac{d}{dt'}z_0^\pm(t') = \mathfrak{a}^\pm z_0^\pm(t') + \mathfrak{b}^\pm z_0^\pm(t')^2 z_0^\mp(t') \quad (9.23)$$

mit

$$\mathfrak{a}^\pm = \frac{R_c^2}{1 + R_c^2}, \quad (9.24)$$

$$\mathfrak{b}^\pm = \mp i \frac{R_c}{2(1 + R_c^2)}. \quad (9.25)$$

Eine Transformation der Gleichungen auf Normalform, wie sie in den Kapiteln 6 - 8 nötig war, entfällt hier.

- **Frequenz:**  $2\Omega_0$   
(siehe Anmerkung A1 auf S. 141)
- **Frequenz:**  $3\Omega_0$

$$\pm 3i\Omega_0 z_4^\pm(t') = \frac{1}{6} R_c e^{\mp 3i\Omega_0 t'} \left( z_0^\pm(t')^3 - 6z_4^\pm(t') \right), \quad (9.26)$$

woraus man mit (9.13), (9.15) und (9.16)

$$z_4^\pm(t') = \frac{1}{24} z_0^\pm(t')^3 \quad (9.27)$$

erhält. Die Funktionen  $z_4^\pm(t')$  gehen jedoch wie die  $z_3^\pm(t')$  in niederster Ordnung nicht in die Normalform (9.23) ein, weshalb sie für unsere Betrachtungen nicht weiter von Bedeutung sind. Die Funktionen  $z_3^\pm(t')$  können ohnehin erst aus der Ordnung  $\varepsilon^2$  und den Frequenzen  $\pm\Omega_0$  bestimmt werden.

Anmerkungen: A1 : Durch den speziell gewählten Ansatz (9.2) existieren in diesen Ordnungen keine Terme mit den entsprechenden Frequenzen. Wir werden daher bei der Behandlung des zeitlich verzögerten Verhulst-Systems und der Gleichung von Wright beim Koeffizientenvergleich diese Frequenzen nicht aufführen.

A2 : Die durch das „multiple scaling“-Verfahren hergeleitete Normalform (9.23) ist nicht identisch mit der Normalform der synergetischen Systemanalyse (6.83). Sie kann jedoch durch eine Koordinatentransformation in diese überführt werden.

### 9.2.4 Lösung der Normalform

Die Normalform (9.23) lösen wir wie in den Kapiteln 6 - 8 durch Transformation auf Polarkoordinaten

$$z_0^\pm(t') = r(t')e^{\pm i\phi(t')} \quad (9.28)$$

(vgl. (6.95), (7.74) und (8.49)) und erhalten für die stationäre Lösung nach kurzer Rechnung

$$z_0^\pm(t') = r_{stat}e^{\pm i\Omega_1 t'} \quad (9.29)$$

mit

$$r_{stat} = \sqrt{2}, \quad (9.30)$$

$$\frac{d\phi(t')}{dt'} = \Omega_1 = 0. \quad (9.31)$$

Setzen wir nun (9.29) in den Ansatz (9.2) ein, dann folgt daraus für den Zustandsvektor:

$$z(t) = \mathbf{c}_0(\varepsilon) + \mathbf{c}_1(\varepsilon) \cos(\Omega(\varepsilon)t + \psi_1) + \mathbf{c}_2(\varepsilon) \cos(2\Omega(\varepsilon)t + \psi_2) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right), \quad (9.32)$$

mit

$$\mathbf{c}_0(\varepsilon) = 0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (9.33)$$

$$\mathbf{c}_1(\varepsilon) = \sqrt{8}\sqrt{\varepsilon} + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right), \quad (9.34)$$

$$\mathbf{c}_2(\varepsilon) = 0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (9.35)$$

$$\Omega(\varepsilon) = \Omega_0 + \Omega_1\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = R_c + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (9.36)$$

Dieses Resultat ist identisch mit dem in Kapitel 6 durch eine synergetische Systemanalyse abgeleiteten Ergebnis (siehe (6.110), (6.122) – (6.126) und die ersten beiden Spalten der Tabelle 6.5). Auch bei diesem Verfahren sind die höheren Ordnungen nur mit erheblichem Aufwand zu bestimmen, weshalb wir unsere Ausführungen für dieses System hier beenden. Im folgenden werden wir das „multiple scaling“-Verfahren ebenfalls auf die in den Kapiteln 7 und 8 behandelten Systeme anwenden, wobei wir die Darstellung unserer Ergebnisse so kompakt wie möglich halten.

## 9.3 Das zeitlich verzögerte Verhulst-System

### 9.3.1 Vorbereitungen

Da die in (7.3) auftretende Nichtlinearität ohnehin nur von zweiter Ordnung und zudem polynomial ist, entfällt hier die in Abschnitt 9.2 beschriebene formale Entwicklung der Nichtlinearität um den stationären Zustand. Wir setzen daher den Ansatz (9.2) sofort in die wegen  $V1$  aus (7.3) folgende Delay-Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}z(t) = R_c^{II}(1 + \varepsilon)(z(t) - z(t-1))^2 \quad (9.37)$$

ein. Die Notation  $R_c^{II}$  für den kritischen Kontrollparameterwert, bei dem die Hopf-Bifurkation auftritt, entspricht der des Kapitels 7 (vgl. auch Abb. 7.5).



### 9.3.2 Koeffizientenvergleich

Die weitere Vorgehensweise ist nun identisch mit der in Abschnitt 9.2.3 beschriebenen.

- **Ordnung:**  $\varepsilon^0$

- **Frequenz:** 0 (stationäre Zustände)

$$R_c^{II} (z_{stat} - z_{stat}^2) = 0, \quad (9.38)$$

mit den Lösungen

$$z_{stat}^{I,II} = 0, 1 \quad (9.39)$$

(vgl. (7.8), (7.9)). Da wir nur die Hopf-Bifurkation untersuchen, wählen wir wie in Kapitel 7 als stationären Referenzzustand  $z_{ref} = z_{stat}^{II} = 1$  (siehe Abb. 7.5).

- **Ordnung:**  $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$

- **Frequenz:**  $\Omega_0$  (charakteristische transzendente Gleichung)

$$\pm i\Omega_0 z_0^\pm(t') = -R_c^{II} \left( 2e^{\mp i\Omega_0} - 1 \right) z_0^\pm(t'), \quad (9.40)$$

$$\Rightarrow -R_c^{II} \left( 2e^{\mp i\Omega_0} - 1 \right) \mp i\Omega_0 = 0. \quad (9.41)$$

Aus dem Realteil von (9.41) erhalten wir die Frequenz und aus dem Imaginärteil den kritischen Kontrollparameterwert:

$$\Omega_0 = \frac{\pi}{3}, \quad (9.42)$$

$$R_c^{II} = \frac{\Omega_0}{\sqrt{3}} \quad (9.43)$$

(vgl. (7.18), (7.26)).

- **Ordnung:**  $\varepsilon^1$  (Einfluß der quadratischen Terme der zentralen Mannigfaltigkeit auf den Zustandsvektor (siehe (7.32), (7.44), (7.46), (7.79) und (7.80)))

- **Frequenz:** 0

$$0 = -R_c^{II} (z_1(t') + 2z_0^\pm(t')z_0^\mp(t')), \quad (9.44)$$

$$\Rightarrow z_1(t') = -2z_0^\pm(t')z_0^\mp(t') \quad (9.45)$$

- **Frequenz:**  $2\Omega_0$

$$\pm 2i\Omega_0 z_2^\pm(t') = -R_c^{II} \left( \left( 2e^{\mp 2i\Omega_0} - 1 \right) z_2^\pm(t') + e^{\mp 2i\Omega_0} z_0^\pm(t') 2 \right). \quad (9.46)$$

Mit (9.41), (9.42) und (9.43) folgt aus (9.46):

$$0 = -R_c^{II} \left( \left( 2e^{\mp 2i\Omega_0} - 1 \right) z_2^\pm(t') + e^{\mp 2i\Omega_0} z_0^\pm(t')^2 \right) \mp 2i\Omega_0 z_2^\pm(t'), \quad (9.47)$$

$$\Rightarrow z_2^\pm(t') = \left( \frac{1 \mp 3\sqrt{3}i}{14} \right) z_0^\pm(t')^2. \quad (9.48)$$

Anhand der Gleichung (7.84) der synergetischen Systemanalyse (siehe Abschnitt 7.2.9) und des Ansatzes (9.2) lassen sich zwischen den Funktionen  $z_1(t')$  und  $z_2^\pm(t')$  des „multiple scaling“-Verfahrens und den aus der zentralen Mannigfaltigkeit berechneten Koeffizienten  $\mathbb{A}_0(\Theta) - \mathbb{A}_2(\Theta)$  und den Ordnungsparametern  $v^\pm(t)$  folgende Beziehungen ableiten:

$$\mathbb{A}_0(0)v^+(t)^2 = \varepsilon z_2^+(t')e^{2i\Omega_0 t}, \quad (9.49)$$

$$\mathbb{A}_1(0)v^+(t)v^-(t) = \varepsilon z_1(t'), \quad (9.50)$$

$$\mathbb{A}_2(0)v^-(t)^2 = \varepsilon z_2^-(t')e^{-2i\Omega_0 t}. \quad (9.51)$$

- **Ordnung:**  $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$  (Normalform der Ordnungsparametergleichungen (vgl. (7.59))

– **Frequenz:**  $\Omega_0$

$$\begin{aligned} \left( 1 - 2R_c^{II} e^{\mp i\Omega_0} \right) \frac{d}{dt'} z_0^\pm(t') &= \left( -R_c^{II} \left( 2e^{\mp i\Omega_0} - 1 \right) \mp i\Omega_0 \right) z_3^\pm(t') - \\ &2R_c^{II} \left( e^{\mp i\Omega_0} z_0^\mp(t') z_2(t') + e^{\mp i\Omega_0} z_0^\pm(t') z_1(t') \right) - \\ &R_c^{II} \left( 2e^{\mp i\Omega_0} - 1 \right) z_0^\pm(t'). \end{aligned} \quad (9.52)$$

Verwenden wir wie in Abschnitt 9.2.3 die charakteristische transzendente Eigenwertgleichung (9.41) und die Ausdrücke (9.45) und (9.48) für die Funktionen  $z_1(t')$  und  $z_2^\pm(t')$ , dann erhalten wir aus (9.52) die folgende Normalform der Ordnungsparametergleichung:

$$\frac{d}{dt'} z_0^\pm(t') = \mathfrak{a}^\pm z_0^\pm(t') + \mathfrak{b}^\pm z_0^\pm(t')^2 z_0^\mp(t'), \quad (9.53)$$

mit

$$\mathfrak{a}^\pm = \frac{R_c^{II} (3R_c^{II} \mp i(R_c^{II} - 1)\sqrt{3})}{(1 - 2R_c^{II} + 4R_c^{II^2})}, \quad (9.54)$$

$$\mathfrak{b}^\pm = -\frac{6R_c^{II} (3(R_c^{II} - 1) \pm i(R_c^{II} + 2)\sqrt{3})}{7(1 - 2R_c^{II} + 4R_c^{II^2})}. \quad (9.55)$$

Die Funktionen  $z_3^\pm(t')$  sind wie schon in Abschnitt 9.2.3 bemerkt in dieser Ordnung nicht bestimmbar.

– **Frequenz:**  $3\Omega_0$

$$\pm 3i\Omega_0 z_4^\pm(t') = R_c^{II} \left( 2e^{\mp 3i\Omega_0} z_0^\pm(t') z_2^\pm(t') + \left( 2e^{\mp 3i\Omega_0} - 1 \right) z_4^\pm(t') \right), \quad (9.56)$$

woraus man mit (9.41), (9.42), (9.43) und (9.48)

$$z_4^\pm(t') = \frac{-5 \pm i\sqrt{3}}{42} z_0^\pm(t')^3 \quad (9.57)$$

erhält.

### 9.3.3 Lösung der Normalform

Für die stationäre oszillatorische Lösung erhalten wir beim zeitlich verzögerten Verhulst-System:

$$z_0^\pm(t') = r_{stat} e^{\pm i\Omega_1 t'} \quad (9.58)$$

mit

$$r_{stat} = \frac{\sqrt{42}}{6} \sqrt{\frac{R_c^{II}}{3R_c^{II} - 1}}, \quad (9.59)$$

$$\frac{d\phi(t')}{dt'} = \Omega_1 = -\sqrt{3} \frac{R_c^{II}}{3R_c^{II} - 1}. \quad (9.60)$$

Mit (9.58) erhalten wir aus unserem Ansatz (9.2) für den Zustandsvektor:

$$z(t) = \mathbf{c}_0(\varepsilon) + \mathbf{c}_1(\varepsilon) \cos(\Omega(\varepsilon)t + \psi_1) + \mathbf{c}_2(\varepsilon) \cos(2\Omega(\varepsilon)t + \psi_2) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right), \quad (9.61)$$

mit

$$\mathbf{c}_0(\varepsilon) = 1 - \frac{7}{3} \frac{R_c^{II}}{3R_c^{II} - 1} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (9.62)$$

$$\mathbf{c}_1(\varepsilon) = \frac{\sqrt{42}}{3} \sqrt{\frac{R_c^{II}}{3R_c^{II} - 1}} \sqrt{\varepsilon} + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right), \quad (9.63)$$

$$\mathbf{c}_2(\varepsilon) = \frac{\sqrt{7}}{3} \frac{R_c^{II}}{3R_c^{II} - 1} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (9.64)$$

$$\Omega(\varepsilon) = \Omega_0 + \Omega_1 \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \sqrt{3} R_c^{II} - \sqrt{3} \frac{R_c^{II}}{3R_c^{II} - 1} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (9.65)$$

Auch in diesem Fall stimmt das Ergebnis (9.61) mit dem Resultat der synergetischen Systemanalyse in Kapitel 7 überein (siehe (7.93) und die ersten beiden Spalten der Tabelle 7.1). Um unsere Untersuchungsreihe abzuschließen, behandeln wir im nächsten Abschnitt unser letztes System.

## 9.4 Die Gleichung von Wright

### 9.4.1 Vorbereitungen

Wie beim zeitlich verzögerten Verhulst-System ist auch bei der Gleichung von Wright aufgrund der polynomialen quadratischen Nichtlinearität der Gleichung (8.1) die formale Entwicklung um den stationären Zustand nicht nötig. Wir setzen daher unseren Ansatz (9.2) in die wegen  $V1$  aus (8.1) folgende Delay-Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}z(t) = -R_c(1 + \varepsilon)z(t-1)(1 + z(t)) \quad (9.66)$$

direkt ein und führen den Koeffizientenvergleich durch.

### 9.4.2 Koeffizientenvergleich

- **Ordnung:**  $\varepsilon^0$

- **Frequenz:** 0 (stationäre Zustände)

$$-R_c(z_{stat} - z_{stat}^2) = 0, \quad (9.67)$$

mit den Lösungen

$$z_{stat}^{I,II} = 0, 1 \quad (9.68)$$

(vgl. (8.8), (8.9)). Da wir nur die Hopf-Bifurkation untersuchen, wählen wir wie in Kapitel 8 als stationären Referenzzustand  $z_{ref} = z_{stat}^I = 0$  und lassen wie in Kapitel 8 den oberen Index wieder weg.

- **Ordnung:**  $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$

- **Frequenz:**  $\Omega_0$  (charakteristische transzendente Gleichung)

$$\pm i\Omega_0 z_0^\pm(t') = -R_c e^{\mp i\Omega_0} z_0^\pm(t'). \quad (9.69)$$

$$\Rightarrow -R_c e^{\mp i\Omega_0} \mp i\Omega_0 = 0. \quad (9.70)$$

Aus dem Realteil erhalten wir wieder die Frequenz und aus dem Imaginärteil den kritischen Kontrollparameterwert:

$$\Omega_0 = \frac{\pi}{2}, \quad (9.71)$$

$$R_c^{II} = \Omega_0 \quad (9.72)$$

(vgl. (8.13), (8.14)).

- **Ordnung:**  $\varepsilon^1$  (Einfluß der quadratischen Terme der zentralen Mannigfaltigkeit auf den Zustandsvektor (siehe (8.21), (8.26) und (8.59)))

– **Frequenz:** 0

$$0 = -R_c z_1^\pm(t'), \quad (9.73)$$

$$\Rightarrow z_1(t') = 0. \quad (9.74)$$

– **Frequenz:**  $2\Omega_0$

$$\pm 2i\Omega_0 z_2^\pm(t') = -R_c \left( 2e^{\mp 2i\Omega_0} z_2^\pm(t') + e^{\mp i\Omega_0} z_0^\pm(t') \right). \quad (9.75)$$

Mit (9.70), (9.71) und (9.72) folgt aus (9.75):

$$0 = R_c(1 \mp 2i) z_2^\pm(t') \pm i R_c z_0^\pm(t')^2, \quad (9.76)$$

$$\Rightarrow z_2^\pm(t') = \left( \frac{2 \mp i}{5} \right) z_0^\pm(t')^2. \quad (9.77)$$

• **Ordnung:**  $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$  (Normalform der Ordnungsparametergleichungen (vgl. (8.37)))

– **Frequenz:**  $\Omega_0$

$$\begin{aligned} \left(1 - R_c e^{\mp i\Omega_0}\right) \frac{d}{dt'} z_0^\pm(t') &= \left(-R_c e^{\mp i\Omega_0} \mp i\Omega_0\right) z_3^\pm(t') - \\ R_c \left( \left(e^{\mp 2i\Omega_0} - e^{\mp i\Omega_0}\right) z_0^\mp(t') z_2(t') + \left(e^{\mp i\Omega_0} + 1\right) z_0^\pm(t') z_1(t') \right) &- \\ R_c e^{\mp i\Omega_0} z_0^\pm(t'). \end{aligned} \quad (9.78)$$

Verwenden wir wie in Abschnitt 9.2.3 die charakteristische transzendente Eigenwertgleichung (9.70) und die Ausdrücke (9.74) und (9.77) für die Funktionen  $z_1(t')$  und  $z_2^\pm(t')$ , dann erhalten wir aus (9.78) wieder die Normalform der Ordnungsparametergleichung:

$$\frac{d}{dt'} z_0^\pm(t') = \mathfrak{o}^\pm z_0^\pm(t') + \mathfrak{b}^\pm z_0^\pm(t')^2 z_0^\mp(t'), \quad (9.79)$$

mit

$$\mathfrak{o}^\pm = \frac{R_c(R_c \pm i)}{1 + R_c^2}, \quad (9.80)$$

$$\mathfrak{b}^\pm = -\frac{R_c(3R_c - 1 \pm i(R_c + 3))}{5(1 + R_c^2)}. \quad (9.81)$$

– **Frequenz:**  $3\Omega_0$

$$3i\Omega_0 z_4^\pm(t') = \mp R_c \left( e^{\mp 3i\Omega_0} z_4^\pm(t') + \left( e^{\mp 2i\Omega_0} + e^{\mp i\Omega_0} \right) z_2^\pm(t') z_0^\pm(t') \right), \quad (9.82)$$

woraus man mit (9.70), (9.71), (9.72) und (9.77)

$$z_4^\pm(t') = \frac{1 \mp 3i}{20} z_0^\pm(t')^3 \quad (9.83)$$

erhält.

### 9.4.3 Lösung der Normalform

Für die stationäre oszillatorische Lösung erhalten wir im Fall der Gleichung von Wright:

$$z_0^\pm(t') = r_{stat} e^{\pm i \Omega_1 t'} \quad (9.84)$$

mit

$$r_{stat} = \sqrt{\frac{5R_c}{3R_c - 1}}, \quad (9.85)$$

$$\frac{d\phi(t')}{dt'} = \Omega_1 = -\frac{R_c}{3R_c - 1}. \quad (9.86)$$

Mit (9.84) erhalten wir aus unserem Ansatz (9.2) für den Zustandsvektor:

$$z(t) = \mathfrak{c}_0(\varepsilon) + \mathfrak{c}_1(\varepsilon) \cos(\Omega(\varepsilon)t + \psi_1) + \mathfrak{c}_2(\varepsilon) \cos(2\Omega(\varepsilon)t + \psi_2) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right), \quad (9.87)$$

mit

$$\mathfrak{c}_0(\varepsilon) = 0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (9.88)$$

$$\mathfrak{c}_1(\varepsilon) = 2\sqrt{\frac{5R_c}{3R_c - 1}}\sqrt{\varepsilon} + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right), \quad (9.89)$$

$$\mathfrak{c}_2(\varepsilon) = 2\frac{\sqrt{5R_c}}{3R_c - 1}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (9.90)$$

$$\Omega(\varepsilon) = \Omega_0 + \Omega_1\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = R_c - \frac{R_c}{3R_c - 1}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (9.91)$$

Auch in diesem Fall stimmt das Ergebnis (9.87), wie erwartet, mit dem Resultat der synergetischen Systemanalyse in Kapitel 8 überein (siehe (8.68) und die ersten beiden Spalten der Tabelle 8.1).

# Kapitel 10

## Diskussion

Unabhängig von [177], [178] wurde ebenfalls in [23] die in Kapitel 2 erwähnte Erweiterung des Eliminationsverfahrens auf zeitlich verzögerte Systeme durchgeführt. Ein Vergleich dieser Arbeit mit [177], [178] und der vorliegenden Arbeit zeigt jedoch wesentliche Unterschiede:

- 1.) In [177], [178] werden die Eigenfunktionen des adjungierten linearen Eigenwertproblems in  $\mathcal{C}^\dagger$  unabhängig vom linearen Eigenwertproblem in  $\mathcal{C}$  bestimmt. In [23] werden die adjungierten Eigenfunktionen dagegen als Linearkombinationen der Eigenfunktionen des linearen Eigenwertproblems dargestellt.
- 2.) Der Einfluß der zentralen Mannigfaltigkeit wird in [23] bei der Herleitung der Ordnungsgleichungen vernachlässigt.
- 3.) Die analytischen Ergebnisse in [23] wurden nicht durch numerische Untersuchungen verifiziert.

Das in [177], [178] hergeleitete Eliminationsverfahren beruht im wesentlichen auf zwei grundlegenden Konzepten. Erstens wird auf die Idee von Krasovskii [103] und Hale [77], [78] zurückgegriffen, die Dynamik in einem erweiterten unendlich-dimensionalen Zustandsraum zu formulieren. Zweitens wird das auf Haken [69], [70], [71], [76] zurückgehende Konzept der Synergetik verwendet, wonach an einer Instabilität die stabilen Moden eliminiert werden können, sodaß die Dynamik nur durch wenige Ordnungsparameter beschrieben werden kann.

Während das in [177], [178] und in Kapitel 6 untersuchte System des zeitlich verzögerten Phasenregelkreises nur die Überprüfung des Ordnungsparameterkonzepts ermöglicht, erlauben die in dieser Arbeit untersuchten Systeme der Kapitel 7 und 8 auch die Überprüfung des Einflusses der zentralen Mannigfaltigkeit auf die Ordnungsgleichungen und damit der gesamten zirkulären Kausalkette (siehe Kapitel 3). Das auf zeitlich verzögerte Systeme erweiterte Konzept der Synergetik wird durch die Untersuchungen in dieser Arbeit vollständig bestätigt. Die analytischen Ergebnisse der Kapitel 6 – 8 konnten einerseits durch Simulationen numerisch und andererseits durch das in Kapitel 9 erläuterte „multiple scaling“-Verfahren analytisch verifiziert werden. Es stellt sich heraus, daß die Synthese aus analytischen und numerischen

Untersuchungsmethoden bei zeitlich verzögerten Systemen von großer Bedeutung ist, da dadurch eine gegenseitige Kontrolle der Ergebnisse möglich ist (siehe hierzu auch [79]). Das in Kapitel 6 angesprochene Periodenverdopplungs-Szenario des zeitlich verzögerten Phasenregelkreises kann natürlich nur numerisch untersucht werden, aber die Zuverlässigkeit und Genauigkeit der numerischen Methoden kann an Instabilitäten wie der erwähnten Hopf-Bifurkation sehr gut überprüft werden.



# Kapitel 11

## Ausblick

### 11.1 Analytik

Im Rahmen der Synergetik können an Instabilitäten nun auch zeitlich verzögerte Systeme adäquat analytisch behandelt werden. Da sich die Dynamik eines Systems an Instabilitäten qualitativ ändert, ist es möglich, gerade an diesen Stellen durch Parameterstudien Theorie und Experiment zu verbinden und freie Parameter anzupassen. Die Voraussetzung dafür ist die analytische Kenntnis der entsprechenden Ordnungsparametergleichungen mit ihren Kontrollparametern. Dies ist von besonderer Bedeutung bei Modellsystemen, die im Rahmen der phänomenologischen Synergetik erstellt wurden. Gerade in der Physiologie, wo zeitlich verzögerte Systeme eine große Rolle spielen, kann eine synergetische Systemanalyse zu neuen wesentlichen Erkenntnissen beitragen, die im allgemeinen dann auch Rückschlüsse auf das zugrundeliegende mikroskopische System erlauben [164]. Auch bei der Versuchsdurchführung kann eine synergetische Systemanalyse entscheidend dazu beitragen, die Effizienz der Untersuchungen zu steigern. Beispielsweise können effektive Kontrollparameter bestimmt oder die Zahl der freien Parameter reduziert werden. Schließlich motiviert die Kenntnis funktionaler Abhängigkeiten auch die Durchführung neuer Experimente.

Eine weiteres wichtiges Anwendungsgebiet des Konzepts der Synergetik ist der zur Zeit noch ausstehende analytische Nachweis des Stabilisierungsverfahrens von Pyragas [124], [135], [136], [137]. Durch entsprechend gewählte zeitlich verzögerte Rückkopplungen gelingt es nämlich, instabile stationäre Zustände oder Grenzzyklen zu stabilisieren. Diese Stabilisierung als Funktion des Rückkopplungsparameters muß sich durch eine synergetische Systemanalyse im Realteil der entsprechenden Eigenwerte nachweisen lassen.

Unsere bisherigen Untersuchungen beschränken sich auf skalare Systeme mit einer festen zeitlichen Verzögerung und auf Bifurkationen der Codimension 1. Es ist daher naheliegend, Systeme mit mehreren festen zeitlichen Verzögerungen oder einer modulierten zeitlichen Verzögerung, bei der die Dichten des Funktionals (4.19) keine Deltafunktionen mehr sein werden, zu untersuchen. Außerdem sollten Untersuchun-

gen an Bifurkationen höherer Codimension vorgenommen werden.

In [152], [154], [153] wurde die Methodik auf zeitlich periodische Referenzzustände erweitert, eine Ableitung der zugehörigen Normalform steht jedoch noch aus. Dies ist deshalb von Bedeutung, da die Struktur der Normalform in diesem Fall nicht wie bei der Hopf-Bifurkation bereits durch den Bifurkationstyp festgelegt ist und somit verschiedene Normalformen möglich sind (siehe z.B. [69]).

Bei der Untersuchung komplizierterer Systeme wird zusätzlich eine Erweiterung der Methodik auf stochastische oder partielle Differentialgleichungen mit zeitlicher Verzögerung nötig. Bei stochastischen Systemen ist in diesem Zusammenhang vor allem der Vergleich von rauschinduzierten und verzögerungsinduzierten Instabilitäten von großem Interesse.

## 11.2 Numerik

Die in Abschnitt 6.4 erwähnte und in Abb. 6.14 dargestellte lineare Einhüllende der Lyapunov-Dimension  $D_L$  als Funktion der zeitlichen Verzögerung bei einer großen Klasse von Systemen muß genauer studiert werden, um eine gemeinsame, möglichst systemunspezifische Charakteristik dieses Phänomens herauszuarbeiten.

Schließlich muß noch erwähnt werden, daß das experimentelle Powerspektrum der „phase slipping“-Dynamik des zeitlich verzögerten Phasenregelkreises eine deutliche  $\frac{1}{f}$ -Charakteristik zeigt (siehe [177]). Die numerischen Untersuchungen des Modellsystems (6.12) zeigen jedoch eine  $\frac{1}{f^2}$  beziehungsweise  $\frac{1}{f^3}$ -Charakteristik (siehe Abb. 6.13). Dies deutet darauf hin, daß das Modell verbessert werden muß, damit auch dieser experimentelle Befund numerisch nachgewiesen werden kann.

Es ist außerdem zu prüfen, ob das in Abschnitt 6.4 dargestellte Periodenverdopplungs-Szenario, das auf die universelle Feigenbaum-Konstante  $\delta$  führt, das einzig mögliche ist, oder ob auch noch Periodenverdopplungs-Szenarien mit anderen Skalierungskonstanten auftreten können.

# Anhang A

## Testsysteme

### A.1 Zeitdiskrete Systeme

#### A.1.1 Bernoulli-Abbildung

Die Bernoulli-Abbildung ist definiert durch:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f^{\text{Ber}}(x_n, r) = rx_n \bmod 1, \\ \text{mit } x_n &\in [0, 1], \quad r \in (0, \infty), \quad f^{\text{Ber}} : [0, 1] \mapsto [0, 1]. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Bei dieser eindimensionalen Abbildung läßt sich der Lyapunov-Exponent als Funktion des Parameters  $r$  analytisch berechnen. Gemäß der Definition des Lyapunov-Exponenten einer eindimensionalen zeitdiskreten Abbildung

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \left| \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_i} \right| \tag{A.2}$$

(vgl. (5.13)) ergibt sich hier:  $\lambda = \log r$ . Die Dichte des invarianten natürlichen Maßes<sup>1</sup> des Attraktors (siehe Kap. 5) nimmt in diesem Fall die einfache Form  $\rho_r^{\text{Ber}}(x) = 1$  an. Aus der Bestimmungsgleichung für den Lyapunov-Exponent mit Hilfe der Dichte des invarianten natürlichen Maßes

$$\lambda = \int_0^1 \log \left| \frac{df(x)}{dx} \right| \rho_r^{\text{Ber}}(x) dx \tag{A.3}$$

(vgl. (5.16)) erhält man natürlich wieder  $\lambda = \log r$ . Die Bernoulli-Abbildung zeigt also für Parameterwerte  $r > 1$  chaotisches Verhalten, da der Lyapunov-Exponent  $\lambda$  dann positive Werte annimmt.

---

<sup>1</sup>Eine zu (5.8) analoge Definition des invarianten Maßes ist die folgende: Man nennt ein Maß invariant, wenn seine zugehörige Dichte die Frobenius-Perron-Gleichung erfüllt. Für eine eindimensionale Abbildung  $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$  lautet diese:

$$\rho(y) = \int_0^1 \delta(y - f(x)) \rho(x) dx = \sum_{x_i: f(x_i)=y} \frac{\rho(x_i)}{\left| \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_i} \right|}.$$

### A.1.2 Logistische Abbildung

Die logistische Abbildung ist definiert durch:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f^{\text{Log}}(x_n, a) = ax_n(1 - x_n), \\ \text{mit } x_n &\in [0, 1], \quad a \in (0, 4], \quad f^{\text{Log}} : [0, 1] \mapsto [0, 1]. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Die Fixpunkte der Abbildung sind  $x_1^{\text{Fix}} = 0$  und  $x_2^{\text{Fix}} = 1 - \frac{1}{a}$ . Für  $0 < a < 1$  ist  $x_1^{\text{Fix}} = 0$  stabil und  $x_2^{\text{Fix}} = 1 - \frac{1}{a}$  instabil. Bei  $a_c = 1$  verliert  $x_1^{\text{Fix}} = 0$  seine Stabilität, während der zweite Fixpunkt  $x_2^{\text{Fix}} = 1 - \frac{1}{a}$  stabil wird. Dieser wird bei  $a_0 = 3$  ebenfalls instabil und ein stabiler Zweier-Zyklus (P2) mit  $x_{1,2}^{\text{P2}} = \frac{1}{2} \frac{a+1 \pm \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{a}$  entsteht. Bei  $a_1 = 1 + \sqrt{6}$  verliert auch der Zweier-Zyklus seine Stabilität und ein stabiler Vierer-Zyklus (P4) entsteht. Dieses Periodenverdopplungs-Szenario (siehe Tabelle A.1) setzt sich bis zum Wert  $a_\infty \approx 3.56994 \dots$  fort. Der an dieser Stelle existierende stabile sogenannte *Feigenbaum-Attraktor* (P $\infty$ ) besitzt die Periode „ $\infty$ “ und stellt wie die Cantor-Menge eine fraktale Menge mit Lebesgue-Maß Null aber einem von Null verschiedenen Hausdorff-Maß mit der Hausdorff-Dimension  $D_H \approx 0.538 \dots$  dar<sup>2</sup>. Es handelt sich hier um einen seltsamen Attraktor, der aber nicht chaotisch ist, da der Lyapunov-Exponent an dieser Stelle exakt Null ist (siehe hierzu auch [59]). Für Parameter-Werte  $a > a_\infty$  existiert dann ein stabiler, seltsamer und chaotischer Attraktor (siehe Abb. A.1). Aus der Selbstähnlichkeit und dem damit verbundenen Skalierungsverhalten des Periodenverdopplungs-Szenarios erhält man zwei universelle Skalierungskonstanten  $\alpha$  und  $\delta$ , die man als Feigenbaum-Konstanten bezeichnet ([36], [65]). Sie sind wie folgt definiert:

$$\alpha = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}}, \quad (\text{A.5})$$

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^* - a_{n-1}^*}{a_{n+1}^* - a_n^*}. \quad (\text{A.6})$$

$d_n$  : Abstand des Punktes  $x = \frac{1}{2}$  vom jeweils nächstgelegenen Punkt des periodischen superstabilen Zyklus (P $n$ ). Die superstabilen Zyklen enthalten alle den Punkt  $x = \frac{1}{2}$ . Wegen (5.13) ist der Lyapunov-Exponent für diese Werte des Parameters nicht definiert, denn es gilt dann:

$$\lambda \rightarrow -\infty \quad .$$

$a_n$  : Kritische Werte des Parameters  $a$  - hier finden die Periodenverdopplungen von  $n$  nach  $n + 1$  statt, der Lyapunov-Exponent nimmt den Wert 0 an.

$a_n^*$  : Kritische Werte des Parameters  $a$  - hier existieren die superstabilen Zyklen des Periodenverdopplungs-Szenarios.

Dabei ist  $\alpha$  mit der Selbstähnlichkeit im Zustandsraum und  $\delta$  (siehe die Tabellen A.1, A.2) mit der im Parameterraum verbunden.

<sup>2</sup>Zur Definition dieser beiden Maßbegriffe siehe beispielsweise [16], [38], [80].

**Anmerkungen:**

A1 : Im streng mathematischen Sinn sind die Skalierungskonstanten  $\alpha$  und  $\delta$  nur für alle eindimensionalen Abbildungen, deren Taylorentwicklung um das Maximum der Abbildungsfunktion mit einem Glied zweiter Ordnung beginnt universell gültig (vgl. [30], [85], [86], [87]). Numerische Untersuchungen an dissipativen, mehrdimensionalen Abbildungen (siehe z.B. Abschnitt A.1.3) sowie an dissipativen, mehrdimensionalen zeitkontinuierlichen Systemen (siehe beispielsweise [108], [156]) aber auch an eindimensionalen zeitkontinuierlichen Systemen mit zeitlicher Verzögerung (siehe Abschnitt 6.4) zeigen, daß sie auch für andere Systeme Gültigkeit besitzen. Es ist sehr naheliegend, daß dies mit der Abnahme des Zustandsraumvolumens der Attraktoren dissipativer Systeme zusammenhängt, wodurch diese zu „quasi“ eindimensionalen Systemen werden (siehe hierzu [27], [108], [109]).

A2 : Ungeklärt ist jedoch, warum die Werte  $\alpha$  und  $\delta$  dieser speziellen Klasse eindimensionaler Abbildungen angenommen werden (siehe Anmerkung A1).

Durch Anwendung von Renormalisierungsmethoden und darauf aufbauende, aufwendige numerische Untersuchungen (siehe z.B. [36], [37]) lassen sich die Skalierungskonstanten  $\alpha$  und  $\delta$  sehr genau bestimmen:

$$\begin{aligned}\alpha &\approx 2.5029078\dots, \\ \delta &\approx 4.6692016\dots\end{aligned}\tag{A.7}$$

Das Bifurkationsdiagramm und der Lyapunov-Exponent als Funktion des Parameters  $a$  ist in Abb. A.1 zu sehen. An den Verzweigungsstellen ist der Lyapunov-Exponent Null und an den Stellen der superstabilen Zyklen, die alle den Punkt  $x = \frac{1}{2}$  enthalten, gilt wie bereits erwähnt:  $\lambda \rightarrow -\infty$ . Anhand der gemäß der Konstante  $\delta$  skalierten „Spitzen“ (Polstellen des Lyapunov-Exponenten) ist die selbstähnliche Struktur deutlich zu erkennen. Die ersten beiden Spitzen lassen sich aus Gleichung (5.16) und

$$\rho_a^{\text{Log}}(x) = \begin{cases} \delta(x - x_2^{\text{Fix}}) & \text{für } 0 \leq a \leq 3 \\ \frac{1}{2} [\delta(x - x_1^{\text{P2}}) + \delta(x - x_2^{\text{P2}})] & \text{für } 3 \leq a \leq 1 + \sqrt{6} \end{cases}\tag{A.8}$$

analytisch bestimmen:

$$\lambda = \begin{cases} \log|2 - a| & \text{für } 0 \leq a \leq 3 \\ \log|a^2 - 2a - 4| & \text{für } 3 \leq a \leq 1 + \sqrt{6} \end{cases}.\tag{A.9}$$

Durch die Transformation

$$x_n = h(y_n) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi y_n)),\tag{A.10}$$

wird für den Parameterwert  $a = 4$  ein Diffeomorphismus zwischen der logistischen Abbildung  $f_4^{\text{Log}}$  und der Bernoulli-Abbildung  $f_2^{\text{Ber}}$  mit dem Parameterwert  $r = 2$

erzeugt, der dazu führt, daß man die Dichte des invarianten natürlichen Maßes und damit den Lyapunov-Exponent der logistischen Abbildung für den Parameterwert  $a = 4$ , also im chaotischen Regime, ebenfalls analytisch bestimmen kann<sup>3</sup>. Hier ergibt sich:

$$\rho_4^{\text{Log}}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \quad (\text{A.11})$$

und daraus

$$\lambda = \int_0^1 \rho_4^{\text{Log}}(x) \log \left| \frac{df(x)}{dx} \right| dx = \log 2. \quad (\text{A.12})$$

Abbildung A.1: **Logistische Abbildung: Bifurkationsdiagramm**

Dargestellt ist das Bifurkationsdiagramm (**oben**) und der Lyapunov-Exponent (**unten**) als Funktion des Kontrollparameters  $a$  im Intervall  $[1, 4]$ . Die gestrichelten vertikalen Linien markieren die ersten vier Bifurkationspunkte des Periodenverdopplungs-Szenarios. Der Lyapunov-Exponent nimmt an den entsprechenden Stellen im Parameterraum den Wert Null an. Die Polstellen des Lyapunov-Exponenten entsprechen den superstabilen Zyklen.

Der positive Lyapunov-Exponent weist auf das chaotische Verhalten des Systems hin. Im informationstheoretischen Sinn nach Shannon [90], [91], [106], [149], [150], [151]

---

<sup>3</sup>Siehe hierzu die Fußnote auf Seite 56.

stellt es eine Informationsquelle dar, die bei diesem Parameterwert pro Iteration genau ein *Bit* an Information produziert. Die Abnahme der Information, die wir über das System besitzen, beispielsweise durch die Kenntnis der Anfangsbedingung mit einer bestimmten Genauigkeit, beträgt somit ein *Bit* pro Iteration.

$n$	Parameter $a_n$	Periode vor der Bifurkation	$\delta_n = \frac{a_{n-1}-a_n}{a_n-a_{n+1}}$
0	3 (exakt)	1	—
1	$1 + \sqrt{6} \approx 3.4495$ (exakt)	2	$4.7518 \pm 5 \cdot 10^{-5}$
2	$3.544083 \pm 10^{-6}$	4	$4.6550 \pm 3 \cdot 10^{-4}$
3	$3.5644039 \pm 10^{-7}$	8	$4.6664 \pm 4 \cdot 10^{-4}$
4	$3.56875863 \pm 10^{-8}$	16	$4.6697 \pm 2 \cdot 10^{-4}$
5	$3.56969119 \pm 10^{-8}$	32	$4.6649 \pm 6 \cdot 10^{-4}$
6	$3.56989110 \pm 10^{-8}$	64	—

Tabelle A.1: **Logistische Abbildung: Parameterwerte der Bifurkationspunkte des Periodenverdopplungs-Szenarios**

$n$	Parameter $a_n^*$	Periode	$\delta_n = \frac{a_{n-1}^*-a_n^*}{a_n^*-a_{n+1}^*}$
0	2 (exakt)	1	—
1	$1 + \sqrt{5} \approx 3.2361$ (exakt)	2	$\approx 4.7089 \pm 0$
2	$\approx 3.4985 \pm 10^{-16}$	4	$\approx 4.6808 \pm 0$
3	$\approx 3.5546 \pm 10^{-16}$	8	$\approx 4.6630 \pm 4 \cdot 10^{-6}$
4	$3.56666738 \pm 10^{-8}$	16	$\approx 4.6684 \pm 4 \cdot 10^{-5}$
5	$3.56924353 \pm 10^{-8}$	32	$\approx 4.6690 \pm 2 \cdot 10^{-4}$
6	$3.56979529 \pm 10^{-8}$	64	—

Tabelle A.2: **Logistische Abbildung: Parameterwerte der superstabilen Zyklen des Periodenverdopplungs-Szenarios**

Die ersten kritischen Parameterwerte  $a_n$  der Bifurkationspunkte (Tab. A.1) beziehungsweise  $a_n^*$  der superstabilen Zyklen (Tab. A.2) des Periodenverdopplungs-Szenarios und die daraus ermittelten Werte  $\delta_n$ . Die  $a_n$ -Werte entsprechen den Nullstellen und die  $a_n^*$ -Werte den Polen des Lyapunov-Exponenten vor dem chaotischen Regime (vgl. Abb. A.1).

### A.1.3 Hénon-Abbildung

Die Hénon-Abbildung ist definiert durch:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} &= bx_n, \end{aligned} \tag{A.13}$$

mit  $x_n, y_n, a, b \in \mathbb{R}$ .

Für  $b = 0$  ergibt sich eine eindimensionale Abbildung. Das Skalierungsverhalten eines auftretenden Periodenverdopplungs-Szenarios muß für  $b = 0$  also auf die beiden Konstanten (A.7) führen<sup>4</sup>. Die Übereinstimmung der Skalierungskonstante  $\delta$  läßt sich anhand der Transformation

$$\begin{aligned} x_n &\mapsto 2 \frac{2x'_n - 1}{a' - 2}, \\ a &\mapsto \frac{1}{4} a' (a' - 2), \end{aligned} \tag{A.14}$$

die einen Diffeomorphismus zwischen der Hénon-Abbildung (A.13) und der logistischen Abbildung (A.4) erzeugt, wegen

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a'_{n-1}(a'_{n-1} - 2) - a'_n(a'_n - 2)}{a'_n(a'_n - 2) - a'_{n+1}(a'_{n+1} - 2)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a'_{n-1} - a'_n)(a'_{n-1} + a'_n - 2)}{(a'_n - a'_{n+1})(a'_n + a'_{n+1} - 2)} = \\ &= \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a'_{n-1} - a'_n)}{(a'_n - a'_{n+1})}}_{=\delta} \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a'_{n-1} + a'_n - 2)}{(a'_n + a'_{n+1} - 2)}}_{=1} = \delta \end{aligned}$$

beweisen. Ein entsprechender Beweis läßt sich auch für die Skalierungskonstante  $\alpha$  angeben.

Die Determinante der Jacobi-Matrix der Abbildung (A.13) ist  $-b$ . Das bedeutet, daß sie für  $|b| < 1$  dissipativ, und für  $|b| = 1$  konservativ ist. Für  $b = 0.3$  erhält man aus den Nullstellen des größten Lyapunov-Exponenten  $\lambda_1$  (siehe Tabelle A.3) ebenfalls die beiden Skalenkonstanten (A.7). Für die konservative Hénon-Abbildung mit  $b = -1$  ergibt sich ebenfalls ein Periodenverdopplungs-Szenario, dessen Skalierungsverhalten aber durch zwei andere Konstanten

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &\approx 4.018 \dots \\ \tilde{\delta} &\approx 8.721 \dots \end{aligned} \tag{A.15}$$

bestimmt wird (siehe z.B. [147]). Dies ist ein weiteres Indiz dafür, daß die schon angesprochene Dissipation und die damit verbundene Abnahme des Zustandsraumvolumens eines Attraktors dazu führt, daß Periodenverdopplungs-Szenarien dissipativer Systeme auf die Skalierungskonstanten eindimensionaler zeitdiskreter Abbildungen führen<sup>5</sup>. Die Abbildung A.2 zeigt das Bifurkationsdiagramm der Variable  $x$

<sup>4</sup>Siehe hierzu die Anmerkung A1 auf Seite 155

<sup>5</sup>Siehe hierzu die Anmerkungen A1 und A2 auf Seite 155.



der Hénon-Abbildung zusammen mit den beiden numerisch bestimmten Lyapunov-Exponenten als Funktion des Kontrollparameters  $a$  im Intervall  $[0, 1.4]$  beim Parameterwert  $b = 0.3$ . Das Periodenverdopplungs-Szenario vor dem kritischen Wert  $a_\infty \approx 1.05805\dots$  des Kontrollparameters und die periodischen Fenster im chaotischen Regime sind deutlich zu erkennen.

$n$	Parameter $a_n$	Periode vor der Bifurkation	$\delta_n = \frac{a_{n-1}-a_n}{a_n-a_{n+1}}$
0	$0.36749 \pm 10^{-5}$	1	—
1	$0.91250 \pm 10^{-5}$	2	$4.808 \pm 10^{-3}$
2	$1.02585 \pm 10^{-5}$	4	$4.486 \pm 4 \cdot 10^{-3}$
3	$1.05112 \pm 10^{-5}$	8	$4.645 \pm 2 \cdot 10^{-2}$
4	$1.05656 \pm 10^{-5}$	16	$4.650 \pm 10^{-1}$
5	$1.05773 \pm 10^{-5}$	32	$4.665 \pm 3 \cdot 10^{-1}$
6	$1.0579808 \pm 10^{-7}$	64	$4.670 \pm 2 \cdot 10^{-1}$
7	$1.0580345 \pm 10^{-7}$	128	$4.669 \pm 10^{-1}$
8	$1.0580460 \pm 10^{-7}$	256	$4.832 \pm 3 \cdot 10^{-1}$
9	$1.05804838 \pm 10^{-8}$	512	—

Tabelle A.3: **Hénon-Abbildung: Parameterwerte der Bifurkationspunkte des Periodenverdopplungs-Szenarios**

Die ersten kritischen Parameterwerte  $a_n$  der Bifurkationspunkte des Periodenverdopplungs-Szenarios und die daraus ermittelten Werte  $\delta_n$  für  $b = 0.3$ . Die  $a_n$ -Werte entsprechen den Nullstellen des größten Lyapunov-Exponenten vor dem chaotischen Regime (vgl. Abbn. 5.2, 5.6 und A.2).

In der Tabelle A.4 sind für die in der Literatur häufig verwendeten Standard-Parameter  $a = 1.4, b = 0.3$  die mit Hilfe des Verfahrens von Wolf et al. [179] (siehe Abschnitt 5.5) numerisch bestimmten Lyapunov-Exponenten und die sich daraus ergebende Lyapunov-Dimension explizit angegeben.

$$\text{Lyapunov-Exponenten: } \lambda_1 \approx 0.4211, \lambda_2 \approx -1.6248$$

$$\text{Lyapunov-Dimension: } D_L = 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|} \approx 1.259$$

Tabelle A.4: **Hénon-Abbildung: Lyapunov-Exponenten und Lyapunov-Dimension für die Standard-Parameter  $a = 1.4, b = 0.3$ .**

Abbildung A.2: **Hénon-Abbildung: Bifurkationsdiagramm**

Dargestellt ist das Bifurkationsdiagramm der Variable  $x$  (**oben**) und die beiden gemäß (5.36) numerisch bestimmten Lyapunov-Exponenten (**unten**) als Funktion des Kontrollparameters  $a$  im Intervall  $[0, 1.4]$  beim Parameterwert  $b = 0.3$ . Die gestrichelten vertikalen Linien markieren die ersten vier Bifurkationspunkte des Periodenverdopplungs-Szenarios. Der größte Lyapunov-Exponent  $\lambda_1$  nimmt an den entsprechenden Stellen im Parameterraum den Wert Null an.

### A.1.4 Dissipative Standard-Abbildung

Die dissipative Standard-Abbildung ist definiert durch:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - K \sin(x_n) + by_n, \\ y_{n+1} &= -K \sin(x_n) + by_n, \end{aligned} \tag{A.16}$$

mit  $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ ,  $K, b \in (0, \infty)$ .

Sie läßt sich aus dem zeitkontinuierlichen System des periodisch angestoßenen starren Rotators ableiten und stellt somit ein Beispiel für die in Kapitel 4 erwähnte stroboskopische Darstellung eines zeitkontinuierlichen Systems dar. Die drei Freiheitsgrade des zeitkontinuierlichen Systems werden auf zwei Freiheitsgrade des zeitdiskreten Systems reduziert. Die gesamte relevante Dynamik des zeitkontinuierlichen Systems kann anhand der zweidimensionalen zeitdiskreten Abbildung untersucht werden. Eine Herleitung findet sich beispielsweise in [108], [109]. Für  $b = 0$  geht die dissipative Standard-Abbildung in die bekannte konservative Chirikov-Abbildung [25] über.

#### Abbildung A.3: *Dissipative Standard-Abbildung: Lyapunov-Exponenten*

*Dargestellt sind die beiden gemäß (5.36) numerisch bestimmten Lyapunov-Exponenten der zweidimensionalen dissipativen Standard-Abbildung (A.16) als Funktion des Kontrollparameters  $K$  im Intervall  $[0, 10]$  beim Parameterwert  $b = 0.1$ .*

Abbildung A.3 zeigt die beiden numerisch bestimmten Lyapunov-Exponenten dieses Systems für das Intervall  $[0, 10]$  des Parameters  $K$  zum Parameterwert  $b = 0.1$ . Der chaotische Attraktor zusammen mit der lokalen Divergenzrate bei den

Parameterwerten  $K = 4.1$ ,  $b = 0.1$  ist in Abbildung 5.3 dargestellt. Der Übergang ins chaotische Regime bei  $K \approx 3.95$  findet auch bei diesem System über ein Periodenverdopplungs-Szenario statt. Deutlich zu erkennen sind auch hier wieder periodische Fenster im chaotischen Regime.

In der Tabelle A.5 sind für die in der Literatur häufig verwendeten Standard-Parameter  $K = 4.1$ ,  $b = 0.1$  die mit Hilfe des Verfahrens von Wolf et al. [179] (siehe Abschnitt 5.5) numerisch bestimmten Lyapunov-Exponenten und die sich daraus ergebende Lyapunov-Dimension explizit angegeben.

$$\begin{aligned} \text{Lyapunov-Exponenten: } & \lambda_1 \approx 0.65193629, \lambda_2 \approx -2.95453525 \\ \text{Lyapunov-Dimension: } & D_L = 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|} \approx 1.221 \end{aligned}$$

Tabelle A.5: *Dissipative Standard-Abbildung: Lyapunov-Exponenten und Lyapunov-Dimension für die Standard-Parameter  $a = 1.4, b = 0.3$ .*

## A.2 Zeitkontinuierliche Systeme

### A.2.1 Das Lorenz-System

Das Lorenz-System ist durch die drei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \sigma(y(t) - x(t)), \\ \frac{d}{dt}y(t) &= x(t)(r - z(t)) - y(t), \\ \frac{d}{dt}z(t) &= x(t)y(t) - bz(t), \end{aligned} \tag{A.17}$$

mit  $x, y, z, \sigma, r, b \in \mathbb{R}$  definiert und besitzt die drei Fixpunkte:

$$F_0 = (0, 0, 0), \tag{A.18}$$

$$F_{\pm} = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1). \tag{A.19}$$

Das System wurde erstmals von Lorenz [112], [113] im Jahr 1963 bei der Entwicklung von meteorologischen Modellen für die Wettervorhersage hergeleitet. Bei der theoretischen Behandlung des Lasers lassen sich für die makroskopischen Variablen  $E(t)$  (Amplitude des elektrischen Feldes),  $P(t)$  (Amplitude der Polarisation) und  $D(t)$  (Inversion) Bewegungsgleichungen ableiten, die unter bestimmten Näherungen ebenfalls auf das Lorenz-System führen [67], [68], [72].

Die Gleichungen (A.17) wurden zu einem Paradigma der Chaos-Forschung und sind inzwischen sehr genau untersucht worden (siehe beispielsweise [97]), [156]. Die folgende Abbildung A.4 zeigt die drei numerisch bestimmten Lyapunov-Exponenten des Lorenz-Systems. Die Divergenz der rechten Seite des Gleichungssystems (A.17) läßt sich zu

$$-(\sigma + 1 + b) \tag{A.20}$$

bestimmen. Sie ist zeitunabhängig und daher folgt aus der in Anhang B abgeleiteten Gleichung (B.13) für die Summe der Lyapunov-Exponenten:

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i = -\sigma - 1 - b. \quad (\text{A.21})$$

Dieses Resultat haben wir natürlich zur Überprüfung der numerisch bestimmten Lyapunov-Exponenten herangezogen.

Abbildung A.4: **Lorenz-System: Lyapunov-Exponenten**

Dargestellt sind die drei gemäß (5.36) numerisch bestimmten Lyapunov-Exponenten als Funktion des Kontrollparameters  $r$  im Intervall  $[0, 110]$  bei den Parameterwerten  $\sigma = 16.0$ ,  $b = 4.0$ . Deutlich zu erkennen ist die erste Bifurkation bei  $r = 1$ . Hier wird der Fixpunkt  $F_0$  instabil und die beiden anderen Fixpunkte  $F_{\pm}$  werden stabil. Bei  $r \approx 32$  werden diese ebenfalls instabil und es erfolgt ein Übergang zu chaotischem Verhalten über transientes Chaos. Außerdem sind die bei höheren  $r$ -Werten auftretenden periodischen Fenster zu erkennen. Hier wurden verschiedene Periodenverdopplungs-Szenarien ins Chaos beobachtet (siehe beispielsweise [156]), die wie bei der logistischen Abbildung auf die nach Feigenbaum benannten universellen Skalierungskonstanten (A.7) führen.

# Anhang B

## Das Volumenelement im Zustandsraum

Ausgangspunkt für die folgenden Betrachtungen ist das  $m$ -dimensionale zeitkontinuierliche dynamische System ohne zeitliche Verzögerung (4.6):

$$\frac{d}{dt}\underline{z}(t) = \underline{f}(t, \underline{z}(t), \{\sigma_k\}) . \quad (\text{B.1})$$

Für ein infinitesimales Zeitintervall  $\Delta t$  gilt:

$$\underline{z}(t + \Delta t) = \underline{z}(t) + \underline{f}(t, \underline{z}(t), \{\sigma_k\}) \Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2) . \quad (\text{B.2})$$

Betrachtet man nun diese infinitesimale Zeitentwicklung bis zur ersten Ordnung in  $\Delta t$  als eine Koordinatentransformation

$$\tilde{z}_i(t) = z_i(t + \Delta t) = z_i(t) + f_i(t, \underline{z}(t), \{\sigma_k\}) \Delta t, \quad i = 1 \dots m, \quad (\text{B.3})$$

so sind die Elemente der Transformationsmatrix  $(\alpha_{ij})$  gegeben durch:

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial \tilde{z}_i(t)}{\partial z_j(t)} = \delta_{ij} + \frac{\partial f_i(t, \underline{z}(t), \{\sigma_k\})}{\partial z_j(t)} \Delta t, \quad i, j = 1 \dots m . \quad (\text{B.4})$$

Ein infinitesimales Volumenelement  $dV$  transformiert sich gemäß

$$d\tilde{V} = \sqrt{g} dV, \quad (\text{B.5})$$

wobei  $g$  die Determinante des durch die Koordinatentransformation (B.3) erzeugten metrischen Tensors  $(g_{kl})$  ist. Seine Koordinaten lassen sich aus der Transformationsmatrix  $(\alpha_{ij})$  zu

$$g_{kl} = \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \alpha_{il}, \quad k, l = 1 \dots m \quad (\text{B.6})$$

bestimmen. Berücksichtigt man auch hier nur Terme erster Ordnung in  $\Delta t$ , so folgt:

$$g = 1 + 2 \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i(t, \underline{z}(t), \{\sigma_k\})}{\partial z_i(t)} \Delta t = 1 + 2 \Delta t \operatorname{div} \underline{f}(\underline{z}(t), t, \{\sigma_k\}) . \quad (\text{B.7})$$

Für das transformierte Volumenelement  $d\tilde{V}$  erhält man dann durch Einsetzen in die Gleichung (B.5) und anschließende Entwicklung bis zur ersten Ordnung in  $\Delta t$ :

$$d\tilde{V} = (1 + \Delta t \operatorname{div} \underline{f}(t, \underline{z}(t), \{\sigma_k\})) dV. \quad (\text{B.8})$$

Aufgrund der Transformation (B.3) ist dies gleichbedeutend mit

$$dV(t + \Delta t) = (1 + \Delta t \operatorname{div} \underline{f}(t, \underline{z}(t), \{\sigma_k\})) dV(t), \quad (\text{B.9})$$

woraus man im Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$  folgende Differentialgleichung für das Volumenelement  $dV$  erhält:

$$\frac{d}{dt} dV(t) = \operatorname{div} \underline{f}(t, \underline{z}(t), \{\sigma_k\}) dV(t). \quad (\text{B.10})$$

Deren formale Lösung kann man sofort angeben:

$$dV(t) = dV(0) e^{\int_0^t \operatorname{div} \underline{f}(t', \underline{z}(t'), \{\sigma_k\}) dt'}. \quad (\text{B.11})$$

Da die Lyapunov-Exponenten  $\lambda_i$  eines Attraktors  $\mathbb{A}$  eines dynamischen Systems die exponentielle Divergenz, Indifferentheit beziehungsweise Konvergenz benachbarter Trajektorien im zeitlichen Mittel beschreiben (siehe Kapitel 5), besteht zwischen ihnen und der zeitlichen Veränderung eines Volumenelements im Zustandsraum ebenfalls ein Zusammenhang. Es läßt sich zeigen (siehe beispielsweise [33]), daß gilt:

$$dV(t) = dV(0) e^{t \sum_{i=1}^m \lambda_i}. \quad (\text{B.12})$$

Durch Vergleich von (B.11) mit (B.12) und unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Lyapunov-Exponenten nur im Grenzfall  $t \rightarrow \infty$  definiert sind (siehe Kapitel 5), erhält man schließlich die wichtige Gleichung:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{div} \underline{f}(t', \underline{z}(t'), \{\sigma_k\}) dt'. \quad (\text{B.13})$$

# Anhang C

## Numerische Integrationsverfahren für zeitlich verzögerte Systeme

### C.1 Diskretisierung

Unabhängig von der Wahl des Integrationsverfahrens wird bei der numerischen Integration von dynamischen Systemen eine Diskretisierung vorgenommen. Bei partiellen Differentialgleichungssystemen werden der Ort und die Zeit und bei gewöhnlichen nur die Zeit diskretisiert. Dabei können die bei gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen ohne zeitliche Verzögerung anwendbaren Verfahren wie *Euler-Vorwärts*, *verbesserte Euler-Vorwärts*, *Euler-Rückwärts* oder Verfahren vom *Runge-Kutta-Typ* auch auf solche mit zeitlicher Verzögerung angewendet werden, wenn man die Retardierung entsprechend berücksichtigt.

Um die Darstellungen übersichtlich zu halten, soll auf die Angabe der expliziten Abhängigkeit der Funktion  $\underline{f}$  vom Satz der äußeren Parameter  $\{\sigma_k\}$  verzichtet werden. Ohne weitere Beschränkung der Allgemeinheit ist der Ausgangspunkt unserer Betrachtungen damit das folgende Anfangswertproblem des  $m$ -dimensionalen, zeitkontinuierlichen und zeitlich verzögerten Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underline{z}(t) &= \underline{f}(t, \underline{z}(t), \underline{z}(t - \tau)) \quad \text{für } t > 0, \\ \text{mit } \underline{z}(t) &= \underline{g}(t) \quad \text{für } t \in [-\tau, 0], \end{aligned} \tag{C.1}$$

wobei  $\underline{z}(t)$  wieder den Zustandsvektor im  $m$ -dimensionalen Zustandsraum  $\Gamma$  darstellt. Das Differentialgleichungssystem (C.1) kann, wie bereits in Kapitel Abschnitt 4.5 erwähnt, durch Skalierung der Zeit  $t = \tau t'$  und Einführung des neuen Zustandsvektors  $\underline{z}'(t') = \underline{z}(\tau t')$  in das folgende äquivalente System überführt werden, wenn man die gestrichenen Größen wieder durch ungestrichene ersetzt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underline{z}(t) &= \tau \underline{f}(\tau t, \underline{z}(t), \underline{z}(t - 1)) \quad \text{für } t > 0, \\ \text{mit } \underline{z}(t) &= \underline{g}(t) \quad \text{für } t \in [-1, 0]. \end{aligned} \tag{C.2}$$



Das System (C.2) ist der zeitlichen Verzögerung besser angepaßt<sup>1</sup>, da die für die Integration des Systems notwendige Diskretisierung nun für ein festes, von der zeitlichen Verzögerung  $\tau$  unabhängiges Intervall durchgeführt werden kann. Wie schon in Kapitel Abschnitt 4.5 angemerkt, ist der mathematisch adäquate Rahmen für die Beschreibung der Dynamik zeitlich verzögerter Systeme der erweiterte unendlich-dimensionale Zustandsraum  $\mathcal{C}$  der auf dem Intervall  $[-\tau, 0]$  beziehungsweise  $[-1, 0]$  definierten vektorwertigen Funktionen. Man kann sich den Zustandsvektor  $\underline{z}_t(\Theta)$  mit  $-\tau \leq \Theta \leq 0$  beziehungsweise  $-1 \leq \Theta \leq 0$  im erweiterten Zustandsraum  $\mathcal{C}$  zur Zeit  $t$  im Zustandsraum  $\Gamma$  „festgeheftet“ denken, wobei das Retardierungsintervall durch die neue unabhängige Variable  $\Theta$  vollständig „abgegriffen“ wird. Bei der numerischen Integration des Systems muß daher das Intervall  $[t - \tau, t]$  beziehungsweise  $[t - 1, t]$  diskretisiert werden. In Abbildung C.1 ist zum Vergleich sowohl die Diskretisierung des unskalierten Intervalls  $[t - \tau, t]$  als auch des skalierten Intervalls  $[t - 1, t]$  schematisch dargestellt.

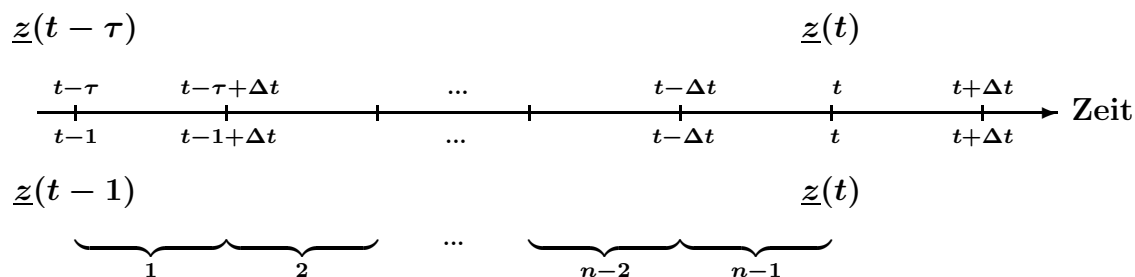


Abbildung C.1: **Schematische Diskretisierung der Zeitintervalle**  $[t - \tau, t]$ ,  $[t - 1, t]$

Die Zeitintervalle  $[t - \tau, t]$  beziehungsweise  $[t - 1, t]$  werden in  $n - 1$  gleiche Zeitabschnitte der Dauer  $\Delta t = \frac{\tau}{n-1}$  beziehungsweise  $\Delta t = \frac{1}{n-1}$  unterteilt.

Die Güte der Approximation der auf dem Intervall  $[t - \tau, t]$ , beziehungsweise  $[t - 1, t]$  definierten Funktion hängt nun entscheidend von der Anzahl der  $n - 1$  Teilintervalle der Diskretisierung ab. Wie bei allen numerischen Integrationsverfahren muß dabei berücksichtigt werden, wie die Zeit der numerischen Berechnungen von der Zahl der Teilintervalle abhängt, um den Rechenaufwand in vernünftigen Grenzen zu halten<sup>2</sup>. Zu Beginn der Integration wird die vorgegebene Anfangsbedingung  $\underline{g}(t)$  mit  $t \in [-1, 0]$  für die  $m$  Komponenten des Zustandsvektors  $\underline{z}(t)$  an den  $n$  Stützstellen ausgewertet und als  $(n \times m)$ -„Gedächtnis“-Matrix  $\underline{\underline{M}}$  abgespeichert (siehe Abb. C.2). Dabei repräsentiert jede Spalte der „Gedächtnis“-Matrix  $\underline{\underline{M}}$  den Zustandsvektor  $\underline{z}$  zu einer bestimmten Zeit. Wie in Abschnitt C.2.2 gezeigt wird, muß man beim verbesserten Euler-Vorwärts-Verfahren zwei Zeitintervalle berücksichtigen und

<sup>1</sup>Die zeitliche Verzögerung  $\tau$  ist ein Kontrollparameter des Systems und kann daher auch verändert werden. Dies führt bei dem unskalierten System (C.1) zu einer ungewünschten Veränderung in der Diskretisierung des Zeitintervalls  $t - \tau$ .

<sup>2</sup>Bei der Integration des Systems hängt der Rechenaufwand nur linear von der Anzahl der Teilintervalle ab. Bei der Berechnung der Lyapunov-Exponenten hingegen (vgl. Anhang D) geht sie quadratisch ein, was dazu führt, daß man hier mit weniger feinen Unterteilungen arbeiten muß.

daher eine  $(2n \times m)$ -„Gedächtnis“-Matrix verwenden. Bei jedem Integrationsschritt wird nun eine Näherung des Zustandsvektors  $\underline{z}(t)$  an der Stelle  $t + \Delta t$  berechnet und, um den Speicherplatz zu begrenzen, an geeigneter Stelle in der „Gedächtnis“-Matrix  $\underline{\mathcal{M}}$  abgespeichert (siehe Abb. C.2). Dies ist möglich, da zur Berechnung des nächsten Näherungswertes für den Zustandsvektor  $\underline{z}(t + 2\Delta t)$  der Wert des Zustandsvektors zur Zeit  $t - 1$  nicht mehr benötigt wird, das heißt, sein Speicherplatz kann neu belegt werden. Beim verbesserten Euler-Vorwärts-Verfahren ist die Situation analog, nur wird hier der Zustandsvektor zur Zeit  $t - 2$  nicht mehr benötigt.

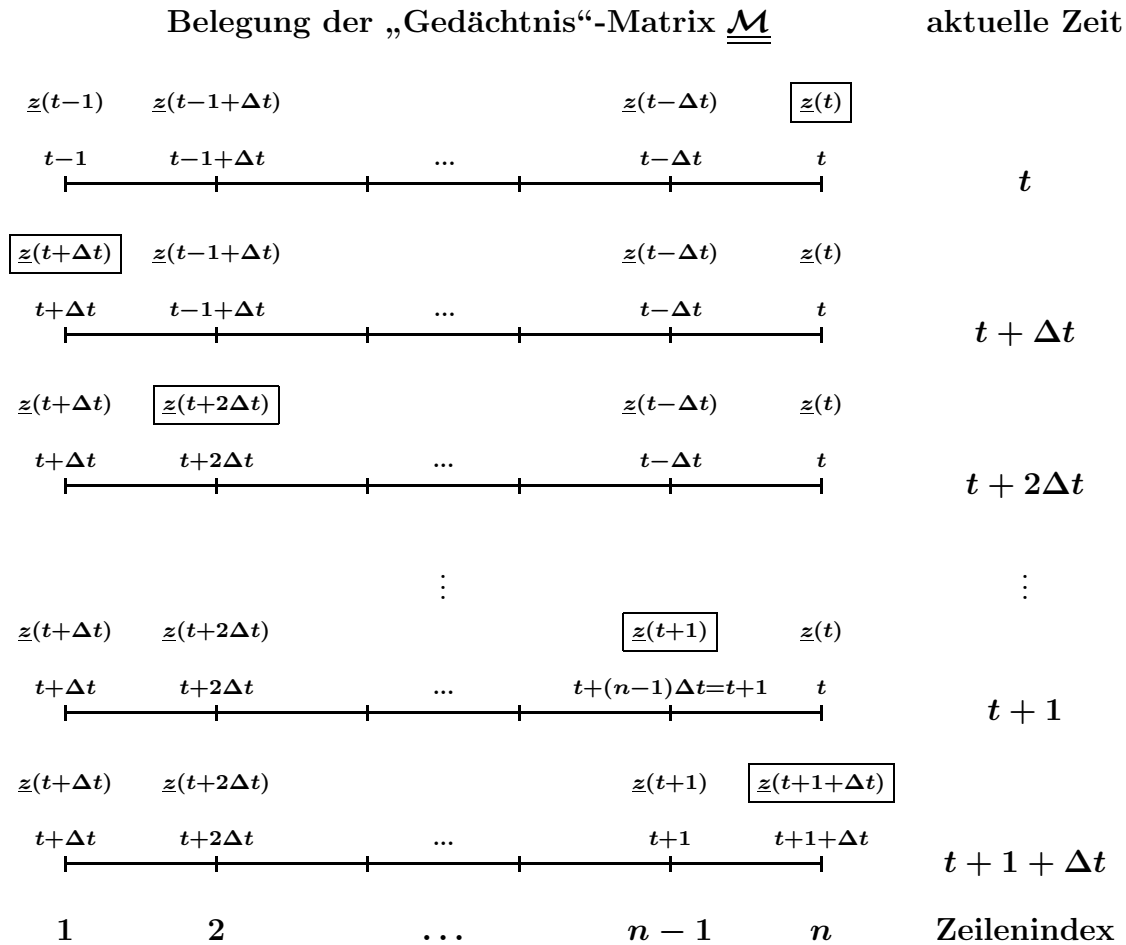


Abbildung C.2: Sukzessive Belegung der „Gedächtnis“-Matrix  $\underline{\mathcal{M}}$

Sukzessive Belegung der „Gedächtnis“-Matrix  $\underline{\mathcal{M}}$  mit den Zustandsvektoren  $\underline{z}(t)$  zu verschiedenen Zeitpunkten bei der numerischen Integration eines Systems mit zeitlicher Verzögerung.

Integriert man die Gleichung (C.2) formal über ein Zeitintervall  $\Delta t$ , so erhält man:

$$\int_{\underline{z}(t)}^{\underline{z}(t+\Delta t)} \underline{dz} = \underline{z} \Big|_{\underline{z}(t)}^{\underline{z}(t+\Delta t)} = \underline{z}(t + \Delta t) - \underline{z}(t) = \tag{C.3}$$

$$\tau \int_t^{t+\Delta t} \underline{f}(\tau t, \underline{z}(t), \underline{z}(t-1)) dt = \tau \Delta t \underline{F}_{\Delta t}(\tau t, \underline{z}(t), \underline{z}(t-1)) .$$

Das in (C.3) auftretende Integral kann nun auf verschiedene Weise approximiert werden. Dies führt auf die unterschiedlichen Approximationsfunktionen  $\underline{F}_{\Delta t}$  und die zugehörigen Integrationsverfahren.

## C.2 Explizite Verfahren

### C.2.1 Euler-Vorwärts-Verfahren

Die einfachste Näherung für das Integral (C.3) ist die Riemannsche Untersumme. Man verwendet also die folgende Approximationsfunktion (siehe z.B. [148], [158]):

$$\boxed{\int_t^{t+\Delta t} \underline{f}(\tau t, \underline{z}(t), \underline{z}(t-1)) dt} = \Delta t \underline{F}_{\Delta t}^{\text{EV}}(\tau t, \underline{z}(t), \underline{z}(t-1)) = \Delta t \underline{f}(\tau t, \underline{z}(t), \underline{z}(t-1)) + \mathcal{O}((\Delta t)^2). \quad (\text{C.4})$$

Damit erhält man die folgende **explizite** Integrationsvorschrift:

$$\underline{z}(t + \Delta t) = \underline{z}(t) + \Delta t \tau \underline{f}(\tau t, \underline{z}(t), \underline{z}(t-1)). \quad (\text{C.5})$$

Da das Verfahren konsistent mit der Ordnung 1 ist<sup>3</sup>, muß  $\Delta t$  sehr klein gewählt werden, um eine entsprechende Genauigkeit zu erreichen. Um beispielsweise die Veränderung des Radius eines Grenzyklus nach einer Hopf-Bifurkation (siehe die Kap. 6, 7 und 8) quantitativ in Abhängigkeit vom Kontrollparameter zu bestimmen, muß  $\Delta t$  in der Größenordnung von  $10^{-5} \dots 10^{-7}$  liegen.

Eigenschaften:

1. Die „Gedächtnis“-Matrix  $\underline{\underline{M}}$  benötigt wegen der sehr feinen Unterteilung sehr viel Speicher.
2. Der Vorteil der schnelleren Ausführung durch die einfache Implementierung<sup>4</sup> ist wegen des sehr kleinen Zeitschritts nur gering.
3. Das Verfahren ist nicht selbstkorrigierend, Fehler können sich also aufsummieren und das Ergebnis einer langen Integration erheblich verfälschen.
4. Es ist nur für qualitative Auswertungen zu empfehlen.

---

<sup>3</sup>Ein Verfahren heißt konsistent mit der Ordnung  $p$ , wenn für den „Defekt“  $D_{\Delta t}(t)$ , das ist die Abweichung der exakten Lösung  $\underline{z}(t)$  des Anfangswertproblems von der Approximationsfunktion, für alle  $t$  im Integrationsintervall gilt:

$$D_{\Delta t}(t) = \left| \frac{(\underline{z}(t + \Delta t) - \underline{z}(t))}{\Delta t} - \tau \underline{F}_{\Delta t}(\tau t, \underline{z}(t), \underline{z}(t-1)) \right| = \mathcal{O}((\Delta t)^{p+1}).$$

<sup>4</sup>Pro Zeitschritt ist nur eine Funktionsauswertung durchzuführen.

### C.2.2 Verbesserte Euler-Vorwärts-Verfahren

Bei den verbesserten Euler-Vorwärts-Verfahren macht man für die Approximationsfunktion  $\underline{F}_{\Delta t}$  folgenden Ansatz (siehe z.B. [148], [158]):

$$\boxed{\int_t^{t+\Delta t} \underline{f}(\tau t, \underline{z}(t), \underline{z}(t-1)) dt} = \Delta t \underline{F}_{\Delta t}^{\text{VEV}}(\tau t, \underline{z}(t), \underline{z}(t-1)) =$$

$$\Delta t [a_1 \underline{f}(\tau t, \underline{z}(t), \underline{z}(t-1)) +$$

$$a_2 \underline{f}(\tau(t + p_1 \Delta t), \underline{z}(t + p_2 \Delta t), \underline{z}(t-1 + p_2 \Delta t))] + \mathcal{O}((\Delta t)^3).$$
(C.6)

Wobei die Konstanten  $a_1, a_2$  und  $p_1, p_2$  unter den folgenden Nebenbedingungen

$$a_1 + a_2 = 1, \quad a_2 p_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 p_2 = \frac{1}{2} \quad (\text{C.7})$$

so zu bestimmen sind, daß der Defekt konsistent mit einer möglichst hohen Ordnung in  $\Delta t$  ist. Beispielsweise sind in [158] die beiden folgenden Verfahren aufgeführt:

1. Das Verfahren von Heun mit

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad p_1 = 1, \quad p_2 = 1. \quad (\text{C.8})$$

2. Das Verfahren von Collatz mit

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = \frac{1}{2}. \quad (\text{C.9})$$

Für zeitlich verzögerte Systeme ist das Verfahren von Heun dem von Collatz vorzuziehen. Das liegt daran, daß bei diesem Verfahren durch den Wert  $p_2 = \frac{1}{2}$  und die zeitliche Verzögerung auf Werte des Zustandsvektors  $\underline{z}(t)$  zurückgegriffen wird, die in der „Gedächtnis“-Matrix  $\underline{\underline{M}}$  nicht gespeichert sind und daher interpoliert werden müssen. Wir werden uns daher auf das Verfahren von Heun konzentrieren. Es gibt nun zwei Möglichkeiten aus Gleichung (C.6) mit den Konstanten (C.8) explizite Integrationsvorschriften abzuleiten:

1. Man entwickelt die Ausdrücke  $\underline{z}(t + \Delta t)$  und  $\underline{z}(t - 1 + \Delta t)$  mit Hilfe der Euler-Vorwärts-Approximationsfunktion  $\underline{F}_{\Delta t}^{\text{EV}}$  bis zur ersten Ordnung in  $\Delta t$ .

$$\begin{aligned} \underline{z}(t + \Delta t) &\approx \underline{z}(t) + \Delta t \tau \underline{F}_{\Delta t}^{\text{EV}}(\tau t, \underline{z}(t), \underline{z}(t-1)) \\ &= \underline{z}(t) + \Delta t \tau \underline{f}(\tau t, \underline{z}(t), \underline{z}(t-1)) \\ &= \underline{z}^{\text{EV}}(t). \\ \underline{z}(t - 1 + \Delta t) &\approx \underline{z}(t-1) + \Delta t \tau \underline{F}_{\Delta t}^{\text{EV}}(\tau(t-1), \underline{z}(t-1), \underline{z}(t-2)) \\ &= \underline{z}(t-1) + \Delta t \tau \underline{f}(\tau(t-1), \underline{z}(t-1), \underline{z}(t-2)) \\ &= \underline{z}^{\text{EV}}(t-1). \end{aligned}$$

Mit den so eingeführten Abkürzungen  $\underline{z}^{\text{EV}}(t)$  und  $\underline{z}^{\text{EV}}(t-1)$  ergibt sich dann die **explizite** Integrationsvorschrift:

$$\begin{aligned} \underline{z}(t + \Delta t) = & \underline{z}(t) + \frac{\Delta t}{2} \tau \underline{f}(\tau t, \underline{z}(t), \underline{z}(t-1)) + \\ & \frac{\Delta t}{2} \tau \underline{f}(\tau(t + \Delta t), \underline{z}^{\text{EV}}(t), \underline{z}^{\text{EV}}(t-1)) . \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

2. Man entwickelt die Ausdrücke  $\underline{z}(t + \Delta t)$  und  $\underline{z}(t - 1 + \Delta t)$  nach Taylor bis zur ersten Ordnung in  $\Delta t$  und erhält:

$$\begin{aligned} \underline{z}(t + \Delta t) & \approx \underline{z}(t) + \Delta t \frac{d}{dt} \underline{z}(t) . \\ \underline{z}(t - 1 + \Delta t) & \approx \underline{z}(t - 1) + \Delta t \frac{d}{dt} \underline{z}(t - 1) . \end{aligned}$$

Setzt man diese Ausdrücke wieder in (C.6) ein und entwickelt anschließend die Funktion  $f$  nach Taylor bis zur ersten Ordnung in  $\Delta t$ , so erhält man die folgende ebenfalls **explizite** Integrationsvorschrift:

$$\begin{aligned} \underline{z}(t + \Delta t) = & \underline{z}(t) + \Delta t \tau \underline{f}(\tau t, \underline{z}(t), \underline{z}(t-1)) + \\ & \frac{1}{2} (\Delta t \tau)^2 \left[ \left. \frac{\partial \underline{f}}{\partial t} \right|_t + \underline{f}|_t \left. \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{z}(t)} \right|_t + \underline{f}|_{t-1} \left. \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{z}(t-1)} \right|_t \right] , \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

wobei die Markierungen  $|_t$  und  $|_{t-1}$  bedeuten, daß die entsprechenden Terme an den Stellen  $\tau t, \underline{z}(t), \underline{z}(t-1)$  und  $\tau(t-1), \underline{z}(t-1), \underline{z}(t-2)$  auszuwerten sind.

Beide Verfahren sind konsistent mit der Ordnung 2. Wie man erkennt, wird auf den Zustandsvektor  $\underline{z}$  nicht nur zu den Zeiten  $t$  und  $t-1$ , sondern auch zu den Zeiten  $t-1$  und  $t-2$  zugegriffen, daher muß die „Gedächtnis“-Matrix  $\underline{\mathcal{M}}$  die zweifache Spaltenanzahl besitzen. Das Diskretisierungsschema (siehe Abb. C.1) und die sukzessive Belegung der „Gedächtnis“-Matrix  $\underline{\mathcal{M}}$  bei der Integration (siehe Abb. C.2) läßt sich leicht auf diesen Fall erweitern.  $\Delta t$  muß nicht mehr so klein gewählt werden wie beim Euler-Vorwärts-Verfahren (vgl. Abschnitt C.2.1). Um die schon erwähnte Veränderung des Radius eines Grenzyklus nach einer Hopf-Bifurkation (siehe die Kap. 6, 7 und 8) quantitativ zu bestimmen, muß  $\Delta t$  nur noch in der Größenordnung von  $10^{-3} \dots 10^{-5}$  liegen.

Eigenschaften:

1. Die „Gedächtnis“-Matrix  $\underline{\mathcal{M}}$  benötigt trotz der zweifachen Spaltenanzahl vor allem bei höherdimensionalen Systemen erheblich weniger Speicher als beim Euler-Vorwärts-Verfahren.
2. Der durch die kompliziertere Implementierung<sup>5</sup> gegenüber dem Euler-Vorwärts-Verfahren bestehende Nachteil der langsameren Ausführung ist nur gering.

<sup>5</sup>Pro Zeitschritt sind drei (C.10) beziehungsweise fünf (C.11) Funktionsauswertungen durchzuführen.

3. Das Verfahren ist ebenfalls nicht selbstkorrigierend, Fehler können sich ebenfalls aufsummieren und das Ergebnis einer langen Integration verfälschen.
4. Es eignet sich sowohl für die qualitative als auch für die quantitative Auswertung.

### C.2.3 Verfahren vom Runge-Kutta-Typ

Wie bei den verbesserten Euler-Vorwärts-Verfahren macht man hier einen Ansatz, wobei die auftretenden Konstanten unter bestimmten Nebenbedingungen so zu bestimmen sind, daß das Verfahren konsistent mit einer möglichst hohen Ordnung in  $\Delta t$  ist. Ein Teil der numerischen Resultate dieser Arbeit wurden mit der IMSL-Routine DIVPRK erzielt. Diese verwendet ein Runge-Kutta-Verner-Verfahren konsistent mit der 4. – 5. Ordnung in  $\Delta t$  mit automatischer Schrittweitenanpassung. Bei allen Verfahren dieses Typs wird auf Werte des Zustandsvektors  $\underline{z}(t)$  zurückgegriffen, die nicht in der „Gedächtnis“-Matrix  $\underline{\underline{M}}$  gespeichert sind, weshalb man Interpolationen zwischen den gespeicherten Werten verwenden muß<sup>6</sup>. Die bei unseren Integrationen verwendeten Werte von  $\Delta t$  liegen in der Größenordnung von  $10^{-3} \dots 10^{-4}$ .

Eigenschaften:

1. Die „Gedächtnis“-Matrix  $\underline{\underline{M}}$  benötigt relativ wenig Speicher.
2. Es existiert ein Nachteil gegenüber dem Euler-Vorwärts-Verfahren und den verbesserten Euler-Vorwärts-Verfahren durch die kompliziertere Implementierung.
3. Das Verfahren ist nicht selbstkorrigierend, aber durch die automatische Schrittweitenanpassung sehr genau.
4. Es eignet sich sowohl für die qualitative als auch die quantitative Auswertung.

## C.3 Implizite Verfahren

### C.3.1 Euler-Rückwärts-Verfahren

Das in Gleichung (C.3) auftretende Integral wird bei diesem Verfahren durch die Riemannsche Obersumme angenähert, das heißt, man verwendet die folgende Approximationsfunktion (siehe z.B. [148], [158])

---

<sup>6</sup>Durch die automatische Schrittweitenanpassung läßt sich dies auch durch eine Vergrößerung der „Gedächtnis“-Matrix  $\underline{\underline{M}}$  nicht vermeiden.

$$\boxed{\int_t^{t+\Delta t} \underline{f}(\tau t, \underline{z}(t), \underline{z}(t-1)) dt} = \Delta t \underline{F}_{\Delta t}^{\text{ER}}(\tau t, \underline{z}(t), \underline{z}(t-1)) = \Delta t \underline{f}(\tau(t+\Delta t), \underline{z}(t+\Delta t), \underline{z}(t-1+\Delta t)) + \mathcal{O}((\Delta t)^2), \quad (\text{C.12})$$

die den Nachteil hat, daß die Funktion  $\underline{f}$  an der Stelle  $t + \Delta t$  ausgewertet werden muß. Da der Zustandsvektor zu diesem Zeitpunkt aus der Integrationsvorschrift selbst erst berechnet werden soll, ergibt sich somit die folgende **implizite** Integrationsvorschrift:

$$\underline{z}(t + \Delta t) = \underline{z}(t) + \Delta t \tau \underline{f}(\tau(t + \Delta t), \underline{z}(t + \Delta t), \underline{z}(t - 1 + \Delta t)). \quad (\text{C.13})$$

Diese implizite Gleichung für  $\underline{z}(t + \Delta t)$  muß dann zu jedem Zeitschritt durch Iteration gelöst werden. Die Iterationsvorschrift lautet:

$$\underline{z}(t + \Delta t)_{i+1} = \underline{z}(t) + \Delta t \tau \underline{f}(\tau(t + \Delta t), \underline{z}(t + \Delta t)_i, \underline{z}(t - 1 + \Delta t)), \quad (\text{C.14})$$

mit dem Startwert  $\underline{z}(t + \Delta t)_0 = \underline{z}(t)$ .

Es läßt sich zeigen, daß für genügend kleine  $\Delta t$  die durch die Iterationsvorschrift (C.14) gegebene Abbildung kontrahierend ist mit dem Fixpunkt  $\underline{z}(t + \Delta t)$ . Als Abbruchkriterium der Iteration wählt man oft den Abstand zweier aufeinanderfolgender Approximationen für den Zustandsvektor  $\underline{z}(t + \Delta t)$ , das heißt, man versucht durch die Iteration die folgende Ungleichung zu einem vorgegebenen kleinen  $\varepsilon \approx 10^{-7} \dots 10^{-10}$  zu erfüllen:

$$|\underline{z}(t + \Delta t)_{i+1} - \underline{z}(t + \Delta t)_i| \leq \varepsilon. \quad (\text{C.15})$$

Eigenschaften:

1. Da die „Gedächtnis“-Matrix  $\underline{M}$  alle Zustandsvektoren zwischen den Zeiten  $t-1$  und  $t$  im Abstand  $\Delta t$  enthält, ist in ihr auch der in der impliziten Gleichung (C.13) auftretende Zustandsvektor  $\underline{z}(t-1+\Delta t)$  gespeichert. Er muß also nicht wie der Zustandsvektor  $\underline{z}(t+\Delta t)$  durch die Iteration approximiert werden.
2. Der Zeitschritt  $\Delta t$  für die Diskretisierung kann nochmals um eine Größenordnung größer gewählt werden als beim verbesserten Euler-Vorwärts-Verfahren (vgl. C.2.2), da die implizite Bestimmungsgleichung (C.13) zu jedem Zeitschritt durch Iteration gelöst wird.
3. Das Verfahren ist aufgrund der zu jedem Zeitschritt durchzuführenden Iterationen langsamer als die Euler-Vorwärts-Verfahren.
4. Es ist selbstkorrigierend, da die implizite Gleichung (C.13) zu jedem Zeitschritt durch Iteration gelöst wird. Fehler wirken sich zum einen durch einen unter Umständen ungünstigen Startwert  $\underline{z}(t+\Delta t)_0$  für die Iteration (C.14) und zum anderen in einem fehlerbehafteten Zustandsvektor  $\underline{z}(t-1+\Delta t)$  aus. Die Iteration sorgt dafür, daß sich Fehler nicht so stark aufsummieren können wie bei den Euler-Vorwärts-Verfahren.

5. Es eignet sich sowohl für die qualitative als auch für die quantitative Auswertung.

Anmerkung: Es zeigt sich, daß die von uns numerisch behandelten Probleme nicht steif sind, weshalb die mit den verschiedenen Verfahren C.2.2, C.2.3 und C.3.1 erzielten Ergebnisse kaum differieren. Um die Zuverlässigkeit unserer Aussagen zu erhöhen, wurden einige Ergebnisse mit unterschiedlich feinen Diskretisierungen und verschiedenen Integrationsverfahren durchgeführt und die Ergebnisse verifiziert.



# Anhang D

## Lyapunov-Exponenten zeitlich verzögerter Systeme

### D.1 Das zeitkontinuierliche System

Um die Darstellungen nicht zu überfrachten, werden wir uns im folgenden auf eine eindimensionale Differentialgleichung mit zeitlicher Verzögerung beschränken und die explizite Abhängigkeit der Funktion  $f$  vom Satz der Kontrollparameter  $\{\sigma_k\}$  nicht mit angeben. Desweiteren können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit von der zeitskalierten Form

$$\frac{d}{dt}z(t) = \tau f(\tau t, z(t), z(t-1)) \quad (\text{D.1})$$

ausgehen. Bevor wir uns mit der numerischen Berechnung der Lyapunov-Exponenten befassen, müssen wir etwas näher auf die Definition der Lyapunov-Exponenten für zeitverzögerte Systeme eingehen. Sie geht aus einer Verallgemeinerung der Definition für zeitkontinuierliche Systeme hervor.

### D.2 Definition der Lyapunov-Exponenten

Die bei den weiteren Ausführungen auftretenden Größen und Operatoren sind wie in Abschnitt 4.5 definiert. Zunächst betrachten wir, analog zu Gleichung (5.22), das zu (D.1) gehörende linearisierte Problem im erweiterten Zustandsraum  $\mathcal{C}$  der auf dem Intervall  $[-1, 0]$  definierten Funktionen

$$\frac{d}{dt}\zeta_t(\Theta) = (\mathcal{G}_L\zeta_t)(\Theta). \quad (\text{D.2})$$

Integriert man nun über das Zeitintervall von 0 bis  $t$  und ordnet die Terme um, so erhält man:

$$\zeta_t(\Theta) = \zeta_0(\Theta) + \int_0^t dt_1 (\mathcal{G}_L\zeta_{t_1})(\Theta). \quad (\text{D.3})$$

Zur Lösung dieser Gleichung kann man wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen das folgende Iterationsverfahren

$$\zeta_t^i(\Theta) = \zeta_0(\Theta) + \int_0^t dt_1 (\mathcal{G}_L \zeta_{t_1}^{i-1})(\Theta) \quad \text{mit} \quad \zeta_{t_1}^0(\Theta) = \zeta_0(\Theta) \quad (\text{D.4})$$

entwerfen, das die selbstkonsistente Lösung der Gleichung (D.3) sukzessive approximiert. Nach  $n$  Iterationen ergibt sich

$$\begin{aligned} \zeta_t^n(\Theta) &= \zeta_0(\Theta) + \left( \int_0^t dt_1 \mathcal{G}_L \zeta_0 \right) (\Theta) + \left( \int_0^t dt_1 \mathcal{G}_L \left( \int_0^{t_1} dt_2 \mathcal{G}_L \zeta_0 \right) \right) (\Theta) \\ &+ \dots + \left( \int_0^t dt_1 \mathcal{G}_L \left( \int_0^{t_1} dt_2 \mathcal{G}_L \cdots \left( \int_0^{t_n} dt_n \mathcal{G}_L \zeta_0 \right) \cdots \right) \right) (\Theta) \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

und daraus schließlich im Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  unter Verwendung des Zeitordnungsoperators  $\mathcal{Z}$ :

$$\zeta_t(\Theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_t^n(\Theta) = \left( \mathcal{Z} e^{\int_0^t dt' \mathcal{G}_L} \zeta_0 \right) (\Theta) = \left( \mathcal{F}^{[t]} \zeta_0 \right) (\Theta). \quad (\text{D.6})$$

Die durch Konvention der Größe nach sortierten Lyapunov-Exponenten

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$$

werden nun analog zu gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen durch

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} |\lambda_i| \quad (\text{D.7})$$

definiert, wobei die  $\lambda_i$  die Eigenwerte des Flusses

$$\mathcal{F}^{[t]} = \mathcal{Z} e^{\int_0^t dt' \mathcal{G}_L} \quad (\text{D.8})$$

des linearisierten Problems (D.2) sind<sup>1</sup>. Die Tatsache, daß der Operator  $\mathcal{G}_L$  ein reines Punktspektrum abzählbar unendlich vieler Eigenwerte hat (siehe Abschnitt 6.2.2), legt die Hypothese nahe, daß dies auch für den Zeitentwicklungsoperator (D.8) gilt. Die numerischen Untersuchungen von Farmer [34] wie auch unsere eigenen bestätigen diese Vermutung. Bei einer ersten oberflächlichen Betrachtung des Problems würde man vermuten, daß an die Stelle der Lyapunov-Exponenten bei gewöhnlichen Differentialgleichungen bei zeitverzögerten Systemen eine auf dem Intervall  $[-1, 0]$  definierte Lyapunov-Exponenten-Funktion tritt. Unsere Analysen ergeben jedoch, daß dies nicht der Fall sein kann. Verfeinert man nämlich die, für die numerische Bestimmung der Lyapunov-Exponenten notwendige, Diskretisierung beispielsweise von  $n$  auf  $2n$  Teilintervalle, dann stellt man fest:

<sup>1</sup>Da der linearisierte Operator  $\mathcal{G}_L$  bei den in dieser Arbeit untersuchten Systemen nicht explizit von der Zeit abhängt, ist die Anwendung des Zeitordnungsoperators  $\mathcal{Z}$  überflüssig (vgl. auch Abschnitt 5.4) und man erhält:

$$\mathcal{F}^{[t]} = \mathcal{Z} e^{\int_0^t dt' \mathcal{G}_L} = e^{t \mathcal{G}_L}.$$

$$\begin{aligned}\lambda_i^{2n} &= \lambda_i^n \quad \text{für } i = 1, \dots, n \\ \lambda_i^{2n} &\leq \lambda_n^n \quad \text{für } i = n + 1, \dots, 2n,\end{aligned}\tag{D.9}$$

wobei der obere Index der Lyapunov-Exponenten die entsprechende Diskretisierung angibt. Eine Lyapunov-Exponenten-Funktion würde bei einer feineren Diskretisierung entsprechend besser approximiert werden, tatsächlich aber werden durch eine feinere Diskretisierung lediglich weitere der abzählbar unendlich vielen Lyapunov-Exponenten berechnet. Bei der numerischen Berechnung der Lyapunov-Exponenten ist dies von Vorteil.

- 1.) Ist man nur an der Entscheidung interessiert, ob ein zeitverzögertes System bei einem bestimmten Satz der Kontrollparameter  $\{\sigma_k\}$  chaotisches Verhalten zeigt oder nicht, dann ist es ausreichend, nur den größten Lyapunov-Exponenten zu bestimmen.
- 2.) In die Bestimmung der Lyapunov-Dimension  $D_L$  (5.27) (siehe Abschnitt 5.3.4) gehen nur die größten Lyapunov-Exponenten ein. Um diese beispielsweise bei einer Diskretisierung des Zeitintervalls in 1000 Teilintervalle zu bestimmen, genügt es in den meisten Fällen die 20 größten Lyapunov-Exponenten zu berechnen<sup>2</sup>.

Wie bei gewöhnlichen zeitkontinuierlichen Differentialgleichungen ist sowohl die analytische als auch die numerische Berechnung der Lyapunov-Exponenten durch Gleichung (D.7) fast immer unmöglich. Daher wurde das von Wolf et. al. [179] für gewöhnliche Differentialgleichungen entwickelte Verfahren (vgl. Abschnitt 5.5) von Farmer [34] auf Differentialgleichungen mit zeitlicher Verzögerung erweitert.

## D.3 Diskretisierung

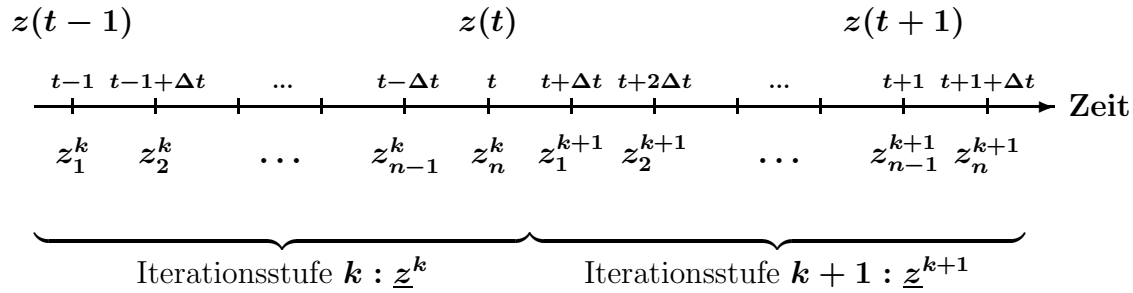
Wie bei der gewöhnlichen numerischen Integration der Gleichung (D.1) muß das Intervall  $[t - 1, t]$  diskretisiert werden (vgl. Abschnitt C.1). Die adäquate Wahl ist auch hier die Aufteilung in  $n - 1$  äquidistante Zeitintervalle. Den dadurch entstehenden  $n$  Zeitpunkten im Intervall  $[t - 1, t]$  wird jeweils eine zeitdiskrete Variable  $z_i^k, i = 1, \dots, n$  zugeordnet (siehe Abb. D.1). Diese  $n$  diskreten Variablen im Intervall  $[t - 1, t]$  werden nun zu einem  $n$ -dimensionalen Vektor  $\underline{z}^k$  zusammengefaßt:

$$(z_1^k, z_2^k, \dots, z_n^k) = \underline{z}^k = (z(t - 1), z(t - 1 + \Delta t), \dots, z(t - \Delta t), z(t)) . \tag{D.10}$$

Der Index  $k$  gibt dabei die jeweilige Iterationsstufe an. Die Zeitentwicklung des Systems wird nun durch Iteration der diskreten Abbildung  $\underline{z}^k \rightarrow \underline{z}^{k+1}$  erfolgen, dabei bedeutet die Ausführung einer Iteration eine zeitliche Entwicklung um  $1 + \Delta t$  (siehe Abb. D.1).

---

<sup>2</sup>Da die Lyapunov-Dimension  $D_L$  zeitlich verzögerter Systeme mit chaotischen Attraktoren linear mit der Zeitverzögerung  $\tau$  wächst (siehe die Anmerkung auf Seite 88), müssen bei großen Zeitverzögerungen entsprechend mehr Lyapunov-Exponenten berechnet werden.

Abbildung D.1: **Erzeugung einer diskreten Abbildung**

Durch die Diskretisierung des Zeitintervalls  $[t-1, t]$  in  $n-1$  gleiche Zeitabschnitte der Dauer  $\Delta t = \frac{1}{n-1}$  wird eine zeitdiskrete Abbildung definiert.

## D.4 Die zeitdiskrete Abbildung

Bei der Definition der diskreten  $n$ -dimensionalen Abbildung  $\underline{z}^k \rightarrow \underline{z}^{k+1}$  kann prinzipiell jedes der in Anhang C vorgestellten expliziten Integrationsverfahren mit fester Schrittweite gewählt werden. Da bei der Berechnung der Lyapunov-Exponenten jedoch nur die linearisierte diskrete Abbildung verwendet wird, ist es sinnvoll, hier das einfachste Integrationsverfahren, also das Euler-Vorwärts-Verfahren, zu verwenden. Die **explizite** Integrationsvorschrift lautet (siehe Gl. C.5):

$$z(t + \Delta t) = z(t) + \Delta t \tau f(\tau t, z(t), z(t-1)). \quad (\text{D.11})$$

Die nichtlineare,  $n$ -dimensionale diskrete Abbildung

$$\underline{G} : (z_1^k, z_2^k, \dots, z_n^k) = \underline{z}^k \mapsto (z_1^{k+1}, z_2^{k+1}, \dots, z_n^{k+1}) = \underline{z}^{k+1} \quad (\text{D.12})$$

wird nun wie folgt definiert:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} z_1^{k+1} \\ z_2^{k+1} \\ \vdots \\ z_i^{k+1} \\ \vdots \\ z_n^{k+1} \end{pmatrix}}_{\underline{z}^{k+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} z_n^k + \Delta t \tau f(\tau t_0, z_n^k, z_1^k) \\ z_1^{k+1} + \Delta t \tau f(\tau t_1, z_1^{k+1}, z_2^k) \\ \vdots \\ z_{i-1}^{k+1} + \Delta t \tau f(\tau t_{i-1}, z_{i-1}^{k+1}, z_i^k) \\ \vdots \\ z_{n-1}^{k+1} + \Delta t \tau f(\tau t_{n-1}, z_{n-1}^{k+1}, z_n^k) \end{pmatrix}}_{\underline{G}(\underline{z}^k)}, \quad (\text{D.13})$$

wobei wir zur Abkürzung die Zeitpunkte  $t_i = t + i\Delta t$  eingeführt haben. Bei einem mehrdimensionalen zeitverzögerten System muß die Abbildung  $\underline{G}$  dem folgenden

Schema entsprechend erweitert werden

$$\begin{array}{lcl} z_1(t) & \Rightarrow & z_1^k, \dots, z_n^k \\ z_2(t) & \Rightarrow & z_{n+1}^k, \dots, z_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_m(t) & \Rightarrow & z_{(m-1)n+1}^k, \dots, z_{mn}^k. \end{array}$$

Das bedeutet, daß das  $m$ -dimensionale, zeitkontinuierliche, zeitverzögerte dynamische System auf ein  $mn$ -dimensionales zeitdiskretes abgebildet wird.

## D.5 Die linearisierte zeitdiskrete Abbildung

Für die Berechnung der Lyapunov-Exponenten wird, wie in Abschnitt 5.5 bereits erwähnt, zusätzlich die linearisierte diskrete Abbildung

$$\underline{\zeta}^{k+1} = \underline{G}_L(\underline{\zeta}^k) = \frac{\partial \underline{G}(\underline{z}^k)}{\partial \underline{z}^k} \underline{\zeta}^k \quad (\text{D.14})$$

benötigt. Berücksichtigt man die spezielle Struktur der Abbildung  $\underline{G}$  von (D.13), so ergibt sich für die rechte Seite der Gleichung (D.14):

$$\left( \begin{array}{l} \left( 1 + \Delta t \tau \frac{\partial f}{\partial z(t)} \Big|_{\tau t_0, z_n^k, z_1^k} \right) \zeta_n^k + \Delta t \frac{\partial f}{\partial z(t-1)} \Big|_{\tau t_0, z_n^k, z_1^k} \zeta_1^k \\ \left( 1 + \Delta t \tau \frac{\partial f}{\partial z(t)} \Big|_{\tau t_1, z_1^{k+1}, z_2^k} \right) \zeta_1^{k+1} + \Delta t \tau \frac{\partial f}{\partial z(t-1)} \Big|_{\tau t_1, z_1^{k+1}, z_2^k} \zeta_2^k \\ \vdots \\ \left( 1 + \Delta t \tau \frac{\partial f}{\partial z(t)} \Big|_{\tau t_{i-1}, z_{i-1}^{k+1}, z_i^k} \right) \zeta_{i-1}^{k+1} + \Delta t \tau \frac{\partial f}{\partial z(t-1)} \Big|_{\tau t_{i-1}, z_{i-1}^{k+1}, z_i^k} \zeta_i^k \\ \vdots \\ \left( 1 + \Delta t \tau \frac{\partial f}{\partial z(t)} \Big|_{\tau t_{n-1}, z_{n-1}^{k+1}, z_n^k} \right) \zeta_{n-1}^{k+1} + \Delta t \tau \frac{\partial f}{\partial z(t-1)} \Big|_{\tau t_{n-1}, z_{n-1}^{k+1}, z_n^k} \zeta_n^k \end{array} \right). \quad (\text{D.15})$$

Zur Abkürzung wurden wieder die Zeitpunkte  $t_i = t + i\Delta t$  verwendet. Die Berechnung der Lyapunov-Exponenten eines zeitverzögerten dynamischen Systems ist somit auf das Problem zurückgeführt, die  $n$  Lyapunov-Exponenten einer  $n$ -dimensionalen zeitdiskreten Abbildung zu bestimmen. An dieser Stelle sind allerdings noch zwei Anmerkungen zu machen:

- A1 : Um die Lösungsfunktion des nichtlinearen Problems im erweiterten Zustandsraum  $\mathcal{C}$  gut zu approximieren, muß die Diskretisierung entsprechend fein sein. Dies hat allerdings die Konsequenz, daß der Speicherbedarf vor allem bei mehrdimensionalen Systemen sehr groß ist. Um beispielsweise bei einem zweidimensionalen, zeitverzögerten dynamischen System mit einer Unterteilung in  $n = 1000$  Teilintervalle alle  $2n$  Lyapunov-Exponenten zu bestimmen, benötigt

man allein für das Datensegment mindestens  $8(4n^2 + 2n)\text{Byte} \approx 32 \text{ MByte}$ . Bei  $n = 10000$  sind es sogar  $3.2 \text{ GByte}$ . Da man in der Praxis aber meistens nur die  $l \ll n$  größten Exponenten bestimmt, kommt man in der Regel mit deutlich weniger Speicher aus.

A2 : Man erkennt sofort, daß sich die „ausgedünnte“ Struktur der Abbildung  $\underline{G}$  auf die linearisierte Abbildung  $\underline{G}_L$  überträgt. Will man nun alle  $n$  Lyapunov-Exponenten berechnen, dann darf man für die  $n$  linear unabhängigen Startvektoren  $\underline{\zeta}_i, i = 1, \dots, n$  (siehe Abschnitt 5.5) nicht die Basisvektoren des  $\mathbb{R}^n$  der Form

$$\underline{\zeta}_1 = (1, 0, \dots, 0), \underline{\zeta}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \underline{\zeta}_n = (0, 0, \dots, 1)$$

verwenden, sondern normierte Zufallsvektoren. Die „ausgedünnte“ Struktur der linearisierten Abbildung  $\underline{G}_L$  und die der oben angeführten Basisvektoren führt nämlich dazu, daß die Berechnung in separaten Teilräumen des  $\mathbb{R}^n$  stattfindet. Das hat zur Folge, daß die Lyapunov-Exponenten falsch berechnet werden<sup>3</sup>. Dieser Artefakt ist leicht zu erkennen, da die durch das Verfahren erzeugte Ordnung der Lyapunov-Exponenten der Größe nach innerhalb eines jeden Teilraums separat stattfindet, nicht jedoch für alle  $n$  Lyapunov-Exponenten. Falls weniger Lyapunov-Exponenten berechnet werden sollen, gilt dies ganz besonders, da nur stochastische Startvektoren dazu führen, daß alle Raumrichtungen berücksichtigt werden.

---

<sup>3</sup>Vgl. hierzu die Anmerkung A4 auf Seite 59.

# Anhang E

## Zur Normalform der Hopf-Bifurkation

Motiviert durch die in Kapitel 6, 7 und 8 hergeleiteten Ordnungsparametergleichungen werden wir uns in diesem Kapitel mit Normalformen befassen. Dabei geht es um die Frage, wie man Ordnungsparametergleichungen, deren charakteristisches Lösungsverhalten identisch ist, klassifizieren und der so entstehenden Klasse einen spezifischen charakteristischen Gleichungstyp zuordnen kann, den man Normalform nennt. In der Normalform sind alle für das charakteristische Verhalten irrelevanten Terme eliminiert, so daß sie in diesem Sinn gleichzeitig auch eine Minimalform darstellt.

Wie wir wissen, führen die verschiedenen Ordnungsparametergleichungen (6.81) aus Kapitel 6, (7.57) aus Kapitel 7 und (8.35) aus Kapitel 8 zu einer Hopf-Bifurkation. Um aus diesen Gleichungen die Normalform der Hopf-Bifurkation abzuleiten, werden wir eine nichtlineare Transformation der Ordnungsparameter durchführen, um die nichtrelevanten Terme zu eliminieren. Zur Theorie der Normalformen und insbesondere der hier verwendeten Klasse der „near identity transformations“ verweisen wir auf [66], [107], [120], [138] und [160]. Um die Ausführungen so einfach wie möglich zu halten, werden wir in zwei Schritten vorgehen.

### 1.) Behandlung der kubischen Terme:

Hier werden wir uns auf die Klasse der Ordnungsparametergleichungen beschränken, die ausschließlich Terme dritter Ordnung in den Ordnungsparametern enthalten. Wie sich herausstellen wird, lassen sich durch eine der dritten Ordnung angepaßte nichtlineare Transformation der Ordnungsparameter von den insgesamt vier Termen dritter Ordnung nur drei eliminieren. Für die Normalform der Hopf-Bifurkation bedeutet dies, daß sie neben dem linearen Anteil einen einzigen kubischen Term enthalten wird. Berücksichtigt man, daß sich die Ordnungsparameter in der Nähe der Instabilität wie  $e^{\lambda_{\pm} t}$  verhalten, dann stellt man fest, daß der verbleibende kubische Term gerade der zum linearen Term resonante ist. Daher ist die hier dargestellte Herleitung der Normalform der Hopf-Bifurkation mit Hilfe einer geeigneten nichtlinearen Transformation

die mathematisch fundierte Begründung für die in diesem Zusammenhang sehr häufig angewandte Methode der „rotating wave approximation“.

2.) Behandlung der quadratischen Terme:

Hier werden wir uns auf die Klasse der Ordnungsparametergleichungen beschränken, die ausschließlich Terme zweiter Ordnung in den Ordnungsparametern enthalten. Wie sich in diesem Fall herausstellen wird, lassen sich durch eine der zweiten Ordnung angepaßte nichtlineare Transformation der Ordnungsparameter alle Terme zweiter Ordnung eliminieren, wobei in den neuen Ordnungsparametergleichungen nun Terme dritter Ordnung auftreten. Falls die ursprünglichen Ordnungsparametergleichungen bereits Terme dritter Ordnung enthalten, werden diese entsprechend modifiziert.

Wir werden im folgenden eine kompakte Schreibweise verwenden, wobei alle Größen, die mit oberen Indizes  $\pm$  behaftet sind, zueinander konjugiert komplex sind.

## E.1 Behandlung der kubischen Terme

In diesem Abschnitt betrachten wir die Klasse von Ordnungsparametergleichungen

$$\frac{d}{dt}u^\pm(t) = \lambda^\pm u^\pm(t) + k_0^\pm u^\pm(t)^3 + k_1^\pm u^\pm(t)^2 u^\mp(t) + k_2^\pm u^\pm(t) u^\mp(t)^2 + k_3^\pm u^\mp(t)^3 \quad (\text{E.1})$$

mit ausschließlich kubischen Termen und führen durch die folgende, der dritten Ordnung angepaßte, nichtlineare Transformation

$$u^\pm(t) = v^\pm(t) + \beta_0^\pm v^\pm(t)^3 + \beta_1^\pm v^\pm(t)^2 v^\mp(t) + \beta_2^\pm v^\pm(t) v^\mp(t)^2 + \beta_3^\pm v^\mp(t)^3 \quad (\text{E.2})$$

neue Ordnungsparameter  $v^\pm(t)$  ein. Diese werden wie die alten Ordnungsparameter in der Nähe der Instabilität kleine Größen sein, weshalb wir nach ihnen entwickeln können. Setzen wir die Transformation (E.2) in die Ordnungsparametergleichungen (E.1) ein, so erhalten wir ein System von Differentialgleichungen der Form

$$\underline{\underline{M}}(t) \frac{d}{dt}v(t) = \underline{w}(t) \quad (\text{E.3})$$

mit der Matrix  $\underline{\underline{M}}(t)$ , deren Elemente durch

$$\begin{aligned} M_{11}(t) &= 1 + 3\beta_0^+ v^+(t)^2 + 2\beta_1^+ v^+(t)v^-(t) + \beta_2^+ v^-(t)^2, \\ M_{12}(t) &= \beta_1^+ v^+(t)^2 + 2\beta_2^+ v^+(t)v^-(t) + 3\beta_3^+ v^-(t)^2, \\ M_{21}(t) &= \beta_1^- v^-(t)^2 + 2\beta_2^- v^+(t)v^-(t) + 3\beta_3^- v^+(t)^2, \\ M_{22}(t) &= 1 + 3\beta_0^- v^-(t)^2 + 2\beta_1^- v^+(t)v^-(t) + \beta_2^- v^+(t)^2 \end{aligned}$$



gegeben sind und

$$\underline{v}(t) = \begin{pmatrix} v^+(t) \\ v^-(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{E.4})$$

Wir verzichten hier auf die explizite Darstellung des Vektors  $\underline{w}(t)$ , merken aber an, daß seine Koordinaten die neuen Ordnungsparameter  $v^\pm(t)$  in erster Ordnung enthalten. Multiplizieren wir die Gleichung (E.3) von links mit der zu  $\underline{M}(t)$  inversen Matrix

$$\underline{M}(t)^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(\underline{M}(t))} \begin{pmatrix} M_{22}(t) & -M_{12}(t) \\ -M_{21}(t) & M_{11}(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{E.5})$$

dann erhalten wir:

$$\frac{d}{dt}\underline{v}(t) = \underline{M}(t)^{-1}\underline{w}(t). \quad (\text{E.6})$$

Die Determinante der Matrix  $\underline{M}(t)$ , die nun im Nenner der rechten Seiten der Gleichungen (E.6) auftritt, ist von der Form:

$$1 + f(v^+(t), v^-(t)) \quad (\text{E.7})$$

mit

$$\begin{aligned} f(v^+(t), v^-(t)) &= v^+(t)^2(3\beta_0^+ + \beta_2^-) + 2v^+(t)v^-(t)\beta_1^+ + \\ & 3v^+(t)^4(\beta_0^+\beta_2^- - \beta_1^+\beta_3^-) + 6v^+(t)^3v^-(t)(\beta_0^+\beta_1^- - \beta_2^+\beta_3^-) + \\ & \frac{3}{2}v^+(t)^2v^-(t)^2(3\beta_0^+\beta_0^- + \beta_1^+\beta_1^- - \beta_2^+\beta_2^- - 3\beta_3^+\beta_3^-) + c.c.. \end{aligned}$$

Wegen der in  $\underline{w}(t)$  auftretenden ersten Ordnung entwickeln wir den Nenner bis zur zweiten Ordnung. Das so erhaltene Ergebnis ist daher bis zur dritten Ordnung exakt. Wir setzen also die Entwicklung

$$\frac{1}{1 + f(v^+(t), v^-(t))} \sim 1 - f(v^+(t), v^-(t)) + f(v^+(t), v^-(t))^2 \quad (\text{E.8})$$

in die Gleichungen (E.6) ein, berücksichtigen alle Terme bis zur dritten Ordnung in den Ordnungsparametern und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v^\pm(t) &= \lambda^\pm v^\pm(t) + (k_0^\pm - 2\beta_0^\pm \lambda^\pm) v^\pm(t)^3 + \\ & (k_1^\pm - \beta_1^\pm(\lambda^\pm + \lambda^\mp)) v^\pm(t)^2 v^\mp(t) + \\ & (k_2^\pm - 2\beta_2^\pm \lambda^\mp) v^\pm(t) v^\mp(t)^2 + (k_3^\pm + \beta_3^\pm(\lambda^\pm - 3\lambda^\mp)) v^\mp(t)^3. \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Die Koeffizienten  $\beta_0^\pm$ ,  $\beta_1^\pm$ ,  $\beta_2^\pm$  und  $\beta_3^\pm$  der nichtlinearen Transformation (E.2) bestimmen wir nun so, daß die kubischen Terme in (E.9) verschwinden. Aus (E.9) folgt

dann:

$$\beta_0^\pm = \frac{k_0^\pm}{2\lambda_u^\pm}, \quad (\text{E.10})$$

$$\beta_1^\pm = \frac{k_1^\pm}{\lambda_u^\mp + \lambda_u^\mp}, \quad (\text{E.11})$$

$$\beta_2^\pm = \frac{k_2^\pm}{2\lambda_u^\mp}, \quad (\text{E.12})$$

$$\beta_3^\pm = \frac{k_3^\pm}{3\lambda_u^\mp - \lambda_u^\pm}. \quad (\text{E.13})$$

Da die Eigenwerte  $\lambda_u^\pm$  zueinander konjugiert komplex sind und zumindest in der Nähe der Instabilität einen von Null verschiedenen Imaginärteil besitzen, folgt, daß die Nenner der Koeffizienten  $\beta_0^\pm$ ,  $\beta_2^\pm$  und  $\beta_3^\pm$  von Null verschieden sind und die Koeffizienten somit definiert sind. Die beiden Koeffizienten  $\beta_1^\pm$  hingegen sind nicht definiert, da der Nenner in (E.11) Null ist, weil die Eigenwerte  $\lambda_u^\pm$  zueinander konjugiert komplex sind. Aus diesem Grund können die zu diesem Koeffizienten gehörenden Terme in den Ordnungsparametergleichungen (E.1) nicht eliminiert werden. Für den Ansatz (E.2) bedeutet dies, daß die beiden Koeffizienten  $\beta_1^\pm$  Null gesetzt werden müssen. Damit ist gezeigt, daß die Normalform der Ordnungsparametergleichungen (E.1) die folgende Struktur

$$\frac{d}{dt}v^\pm(t) = \lambda^\pm v^\pm(t) + \mathfrak{b}^\pm v^\pm(t)^2 v^\mp(t) \quad (\text{E.14})$$

besitzt. Der Koeffizient  $\mathfrak{b}$  der Normalform (E.14) ist also für die in diesem Abschnitt behandelten Ordnungsparametergleichungen mit ausschließlich kubischen Termen durch

$$\mathfrak{b}^\pm = k_1^\pm \quad (\text{E.15})$$

gegeben.

Die Verbindung zur „rotating wave approximation“ ist nun offensichtlich. Da sich die Ordnungsparameter  $v^\pm(t)$  in der Nähe der Instabilität wie  $e^{\lambda_u^\pm t}$  verhalten, ist der einzig relevante kubische  $v^\pm(t)^2 v^\mp(t)$ -Term dann gerade der zum linearen Anteil  $\lambda_u^\pm v^\pm(t)$  der Ordnungsparametergleichungen resonante Term.

## E.2 Behandlung der quadratischen Terme

In diesem Abschnitt betrachten wir die zunächst einfacher erscheinende Klasse von Ordnungsparametergleichungen

$$\frac{d}{dt}u^\pm(t) = \lambda^\pm u^\pm(t) + q_0^\pm u^\pm(t)^2 + q_1^\pm u^\pm(t)u^\mp(t) + q_2^\pm u^\mp(t)^2 \quad (\text{E.16})$$

mit ausschließlich quadratischen Termen und führen durch die folgende, der zweiten Ordnung angepaßte, nichtlineare Transformation

$$u^\pm(t) = v^\pm(t) + \alpha_0^\pm v^\pm(t)^2 + \alpha_1^\pm v^\pm(t)v^\mp(t) + \alpha_2^\pm v^\mp(t)^2 \quad (\text{E.17})$$

wieder neue Ordnungsparameter  $v^\pm(t)$  ein, die auch in diesem Fall in der Nähe der Instabilität kleine Größen sein werden. Durch Einsetzen der Transformation (E.17) in die Ordnungsparametergleichungen (E.16) erhalten wir wie in Abschnitt E.1 ein System von Differentialgleichungen der Form (E.3) mit

$$\underline{\underline{M}}(t) = \begin{pmatrix} 1 + 2\alpha_0^+ v^+(t) + \alpha_1^+ v^-(t) & \alpha_1^+ v^+(t) + 2\alpha_2^+ v^-(t) \\ \alpha_1^- v^-(t) + 2\alpha_2^- v^+(t) & 1 + 2\alpha_0^- v^-(t) + \alpha_1^- v^+(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{E.18})$$

Die weiteren Schritte sind identisch mit denen in Abschnitt E.1 ausführlich dargestellten und wir erhalten somit das (E.6) entsprechende Gleichungssystem, wobei der durch die Determinante der Matrix  $\underline{\underline{M}}(t)$  entstehende Nenner wieder von der Form

$$1 + f(v^+(t), v^-(t)) \quad (\text{E.19})$$

mit

$$f(v^+(t), v^-(t)) = v^+(t)(2\alpha_0^+ + \alpha_1^-) + 2v^+(t)v^-(t)(\alpha_0^+\alpha_0^- - \alpha_2^+\alpha_2^-) + 2v^+(t)^2(\alpha_0^+\alpha_1^- - \alpha_1^+\alpha_2^-) + c.c.$$

ist. Wir verwenden daher auch in diesem Fall die Entwicklung (E.8) und berücksichtigen zusätzlich die in Abschnitt E.1 gewonnene Erkenntnis, daß von den Termen dritter Ordnung nur der  $v^\pm(t)^2 v^\mp(t)$ -Term nicht eliminiert werden kann. Durch Vernachlässigung der übrigen Terme dritter Ordnung erhalten wir somit:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v^\pm(t) &= \lambda^\pm v^\pm(t) + (q_1^\pm - \alpha_0^\pm \lambda^\pm) v^\pm(t)^2 + (q_0^\pm - \alpha_1^\pm \lambda^\mp) v^+(t)v^-(t) + \\ & (q_2^\pm + \alpha_2^\pm(\lambda^\pm - 2\lambda^\mp)) v^\mp(t)^2 + (q_0^\pm(\alpha_1^\mp - \alpha_0^\pm) - q_0^\mp \alpha_1^\pm + \\ & q_1^\pm \alpha_1^\pm + 2q_2^\pm \alpha_2^\mp - 2q_2^\mp \alpha_2^\pm + \alpha_1^\pm \alpha_1^\mp \lambda^\pm + 2\alpha_2^\pm \alpha_2^\mp (2\lambda^\pm - \lambda^\mp) + \\ & \alpha_0^\pm \alpha_1^\pm (\lambda^\pm + 2\lambda^\mp)) v^\pm(t)^2 v^\mp(t). \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

Die Koeffizienten  $\alpha_0^\pm$ ,  $\alpha_1^\pm$  und  $\alpha_2^\pm$  der nichtlinearen Transformation (E.17) können wir nun so bestimmen, daß sämtliche quadratischen Terme in (E.20) verschwinden. Dies ist offensichtlich der Fall für

$$\alpha_0^\pm = \frac{q_0^\pm}{\lambda_u^\pm}, \quad (\text{E.21})$$

$$\alpha_1^\pm = \frac{q_1^\pm}{\lambda_u^\mp}, \quad (\text{E.22})$$

$$\alpha_2^\pm = \frac{q_2^\pm}{2\lambda_u^\mp - \lambda_u^\pm}. \quad (\text{E.23})$$

Da die Eigenwerte  $\lambda_u^\pm$ , wie bereits mehrfach erwähnt, zueinander konjugiert komplex sind und zumindest in der Nähe der Instabilität einen von Null verschiedenen Imaginärteil besitzen, ist sichergestellt, daß die in (E.21), (E.22) und (E.23) auftretenden Nenner von Null verschieden und daher die Koeffizienten  $\alpha_0^\pm$ ,  $\alpha_1^\pm$  und  $\alpha_2^\pm$  definiert sind.

Für die Normalform der Ordnungsparametergleichungen (E.16) erhalten wir schließlich mit (E.21), (E.22) und (E.23) aus (E.20)

$$\frac{d}{dt}v^\pm(t) = \lambda^\pm v^\pm(t) + \mathfrak{b}^\pm v^\pm(t)^2 v^\mp(t) \quad (\text{E.24})$$

mit

$$\mathfrak{b}^\pm = \frac{q_0^\pm q_1^\pm (4\lambda^{\pm 2} - \lambda^{\mp 2}) + q_1^\pm q_1^\mp (2\lambda^\pm \lambda^\mp - \lambda^{\mp 2}) + 2q_2^\pm q_2^\mp \lambda^\pm \lambda^\mp}{\lambda^\pm \lambda^\mp (2\lambda^\pm - \lambda^\mp)}. \quad (\text{E.25})$$

Wie wir sehen, führen die quadratischen Terme in den Ordnungsparametergleichungen (E.16) durch die nichtlineare Transformation (E.17) zu kubischen Termen in den neuen Ordnungsparametergleichungen.

Treten in den Ordnungsparametergleichungen sowohl quadratische als auch kubische Terme auf, dann kann man die beiden nichtlinearen Transformationen (E.2) und (E.17) nacheinander ausführen. Die erste Transformation (E.2) führt zur Elimination der nichtresonanten kubischen Terme in den neuen Ordnungsparametergleichungen. Die zweite Transformation (E.17) führt zur Entfernung sämtlicher quadratischer Terme und zu einer Modifikation des resonanten kubischen Terms. Der Koeffizient  $\mathfrak{b}^\pm$  in der Normalform setzt sich somit additiv zusammen aus dem Koeffizient  $k_1$  (E.15) des resonanten kubischen Terms in den alten Ordnungsparametergleichungen und dem Beitrag der quadratischen Terme (E.25).

### E.3 Behandlung höherer Terme

Abschließend muß noch bemerkt werden, daß die hier dargestellte Methode der nichtlinearen Transformation der Ordnungsparameter ohne Schwierigkeiten auch auf höhere Ordnungen erweiterbar ist. Dies ist beispielsweise dann nötig, wenn die Ordnungsparametergleichungen ausschließlich Terme höherer Ordnung enthalten. Es läßt sich dann feststellen, daß durch eine der Ordnung entsprechend angepaßte Transformation<sup>1</sup> die Terme mit geraden Potenzen der Ordnungsparameter stets eliminiert werden können, während bei den ungeraden Potenzen immer ein relevanter Term auftritt, der durch die Transformation nicht eliminiert werden kann.

---

<sup>1</sup>Wenn  $r$  die niederste Ordnung der Nichtlinearität in den Ordnungsparametergleichungen ist, dann ist die Nichtlinearität der Transformation eine komplexe homogene Funktion vom Grad  $r$ .

# Literaturverzeichnis

- [1] H.D.I. Abarbanel, R. Brown, und M.B. Kennel. Variation of Lyapunov exponents on a strange attractor. *J. Nonlinear Sci.*, 1:175, 1991.
- [2] H.D.I. Abarbanel, R. Brown, J.J. Sidorovich, und L.S. Tsimring. The analysis of observed chaotic data in physical systems. *Rev. Mod. Phys.*, 65(4):1331, 1993.
- [3] N.B. Abraham, A.M. Albano, B. Das, G. De Guzman, S. Yong, R.S. Gioggia, G.P. Puccioni, und J.R. Tredicce. Calculating the dimension of attractors from small data sets. *Phys. Lett. A*, 114(5):217, 1986.
- [4] U. an der Heiden und M.C. Mackey. *Funct. Biol. Med.*, 1:156, 1982.
- [5] U. an der Heiden und M.C. Mackey. Mixed Feedback: A Paradigm for Regular and Irregular Oscillations. In L. Rensing, U. an der Heiden, und M.C. Mackey, Herausgeber, *Temporal Disorder in Human Oscillatory Systems*. Springer-Verlag, 1987.
- [6] J. Aracil und M. Toro. Bifurcations and Chaos in a Predator-Prey-Food Ecological Model. In M.G. Velarde, Herausgeber, *Synergetics Order and Chaos*, Seite 448. World Scientific, 1987.
- [7] V.I. Arnol'd. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1979.
- [8] V.I. Arnol'd, V.S. Afrajmovich, Y.S. Il'yashenko, und L.P. Shil'nikov. In V.I. Arnol'd, Herausgeber, *Dynamical Systems V*, Band 5 der Reihe *Encyclopedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1994.
- [9] V.I. Arnol'd und A. Avez. *Ergodic problems of classical mechanics*. Benjamin, 1968.
- [10] J. Bélair und M.C. Mackey. Consumer Memory and Price Fluctuations in Commodity Markets: An Integrodifferential Model. *J. of Dynamics and Differential Equations*, 1(3):299, 1989.
- [11] R. Bellman und K.L. Cooke. *Differential-Difference Equations*. Academic Press, 1963.

- [12] H. Bènard. *Rev. Gen. Sci. Pur. Appl.*, 11:1261, 1900.
- [13] M. Le Berre, E. Ressayre, und A. Tallet. Dynamic system driven by a retarded force acting as colored noise. *Phys. Rev. A*, 41:6635, 1990.
- [14] M. Le Berre, E. Ressayre, A. Tallet, und H.M. Gibbs. High-Dimension Chaotic Attractors of a Nonlinear Ring Cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 56:274, 1986.
- [15] M. Le Berre, E. Ressayre, A. Tallet, H.M. Gibbs, D.L. Kaplan, und M.H. Rose. Conjecture on the dimensions of chaotic attractors of delayed-feedback dynamical systems. *Phys. Rev. A*, 35(9):4020, 1987.
- [16] A.S. Besicovitch. On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system (On sets of fractional dimensions II). *Mathematische Annalen*, 110:321, 1935.
- [17] R. Best. *Theorie und Anwendungen des Phase-locked Loops*. AT Verlag, 1987.
- [18] M. Bestehorn. *Strukturbildung durch Selbstorganisation in Flüssigkeiten und in chemischen Systemen*. Habilitation, Universität Stuttgart, Harri-Deutsch Verlag, 1994.
- [19] E. Boe und H.C. Chang. Transition to Chaos from a Two-Torus in a Delayed Feedback System. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1:67, 1991.
- [20] D.S. Broomhead und G.P. King. Nonlinear Phenomena and Chaos. *Physica D*, 20:217, 1986.
- [21] P. Bryant, R. Brown, und H.D.I. Abarbanel. Lyapunov exponents from observed time series. *Phys. Rev. Lett.*, 65(13):1523, 1990.
- [22] T. Buzug. *Analyse Chaotischer Systeme*. Wissenschaftsverlag, 1993.
- [23] S.A. Campbell, J. Bélair, T. Ohira, und J. Milton. Limit Cycles, Tori, and Complex Dynamics in a Second-Order Differential Equation with Delayed Negative Feedback. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 7:1, 1995.
- [24] G. Cantor. In E. Zermelo und A. Fraenkel, Herausgeber, *Gesammelte Abhandlungen*. Springer-Verlag, 1932.
- [25] B.V. Chirikov. A universal instability of many oscillator systems. *Phys. Rep.*, 52:265, 1979.
- [26] Y. Cho und T. Umeda. Observation of Chaos in a Semiconductor Laser with Delayed Feedback. *Opt. Comm.*, 59:131, 1986.
- [27] P. Collet und J.-P. Eckmann. *Iterated maps on the interval as dynamical systems*. Birkhäuser, 1980.

- [28] J.M. Cushing. Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics. Band 20 der Reihe *Lecture Notes in Biomathematics*. Springer-Verlag, 1977.
- [29] U. Dekker und H. Thomas. Die Chaos-Theorie. *Bild der Wissenschaft*, 1:63, 1983.
- [30] B. Derrida und Y. Pomeau. Feigenbaum's ratio of two-dimensional area preserving maps. *Phys. Lett. A*, 80(4):217, 1980.
- [31] T. Ditzinger und H. Haken. Oscillations in the perception of ambiguous patterns. *Biol. Cybern.*, 61:279, 1989.
- [32] B. Eckhardt. Periodic Orbit Analysis of the Lorenz Attractor. *Z. Physik B*, 93:259, 1994.
- [33] J.P. Eckmann und D.Ruelle. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev. Mod. Phys.*, 57(3):617, 1985.
- [34] J.D. Farmer. Chaotic Attractors of an Infinite-Dimensional Dynamical System. *Physica D*, 4:366, 1982.
- [35] J.D. Farmer, E. Ott, und J.A. Yorke. The dimension of chaotic attractors. *Physica D*, 7:153, 1983.
- [36] M.J. Feigenbaum. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.*, 19:25, 1978.
- [37] M.J. Feigenbaum. The universal properties of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.*, 21:669, 1979.
- [38] *Fischer Lexikon, Mathematik 1,2*. Fischer Bücherei, 1966.
- [39] G. Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Ann. École Norm. Ser. 2*, 12:47, 1883.
- [40] A.M. Fraser und H.L. Swinney. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Phys. Rev. A*, 33(2):1134, 1986.
- [41] P. Frederickson, J.L. Kaplan, E.D. Yorke, und J.A. Yorke. The lyapunov dimension of strange attractors. *Journal of Differential Equations*, 49:185, 1983.
- [42] H.I. Freedman. *Deterministic Mathematical Models in Population Ecology*. Marcel Dekker, 1980.
- [43] R. Friedrich. *Dynamische Strukturen in Synergetischen Systemen*. Habilitation, Universität Stuttgart, 1992.

- [44] R. Friedrich, A. Fuchs, und H. Haken. Synergetic analysis of spatio-temporal EEG patterns. In A.V. Holden, M. Markus, und H.G. Othmer, Herausgeber, *Nonlinear wave processes in excitable media*. Plenum Press, 1991.
- [45] R. Friedrich, A. Fuchs, H. Haken, und D. Lehmann. Spatio-temporal analysis of multichannel  $\alpha$ -EEG map series. In H. Haken, Herausgeber, *Computational Systems - Natural and Artificial*. Springer-Verlag, 1987.
- [46] R. Friedrich und C. Uhl. Synergetic Analysis of Human Electroencephalograms: Petit-Mal Epilepsy. In R. Friedrich und A. Wunderlin, Herausgeber, *Evolution of dynamical structures in complex systems*, Proceedings in physics. Springer-Verlag, 1992.
- [47] R. Frisch und H. Holme. The Characteristic Solutions of a Mixed Difference and Differential Equation Occuring in Economic Dynamics. *Econometrica*, 3:225, 1935.
- [48] A. Fuchs, J.A.S. Kelso, und H. Haken. Phase Transitions in the Human Brain: Spatial Mode Dynamics. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 2(4):917, 1992.
- [49] G. Gaeta. Bifurcation and symmetry breaking. *Phys. Rep.*, 189(1):1, 1990.
- [50] H.M. Gibbs, F.A. Hopf, D.L. Kaplan, und R.L. Shoemaker. Observation of Chaos in Optical Bistability. *Phys. Rev. Lett.*, 46:474, 1981.
- [51] L. Glass, A. Beuter, und D. Larocque. Time Delays, Oscillations and Chaos in Physiological Systems. In A.S. Perelson, B. Goldstein, M. Dembo, und J.A. Jadquez, Herausgeber, *Nonlinearity in Biology and Medicine*. Elsevier New York, 1988.
- [52] L. Glass und M.C. Mackey. Oszillation and chaos in physiological control systems. *Science*, 197:287, 1977.
- [53] K. Gopalsamy. *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*. Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [54] K. Gopalsamy, M.R.S. Kulenović, und G. Ladas. Oscillations and global attractivity in respiratory dynamics. *Dynamics and stability of systems*, 4(2):131, 1989.
- [55] K. Gopalsamy und B.G. Zhang. On a neutral delay logistic equation. *Dynamics and stability of systems*, 2(3,4):183, 1987.
- [56] P. Grassberger und I. Procaccia. Characterisation of strange attractors. *Phys. Rev. Lett.*, 50:346, 1983.
- [57] P. Grassberger und I. Procaccia. Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal. *Phys. Rev. A*, 28(4):2591, 1983.



- [58] P. Grassberger und I. Procaccia. Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D*, 9:189, 1983.
- [59] C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan, und J.A. Yorke. Strange Attractors that Are Not Chaotic. *Physica D*, 13:261, 1984.
- [60] C. Grebogi, E. Ott, und J.A. Yorke. Chaotic Attractors in Crisis. *Phys. Rev. Lett.*, 48:1507, 1982.
- [61] C. Grebogi, E. Ott, und J.A. Yorke. Crisis, Sudden Changes in Chaotic Attractors and Chaotic Transients. *Physica D*, 7:181, 1983.
- [62] C. Grebogi, E. Ott, und J.A. Yorke. Fractal Basin Boundaries, Long-Lived Chaotic Transients, and Unstable-Unstable Pair Bifurcation. *Phys. Rev. Lett.*, 50(13):935, 1983.
- [63] E.V. Grigorieva. Persönliche Mitteilung. November 1995.
- [64] E.V. Grigorieva, S.A. Kashchenko, N.A. Loiko, und A.M. Samson. Nonlinear Dynamics in a Laser with a Negative Delayed Feedback. *Physica D*, 59:297, 1992.
- [65] S. Grossman und S. Thomae. Invariant distributions and stationary correlation functions of one-dimensional discrete processes. *Z. Naturforsch. A*, 32:1353, 1977.
- [66] J. Guckenheimer und P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Band 42 der Reihe *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 4 Auflage, 1993.
- [67] H. Haken. *Laser Theory*, Band XXV/2c der Reihe *Encyclopedia of Physics*. Springer-Verlag, 1970.
- [68] H. Haken. *Licht und Materie I: Elemente der Quantenoptik*. B.I. Wissenschaftsverlag, 1979.
- [69] H. Haken. *Advanced Synergetics*. Springer-Verlag, 1983.
- [70] H. Haken. *Synergetik. Eine Einführung*. Springer-Verlag, 1983.
- [71] H. Haken. *Erfolgsgeheimnisse der Natur*. Verlag Ullstein, 1984.
- [72] H. Haken. *Licht und Materie II: Laser*. B.I. Wissenschaftsverlag, 1985.
- [73] H. Haken, J.A.S. Kelso, und H. Bunz. A theoretical model of phase transition in human hand movements. *Biol. Cybern.*, 51:347, 1985.
- [74] H. Haken, C.E. Peper, P.J. Beek, und A. Daffertshofer. A model for phase transitions in human hand movements during multi frequency tapping. *Physica D*, 90:179, 1996.

- [75] H. Haken und A. Wunderlin. Generalized Ginzburg-Landau Equations, Slaving Principle and Center Manifold Theorem. *Z. Physik B*, 44:135, 1981.
- [76] H. Haken und A. Wunderlin. *Die Selbststrukturierung der Materie: Synergetik in der unbelebten Welt*. Vieweg-Verlag, 1991.
- [77] J.K. Hale. *Theory of Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, 1977.
- [78] J.K. Hale. Dynamics and Delays. In T. Yoshizawa, Herausgeber, *Functional Differential Equations*. World Scientific, 1991.
- [79] J.K. Hale und N. Sternberg. Onset of Chaos in Differential Delay Equations. *J. Comput. Phys.*, 77:221, 1988.
- [80] F. Hausdorff. Dimension und äußeres Maß. *Mathematische Annalen*, 79:157, 1919.
- [81] B.J. Hawdon, J. O’Gorman, und D.M. Hefferman. Stability Properties of Nonlinear Delay Systems and the Breakdown of the Adiabatic Approximation. *Z. Naturforsch. A*, 46:686, 1991.
- [82] N.D. Hayes. Roots of the Transcendental Equation Associated with a Certain Difference-differential Equation. *J. London Math. Soc.*, 25:226, 1950.
- [83] X.Z. He, B.G. Zhang, und K. Gopalsamy. Single species dynamics in changing environments. *Dynamics and stability of systems*, 9(4):293, 1994.
- [84] E. Hopf. Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems. *Math.-Phys. Ber. der Sächsischen Akademie der Wissenschaften*, 94:1, 1942.
- [85] B. Hu und J.M. Mao. Period doubling: Universality and critical-point order. *Phys. Rev. A*, 25(6):3259, 1982.
- [86] B. Hu und J.M. Mao. Third-order renormalization-group calculation of the Feigenbaum universal bifurcation ratio in the transition to chaotic behavior. *Phys. Rev. A*, 25(2):1196, 1982.
- [87] B. Hu und I.I. Satija. A spectrum of universality classes in period doubling and period tripling. *Phys. Lett. A*, 98(4):143, 1983.
- [88] A. Huber. *Analyse nichtlinearer Modelle von Produktionsabläufen mit Methoden der Synergetik*. Diplomarbeit, Universität Stuttgart, 1996.
- [89] K. Ikeda. Multiple-valued Stationary State and its Instability of the Transmitted Light by a Ring Cavity System. *Opt. Comm.*, 30:257, 1979.
- [90] E.T. Jaynes. Information Theory and Statistical Mechanics I. *Phys. Rev.*, 106:620, 1957.

- [91] E.T. Jaynes. Information Theory and Statistical Mechanics II. *Phys. Rev.*, 108:171, 1957.
- [92] V.K. Jirsa, R. Friedrich, und H. Haken. Reconstruction of the spatio-temporal dynamics of a human magnetoencephalogram. *Physica D*, 89:100, 1995.
- [93] V.K. Jirsa, R. Friedrich, H. Haken, und J.A.S. Kelso. A theoretical model of phase transitions in the human brain. *Biol. Cybern.*, 71:27, 1994.
- [94] K. Kaiser und D. Merkle. Routes to Chaos in a Delay-Differential System Modelling a Passive Optical Resonator. *Phys. Lett. A*, 139:133, 1989.
- [95] M. Kalecki. A Macrodynamical Theory of Business Cycles. *Econometrica*, 3:327, 1935.
- [96] T. Kapitaniak. *Chaos in Systems with Noise*. World Scientific, 1988.
- [97] J.L. Kaplan und J.A. Yorke. Chaotic behavior of multidimensional difference equations. In H.O. Peitgen und H.O. Walter, Herausgeber, *Lect. Notes in Math.*, Band 730. Springer-Verlag, 1978.
- [98] J.L. Kaplan und J.A. Yorke. Preturbulence: a regime observed in a fluid flow model of Lorenz. *Comm. Math. Phys.*, 67:93, 1979.
- [99] K. Karhunen. Zur spektralen Theorie stochastischer Prozesse. *Ann. Acad. Sci. Fenn. A1, Math. Phys.*, 37, 1946.
- [100] A. Kelley. In J. Robbin R. Abraham, Herausgeber, *Transversal Mappings and Flows*. Benjamin, New York, 1967.
- [101] J. Kevorkian. The two variable expansion procedure for the approximate solution of certain nonlinear differential equations. In *Space Mathematics III*, Lectures in Applied Mathematics 7, Seite 206. American Mathematical Society, 1966.
- [102] A.N. Kolmogorov. Eine neue metrische Invariante transitiver dynamischer Systeme und Automorphismen von Lebesgue-Räumen (in russ.). *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 119:861, 1958.
- [103] N. Krasovskii. *Stability of Motion*. Moskau, 1959, Übersetzung: Stanford University Press, 1963.
- [104] Y. Kuang. On neutral delay logistic gause-type predator-prey systems. *Dynamics and stability of systems*, 6(2):173, 1991.
- [105] M. Kubíček und M. Marek. In H. Cabannes, M. Holt, H.B. Keller, J. Killen, und S.A. Orszag, Herausgeber, *Computational Methods in Bifurcation Theory and Dissipative Structures*, Springer Series in Computational Physics. Springer-Verlag, 1983.

- [106] S. Kullback. *Information Theory and Statistics*. John Wiley & Sons, 1951.
- [107] O.E. Lanford. Bifurcation of periodic solutions into invariant tori: The work of Ruelle and Takens. In *Nonlinear Problems in the Physical Sciences and Biology*, Lecture Notes in Mathematics 322. Springer-Verlag, 1973.
- [108] R.W. Leven, B.-P. Koch, und B. Pompe. *Chaos in dissipativen Systemen*. Vieweg, 1989.
- [109] R.W. Leven, B.-P. Koch, und B. Pompe. *Chaos in dissipativen Systemen*. Akademie Verlag, 2. Auflage, 1994.
- [110] W. Lick. Two-variable expansions and singular perturbation problems. *SIAM J. Appl. Math.*, 17:815, 1969.
- [111] M. Loeve. Fonctions aleatoires de second ordre. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1946.
- [112] E.N. Lorenz. Deterministic non-periodic flows. *J. Atmos. Sci.*, 20:130, 1963.
- [113] E.N. Lorenz. The predictability of hydrodynamic flow. *Trans. N.Y. Acad. Sci.*, 25:409, 1963.
- [114] E.N. Lorenz. Computational chaos - a prelude to computational instability. *Physica D*, 35:299, 1989.
- [115] W.A. Lorenz. *Der Blutkreislauf als synergetisches System - numerische Datenanalyse*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1994.
- [116] M.C. Mackey. Periodic auto-immune hemolytic anemia: an induced dynamical disease. *Bull. math. Biol.*, 41:829, 1979.
- [117] M.C. Mackey. Commodity Price Fluctuations: Price Dependent Delays and Nonlinearities as Explanatory Factors. *J. of Economic Theory*, 48(2):497, 1989.
- [118] B.B. Mandelbrot. *Die fraktale Geometrie der Natur*. Birkhäuser, Basel, 1987.
- [119] R. Mañé. On the dimension of the compact invariant set of certain nonlinear maps. In *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980*, Lecture Notes in Mathematics 898, Seite 230. Springer-Verlag, 1981.
- [120] J.E. Marsden und M. McCracken. *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Band 19 der Reihe *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1976.
- [121] J.G. Milton und M.C. Mackey. Periodic haematological diseases: mystical entities or dynamical disorders ? *J. of the Royal College of Physicians of London*, 23(4):236, 1989.
- [122] J.G. Milton und M.C. Mackey. Feedback, Delays and the Origin of Blood Cell Dynamics. *Comments Theoretical Biology*, 1(5):299, 1990.

- [123] N. Minorsky. Self-excited oscillations in dynamical systems possessing retarded actions. *J. Appl. Mech.*, 9:65, 1942.
- [124] A. Namajūnas, K. Pyragas, und A. Tamasevicius. Stabilization of an unstable steady state in a Mackey-Glass system. *Phys. Lett. A*, 204:255, 1995.
- [125] V.I. Oseledec. A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 19:197, 1968.
- [126] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1993.
- [127] E. Ott, C. Grebogi, und J.A. Yorke. Controlling chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 64(11):1196, 1990.
- [128] N.H. Packard, J.P. Crutchfield, J.D. Farmer, und R.S. Shaw. Geometry from a time series. *Phys. Rev. Lett.*, 45:712, 1980.
- [129] A. Pelster und M. Schanz. Die erste oszillatorische Instabilität im zeitlich verzögerten Verhulst-Modell. *Verhandl. DPG*, 7:1109, 1995.
- [130] M. Peschel und W. Mende. *The Predator-Prey Model*. Springer-Verlag, 1986.
- [131] Y.B. Pesin. Characteristic Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory. *Russ. Math. Surv.*, 32(4):55, 1977.
- [132] H. Poincaré. Sur les équations de la dynamique et le problème des trois corps. *Acta Math.*, 13:1, 1890.
- [133] H. Poincaré. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, 3 Bände, Paris, Gauthier-Villars, 1892-1899; Neuauflage: *New methods of celestial mechanics*. American Institute of Physics, 1993.
- [134] L.S. Pontrjagin. On the Zeros of Some Elementary Transcendental Functions. Übersetzung: *Amer. Math. Soc. Transl.*, (2)1:95, 1955.
- [135] K. Pyragas. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Phys. Lett. A*, 170:421, 1992.
- [136] K. Pyragas. Predictable Chaos in slightly perturbed unpredictable chaotic systems. *Phys. Lett. A*, 181:203, 1993.
- [137] K. Pyragas und A. Tamasevicius. Experimental control of chaos by delayed self-controlling feedback. *Phys. Lett. A*, 180:99, 1993.
- [138] R.H. Rand und D. Armbruster. *Perturbation Methods, Bifurcation Theory and Computer Algebra*, Band 65 der Reihe *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1987.
- [139] A. Rényi. *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1977.

- [140] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation*, Band 18 der Reihe *Springer Series in Synergetics*. Springer-Verlag, 1984.
- [141] D. Ruelle. Sensitive Dependence on Initial Conditions and Turbulent Behavior of Dynamical Systems. In O. Gurel und O.E. Rössler, Herausgeber, *Bifurcation Theory and Its Applications in Scientific Disciplines*, Band 316. New York Acad. of Sci., 1979.
- [142] D. Ruelle. Strange Attractors. *Math. Intelligencer*, 2:126, 1980.
- [143] D. Ruelle. Chaotic Evolution and Strange Attractors. In L.A. Radicati di Brozolo, Herausgeber, *Lezioni Lincee*. Cambridge University Press, 1989.
- [144] M. Sano und Y. Sawada. Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series. *Phys. Rev. Lett.*, 55(10):1082, 1985.
- [145] M. Schanz. *Anwendung der Theorie des deterministischen Chaos auf die Analyse komplexer Systeme, insbesondere physiologischer*. Diplomarbeit, Universität Stuttgart, 1989.
- [146] G. Schöner, H. Haken, und J.A.S. Kelso. A Stochastic Theory of Phase Transition in Human Hand Movements. *Biol. Cybern.*, 53:247, 1986.
- [147] H.G. Schuster. *Deterministic Chaos. An Introduction*. VCH Verlagsgesellschaft, 1989.
- [148] L.A. Shampine. *Numerical solution of ordinary differential equations*. Chapman & Hall, 1994.
- [149] C.E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell System Techn. J.*, 27:370,623, 1948.
- [150] C.E. Shannon und W. Weaver. *The Mathematical Theory of Communication*. Univ. of Illin. Press, 1949.
- [151] R. Shaw. Strange attractors, chaotic behaviour and information flow. *Z. Naturforsch. A*, 36:80, 1981.
- [152] C. Simmendinger. *Untersuchung von Instabilitäten in Systemen mit zeitlicher Verzögerung*. Diplomarbeit, Universität Stuttgart, 1995.
- [153] C. Simmendinger, A. Pelster, und A. Wunderlin. Zur Floquet-Theorie zeitlich verzögerter Systeme. *Verhandl. DPG*, 6:1295, 1996.
- [154] C. Simmendinger, A. Pelster, und A. Wunderlin. On the Floquet Theory of Delay Differential Equations. *In Vorbereitung*, 1997.
- [155] J.G. Sinaj. Zum Begriff der Entropie dynamischer Systeme (in russ.). *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 124:768, 1959.

- [156] C. Sparrow. *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*. Springer-Verlag, 1973.
- [157] A. Stefanovska. *Selforganisation of Biological Systems Influenced by Electrical Current*. Dissertation, University of Ljubljana, 1992.
- [158] J. Stoer und R. Bulirsch. *Numerische Mathematik 2*, Band 3. Springer-Verlag, 1990.
- [159] R. Stoop und J. Parisi. Calculation of lyapunov exponents avoiding spurious elements. *Physica D*, 50:89, 1991.
- [160] F. Takens. Singularities of Vector Fields. *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.*, 43:47, 1974.
- [161] F. Takens. Detecting Strange Attractors in Turbulence. In *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980*, Lecture Notes in Mathematics 898, Seite 366. Springer-Verlag, 1981.
- [162] P. Tass. *Synchronisierte Oszillationen im visuellen Cortex - ein synergetisches Modell*. Dissertation, Universität Stuttgart, Shaker Verlag, 1993.
- [163] P. Tass. Cortical pattern formation during visual hallucinations. *J. Biol. Phys.*, 21:177, 1995.
- [164] P. Tass, A. Wunderlin, und M. Schanz. A theoretical model of sinusoidal forearm tracking with delayed visual feedback. *J. Biol. Physics*, 21:83, 1995.
- [165] R.J. Taylor. *Predation*. Chapman and Hall, 1985.
- [166] J. Theiler. Estimating fractal dimension. *J. Opt. Soc. Am. A*, 7(6):1055, 1990.
- [167] R. Valleé und C. Delisle. Route to chaos in an acousto-optic bistable device. *Phys. Rev. A*, 31:2390, 1985.
- [168] R. Valleé und C. Delisle. Periodicity windows in a dynamical system with a delayed feedback. *Phys. Rev. A*, 34:309, 1986.
- [169] V.A. Vavilin und A.M. Zhabotinsky. *Oscillatory Processes in Biological and Chemical Systems*. Moscow Science Publ., 1967.
- [170] F. Verhulst. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer Verlag, 1990.
- [171] P.F. Verhulst. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Corr. Math. et. Phys.*, 10:113, 1838.
- [172] P. Walters. *An introduction to ergodic theory*. Springer-Verlag, 1982.

- [173] S. Watanabe. *Pattern Recognition: Human and Mechanical*, Kapitel 7, Seite 199. John Wiley & Sons, 1985. Pattern Recognition as Covariance Diagonalization.
- [174] W. Weidlich. *Collective Phenomena*, 1:51, 1972.
- [175] W. Weidlich und G. Haag. In *Quantitative Sociology*, Band 14 der Reihe *Springer Series in Synergetics*. Springer-Verlag, 1983.
- [176] Wiggins. *Global bifurcations and chaos*. Springer-Verlag, 1991.
- [177] W. Wischert. *Anwendung synergetischer Konzepte auf Selbstorganisationsprozesse in zeitlich verzögerten Systemen*. Dissertation, Universität Stuttgart, Shaker Verlag, 1993.
- [178] W. Wischert, A. Wunderlin, A. Pelster, M. Olivier, und J. Groslambert. Delay-Induced Instabilities in Nonlinear Feedback Systems. *Phys. Rev. E*, 49:203, 1994.
- [179] A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, und J.A. Vastano. Determining lyapunov-exponents from a time-series. *Physica D*, 16:285, 1985.
- [180] E.M. Wright. A nonlinear difference-differential equation. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 194:66, 1955.
- [181] A. Wunderlin und H. Haken. Scaling Theory for Nonequilibrium Systems. *Z. Physik B*, 21:393, 1975.



# Danksagung

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Hermann Haken gilt mein besonderer Dank für die freundliche Aufnahme an sein Institut. Durch sein großes Interesse, seine wissenschaftlichen Anregungen, seine großzügige Unterstützung und seine Geduld gab er mir die Möglichkeit, diese Arbeit anzufertigen.

Prof. Dr. M. Fähnle danke ich für die freundliche Übernahme des Mitberichts.

Bei allen Institutskollegen bedanke ich mich für die sehr freundschaftliche Atmosphäre und die zahlreichen interessanten und anregenden Diskussionen. Bei Dr. Axel Pelster möchte ich mich ganz besonders für die vielen wertvollen Anregungen und das sorgfältige Korrekturlesen der Arbeit bedanken. Prof. Dr. Arne Wunderlin, Dr. Axel Pelster und Dr. Dr. Peter Tass danke ich für die interessante und fruchtbare wissenschaftliche Zusammenarbeit.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinen Freunden und meiner Familie, vor allem aber bei meinen Eltern Paul und Erika Schanz, die mir das faszinierende Studium der Physik ermöglicht haben.

Mein innigster Dank jedoch gilt meiner Freundin Andrea Dieterich, die ich nur bewundern kann.