

**Untersuchung von Instabilitäten  
in Systemen mit zeitlicher Verzögerung**

**Diplomarbeit**  
von  
Christian Simmendinger

angefertigt am  
Institut für Theoretische Physik und Synergetik  
der Universität Stuttgart

Hauptberichter: Prof.Dr.A.Wunderlin  
Mitberichter: Prof.Dr.H-R.Trebin

10.März.1995

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
1.1	Nichtlineare Systeme im Sinne der Synergetik . . . . .	5
1.1.1	Retardierte nichtlineare Systeme . . . . .	6
1.2	Stationäre Instabilitäten . . . . .	6
1.3	Ziel der Diplomarbeit . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Zur Floquet-Theorie zeitlich verzögerter Systeme</b>	<b>8</b>
2.1	Bewegungsgleichung . . . . .	8
2.2	Referenzzustände . . . . .	10
2.3	Perturbative Bestimmung periodischer Referenzzustände . . . . .	10
2.3.1	1.Fall: Nichtlinearer Oszillator mit zeitlicher Verzögerung . . . . .	11
2.3.2	2.Fall: Verzögerungsinduzierter periodischer Referenzzustand . . . . .	14
2.4	Dynamik im unendlich dimensionalen Zustandsraum . . . . .	15
2.5	Linearisierung . . . . .	18
2.6	Fourierzerlegung . . . . .	18
2.7	Rekursionsrelationen . . . . .	19
2.8	Matrixwertige transzendente Kettenbrüche . . . . .	19
2.8.1	Erste Lösungsmethode . . . . .	19
2.8.2	Zweite Lösungsmethode . . . . .	22
2.9	Transzendente charakteristische Gleichung . . . . .	24
2.10	Floquet-Eigenlösungen . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Adjungiertes Problem</b>	<b>26</b>
3.1	Bilinearform . . . . .	26
3.2	Adjungierter Operator . . . . .	26
3.2.1	Adjungierte Rekursionsformel . . . . .	27
3.2.2	Adjungierter Kettenbruch . . . . .	28
3.3	Orthonormalitätsrelationen . . . . .	29
3.3.1	Normalisierung . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Projektoren und Modenamplitudengleichungen</b>	<b>31</b>

<b>5</b>	<b>Anwendung auf den PLL</b>	<b>33</b>
5.1	Shohat-Entwicklung . . . . .	33
5.2	Linearisierung um die oszillatorische Lösung . . . . .	35
5.3	Rekursionsrelationen . . . . .	36
5.4	Transzendenter Kettenbruch . . . . .	36
5.5	Floquet-Eigenlösungen . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Anwendung auf den verallgemeinerten van-der-Pol Oszillator</b>	<b>40</b>
6.1	Poincare-Lindstedt Verfahren . . . . .	40
6.2	Linearisierung . . . . .	43
6.3	Fourierentwicklung . . . . .	44
6.4	Rekursionsrelationen . . . . .	44
6.5	Matrixwertiger transzendenter Kettenbruch . . . . .	45
6.6	Algebraische Rechenprogramme . . . . .	48
6.7	Poincare Lindstedt in 4.Ordnung . . . . .	48
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>50</b>
<b>A</b>	<b>Shohat-Entwicklung beim PLL</b>	<b>52</b>
<b>B</b>	<b>Averaging beim Van-der-Pol Oszillator mit zeitlicher Verzögerung</b>	<b>55</b>
B.1	Autonomer Fall . . . . .	55
B.1.1	Adjungiertes Problem und Bilinearform . . . . .	55
B.1.2	Projektoren im autonomen Fall . . . . .	56
B.1.3	Aufspaltung . . . . .	56
B.1.4	Das ungestörte Problem . . . . .	57
B.1.5	Das gestörte Problem . . . . .	58
B.1.6	Averaging . . . . .	59

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Klassifizierung von Funktionaldifferentialgleichungen . . . . .	9
2.2	Nichtlineares System mit zeitlicher Verzögerung . . . . .	9
2.3	Shohat-Transformation des Kleinheitsparameters . . . . .	13
2.4	Umkippmechanismus . . . . .	16
2.5	Pentadiagonale Rekursionsformel . . . . .	21
2.6	Tridiagonale Rekursionsformel . . . . .	23
5.1	Amplitudenvergleich mit der numerischen Simulation . . . . .	34
5.2	Frequenzvergleich mit der numerischen Simulation . . . . .	35
5.3	Phasenportrait des Grenzzyklus vor der Aufspaltung . . . . .	37
5.4	Aufspaltung des Grenzzyklus . . . . .	38
6.1	Amplitudenvergleich . . . . .	41
6.2	Frequenzvergleich . . . . .	42
6.3	Amplitudenvergleich . . . . .	42
6.4	Frequenzvergleich . . . . .	43
6.5	Analytisch gefundener kritischer Parameterwert $\mu_c, 0 \leq \tau \leq 3$ . . . . .	47
6.6	Numerisch gefundener kritischer Parameterwert $\mu_c, 0 \leq \tau \leq 12$ . . . . .	47
6.7	Bestimmung der Floquet-Exponenten $\lambda_i$ aus der transzendenten Eigenwertgleichung . . . . .	49
6.8	Numerische Bestimmung der Floquet-Exponenten $\lambda_i$ . . . . .	49

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Nichtlineare Systeme im Sinne der Synergetik

Das interdisziplinäre Forschungsgebiet Synergetik wurde von Hermann Haken 1969 mit dem Anliegen gegründet, allgemeingültige Prinzipien aufzuzeigen, die einer spontanen Entstehung von räumlichen, zeitlichen, raum-zeitlichen oder funktionalen makroskopischen Strukturen zugrunde liegen. Besonders typische Beispiele derartiger Selbstorganisationsprozesse sind etwa der Laser, bei dem sich lichtemittierende Atome im makroskopischen Maßstab ordnen und kohärentes Licht abstrahlen, die Musterbildung bei biologischen Systemen etwa in der Morphogenese oder auch Reaktionszustände von hohem Ordnungsgrad bei autokatalytischen chemischen Prozessen. Derartige Systeme befinden sich fern vom thermodynamischen Gleichgewicht, die inhärenten Strukturen werden durch unspezifische Zufuhr von Materie und Energie aufrechterhalten. Bei einer Veränderung dieser äußeren Kontrollparameter über einen kritischen Punkt hinaus, verlieren diese Systeme ihre ursprüngliche Stabilität und gehen in einen neuen Ordnungszustand über. Es läßt sich zeigen, daß das Verhalten eines derartigen Systems in der Umgebung einer Instabilität nur von wenigen Ordnungsparametern abhängt. Durch die systematische Bestimmung der Bewegungsgleichungen dieser Parameter läßt sich dann das dynamische Verhalten derartiger komplexer Systeme auf makroskopischem Maßstab vorhersagen. Eine mathematische Beschreibung im Rahmen der Synergetik wurde bisher mit Hilfe von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen mit stochastischen Verallgemeinerungen realisiert. Das hierbei entwickelte Verfahren beruht auf einer systematischen Elimination der beim Nichtgleichgewichtsphasenübergang stabil bleibenden kollektiven Moden.

### 1.1.1 Retardierte nichtlineare Systeme

Selbstorganisationsprozesse, die durch die Berücksichtigung endlicher Laufzeiten innerhalb eines Systems zustande kommen, haben in der Vergangenheit nur eine untergeordnete Rolle gespielt. Dies lag zum einen daran, daß zeitliche Retardierungen oftmals als zu klein angesehen wurden, um eine qualitative Änderung der Systemdynamik bewirken zu können. Zudem verhinderten die mathematischen Schwierigkeiten, die mit der korrekten Formulierung des Anfangswertproblems verbunden sind, eine systematische Theorie. Inzwischen jedoch werden in den Natur- und Ingenieurwissenschaften Konzepte diskutiert, die einer derartigen Problematik Rechnung tragen. So dienen etwa in optisch bistabilen oder auch neurophysiologischen Kontrollsystemen verzögerungsinduzierte Instabilitäten als zunehmend wichtiger werdende Erklärungsmodelle. Das Mackey-Glass Modell [3] beispielsweise, eine skalare nichtlineare retardierte Differentialgleichung, wurde zur Beschreibung von beobachteten Anomalien in der Regeneration weißer Blutkörperchen infolge des Einflusses endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeiten chemosensitiver Substanzen im Blutkreislauf aufgestellt. Besonderes physikalisches Interesse wird inzwischen zeitlich verzögerten nichtlinearen Systemen bei der Untersuchung der Struktur seltsamer Attraktoren entgegengebracht. Pomeau [4] stellte dabei die Vermutung auf, daß die Dimension chaotischer Attraktoren, unabhängig von dem gewählten System, proportional zur Retardierung ansteigt.

## 1.2 Stationäre Instabilitäten

Um dem Einfluß endlicher Signallaufzeiten auf das dynamische Verhalten nichtlinearer Systeme gerecht zu werden, mußten die in der Synergetik entwickelten Konzepte auf zeitlich retardierte Systeme erweitert werden. Durch die von Krasnovkii [12] vorgeschlagene Transformation einer Delaydifferentialgleichung in eine Funktionaldifferentialgleichung gelang die Erweiterung des synergetischen Ordnungsparameterkonzepts mit systematischer Elimination der irrelevanten Variablen im Falle eines stationären Referenzzustandes. Insbesondere war es dazu nötig, das Konzept der kollektiven Moden neu zu formulieren, um eine Zeitskalenhierarchie zu entdecken, die eine angemessene Elimination der stabilen Moden ermöglicht [7] [8]. Das fundamentale Resultat war die Reduktion des ursprünglich unendlichdimensionalen Modenamplitudensystems auf ein niedrigdimensionales System von Ordnungsparametergleichungen, die keine Gedächtnisterme mehr enthalten. Der aufgefundene Formalismus wurde auf eine Modellgleichung eines Phasenregelkreises 1. Ordnung mit zeitlicher Verzögerung angewandt. Die zugeordnete skalare nichtlineare Delay-Differentialgleichung führt in der Umgebung einer Instabilität zu einer Ordnungsparametergleichung, die der Normalform einer Hopfbifurkation entspricht. Die theoretischen Ergebnisse konnten inzwischen unter Anleitung von M.Olivier und J.Gros Lambert [9] experimentell am CNRS Besancon bestätigt werden. Einziger

Kontrollparameter war hierbei die Delayzeit.

### **1.3 Ziel der Diplomarbeit**

Angestrebt wurde eine Erweiterung dieses Formalismus auf Instabilitäten bei zeitlich periodischen Referenzzuständen. Hierzu erforderlich war die Formulierung der Floquetschen Theorie für Delay-Differentialgleichungen, die den unendlichdimensionalen Charakter dieser Systeme streng berücksichtigt, sowie die analoge Erweiterung des Eliminationsverfahrens auf höherdimensionale Referenzzustände.

## Kapitel 2

# Zur Floquet-Theorie zeitlich verzögerter Systeme

### 2.1 Bewegungsgleichung

Bei der Beschreibung nichtlinearer dynamischer Systeme geht man in der Regel davon aus, daß die zeitliche Entwicklung nur vom momentanen Zustand des Systems abhängt. Im vollständigen Zustandsraum der Systeme vernachlässigt man daher Gedächtniseffekte. Faßt man beispielsweise im Falle endlich vieler Untersysteme deren Variablen zu einem Zustandsvektor  $\vec{x}$  zusammen, so wird dessen zeitliche Evolution durch einen Satz gewöhnlicher Differentialgleichungen beschrieben:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{N}_0(\vec{x}(t), \{\sigma_i\}). \quad (2.1)$$

Das nichtlineare Vektorfeld  $\vec{N}_0$  hängt dabei noch von einem Satz von Kontrollparametern  $\{\sigma_i\}$  ab, die die Offenheit des Systems gegenüber der Umgebung quantifizieren.

Betrachtet man hingegen Systeme bei denen zeitlichen Verzögerungen eine wesentliche Rolle spielen, so erhält man bei deren Modellierung anstelle von gewöhnlichen Differentialgleichungen Funktionaldifferentialgleichungen. Je nach Art der zeitlichen Verzögerung unterscheidet man dabei zwischen avancierten, neutralen und retardierten Funktionaldifferentialgleichungen (s. Abbildung (2.1)).

Einen wichtigen Spezialfall der retardierten Funktionaldifferentialgleichungen stellen Systeme dar, bei denen die zeitliche Änderung des Zustandsvektors zur Zeit  $t$  von einem früheren Zeitpunkt  $t - \tau$  abhängt (s. Abbildung (2.2)). In Verallgemeinerung von (2.1) läßt sich dann die Bewegungsgleichung als Delaydifferentialgleichung formulieren:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{N}(\vec{x}(t), \vec{x}(t - \tau), \{\sigma_i\}). \quad (2.2)$$

Das um die zeitliche Verzögerung  $\tau$  retardierte Argument des Zustandsvektors macht die Modellgleichung nichtlokal in der Zeit.



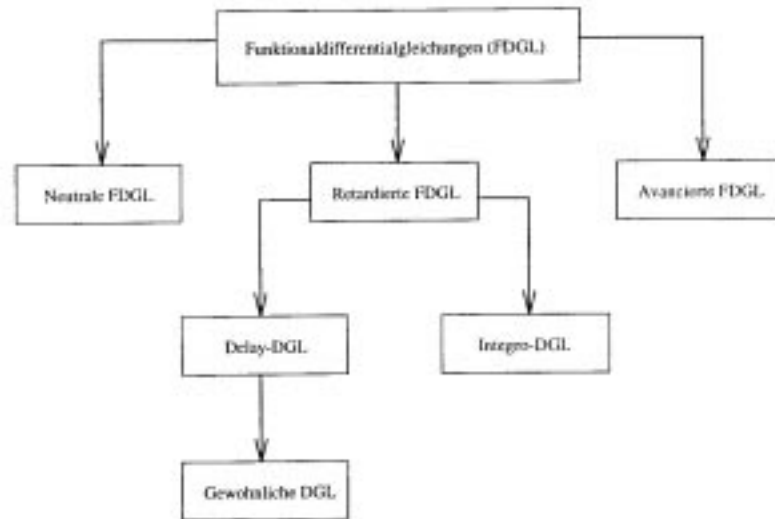


Abbildung 2.1: Klassifizierung von Funktionaldifferentialgleichungen

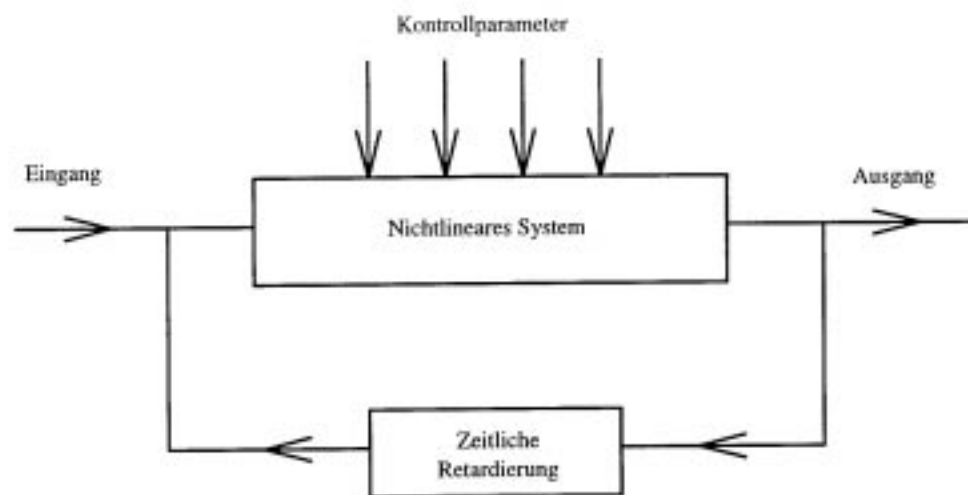


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung eines nichtlinearen Systems mit zeitlicher Verzögerung

## 2.2 Referenzzustände

Systeme der Form (2.2) besitzen im allgemeinen stabile Referenzzustände, die sich durch Attraktoren im Phasenraum charakterisieren lassen. Als typische Vertreter seien hier hier Fixpunkte, sowie zeitlich periodische Grenzzyklen und quasiperiodische Tori genannt. Verändert man die Kontrollparameter, so können derartige Referenzzustände destabilisiert werden. Das System geht dann in einen neuen Ordnungszustand über. Durch eine weitere Änderung der Kontrollparameter kann das System so eine ganze Hierarchie von Instabilitäten durchlaufen, bis es schließlich einen chaotischen Attraktoren erzeugt, der die Ordnungsstrukturen zumindest teilweise zerstört wird.

Da eine globale Analyse derartiger Systeme im allgemeinen nicht möglich ist, ist man gezwungen, sich auf die lokale Untersuchung der Umgebung von Referenzzuständen zu beschränken. Während das Verhalten solcher Systeme in der Nähe von Fixpunkten bereits eingehend untersucht wurde [5, 8], ist über die Systemdynamik in der Nähe von periodischen Referenzzuständen nur wenig bekannt [5]. Durch die im folgenden ausgearbeitete Floquettheorie bei zeitlich verzögerten Systemen sollen auch zeitabhängige Referenzzustände und deren Stabilität einer analytischen Untersuchung zugänglich gemacht werden.

## 2.3 Perturbative Bestimmung periodischer Referenzzustände

Die Floquet-Theorie setzt die Existenz eines periodischen Referenzzustandes voraus. Wir nehmen im folgenden an, daß dieser Referenzzustand für einen gewissen Kontrollparameterbereich stabil ist.

In der Regel kann der periodische Referenzzustand nicht durch einen geschlossenen analytischen Ausdruck angegeben werden. Man ist deshalb auf perturbative Verfahren angewiesen, die die Berechnung dieses Referenzzustandes bis zu einer endlichen Ordnung in einem Kleinheitsparameter  $\mu$  erlauben. Hierbei können grundsätzlich zwei Fälle unterschieden werden: Der Kleinheitsparameter  $\mu$  kann zum einen als Kontrollparameter vorgegeben sein, zum anderen kann er bei verzögerungsinduzierten periodischen Referenzzuständen als Maß für den relativen Abstand vom einem kritischen Parameterwert  $\tau_c$  eingeführt werden.  $\tau_c$  beschreibt hierbei die kritische Verzögerungszeit oberhalb der eine periodische Lösung der Differentialgleichung (2.2) existiert. Beide Fälle werden im folgenden anhand exemplarischer Modellgleichungen untersucht. Hierbei werden zwei grundlegende Verfahren der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen, das Poincaré-Lindstedt-Verfahren und dessen Erweiterung in Form der Shohat-Entwicklung, auf Delaydifferentialgleichungen ver-

allgemeinert. Ein drittes Verfahren, die Methode des 'Averaging', wird im Anhang B beschrieben.

### 2.3.1 1.Fall: Nichtlinearer Oszillator mit zeitlicher Verzögerung

In diesem Abschnitt gehen wir davon aus, daß das vorliegende System auch ohne eine zeitliche Verzögerung  $\tau$  einen periodischen Referenzzustand besitzt. Als Beispiel dient ein harmonischer Oszillator mit nichtlinearer zeitverzögerter Störung  $\tilde{f}$ :

$$x''(t, \mu) + \omega_0^2 x(t, \mu) = \mu \tilde{f}(x(t, \mu), x'(t, \mu), x(t - \tau, \mu), x'(t - \tau, \mu)). \quad (2.3)$$

Hier bedeutet der Strich ' die Ableitung nach der Zeit. Durch die Nichtlinearität  $\tilde{f}$  der Gleichung (2.3) wird sich die Frequenz  $\omega(\mu)$  des periodischen Referenzzustandes

$$x(t, \mu) = x\left(t + \frac{2\pi}{\omega(\mu)}, \mu\right) \quad (2.4)$$

vom ungestörten Wert  $\omega_0$  bei  $\mu = 0$  unterscheiden. Um dieser Frequenzänderung Rechnung zu tragen, führt man zweckmäßigerweise eine Umskalierung durch

$$\xi(t) = \omega(\mu)t \quad (2.5)$$

$$q(\xi, \mu) = x\left(\frac{\xi(t)}{\omega(\mu)}, \mu\right), \quad (2.6)$$

so daß die Bewegungsgleichung (2.3) die Form

$$\omega^2 \ddot{q}(\xi, \mu) + \omega_0^2 q(\xi, \mu) = \mu f(q(\xi, \mu), \dot{q}(\xi, \mu), q(\xi - \omega(\mu)\tau, \mu), \dot{q}(\xi - \omega(\mu)\tau, \mu)). \quad (2.7)$$

annimmt. Der Punkt bezeichnet hierbei die Ableitung nach der dimensionslosen Zeitvariablen  $\xi$ . Die neue Funktion  $q(\xi)$  ist dann  $2\pi$ -periodisch:

$$q(\xi, \mu) = q(\xi + 2\pi, \mu). \quad (2.8)$$

#### Das Poincare-Lindstedt-Verfahren

Da  $\mu$  als kleine Größe vorausgesetzt wird, lassen sich  $\omega(\mu), q(\xi, \mu)$  in Analogie zum Vorgehen der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen [16, 18] nach Potenzen von  $\mu$  entwickeln:

$$q(\xi, \mu) = q_0(\xi) + \mu q_1(\xi) + \mu^2 q_2(\xi) + \dots, \quad (2.9)$$

$$\omega(\mu) = \omega_0 + \mu \omega_1 + \mu^2 \omega_2 + \dots \quad (2.10)$$

Im Unterschied zum Fall gewöhnlicher Differentialgleichungen hat man bei Delay-Differentialgleichungen wie (2.7) zusätzlich zu beachten, daß die Potenzreihenentwicklungen der jeweiligen zeitverzögerten Terme durch (2.9), (2.10) folgendermaßen festgelegt sind:

$$q(\xi - \omega(\mu)\tau, \mu) = q_0(\xi - \omega_0\tau) + \mu(q_1(\xi - \omega_0\tau) - \omega_1\tau\dot{q}_0(\xi - \omega_0\tau)) + \dots \quad (2.11)$$

$$\dot{q}(\xi - \omega(\mu)\tau, \mu) = \dot{q}_0(\xi - \omega_0\tau) + \mu(\dot{q}_1(\xi - \omega_0\tau) - \omega_1\tau\ddot{q}_0(\xi - \omega_0\tau)) + \dots \quad (2.12)$$

Setzt man diese Entwicklungen in (2.7) ein, und wertet sie nach Potenzen von  $\mu$  aus, so erhält man in jeder Ordnung ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem 2. Ordnung, das sich dann iterativ lösen läßt.

$$\ddot{q}_0(\xi) + q_0(\xi) = 0, \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1(\xi) + q_1(\xi) &= -2\frac{\omega_1}{\omega_0}\dot{q}_0(\xi) - \\ &\quad - \frac{1}{\omega_0^2}f(q_0(\xi), \dot{q}_0(\xi), q_0(\xi - \omega_0\tau), \dot{q}_0(\xi - \omega_0\tau)), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\vdots = \vdots$$

$$\ddot{q}_n(\xi) + q_n(\xi) = I_n(\xi). \quad (2.15)$$

Die Inhomogenität  $I_n(\xi)$  ist dabei durch die vorhergehenden Ordnungen  $q_m(\xi)$  mit  $0 \leq m < n$  festgelegt. Um die Periodizitätsbedingung (2.8) in jeder Ordnung des Kleinheitsparameters  $\mu$  zu erfüllen, muß die Lösung  $q_n(\xi)$  der  $n$ -ten Differentialgleichung (2.15) ebenfalls  $2\pi$ -periodisch sein:

$$q_n(\xi) = q_n(\xi + 2\pi). \quad (2.16)$$

Weist die Fourierentwicklung der Inhomogenität  $I_n(\xi)$  bezüglich  $\xi$  Vielfache der 1. Harmonischen  $\sin \xi$ ,  $\cos \xi$  auf, so treten in der Lösung aperiodische Säkularterme der Form  $\xi \sin \xi$ ,  $\xi \cos \xi$  auf. So ist beispielsweise eine partikuläre Lösung  $y_p(\xi)$  von

$$\ddot{y}(\xi) + y(\xi) = A \sin(\xi) + B \cos(\xi) \quad (2.17)$$

durch

$$y_p(\xi) = \frac{B}{2} \cos(\xi) + \frac{\xi}{2} (B \sin(\xi) - A \cos(\xi)) \quad (2.18)$$

gegeben. Um aperiodische Lösungen dieser Art zu vermeiden, muß man an die Inhomogenität die folgenden Forderungen stellen:

$$\int_0^{2\pi} I_n(\xi) \sin(\xi) d\xi = 0, \quad (2.19)$$

$$\int_0^{2\pi} I_n(\xi) \cos(\xi) d\xi = 0. \quad (2.20)$$

Zur Erfüllung dieser beiden Bedingungen benötigt man zwei unabhängige freie Parameter. Als einer dieser Parameter kann die Konstante  $\omega_n$  gewählt werden. Eine zweite Konstante kann nur durch geeignete Anfangsbedingungen für  $q_{n-1}(\xi)$  eingeführt werden. Deshalb wählt man beispielsweise :

$$q_{n-1}(0) = A_{n-1}, \quad (2.21)$$

$$\dot{q}_{n-1}(0) = 0. \quad (2.22)$$

als Anfangsbedingungen der (n-1)-ten Differentialgleichung. Mit diesen Vorgaben hat man ein systematisches Näherungsverfahren aufgestellt.

### Shohat-Entwicklung

Die Shohat-Entwicklung ermöglicht eine approximative Bestimmung des periodischen Referenzzustandes auch für den Fall, daß der Kontrollparameter  $\mu$  keine kleine Größe ist. Hierzu führt man einen neuen Kleinheitsparameter  $\rho(\mu)$  ein, der den Definitionsbereich  $[0, \infty)$  des Kontrollparameters  $\mu$  auf das Intervall  $[0, 1)$  abbildet. Diese Eigenschaft wird beispielsweise durch die Vorschrift

$$\rho(\mu) = \frac{\mu}{1 + \mu} \quad (2.23)$$

erfüllt, wie dies in Abb.(2.3) illustriert ist.

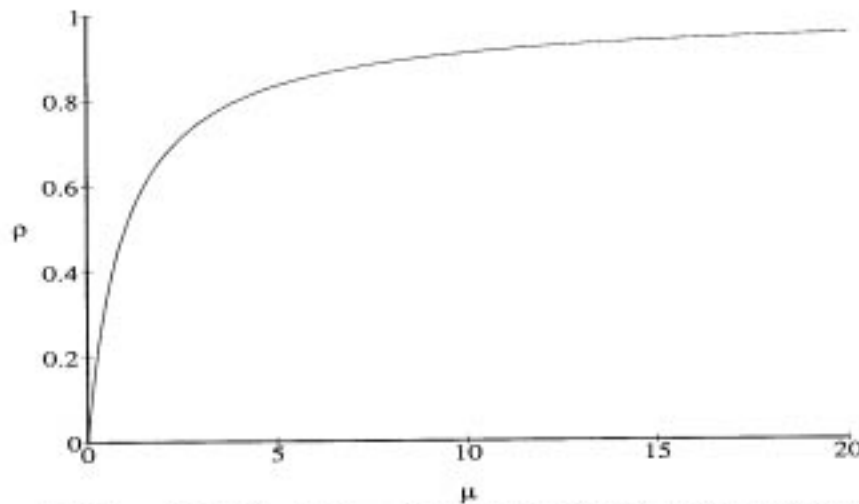


Abbildung 2.3: Beispiel einer Shohat-Transformation des Kleinheitsparameters

Das Verfahren der Shohat-Entwicklung beruht darauf, die Bewegungsgleichung (2.7)

mit  $\mu^2$  zu multiplizieren und dann sowohl den periodischen Referenzzustand  $q(\xi, \mu)$  als auch das Produkt  $\mu\omega(\mu)$  nach dem Kleinheitsparameter  $\rho$  zu entwickeln:

$$q(\xi, \mu) = Q_0(\xi) + \rho(\mu)Q_1(\xi) + \rho(\mu)^2Q_2(\xi) + \dots, \quad (2.24)$$

$$\mu\omega(\mu) = \rho(\mu)\Omega_0 + \rho(\mu)^2\Omega_1 + \rho(\mu)^3\Omega_2 + \dots. \quad (2.25)$$

Dabei ist durch die Entwicklung (2.25) gewährleistet, daß die Frequenz  $\omega(\mu)$  des periodischen Referenzzustandes für eine verschwindende Störung  $\mu \rightarrow 0$  in die Frequenz  $\omega_0$  des harmonischen Oszillators übergeht. Bei der Entwicklung der umskalierten Bewegungsgleichung (2.7) nach dem Kleinheitsparameter  $\rho$  sind neben (2.24), (2.25) auch die Umkehrrelation von (2.23)

$$\mu = \frac{\rho(\mu)}{1 - \rho(\mu)} \quad (2.26)$$

$$(2.27)$$

sowie die Entwicklungen

$$\omega = \Omega_0 + \rho(\Omega_1 - \Omega_0) + \rho^2(\Omega_2 - \Omega_1) + \dots, \quad (2.28)$$

$$q(\xi - \omega(\mu)\tau, \mu) = Q_0(\xi - \Omega_0\tau) + \rho(\mu) \left[ Q_1(\xi - \Omega_0\tau) + (\Omega_1 - \Omega_0\tau)\dot{Q}_0(\xi - \Omega_0\tau) \right] + \dots, \quad (2.29)$$

$$(2.30)$$

zu beachten. Die weitere Vorgehensweise, die die Elimination der Säkularterme berücksichtigt, entspricht dem Poincare-Lindstedt Verfahren. Ein allgemeiner Beweis der Konvergenz des Shohatverfahrens für beliebige Kontrollparameterwerte  $\mu > 0$  konnte bisher nicht geführt werden. Es sind jedoch auch keine Gegenbeispiele bekannt, bei denen die Methode versagen würde.

### 2.3.2 2.Fall: Verzögerungsinduzierter periodischer Referenzzustand

Eine Klasse einfacher Modellsysteme, die einen delayinduzierten periodischen Referenzzustand besitzen kann, wird durch skalare Delay-Differentialgleichungen der Form

$$x'(t) = g(x(t), x(t - \tau)) \quad (2.31)$$

beschrieben. Beispielsweise genügt ein elektronischer Phasenregelkreis (PLL) 1. Ordnung mit zeitlicher Verzögerung, der zur Synchronisation von Frequenz und Phase verwendet wird, einer derartigen Bewegungsgleichung [8]. In der Umgebung einer Hopfbifurkation, die durch eine Änderung der Verzögerungszeit  $\tau$  bei einem kritischen Wert  $\tau_c$  auftritt, kann man als natürlichen Kleinheitsparameter  $\mu$  den relativen

Abstand der zeitlichen Verzögerung  $\tau$  von ihrem kritischen Wert  $\tau_c$  einführen:

$$\mu = \sqrt{\frac{\tau - \tau_c}{\tau_c}}. \quad (2.32)$$

Das bereits vorgestellte Poincare-Lindstedt-Verfahren läßt sich nun mit geringen Modifikationen auf den vorliegenden Fall übertragen [14, 15]. Nach einer Umskalierung entsprechend (2.5), (2.6) kann man mit den Entwicklungen

$$q(\xi, \mu) = q_0 + \mu q_1(\xi) + \mu^2 q_2(\xi) + \dots, \quad (2.33)$$

$$\omega(\mu) = \omega_0 + \mu \omega_1 + \mu^2 \omega_2 + \dots \quad (2.34)$$

das zugeordnete Gleichungssystem iterativ lösen. Dabei bestimmt die niedrigste Ordnung den stationären Referenzzustand  $q_0$ . Die erste Ordnung legt neben  $\omega_0$  auch den kritischen Parameterwert  $\tau_c$  fest (vgl.[8, Anhang C]).

Die Shohat-Entwicklung kann ebenfalls auf diesen Fall übertragen werden. Da der Parameter  $\mu$  durch den Abstand vom kritischen Wert der Hopf-Bifurkation gegeben ist, ist die Anwendbarkeit des Poincare-Lindstedt Verfahrens nur gewährleistet, wenn der Abstand zur nächsthöheren Instabilität innerhalb des Konvergenzradius  $\mu < 1$  liegt. Eine Shohat-Entwicklung wird deshalb in den meisten Fällen zwingend erforderlich.

## 2.4 Dynamik im unendlich dimensionalen Zustandsraum

In diesem Abschnitt sollen die vorgestellten Delay-Differentialgleichungen (2.2) als Funktionaldifferentialgleichungen behandelt werden. Im Hinblick auf die auszuarbeitende Floquet-Theorie muß man sich dabei darauf beschränken, die lineare Umgebung der iterativ gewonnenen Referenzzustände zu untersuchen. Um mögliche aperiodische Säkularterme zu vermeiden, skaliert man zweckmäßigerweise die Bewegungsgleichung (2.2) unter Verwendung von (2.5), (2.6):

$$\frac{d}{d\xi} \vec{q}(\xi) = \frac{1}{\omega} \vec{N}(\vec{q}(\xi), \vec{q}(\xi - \omega\tau), \{\sigma_i\}). \quad (2.35)$$

Hierbei bezeichnet  $\omega = \omega(\mu)$  die Frequenz des periodischen Referenzzustandes  $\vec{q}_0(\xi) = \vec{q}_0(\xi, \mu)$  in Abhängigkeit des Kleinheitsparameters  $\mu$ . Um den Formalismus so einfach wie möglich zu halten, sollen im weiteren diese  $\mu$ -Abhängigkeiten in der Notation zunächst weggelassen werden.

Der Grund zu Funktionaldifferentialgleichungen überzugehen liegt darin, daß im Unterschied zu gewöhnlichen Differentialgleichungen bei Delay-Differentialgleichungen andersartige Anfangsbedingungen gewählt werden müssen. Statt eines Anfangspunktes im n-dimensionalen Zustandsraum  $\Gamma$  erfordert die vollständige Festlegung

eines zeitlich verzögerten dynamischen Systems die Vorgabe einer Anfangsfunktion  $\vec{h}(\theta)$  in einem unendlich dimensionalen Funktionenraum  $C$  [12, 26, 5] mit

$$\vec{q}(\theta) = \vec{h}(\theta), \quad -\omega\tau \leq \theta \leq 0. \quad (2.36)$$

Die Bewegungsgleichung (2.35) definiert deshalb eine Abbildung des unendlich dimensionalen Funktionenraums  $C$  in den  $n$ -dimensionalen Raum  $\Gamma$ . Dies ist jedoch mit dem Verlust der Existenz einer punktweise eindeutigen Lösung verbunden [5, 26]. Es ist daher sinnvoll, den Zustand des System durch einen erweiterten Zustandsvektor  $\vec{q}_\xi(\theta)$  in dem unendlich dimensionalen Zustandsraum  $C$  zu beschreiben, in dem die Anfangsfunktion  $\vec{h}$  definiert ist. Der Zusammenhang des  $n$ -dimensionalen Zustandsvektors  $\vec{q}(\xi)$  mit dem erweiterten Zustandsvektor  $\vec{q}_\xi(\theta)$  wird durch die Vorschrift [12, 5, 26]

$$\vec{q}_\xi(\theta) = \vec{q}(\xi + \theta), \quad -\omega\tau \leq \theta \leq 0 \quad (2.37)$$

festgelegt. Demnach wird die Trajektorie  $\vec{q}(\xi)$  im  $n$ -dimensionalen Raum  $\Gamma$  im Intervall  $[\xi, \xi - \omega\tau]$  in ein Element des unendlich dimensionalen Zustandsraums abgebildet. Dies läßt sich durch folgenden Umklappmechanismus schematisch illustrieren:

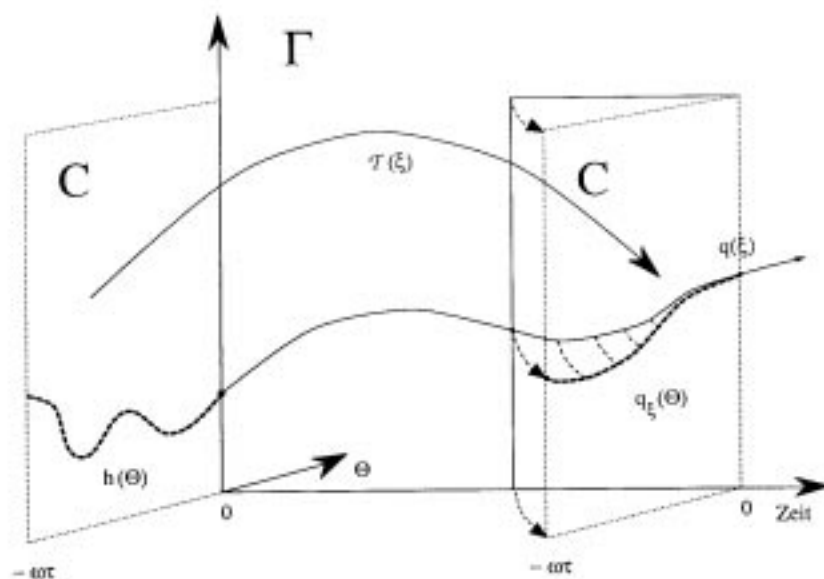


Abbildung 2.4: Illustration der Vorschrift (2.37) durch einen Umklappmechanismus

Es läßt sich nun für alle  $\xi > 0$  ein nichtlinearer Lösungsoperator definieren, der die Anfangsfunktion  $\vec{h}$  auf den erweiterten Zustandsvektor  $\vec{q}_\xi$  abbildet:

$$\vec{q}_\xi(\theta) = (\mathcal{T}(\xi)\vec{h})(\theta), \quad -\omega\tau \leq \theta \leq 0. \quad (2.38)$$



Die Eindeutigkeit dieser Abbildung folgt dann aus der Halbgruppeneigenschaft dieses Operators:

$$\mathcal{T}(\xi + \eta) = \mathcal{T}(\xi)\mathcal{T}(\eta), \quad \xi, \eta \geq 0, \quad \mathcal{T}(0) = \mathcal{I}. \quad (2.39)$$

Um das Anfangswertproblem (2.35), (2.36) in dem unendlich dimensionalen Zustandsraum  $\mathcal{C}$  zu formulieren, differenziert man (2.37) nach der Zeit

$$\frac{d}{d\xi} \vec{q}_\xi(\theta) = (\mathcal{A}\vec{q}_\xi)(\theta), \quad -\omega\tau \leq \theta \leq 0. \quad (2.40)$$

Der infinitesimale Generator  $\mathcal{A}$  ist hier mit (2.38) über

$$(\mathcal{A}\vec{q}_\xi)(\theta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [(\mathcal{T}(\epsilon)\vec{q}_\xi)(\theta) - \vec{q}_\xi(\theta)] \quad (2.41)$$

definiert. Bei der Anwendung des nichtlinearen Lösungsoperators  $\mathcal{T}(\epsilon)$  ist zu beachten, daß dieser auf den erweiterten Zustandsvektor  $\vec{q}_\xi$  in Abhängigkeit vom Wert  $\xi + \theta + \epsilon$  verschiedenartig wirkt :

$$(\mathcal{T}(\epsilon)\vec{q}_\xi)(\theta) = \begin{cases} \vec{q}(\xi + \theta + \epsilon) & \xi + \theta + \epsilon \leq 0, \\ \vec{q}(0) + \frac{1}{\omega} \int_0^{\xi + \theta + \epsilon} \vec{N}(\vec{q}(s), \vec{q}(s - \omega\tau)) ds & \xi + \theta + \epsilon > 0. \end{cases} \quad (2.42)$$

Entwickelt man das nichtlineare Vektorfeld in eine Taylorreihe um eine periodische Referenzlösung und ersetzt die Elemente aus  $\Gamma$  entsprechend den Vorschriften

$$\vec{q}(\xi) = \int_{-\omega\tau}^0 d\theta \delta(\theta) \vec{q}_\xi(\theta), \quad (2.43)$$

$$\vec{q}(\xi - \omega\tau) = \int_{-\omega\tau}^0 d\theta \delta(\theta + \omega\tau) \vec{q}_\xi(\theta), \quad (2.44)$$

so ergibt sich aus (2.41) der infinitesimale Generator  $\mathcal{A}$  als Funktional der erweiterten Zustandsvektoren  $\vec{q}_\xi(\theta)$  in der Form :

$$(\mathcal{A}\vec{q}_\xi)(\theta) = \begin{cases} \frac{d}{d\theta} \vec{q}_\xi(\theta) & -\omega\tau \leq \theta < 0 \\ \mathcal{N}[\vec{q}_\xi(\cdot)] & \theta = 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

wobei

$$\mathcal{N}[\vec{q}_\xi(\cdot)] = \sum_{k=1} \mathcal{N}_i^{(k)}[\vec{q}_\xi(\cdot)], \quad (2.46)$$

$$\mathcal{N}_i^{(k)}[\vec{q}_\xi(\cdot)] = \int_{-\omega\tau}^0 d\theta_1 \dots \int_{-\omega\tau}^0 d\theta_k \frac{1}{\omega} \Omega_{i,j_1 \dots j_k, \ell}^{(k)}(\theta_1, \dots, \theta_k) q_{\ell, j_1}(\theta_1) \dots q_{\ell, j_k}(\theta_k). \quad (2.47)$$

Im Falle der hier behandelten Delay-Differentialgleichungen sind die zeitabhängigen matrixwertigen Dichten  $\Omega_{i,j_1 \dots j_k, \ell}^{(k)}$  Linearkombinationen und Produkte von  $\delta$ -Funktionen.

Durch (2.40), (2.45) wird das dynamische Verhalten des zeitverzögerten Systems im erweiterten Zustandsraum  $\mathcal{C}$  vollständig beschrieben und die Eindeutigkeit garantiert.

## 2.5 Linearisierung

Linearisiert man das Problem (2.40) um eine periodische Referenzlösung  $\vec{q}_\xi^0$  durch

$$\vec{q}_\xi(\theta) = \vec{q}_\xi^0(\theta) + \hat{\vec{q}}_\xi(\theta), \quad (2.48)$$

so ergibt sich in dieser ersten Näherung

$$\frac{d}{d\xi} \vec{q}_\xi(\theta) = (\mathcal{A}_L \vec{q}_\xi)(\theta), \quad (2.49)$$

wobei die Tilde weggelassen wurde.  $\mathcal{A}_L$  ist ein infinitesimaler linearer Generator, der im vorliegenden Fall explizit zeitabhängig ist:

$$(\mathcal{A}_L \vec{q}_\xi)(\theta) = \begin{cases} \frac{d}{d\theta} \vec{q}_\xi(\theta) & -\omega\tau \leq \theta < 0, \\ \int_{-\omega\tau}^0 d\theta' \Omega_\xi(\theta') \vec{q}_\xi(\theta') & \theta = 0. \end{cases} \quad (2.50)$$

Die Dichte  $\Omega_\xi(\theta)$  ist durch die Funktionalableitung von  $\mathcal{N}$  nach seinen Argumenten festgelegt:

$$\Omega_\xi(\theta) = \frac{1}{\omega} \left[ \frac{\delta \mathcal{N}[\vec{q}_\xi(\cdot)]}{\delta \vec{q}_\xi(\theta)} \right]_{\vec{q}_\xi = \vec{q}_\xi^0}. \quad (2.51)$$

## 2.6 Fourierzerlegung

Da die Referenzlösung  $2\pi$ -periodisch ist, wird auch die zeitabhängige Dichte  $\Omega_\xi(\theta)$  eine entsprechende Periodizität aufweisen. Deshalb kann eine Fourierentwicklung der Matrix  $\Omega_\xi(\theta)$  in folgender Form angesetzt werden:

$$\Omega_\xi(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_k(\theta) e^{i\omega k \xi}. \quad (2.52)$$

In Analogie zur Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen [6, 19], kann man annehmen [20], daß sich eine Lösung  $\vec{q}_\xi(\theta)$  von (2.49) darstellen läßt als:

$$\vec{q}_\xi(\theta) = e^{\lambda \xi} \vec{\phi}_\xi^\lambda(\theta). \quad (2.53)$$

Dabei bezeichnet  $\lambda$  den Floquet-Exponenten und  $\vec{\phi}_\xi^\lambda(\theta)$  eine in  $\xi$  periodische Floquet-Eigenlösung, deren Fourierentwicklung durch

$$\vec{\phi}_\xi^\lambda(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{\phi}_n^\lambda(\theta) e^{i\omega n \xi}, \quad (2.54)$$

gegeben ist, wobei  $\vec{\phi}_n^\lambda(\theta)$  die jeweilige Fourierkomponente bezeichnet.

## 2.7 Rekursionsrelationen

Zur Bestimmung der Fourierkomponenten  $\vec{\phi}_n^\lambda(\theta)$  setzt man den Ansatz (2.53), (2.54) in die lineare Bewegungsgleichung (2.49) ein. Wertet man das Problem im Intervall  $-\omega\tau \leq \theta < 0$  aus, so erhält man zunächst

$$\vec{\phi}_n^\lambda(\theta) = \vec{\phi}_n^\lambda(0)e^{(\lambda+i\tilde{\omega}n)\theta} \quad (2.55)$$

$$= \vec{\phi}_n^\lambda e^{(\lambda+i\tilde{\omega}n)\theta}, \quad (2.56)$$

Durch die Anschlußbedingung an der Stelle  $\theta = 0$  erhält man andererseits

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{\phi}_n^\lambda(\lambda + i\tilde{\omega}n)e^{(\lambda+i\tilde{\omega}n)\xi} = \\ & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\omega\tau}^0 d\theta \Omega_k(\theta) e^{(\lambda+i\tilde{\omega}n)\theta} e^{(i\tilde{\omega}(k+n)+\lambda)\xi} \vec{\phi}_n^\lambda. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Die Umindizierung  $\tilde{n}(n) = n + k$  und ein komponentenweiser Vergleich der jeweiligen Fourierkomponenten ergibt mit der Definition

$$\mathbf{L}_{k,\tilde{n}-k} = \int_{-\omega\tau}^0 d\theta \Omega_k(\theta) e^{(\lambda+i\tilde{\omega}(\tilde{n}-k))\theta} \quad (2.58)$$

eine  $(2k+1)$ -diagonale vektorwertige Rekursionsrelation für die  $\vec{\phi}_{\tilde{n}-k}^\lambda$ :

$$0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\mathbf{L}_{k,\tilde{n}-k} - \delta_{\tilde{n},\tilde{n}-k}(\lambda + i\tilde{\omega}(\tilde{n} - k))\mathbf{I}] \vec{\phi}_{\tilde{n}-k}^\lambda. \quad (2.59)$$

Wir werden im folgenden die Tilde bei  $\tilde{n}$  wieder weglassen.

## 2.8 Matrixwertige transzendente Kettenbrüche

Zur Lösung solcher Rekursionsrelationen sollen zwei Verfahren vorgestellt werden. Da die Matrizen  $\mathbf{L}_{k,n-k}$  in signifikanter Weise vom Kleinheitsparameter  $\mu$  abhängen, erweist es sich für die Darstellung dieser Verfahren als ausreichend, die Rekursionsrelation (2.59) für  $|k| \geq 3$  abzubereiten:

$$\begin{aligned} 0 = & \mathbf{L}_{-2,n+2} \vec{\phi}_{n+2}^\lambda + \mathbf{L}_{-1,n+1} \vec{\phi}_{n+1}^\lambda + [\mathbf{L}_{0,n} - (\lambda + i\tilde{\omega}n)\mathbf{I}] \vec{\phi}_n^\lambda + \\ & + \mathbf{L}_{1,n-1} \vec{\phi}_{n-1}^\lambda + \mathbf{L}_{2,n-2} \vec{\phi}_{n-2}^\lambda. \end{aligned} \quad (2.60)$$

### 2.8.1 Erste Lösungsmethode

Um das 1. Verfahren zur Lösung dieses Problems mittels matrixwertiger Kettenbrüche zu beschreiben, wählen wir als Ausgangsgleichung (2.60) und definieren Leiteroperatoren  $\mathbf{S}_n^m$ , ( $m = \pm 1, \pm 2$ ) mit der Eigenschaft:

$$\vec{\phi}_{n+1}^\lambda = \mathbf{S}_n^{+1} \vec{\phi}_n^\lambda, \quad (2.61)$$

$$\vec{\phi}_{n-1}^\lambda = \mathbf{S}_n^{-1} \vec{\phi}_n^\lambda, \quad (2.62)$$

$$\vec{\phi}_{n+2}^\lambda = \mathbf{S}_n^{+2} \vec{\phi}_n^\lambda, \quad (2.63)$$

$$\vec{\phi}_{n-2}^\lambda = \mathbf{S}_n^{-2} \vec{\phi}_n^\lambda. \quad (2.64)$$

Dabei besteht zwischen den Leiteroperatoren folgender Zusammenhang :

$$\mathbf{S}_{n+1}^+ \mathbf{S}_n^+ = \mathbf{S}_n^{+2}, \quad (2.65)$$

$$[\mathbf{S}_{n-1}^+]^{-1} = \mathbf{S}_n^{-1}, \quad (2.66)$$

wobei die erste Relation direkt aus der Definition folgt. Die zweite Relation folgt mit Hilfe einer Umindizierung ( $n \rightarrow n-1$ ):

$$\vec{\phi}_n^\lambda = [\mathbf{S}_n^+]^{-1} \vec{\phi}_{n+1}^\lambda, \quad (2.67)$$

$$\vec{\phi}_{n-1}^\lambda = [\mathbf{S}_{n-1}^+]^{-1} \vec{\phi}_n^\lambda, \quad (2.68)$$

$$= \mathbf{S}_n^{-1} \vec{\phi}_n^\lambda. \quad (2.69)$$

Durch Anwendung der Gleichungen (2.61)-(2.64) ergibt sich aus (2.60) :

$$0 = \left[ \mathbf{L}_{-2,n+2} \mathbf{S}_n^{+2} + \mathbf{L}_{-1,n+1} \mathbf{S}_n^+ + [\mathbf{L}_{0,n} - (\lambda + i\tilde{\omega}n)\mathbf{I}] + \right. \\ \left. + \mathbf{L}_{1,n-1} \mathbf{S}_n^{-1} + \mathbf{L}_{2,n-2} \mathbf{S}_n^{-2} \right] \vec{\phi}_n^\lambda. \quad (2.70)$$

Die Operatoren  $\mathbf{S}_n^m$ , ( $m = \pm 1, \pm 2$ ) werden dabei in Abhängigkeit der Matrizen  $\mathbf{L}_{k,n-k}$ , sowie der Operatoren  $\mathbf{S}_{n\pm 1}^m$ ,  $\mathbf{S}_{n\pm 2}^m$  bestimmt. Dadurch transformiert sich (2.70) in einen zunächst im Index  $n$  konvergierenden Kettenbruch. Da die Matrizen  $\mathbf{L}_{k,n-k}$  hier jedoch in signifikanter Weise vom Kleinheitsparameter  $\mu$  abhängen, konvergiert der Kettenbruch zusätzlich in diesem Kleinheitsparameter. Aus (2.70) läßt sich das Glied mit  $\vec{\phi}_{n+1}^\lambda$  isolieren :

$$0 = \mathbf{L}_{-1,n+1} \vec{\phi}_{n+1}^\lambda + \left[ [\mathbf{L}_{0,n} - (\lambda + i\tilde{\omega}n)\mathbf{I}] + \mathbf{L}_{-2,n+2} \mathbf{S}_n^{+2} + \right. \\ \left. + \mathbf{L}_{1,n-1} \mathbf{S}_n^{-1} + \mathbf{L}_{2,n-2} \mathbf{S}_n^{-2} \right] \vec{\phi}_n^\lambda. \quad (2.71)$$

Nach einer Indexverschiebung von  $n$  nach  $n-1$  liefert der Vergleich mit (2.62)

$$\mathbf{S}_n^{-1} = - \left[ [\mathbf{L}_{0,n-1} - (\lambda + i\tilde{\omega}(n-1))\mathbf{I}] + \mathbf{L}_{-2,n+1} \mathbf{S}_{n-1}^{+2} + \right. \\ \left. + \mathbf{L}_{1,n-2} \mathbf{S}_{n-1}^{-1} + \mathbf{L}_{2,n-3} \mathbf{S}_{n-1}^{-2} \right]^{-1} \mathbf{L}_{-1,n}. \quad (2.72)$$

Durch eine analoge Vorgehensweise lassen sich so alle  $\mathbf{S}_n^m$  über eine Rekursionsvorschrift beschreiben:

$$\mathbf{S}_n^{+1} = - \left[ [\mathbf{L}_{0,n+1} - (\lambda + i\tilde{\omega}(n+1))\mathbf{I}] + \mathbf{L}_{-2,n+3} \mathbf{S}_{n+1}^{+2} + \right. \\ \left. + \mathbf{L}_{1,n+2} \mathbf{S}_{n+1}^{-1} + \mathbf{L}_{2,n+1} \mathbf{S}_{n+1}^{-2} \right]^{-1} \mathbf{L}_{-1,n+1}. \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{L}_{-1, n+2} \mathbf{S}_{n+1}^{+1} + \mathbf{L}_{2, n-1} \mathbf{S}_{n+1}^{-2} ]^{-1} \mathbf{L}_{1, n}, \\
\mathbf{S}_n^{-2} = & - [ [\mathbf{L}_{0, n-2} - (\lambda + i\tilde{\omega}(n-2)) \mathbf{I}] + \mathbf{L}_{-1, n-1} \mathbf{S}_{n-2}^{+1} + \\
& + \mathbf{L}_{1, n-3} \mathbf{S}_{n-2}^{-1} + \mathbf{L}_{2, n-4} \mathbf{S}_{n-2}^{-2} ]^{-1} \mathbf{L}_{-2, n},
\end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_n^{+2} = & - [ [\mathbf{L}_{0, n+2} - (\lambda + i\tilde{\omega}(n+2)) \mathbf{I}] + \mathbf{L}_{-1, n+3} \mathbf{S}_{n+2}^{+1} + \\
& + \mathbf{L}_{-1, n+3} \mathbf{S}_{n+2}^{-1} + \mathbf{L}_{-2, n+4} \mathbf{S}_{n+2}^{+2} ]^{-1} \mathbf{L}_{2, n}.
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Da durch die Leiteroperatoren  $\mathbf{S}_n^m$ , ( $m = \pm k$ ) alle Terme der Rekursionsrelation erfaßt werden, kann man in (2.70) die Iteration für den Fall  $n = 0$  starten. Man erhält so einen mehrfachen matrixwertigen Kettenbruch in folgender Form:

$$\begin{aligned}
0 = & [ \mathbf{L}_{-2, 2} \mathbf{S}_0^{+2} + \mathbf{L}_{-1, 1} \mathbf{S}_0^{+1} + [\mathbf{L}_{0, 0} - (\lambda) \mathbf{I}] + \\
& + \mathbf{L}_{1, -1} \mathbf{S}_0^{-1} + \mathbf{L}_{2, -2} \mathbf{S}_0^{-2} ] \bar{\phi}_0^\lambda.
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Die  $\mathbf{S}_0^m$  sind dabei durch die Rekursionsrelationen (2.72)-(2.75) im Falle  $n = 0$  definiert. Da dieser Kettenbruch hier über die Matrizen  $\mathbf{L}_{n, n-k}$  in signifikanter Weise vom Kleinheitsparameter  $\mu$  abhängt, ist durch die Potenzreihenentwicklung (2.9) ein festes Abbruchkriterium gegeben.

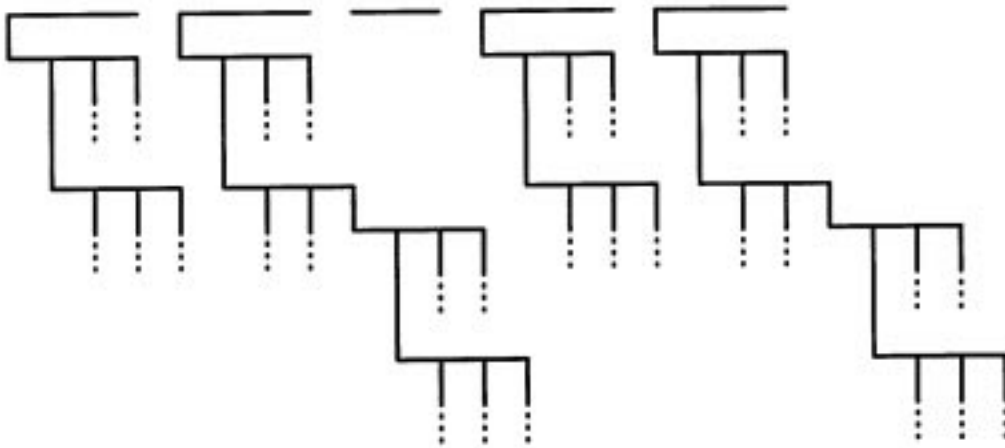


Abbildung 2.5: Schema einer Pentadiagonalen Rekursionsformel

Im der schematischen Darstellung des pentadiagonalen Kettenbruchs ist jedes Glied durch einen Strich bezeichnet. Die Verästelung entspricht dabei der Aufspaltung durch die Terme der Leiteroperatoren  $\mathbf{S}_n^m$ , ( $m = \pm 1, \pm 2$ ) im Index  $n$ .

## 2.8.2 Zweite Lösungsmethode

Das folgende Verfahren geht zurück auf H.Risken [19]. Man betrachtet zunächst (2.60) für gerade, bzw. ungerade Indizes .

$$0 = \mathbf{L}_{-2,2n+2}\vec{\phi}_{2n+2}^\lambda + \mathbf{L}_{-1,2n+1}\vec{\phi}_{2n+1}^\lambda + \quad (2.77)$$

$$+ [\mathbf{L}_{0,2n} - (\lambda + i\tilde{\omega}2n)\mathbf{I}]\vec{\phi}_{2n}^\lambda + \mathbf{L}_{1,2n-1}\vec{\phi}_{2n-1}^\lambda + \mathbf{L}_{2,2n-2}\vec{\phi}_{2n-2}^\lambda,$$

$$0 = \mathbf{L}_{-2,2n+3}\vec{\phi}_{2n+3}^\lambda + \mathbf{L}_{-1,2n+2}\vec{\phi}_{2n+2}^\lambda + \quad (2.78)$$

$$+ [\mathbf{L}_{0,2n+1} - (\lambda + i\tilde{\omega}(2n+1))\mathbf{I}]\vec{\phi}_{2n+1}^\lambda + \mathbf{L}_{1,2n}\vec{\phi}_{2n}^\lambda + \mathbf{L}_{2,2n-1}\vec{\phi}_{2n-1}^\lambda.$$

Konstruiert man nun neue Vektoren  $\Phi_i^\lambda$  gemäß

$$\Phi_{n+1}^\lambda = \begin{pmatrix} \vec{\phi}_{2n+2}^\lambda \\ \vec{\phi}_{2n+3}^\lambda \end{pmatrix}, \quad (2.79)$$

$$\Phi_n^\lambda = \begin{pmatrix} \vec{\phi}_{2n}^\lambda \\ \vec{\phi}_{2n+1}^\lambda \end{pmatrix}, \quad (2.80)$$

$$\Phi_{n-1}^\lambda = \begin{pmatrix} \vec{\phi}_{2n-2}^\lambda \\ \vec{\phi}_{2n-1}^\lambda \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

und definiert die Matrizen  $\mathbf{Q}_{i,j}$  über

$$\mathbf{Q}_{-1,n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{-2,2n+2} & \mathbf{L}_{-1,2n+2} \\ 0 & \mathbf{L}_{-2,2n+3} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{0,n} = \begin{pmatrix} [\mathbf{L}_{0,2n} - (\lambda + 2i\tilde{\omega}n)\mathbf{I}] & \mathbf{L}_{-1,2n+1} \\ \mathbf{L}_{1,2n} & [\mathbf{L}_{0,2n+1} - (\lambda + i\tilde{\omega}(2n+1))\mathbf{I}] \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{1,n-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{2,2n-2} & \mathbf{L}_{1,2n-1} \\ 0 & \mathbf{L}_{2,2n-1} \end{pmatrix},$$

so erkennt man daß sich (2.77), (2.78) zusammenfaßen läßt :

$$\mathbf{Q}_{-1,n+1}\vec{\Phi}_{n+1}^\lambda + \mathbf{Q}_{0,n}\Phi_n^\lambda + \mathbf{Q}_{1,n-1}\vec{\Phi}_{n-1}^\lambda = 0. \quad (2.82)$$

Es handelt sich jetzt um eine tridiagonale vektorwertige Rekursionsformel. Um die Gleichung zu lösen definiert man sich wieder auf- und absteigende Leiteroperatoren  $\mathbf{S}_n^\pm$  mit der Eigenschaft :

$$\vec{\Phi}_{n+1}^\lambda = \mathbf{S}_n^{+1}\vec{\Phi}_n^\lambda, \quad (2.83)$$

$$\vec{\Phi}_{n-1}^\lambda = \mathbf{S}_n^{-1}\vec{\Phi}_n^\lambda \quad (2.84)$$

Sind diese bestimmt, erhält man den matrixwertigen Kettenbruch. Die Umformungen

$$0 = \mathbf{Q}_{-1,n+1}\mathbf{S}_n^{+1}\vec{\Phi}_n^\lambda + [\mathbf{Q}_{0,n} - (\lambda + i\tilde{\omega}n)\mathbf{I}]\vec{\Phi}_n^\lambda + \mathbf{Q}_{1,n-1}\vec{\Phi}_{n-1}^\lambda$$

$$\begin{aligned}
&= [\mathbf{Q}_{-1,n+1}\mathbf{S}_n^{+1} + [\mathbf{Q}_{0,n} - (\lambda + i\tilde{\omega}n)\mathbf{I}]] \vec{\Phi}_n^\lambda + \mathbf{Q}_{1,n-1}\vec{\Phi}_{n-1}^\lambda, \\
0 &= \mathbf{Q}_{-1,n+1}\vec{\Phi}_{n+1}^\lambda + [\mathbf{Q}_{0,n} - (\lambda + i\tilde{\omega}n)\mathbf{I}]\vec{\Phi}_n^\lambda + \mathbf{Q}_{1,n-1}\mathbf{S}_n^{-1}\vec{\Phi}_n^\lambda \\
&= \mathbf{Q}_{-1,n+1}\vec{\Phi}_{n+1}^\lambda + [[\mathbf{Q}_{0,n} - (\lambda + i\tilde{\omega}n)\mathbf{I}] + \mathbf{Q}_{1,n-1}\mathbf{S}_n^{-1}] \vec{\Phi}_n^\lambda,
\end{aligned}$$

und der Vergleich mit der ursprünglichen Definition (2.83),(2.84) liefert die Bestimmungsgleichung der  $\mathbf{S}_n^\pm$  :

$$\mathbf{S}_{n\pm 1}^\mp = - [\mathbf{Q}_{\pm 1,n\mp 1}\mathbf{S}_n^\mp + [\mathbf{Q}_{0,n} - (\lambda + i\tilde{\omega}n)\mathbf{I}]]^{-1} \mathbf{Q}_{\mp 1,n\pm 1}. \quad (2.85)$$

Nach einer einfachen Indexverschiebung nehmen diese dann die Form

$$\mathbf{S}_n^\mp = - [\mathbf{Q}_{\pm 1,n\mp 2}\mathbf{S}_{n\mp 1}^\mp + [\mathbf{Q}_{0,n\mp 1} - (\lambda + i\tilde{\omega}(n \mp 1))\mathbf{I}]]^{-1} \mathbf{Q}_{\mp 1,n} \quad (2.86)$$

an. Wiederum ist es für das weitere Vorgehen ausreichend, sich auf den Fall  $n = 0$  in (2.82) zu beschränken

$$0 = [\mathbf{Q}_{-1,0}\mathbf{S}_0^{+1} + [\mathbf{Q}_{0,0} - \lambda\mathbf{I}] + \mathbf{Q}_{1,-1}\mathbf{S}_0^{-1}] \vec{\Phi}_0^\lambda. \quad (2.87)$$

Für  $\mathbf{S}_0^\pm$  ergibt sich durch iteratives Einsetzen von (2.86):

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_0^\mp &= - [\mathbf{Q}_{\pm 1,\mp 2}\mathbf{S}_{\mp 1}^\mp + [\mathbf{Q}_{0,\mp 1} - (\lambda \mp i\tilde{\omega})\mathbf{I}]]^{-1} \mathbf{Q}_{\mp 1,0} \\
&= - [\mathbf{Q}_{\pm 1,\mp 2} [-\mathbf{Q}_{\pm 1,\mp 3}\mathbf{S}_{\mp 2}^\mp + [\mathbf{Q}_{0,\mp 2} - (\lambda \mp 2i\tilde{\omega})\mathbf{I}]]^{-1} \mathbf{Q}_{\mp 1,\pm 1} + \\
&\quad + [\mathbf{Q}_{0,\mp 1} - (\lambda \mp i\tilde{\omega})\mathbf{I}]]^{-1} \mathbf{Q}_{\mp 1,0} \\
&= \dots
\end{aligned} \quad (2.88)$$

Der matrixwertige Kettenbruch wurde dabei durch sukzessives Einsetzen der durch (2.86) bestimmten Leiteroperatoren  $\mathbf{S}_n^\mp$  konstruiert.

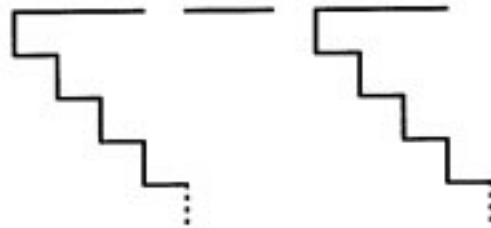


Abbildung 2.6: Schema einer Tridiagonalen Rekursionsformel

Der Aufbau des Schemas entspricht dem Aufbau beim pentadiagonalen Kettenbruch.

## 2.9 Transzendente charakteristische Gleichung

Das durch die transzendenten Kettenbrüche in Gleichung (2.76) definierte Eigenwertproblem ist in manchen Fällen durch folgende Ansätze analytisch perturbativ lösbar. Man wählt man hierzu die Potenzreihenentwicklung

$$\lambda = \lambda_0 + \mu\lambda_1 + \mu^2\lambda_2 + \dots, \quad (2.89)$$

sowie den Ansatz

$$\Re\epsilon(\lambda) \ll 1, \quad \Im m(\lambda) = 0. \quad (2.90)$$

Da nur Wurzeln mit kleinem Realteil für die asymptotische Dynamik des Systems relevant sind (vgl. die Theorie der Trägheitsmannigfaltigkeiten [27]), läßt sich das Problem im Falle des Aufspaltens eines Grenzzyklus in zwei Grenzzyklen mit (2.89), (2.90) durchgehend analytisch behandeln. Bei anderen Fällen müssen im allgemeinen die Wurzeln des Quasipolynoms (2.76) numerisch bestimmt werden. Die Schwierigkeit besteht hier immer darin, die transzendente charakteristische Gleichung analytisch zu behandeln.

## 2.10 Floquet-Eigenlösungen

Durch (2.53), (2.54), (2.61), (2.62), (2.63), (2.64) sind die Floquet-Eigenlösungen  $\vec{q}_\xi^o(\theta)$  in der jeweiligen Ordnung im Kleinheitsparameter bis auf den Vektor  $\vec{\phi}_0^\lambda$  vollständig bestimmt. Zur Konstruktion bedient man sich hier wiederum der Leiteroperatoren  $S_n^\pm$ . Die Fourierkomponente  $\vec{\phi}_0^\lambda$  läßt sich dabei im Falle  $\Re\epsilon(\lambda) = 0$  folgendermaßen festlegen. Aus (2.49) folgt für das lineare Problem:

$$\frac{d}{d\xi} \frac{d}{d\xi} \vec{q}_\xi^o(\theta) = \mathcal{A}_L \frac{d}{d\xi} \vec{q}_\xi^o(\theta) \quad (2.91)$$

$$\mathcal{A}_L \frac{d}{d\xi} \vec{q}_\xi^o(\theta) = \begin{cases} \frac{d}{d\theta} \frac{d}{d\xi} \vec{q}_\xi^o(\theta), & -\omega\tau \leq \theta < 0, \\ \int_{\omega\tau}^0 d\theta \Omega_\xi(\theta) \frac{d}{d\xi} \vec{q}_\xi^o(\theta), & \theta = 0, \end{cases} \quad (2.92)$$

wobei

$$\Omega_\xi(\theta) = \frac{1}{\omega} \left[ \frac{\delta \mathcal{N}[\vec{q}_\xi(\cdot)]}{\delta \vec{q}_\xi(\theta)} \right]_{\vec{q}_\xi = \vec{q}_\xi^o} \quad (2.93)$$

Anderserseits erhält man aus dem nichtlinearen Problem (2.45)

$$\frac{d}{d\xi} \frac{d}{d\xi} \vec{q}_\xi^o(\theta) = \frac{d}{d\xi} (\mathcal{A} \vec{q}_\xi^o)(\theta) \quad (2.94)$$



$$\frac{d}{d\xi} (\mathcal{A}\vec{q}_\xi^0)(\theta) = \begin{cases} \frac{d}{d\xi} \frac{d}{d\theta} \vec{q}_\xi^0(\theta), & -\omega\tau \leq \theta < 0, \\ \frac{d}{d\xi} \mathcal{N}[\vec{q}_\xi^0(\cdot)], & \theta = 0, \\ = \int_{\omega\tau}^0 d\theta \frac{1}{\omega} \left[ \frac{\delta \mathcal{N}[\vec{q}_\xi^0(\cdot)]}{\delta \vec{q}_\xi^0(\theta)} \right]_{\vec{q}_\xi^0} \frac{d}{d\xi} \vec{q}_\xi^0(\theta), & \theta = 0. \end{cases} \quad (2.95)$$

Der Vergleich mit (2.92) zeigt, daß

$$\frac{d}{d\xi} \vec{q}_\xi^0(\theta) = e^{\lambda\xi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{\phi}_n^\lambda(\theta) e^{i\omega n\xi}, \quad (2.96)$$

wie im Falle gewöhnlicher Differentialgleichungen Lösung der Funktionaldifferentialgleichung (2.49) ist. Der Realteil des komplexen Floquet-Exponenten  $\lambda$  muß hierbei verschwinden. Die Fourierkomponente  $\vec{\phi}_0^\lambda$  ist dadurch eindeutig bestimmt.

# Kapitel 3

## Adjungiertes Problem

### 3.1 Bilinearform

Der Operator  $\mathcal{A}_L$  wird im allgemeinen nicht selbstadjungiert sein. Es erweist sich deshalb als notwendig, zusätzlich zu dem System der Floquet-Eigenlösungen  $\vec{\phi}_\xi^\lambda(\theta)$  im erweiterten Zustandsraum  $\mathcal{C}$  ein dazu adjungiertes System in einem erweiterten dualen Zustandsraum  $\mathcal{C}^\dagger$  zu konstruieren. Nach [5, 6] besteht der Raum  $\mathcal{C}^\dagger$  hierbei aus n-dimensionalen vektorwertigen Funktionen  $\vec{\psi}_\xi^\dagger(s)$ , die auf dem Intervall  $[0, \tau]$  definiert sind. Die Verbindung der beiden erweiterten Zustandsräume erfolgt über eine explizit zeitabhängige Bilinearform  $(\cdot, \cdot)_\xi$  [5, 6]:

$$\begin{aligned} (\vec{\psi}_\xi^\dagger, \vec{\phi}_\xi)_\xi &= \langle \vec{\psi}_\xi^\dagger(0), \vec{\phi}_\xi(0) \rangle - \\ &\quad - \int_{-\omega\tau}^0 d\theta \int_0^\theta ds \langle \vec{\psi}_\xi^\dagger(s - \theta), \mathbf{\Omega}_{\xi+s-\theta}(\theta) \vec{\phi}_\xi(s) \rangle. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Für  $\tau \rightarrow 0$  geht diese Bilinearform in das kanonische Skalarprodukt  $\langle, \rangle$  über. Im autonomen Fall ergibt sich die nicht explizit zeitabhängige Bilinearform für Delay-differentialgleichungen (s. z.B.[5, 8]).

### 3.2 Adjungierter Operator

Im folgenden wird die Bilinearform (3.1) dazu verwendet, eine Bewegungsgleichung des linearen Systems in dem dualen erweiterten Zustandsraum  $\mathcal{C}^\dagger$  zu formulieren. Fordert man, daß die Bilinearform zwischen dem erweiterten Zustandsvektor  $\vec{q}_\xi(\theta)$  und dem dualen erweiterten Zustandsvektor  $\vec{q}_\xi^\dagger(s)$  zeitunabhängig ist

$$0 = \frac{d}{d\xi} (\vec{q}_\xi^\dagger, \vec{q}_\xi)_\xi \quad (3.2)$$

$$= \left( \frac{d}{d\xi} \vec{q}_\xi^\dagger, \vec{q}_\xi \right) + \left( \vec{q}_\xi^\dagger, \frac{d}{d\xi} \vec{q}_\xi \right) + \quad (3.3)$$

$$+ \int_{-\omega\tau}^0 d\theta \int_0^\theta ds \left\langle \vec{q}_\xi^\dagger(s-\theta) \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega_{\xi+s-\theta}(\theta) \vec{q}_\xi(s) \right\rangle,$$

so ergibt sich für die Bewegungsgleichung im dualen Zustandsraum  $\mathcal{C}^\dagger$ :

$$\frac{d}{d\xi} \vec{q}_\xi^\dagger(s) = -(\mathcal{A}_L^\dagger \vec{q}_\xi^\dagger)(s), \quad 0 \leq s \leq \tau. \quad (3.4)$$

Die explizite Form des adjungierten infinitesimalen Generators  $\mathcal{A}_L^\dagger$  wird dabei über

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_L^\dagger \vec{q}_\xi^\dagger, \vec{q}_\xi)_\xi &= (\vec{q}_\xi^\dagger, \mathcal{A}_L \vec{q}_\xi)_\xi - \\ &\quad - \int_{-\omega\tau}^0 d\theta \int_0^\theta ds \left\langle \vec{q}_\xi^\dagger(s-\theta) \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega_{\xi+s-\theta}(\theta) \vec{q}_\xi(s) \right\rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

festgelegt. Durch die explizite Zeitabhängigkeit der Bilinearform ist mit (3.5) eine Erweiterung der gewöhnlichen Definition des adjungierten Operators gegeben. Setzt man die Definition (2.50) des infinitesimalen Operators  $\mathcal{A}_L$  in (3.5) ein, so erhält man nach einer partiellen Integration für den adjungierten infinitesimalen Generator  $\mathcal{A}_L^\dagger$

$$\mathcal{A}_{L\xi}^\dagger \vec{q}_\xi^\dagger(s) = = \begin{cases} -\frac{d}{ds} \vec{q}_\xi^\dagger(s) & 0 < s \leq \omega\tau \\ \int_0^{\omega\tau} ds \Omega_{\xi+s}(-s) \vec{q}_\xi^\dagger(s) & s = 0 \end{cases}, \quad (3.6)$$

wobei nach (2.52) die Fourierentwicklung von  $\Omega_{\xi+s}(-s)$  durch

$$\Omega_{\xi+s}(-s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_k(-s) e^{i\omega k(\xi+s)} \quad (3.7)$$

gegeben ist. Analog zu (2.54) wird für die Lösung  $\vec{q}_\xi^\dagger(s)$  folgender Ansatz gemacht:

$$\vec{q}_\xi^\dagger(s) = e^{-\lambda\xi} \vec{\psi}_\xi^\dagger(s), \quad (3.8)$$

$$\vec{q}_\xi^\dagger(s) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \vec{\psi}_j^\dagger e^{-(\lambda+i\omega j)(\xi+s)}, \quad (3.9)$$

$$(3.10)$$

### 3.2.1 Adjungierte Rekursionsformel

Durch (3.7), (3.8) läßt sich nun eine Rekursionsformel für das adjungierte Problem konstruieren. Da die Rechenschritte mit denen von Kapitel 2 übereinstimmen geben wir eine knappe Zusammenfassung:

$$\frac{d}{d\xi} \vec{q}_\xi^\dagger(0) = - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \vec{\psi}_j^\dagger (\lambda + i\omega j) e^{-(\lambda+i\omega j)\xi}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{\omega\tau} ds \bar{\psi}_j^{\dagger\lambda} \Omega_k(-s) e^{-(\lambda+i\tilde{\omega}(j-k))s} e^{-(i\tilde{\omega}(j-k)+\lambda)\xi} \\
&= - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{\omega\tau} ds \bar{\psi}_{j+k}^{\dagger\lambda} \Omega_k(-s) e^{-(\lambda+i\tilde{\omega}j)s} e^{-(i\tilde{\omega}j+\lambda)\xi} \\
&= - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\psi}_{j+k}^{\dagger\lambda} \mathbf{L}_{k,j} e^{-(i\tilde{\omega}j+\lambda)\xi}. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Der Vergleich der Fourierkomponenten führt jetzt auf

$$0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\psi}_{j+k}^{\dagger\lambda} [\mathbf{L}_{k,j} - \delta_{j,j+k} (\lambda + i\tilde{\omega}(j+k)) \mathbf{I}]. \tag{3.12}$$

Wir betrachten hier wiederum einen Spezialfall,  $-1 \leq k \leq 1$ .

$$\begin{aligned}
0 &= \bar{\psi}_{j+k}^{\dagger\lambda} [\mathbf{L}_{k,j} - \delta_{j,j+k} (\lambda + i\tilde{\omega}(j+k)) \mathbf{I}] \\
&= \cdots + \bar{\psi}_{j-1}^{\dagger\lambda} \mathbf{L}_{-1,j} + \bar{\psi}_j^{\dagger\lambda} [\mathbf{L}_{0,j} - (\lambda + i\tilde{\omega}j) \mathbf{I}] + \bar{\psi}_{j+1}^{\dagger\lambda} \mathbf{L}_{1,j} + \cdots \tag{3.13}
\end{aligned}$$

### 3.2.2 Adjungierter Kettenbruch

Durch die im vorigen Kapitel vorgestellte Vorgehensweise läßt sich auch hier mit Hilfe der Leiteroperatoren  $\mathbf{Z}_j^{\pm}$

$$\bar{\psi}_{j-1}^{\dagger\lambda} = \bar{\psi}_j^{\dagger\lambda} \mathbf{Z}_j^-, \tag{3.14}$$

$$\bar{\psi}_{j+1}^{\dagger\lambda} = \bar{\psi}_j^{\dagger\lambda} \mathbf{Z}_j^+ \tag{3.15}$$

ein maximal konvergierender Kettenbruch konstruieren:

$$0 = \bar{\psi}_j^{\dagger\lambda} [\mathbf{Z}_j^- \mathbf{L}_{-1,j} + (\mathbf{L}_{0,j} - (\lambda + i\tilde{\omega}j) \mathbf{I})] + \bar{\psi}_{j+1}^{\dagger\lambda} \mathbf{L}_{1,j}, \tag{3.16}$$

$$0 = \bar{\psi}_j^{\dagger\lambda} \mathbf{L}_{-1,j} + \bar{\psi}_j^{\dagger\lambda} [\mathbf{L}_{0,j} - (\lambda + i\tilde{\omega}j) \mathbf{I} + \mathbf{Z}_j^+ \mathbf{L}_{1,j}]. \tag{3.17}$$

Die Bestimmungsgleichung der Leiteroperatoren  $\mathbf{Z}_j^{\pm}$  ergibt sich hier wie beim vorgestellten Risikenschen Verfahren durch Auflösung von (3.16) und (3.17):

$$\bar{\psi}_j^{\dagger\lambda} = -\bar{\psi}_{j+1}^{\dagger\lambda} \mathbf{L}_{1,j} [\mathbf{Z}_j^- \mathbf{L}_{-1,j} + (\mathbf{L}_{0,j} - (\lambda + i\tilde{\omega}j) \mathbf{I})]^{-1} \tag{3.18}$$

$$= \bar{\psi}_{j+1}^{\dagger\lambda} \mathbf{Z}_{j+1}^-, \tag{3.19}$$

$$\bar{\psi}_j^{\dagger\lambda} = -\bar{\psi}_{j-1}^{\dagger\lambda} \mathbf{L}_{-1,j} [\mathbf{Z}_j^+ \mathbf{L}_{1,j} + (\mathbf{L}_{0,j} - (\lambda + i\tilde{\omega}j) \mathbf{I})]^{-1} \tag{3.20}$$

$$= \bar{\psi}_{j-1}^{\dagger\lambda} \mathbf{Z}_{j-1}^+. \tag{3.21}$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit der ursprünglichen Definition, die durch (3.14),(3.15) festgelegt ist, dann ergibt sich mit Hilfe einer Indexverschiebung  $j \rightarrow j \pm 1$

$$\mathbf{Z}_j^\mp = -\mathbf{L}_{\pm 1, j \mp 1} \left[ \mathbf{Z}_{j \mp 1}^\mp \mathbf{L}_{\mp 1, j \mp 1} + (\mathbf{L}_{0, j \mp 1} - (\lambda + i\tilde{\omega}(j \mp 1)\mathbf{I}) \right]^{-1}. \quad (3.22)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann hier wieder  $j = 0$  gesetzt werden :

$$0 = \tilde{\psi}_0^{\mp \lambda} \left[ \mathbf{Z}_0^- \mathbf{L}_{-1, 0} + (\mathbf{L}_{0, 0} - \lambda \mathbf{I}) + \mathbf{Z}_0^+ \mathbf{L}_{1, 0} \right]. \quad (3.23)$$

Das hierdurch definierte transzendente Eigenwertproblem ist dem ursprünglichen äquivalent. Ein Beweis läßt sich durch explizites Einsetzen der erhaltenen Lösungen in die Bilinearform (3.1) führen.

### 3.3 Orthonormalitätsrelationen

Um die Biorthogonalität der Eigenfunktionen  $\tilde{\phi}_n^\lambda, \tilde{\psi}_j^{\mp \lambda}$  zu verschiedenen Floquet-Exponenten zu zeigen, benutzt man die explizite Form der Bilinearform (3.1) mit den Ansätzen (2.54), (3.8). Nach der Ausführung der Integration über  $ds$  erhält man ( $\lambda \neq \mu$ ) :

$$\begin{aligned} \left( \tilde{\psi}_\ell^{\mp \lambda}, \tilde{\phi}_\ell^\mu \right)_\ell &= \sum_{n, j} \left\langle \tilde{\psi}_j^{\mp \lambda}, \tilde{\phi}_n^\mu \right\rangle e^{i\tilde{\omega}(n-j)\ell} - \\ &- \sum_{n, j, k} \frac{e^{-i\tilde{\omega}(j-n-k)\ell} \left\langle \tilde{\psi}_j^{\mp \lambda} \int_{-\omega\tau}^0 d\theta \Omega_k(\theta) \left[ e^{(\mu+i\tilde{\omega}n)\theta} - e^{(\lambda+i\tilde{\omega}(j-k))\theta} \right] \tilde{\phi}_n^\mu \right\rangle}{(\mu - \lambda) + i\tilde{\omega}(n+k-j)}. \end{aligned}$$

Verwendet man die Gleichungen (2.59), (3.12), so läßt sich dieses Ergebnis folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned} \left( \tilde{\psi}_\ell^{\mp \lambda}, \tilde{\phi}_\ell^\mu \right)_\ell &= \sum_{n, j} \left\langle \tilde{\psi}_j^{\mp \lambda}, \tilde{\phi}_n^\mu \right\rangle e^{i\tilde{\omega}(n-j)\ell} - \\ &- \sum_{n, j, k} \frac{e^{i\tilde{\omega}(n+k-j)\ell}}{(\mu - \lambda) + i\tilde{\omega}(n+k-j)} \left\langle \tilde{\psi}_j^{\mp \lambda} \left[ \mathbf{L}_{k, n}^\mu - \mathbf{L}_{k, j-k}^\lambda \right] \tilde{\phi}_n^\mu \right\rangle. \end{aligned}$$

Mit Hilfe einer Umindizierung der Summe  $n \rightarrow n - k, j \rightarrow j + k$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \left( \tilde{\psi}_\ell^{\mp \lambda}, \tilde{\phi}_\ell^\mu \right)_\ell &= \sum_{n, j} \left\langle \tilde{\psi}_j^{\mp \lambda}, \tilde{\phi}_n^\mu \right\rangle e^{i\tilde{\omega}(n-j)\ell} - \\ &- \sum_{n, j, k} \frac{e^{i\tilde{\omega}(n-j-k)\ell}}{(\mu - \lambda) + i\tilde{\omega}(n-j-k)} \left\langle \tilde{\psi}_{j+k}^{\mp \lambda} \left[ \mathbf{L}_{k, n-k}^\mu - \mathbf{L}_{k, j}^\lambda \right] \tilde{\phi}_{n-k}^\mu \right\rangle \\ &= \sum_{n, j} \left\langle \tilde{\psi}_j^{\mp \lambda}, \tilde{\phi}_n^\mu \right\rangle e^{i\tilde{\omega}(n-j)\ell} - \\ &- \sum_{n, j, k} \frac{e^{i\tilde{\omega}(n-j-k)\ell} \left\langle \tilde{\psi}_{j+k}^{\mp \lambda} \left[ \delta_{n, n-k} (\mu + i\tilde{\omega}(n-k)\mathbf{I} - \delta_{j, j+k} (\lambda + i\tilde{\omega}(j+k))\mathbf{I}) \right] \tilde{\phi}_{n-k}^\mu \right\rangle}{(\mu - \lambda) + i\tilde{\omega}(n-j-k)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist die Biorthogonalität explizit nachgewiesen.

### 3.3.1 Normalisierung

Im Falle gleicher Floquet-Exponenten lässt sich wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen eine Normierung  $N_\lambda$  einführen, die jetzt explizit von der Zeit abhängt. Aus

$$\begin{aligned} \left( \vec{\psi}_\xi^{\dagger\lambda}, \vec{\phi}_\xi^\lambda \right)_\xi &= \sum_{n,j} \left\langle \vec{\psi}_j^{\dagger\lambda}, \vec{\phi}_n^\lambda \right\rangle e^{i\tilde{\omega}(n-j)\xi} - \\ &= \sum_{n,j,k} \frac{e^{-i\tilde{\omega}(j-n-k)\xi}}{i\tilde{\omega}(k+n-j)} \left\langle \vec{\psi}_j^{\dagger\lambda} \int_{-\omega\tau}^0 d\theta \Omega_k(\theta) e^{(\lambda+i\tilde{\omega}(j-k))\theta} \left[ e^{i\tilde{\omega}(k+n-j)\theta} - 1 \right] \phi_n^\lambda \right\rangle \end{aligned}$$

erhält man mit den Definitionen

$$\vec{\psi}^{\dagger\lambda} = N_\lambda \vec{\psi}_{N_\lambda}^{\dagger\lambda}, \quad \vec{\phi}^\lambda = N_\lambda \vec{\phi}_{N_\lambda}^\lambda, \quad (3.24)$$

eine Bestimmung der Normierung  $N_\lambda$  zu:

$$N_\lambda = \sum_{n,j,k} \frac{1}{\sqrt{\left\langle \vec{\psi}_{N_\lambda,j}^{\dagger\lambda} \left[ e^{i\tilde{\omega}(n-j)\xi} - \frac{e^{-i\tilde{\omega}(j-n-k)\xi}}{i\tilde{\omega}(k+n-j)} \int_{-\omega\tau}^0 d\theta \Omega_k(\theta) e^{(\lambda+i\tilde{\omega}(j-k))\theta} \left[ e^{i\tilde{\omega}(k+n-j)\theta} - 1 \right] \right] \vec{\phi}_{N_\lambda,n}^\lambda \right\rangle}}$$

Die Vektoren  $\vec{\psi}_{N_\lambda}^{\dagger\lambda}, \vec{\phi}_{N_\lambda}^\lambda$  bezeichnen hierbei die normierten Eigenfunktionen. Die Biorthonormalitätsrelationen nehmen damit die Form

$$\left( \vec{\psi}_{N_\lambda}^{\dagger\lambda}, \vec{\phi}_{N_\lambda}^\mu \right) = \delta_{\mu,\lambda} \quad (3.25)$$

an.

## Kapitel 4

# Projektoren und Modenamplitudengleichungen

Untersucht man das Spektrum der infinitesimalen Generatoren  $\mathcal{A}_L, \mathcal{A}_L^\dagger$  so sieht man, daß unter sehr allgemeinen Bedingungen an einer Instabilität nur endlich viele Eigenwerte die imaginäre Achse durchstoßen. Der erweiterte Zustandsraum läßt sich dann in die Unterräume der instabilen und stabilen Moden aufspalten. Dieses Ziel läßt sich mit Hilfe geeigneter Projektoren  $\mathcal{P}_u, \mathcal{Q}_s$  erreichen, deren Eigenschaften im folgenden näher untersucht werden sollen. Man faßt zunächst diejenigen Floquet-Eigenlösungen, deren Floquetexponenten  $\lambda_1 \cdots \lambda_k$  sich in unmittelbarer Nähe der imaginären Achse befinden, zu einer Matrix  $\Phi_u(\theta)$

$$\Phi_{\xi u}(\theta) = \left( \vec{\phi}_\xi^{\lambda_1}, \dots, \vec{\phi}_\xi^{\lambda_k} \right) \quad (4.1)$$

zusammen, und erhält dadurch eine Basis des instabilen Unterraums  $\mathcal{U}$ . Genauso lassen sich die  $k$  adjungierten Lösungen ebenfalls zur adjungierten Matrix  $\Psi_{\xi u}^\dagger$

$$\Psi_{\xi u}^\dagger(s) = \begin{pmatrix} \psi_\xi^{\dagger \lambda_1} \\ \dots \\ \psi_\xi^{\dagger \lambda_k} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

ordnen. Die Projektionsoperatoren, die auf die jeweiligen Unterräume projizieren, werden explizit über

$$\mathcal{P}_u \cdot = \Phi_{\xi u}(\theta) \left( \Psi_{\xi u}^\dagger, \cdot \right)_\xi \quad (4.3)$$

$$\mathcal{Q}_s \cdot = (\mathcal{I} - \mathcal{P}_u \cdot) \quad (4.4)$$

definiert. Bei näherer Untersuchung zeigt sich hier, daß die Projektoren (4.3), (4.4) nur näherungsweise auf die beiden Teilräume projizieren [8]. Man kann jedoch zeigen, daß die Näherung in der Nähe der kritischen Stelle immer besser wird. Wir zerlegen jetzt zunächst den erweiterten Zustandsvektor des nichtlinearen Problems in die beiden Anteile

$$\vec{q}_\xi(\theta) = \vec{U}_\xi(\theta) + \vec{S}_\xi(\theta) \quad (4.5)$$

auf.  $\vec{U}_\xi(\theta)$  und  $\vec{S}_\xi(\theta)$  sind hierbei im Rahmen der Näherung Elemente der jeweiligen Unterräume  $\mathcal{U}$  bzw.  $\mathcal{S}$ . Spaltet man weiterhin das nichtlineare Funktional  $\mathcal{N}[\vec{q}_\xi(\cdot)]$  in seinen linearen Anteil  $\mathcal{L}[\vec{q}_\xi]$  sowie den nichtlinearen Teil  $\tilde{\mathcal{N}}[\vec{q}_\xi(\cdot)]$  gemäß

$$\mathcal{N}[\vec{q}_\xi(\cdot)] = \mathcal{L}[\vec{q}_\xi(\cdot)] + \tilde{\mathcal{N}}[\vec{q}_\xi(\cdot)] \quad (4.6)$$

auf, so nimmt die nichtlineare Bewegungsgleichung die Form

$$\frac{d}{d\xi} \vec{q}_\xi(\theta) = \mathcal{A}_L \vec{q}_\xi(\theta) + \chi_0(\theta) \tilde{\mathcal{N}}_\xi[\vec{q}_\xi(\cdot)] \quad (4.7)$$

an. Die matrixwertige Funktion  $\chi_0(\theta)$  ist dabei durch

$$\chi_0(\theta) = \begin{cases} 0 & -\tau \leq \theta < 0 \\ 1 & \theta = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

gegeben. Man wendet nun die Projektoren (4.3), (4.4) auf das nichtlineare Problem (4.7) an und führt nach [1] verallgemeinerte Ordnungsparameter  $\vec{u}$  durch

$$\vec{U}_\xi(\theta) = (\mathcal{P}_u, \vec{q}_\xi)(\theta) \quad (4.9)$$

$$= \Phi_{\xi u}(\theta) \vec{u}(\xi), \quad (4.10)$$

$$\vec{u}(t) = (\vec{\Psi}_{\xi u}^\dagger, \vec{q}_\xi) \quad (4.11)$$

ein. Die stabilen Moden sind hier über

$$\vec{S}_\xi(\theta) = (\mathcal{Q}_s, \vec{q}_\xi)(\theta) \quad (4.12)$$

$$= \vec{s}_\xi(\theta) \quad (4.13)$$

definiert. Projiziert man die nichtlineare Bewegungsgleichung (4.7) auf die beiden Unterräume  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{S}$ , so erhält man ein gekoppeltes System von nichtlinearen Modenamplitudengleichungen:

$$\frac{d}{d\xi} \vec{u}(\xi) = \Lambda_u \vec{u}(\xi) + \langle \Psi_{\xi u}^\dagger(0), \tilde{\mathcal{N}}_\xi [\Phi_{\xi u}(\theta) \vec{u}(\xi) + \vec{s}_\xi(\theta)] \rangle \quad (4.14)$$

$$\frac{d}{d\xi} \vec{s}_\xi(\theta) = \mathcal{A}_L \vec{s}_\xi(\theta) + \chi(\theta) - \Phi_{\xi u}(\theta) \langle \Psi_{\xi u}^\dagger(0), \tilde{\mathcal{N}}_\xi[\cdot] \rangle \quad (4.15)$$

Die Form der Gleichungen (4.14),(4.15) wird es nun ermöglichen, eine adiabatischen Elimination durchzuführen, und über die Anwendung der Theorie der zentralen Mannigfaltigkeit den unendlichen dimensional Satz von Modenamplitudengleichungen auf einen endlich dimensional Satz von Ordnungsparametergleichungen zu reduzieren, die keine Gedächtnisterme mehr enthalten.



# Kapitel 5

## Anwendung auf den PLL

Ein zeitlich verzögerter Phasenregelkreis ( Phase-Locked-Loop ) läßt sich durch eine Modellgleichung der Form:

$$\dot{x}(t) = -k \sin(x(t - \tau)) \quad (5.1)$$

beschreiben. Die Variablen  $x, k$  entsprechen dabei dem Phasenfehler bzw. dem sogenannten 'open loop gain' des Regelkreises. Die Gleichung besitzt eine durch die Verzögerung induzierte Hopf-Bifurkation [8, 9] bei einem kritischen Kontrollparameterwert

$$\tau_c = \frac{\pi}{2k}. \quad (5.2)$$

die Skalierung mit (2.5,2.6) führt auf

$$\omega \dot{q}(\xi) = -k \sin(q(\xi - \omega\tau)). \quad (5.3)$$

Über (2.32) läßt sich eine Größe  $\mu$  als Abstand von der Hopfbifurkation  $\tau - \tau_c$  einführen, die eine Bestimmung des oszillatorischen Referenzzustandes im neuen Kleinheitsparameter erlaubt.

### 5.1 Shohat-Entwicklung

Der Versuch einer Anwendung des Poincaré-Lindstedt Verfahrens scheitert hier. Die Ergebnisse werden mit zunehmender Ordnung im Parameter  $\mu$  schlechter, das Verfahren divergiert. Wie eine numerische Auswertung der 2. oszillatorischen Instabilität beim PLL zeigt, ist der durch den Kleinheitsparameter  $\mu$  beschriebene Abstand von der Hopf-Bifurkation  $\tau - \tau_c$  größer als eins. Wir versuchen deshalb eine Shohat-Entwicklung (2.23) zur Bestimmung des oszillatorischen Referenzzustandes anzusetzen. Setzt man die Entwicklung der zeitlichen Verzögerung  $\tau$  in Abhängigkeit vom Kleinheitsparameter  $\mu$  bei (2.32) sowie die Entwicklungen (2.24), (2.25), (2.26), (2.29) in die Gleichung (5.3) ein und beachtet die Anfangsbedingungen (2.21),

(2.26), (2.29) in die Gleichung (5.3) ein und beachtet die Anfangsbedingungen (2.21), (2.22), so läßt sich das entstehende Gleichungssystem iterativ nach Potenzen des neuen Kleinheitsparameters  $\rho$  lösen. Da die Rechnung selbst sehr unübersichtlich wird, ist das Verfahren im Anhang ausführlich erläutert. Man erhält neben dem kritischen Parameterwert (5.2) der Hopfbifurkation eine Gleichung für die oszillatorische Lösung. Dabei ergibt sich für die Frequenz der Oszillation

$$\omega = k - k\rho^2 - 2k\rho^3 - 2k\rho^4 \quad (5.4)$$

und für die Amplitude  $q^0(\xi)$  bis zur dritten Ordnung in  $\rho$

$$q^0(\xi) = \sqrt{8} \sin(\xi)\rho + \sqrt{8} \sin(\xi)\rho^2 + \left( \frac{5}{4}\sqrt{2} \sin(\xi) - \frac{1}{6}\sqrt{2} \sin(3\xi) \right) \rho^3. \quad (5.5)$$

Das Ergebnis stimmt in niedrigster Ordnung mit dem von W. Wischert [8, 9] gewonnenen Resultat [8] überein. In den Abbildungen (5.1), (5.2) ist die gute Übereinstimmung der näherungsweise gewonnenen Lösung (gestrichelte Linie) mit den numerisch ermittelten Werten (durchgezogene Linie) erkennbar.

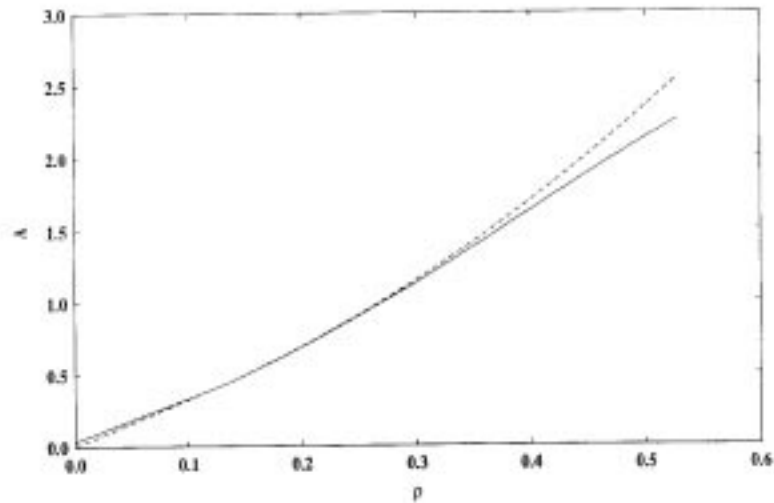


Abbildung 5.1: Amplitudenvergleich mit der numerischen Simulation

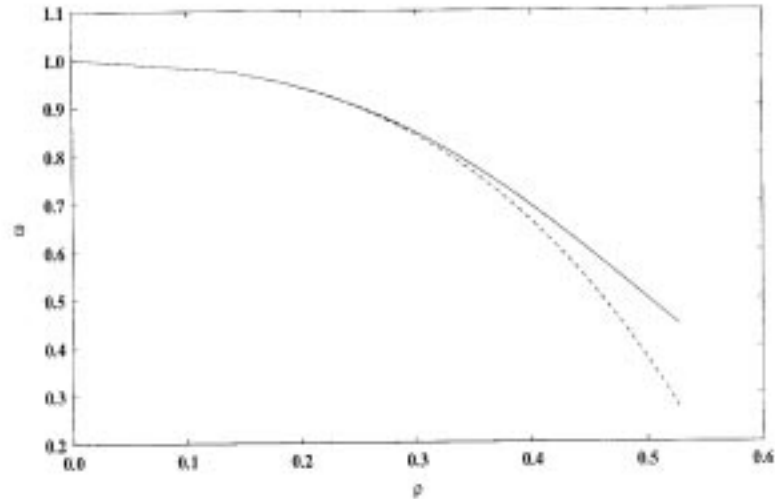


Abbildung 5.2: Frequenzvergleich mit der numerischen Simulation

Es sei hier angemerkt daß es im vorliegenden Fall nötig ist, das Gleichungssystem bis zur Ordnung  $\rho^6$  auszuwerten, um mit einer Elimination der Säkularterme über (2.19), (2.20) eine Bestimmung der Koeffizienten  $A_i, \omega_i$  bis zur Ordnung  $\rho^3$  bzw.  $\rho^4$  zu erhalten.

Um die explizite Darstellung der Lösung des linearisierten Systems in der Form von Floquet-Eigenlösungen zu erhalten, wird nun das in Kapitel 2 entwickelte Verfahren auf den vorliegenden Fall übertragen.

## 5.2 Linearisierung um die oszillatorische Lösung

Nach einer Linearisierung der Bewegungsgleichung um die oszillatorische Lösung  $q^0(\xi)$  mit (2.48), führt die Fourierentwicklung der linearisierten Dichte mit (2.52) auf die Fourierkomponenten

$$\Omega_1(\theta) = \left( \rho^2 + \frac{11}{4}\rho^4 + 2\rho^3 \right) \delta(\theta + \omega\tau), \quad (5.6)$$

$$\Omega_{-1}(\theta) = \left( \rho^2 + \frac{11}{4}\rho^4 + 2\rho^3 \right) \delta(\theta + \omega\tau), \quad (5.7)$$

$$\Omega_0(\theta) = \left( -1 + \frac{5}{2}\rho^4 + 2\rho^3 + \rho^2 \right) \delta(\theta + \omega\tau). \quad (5.8)$$

Interessanterweise heben sich hier die Beiträge der höheren Harmonischen der Fourierzerlegung von  $\Omega_\varepsilon(\theta)$  gegenseitig exakt auf.

### 5.3 Rekursionsrelationen

Die Auswertung des Ansatzes (2.53), (2.54) im Intervall  $-\omega\tau \leq \theta < 0$  sowie an der Stelle  $\theta = 0$  liefert die Rekursionsrelation (2.59), wobei die Größen  $L_{k,n-k}$  wieder über (2.58) definiert wurden. Es ergibt sich

$$L_{0,0} = \left(-1 + \rho^2 + 2\rho^3 + \frac{5}{2}\rho^4\right) e^{-\frac{1}{2}\pi\lambda}, \quad (5.9)$$

$$L_{\pm 1,0} = \left(\rho^2 + 2\rho^3 + \frac{11}{4}\rho^4\right) e^{-\frac{1}{2}\pi\lambda}, \quad (5.10)$$

$$L_{\mp 1,\pm 1} = -L_{\pm 1,0}. \quad (5.11)$$

### 5.4 Transzendenter Kettenbruch

Durch die Anwendung der im vorhergehenden Kapitel 2 beschriebenen Lösungsmethode läßt sich ein in den Größen  $\rho, n$  maximal konvergierender skalarer Kettenbruch konstruieren. Das dadurch definierte transzendente Eigenwertproblem für die Eigenwerte  $\lambda_\varepsilon$  besitzt die Form

$$0 = \left(-\lambda + e^{-\frac{1}{2}\pi\lambda} \left(-1 + \rho^2 + 2\rho^3 + \right. \right. \quad (5.12)$$

$$\left. \left. + \rho^4 \left(\frac{5}{2} - \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi\lambda}}{\lambda + 2i - e^{-\frac{1}{2}\pi\lambda}} - \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi\lambda}}{\lambda - 2i - e^{-\frac{1}{2}\pi\lambda}}\right)\right)\right) \phi_0^\lambda. \quad (5.13)$$

Der kritische Wert von  $\rho$  für eine reellwertige Lösung ergibt sich als Lösung der gebrochen rationalen Funktion

$$\lambda_{2c} = \frac{-1 + \rho_c^2 + 2\rho_c^3 + \frac{25}{10}\rho_c^4}{-1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\rho_c^2 - \pi\rho_c^3 - \rho_c^4 \left(\frac{177\pi}{100} + \frac{6}{25}\right)}. \quad (5.14)$$

Eine numerische Auswertung dieser Funktion ergibt an der 2. oszillatorischen Instabilität  $\lambda_{2c} = 0$  für  $\rho_c$  einen Wert von

$$\rho_c = 0.5697. \quad (5.15)$$

Der relative Abstand zwischen der Hopfbifurkation und dem kritischen Parameterwerte für die 2.Instabilität ist damit festgelegt. Rechnet man diesen Werte über die Umkehrrelationen von (2.23) und (2.32) zurück, so bestimmen sich die kritischen Kontrollparameterwerte  $\mu_c, \tau_{2c}$  zu

$$\mu_c = 1.1846, \quad (5.16)$$

$$\tau_{2c} = \frac{3.7751}{k}. \quad (5.17)$$

Der Wert von  $\mu_c$  führt hier zur Divergenz des Poincare-Lindstedt Verfahrens. Die numerische Auswertung des Problems liefert einen kritischen Floquet-Exponenten bei

$$k\tau_{2c}^n = 3.775 \pm 0.001. \quad (5.18)$$

Der Vergleich zeigt, daß die maximale Konvergenz des Kettenbruchs zu einer Übereinstimmung führt, die weit besser ist als die Fehlerabschätzung durch den nächsthöheren Störungsbeitrag  $\rho_c^5 = 0.06$  zunächst vermuten läßt. Der Nulldurchgang des reellen Exponenten durch die imaginäre Achse spaltet den Grenzzyklus in zwei zueinander punktsymmetrische Zyklen auf. Bei einem solchen Übergang bleibt die Frequenz des Systems unverändert. Da in früheren Untersuchungen [8, 9] lediglich das Fourierpektrum der Lösung untersucht wurde, blieb diese Instabilität unbemerkt.

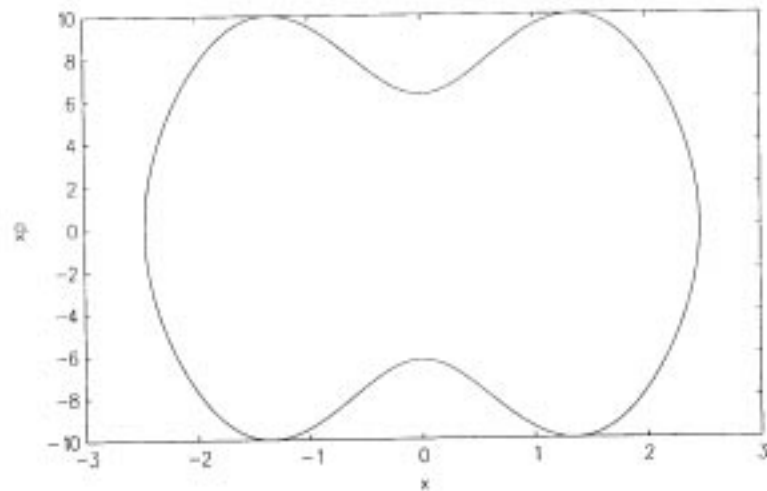


Abbildung 5.3: Grenzzyklus vor der Aufspaltung,  $\tau k = 3.6$

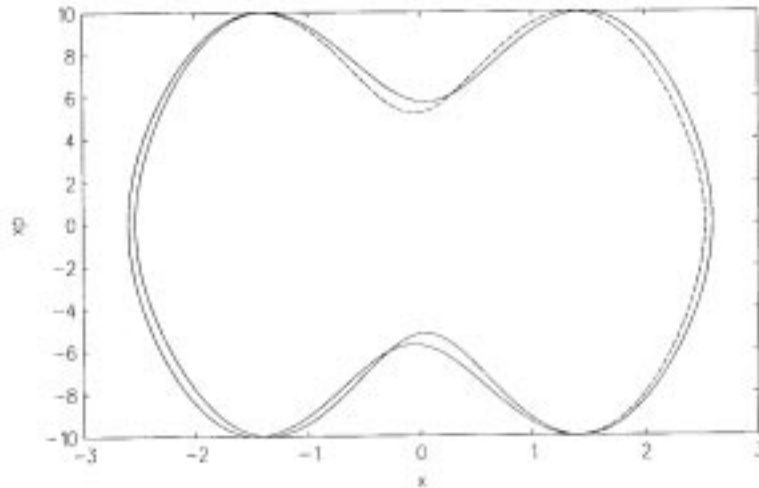


Abbildung 5.4: Aufspaltung des Grenzyklus,  $\tau k = 3.9$

Eine perturbative Entwicklung in  $\lambda$

$$\lambda = \lambda_0 + \rho\lambda_1 + \rho^2\lambda_2 + \rho^3\lambda_3 + \rho^4\lambda_4 + \dots \quad (5.19)$$

führt zur approximativen Bestimmung von zwei weiteren Floquet-Exponenten  $\lambda$ .

$$\lambda = \pm i, \quad (5.20)$$

$$\lambda = \pm i - \rho^2 \frac{4\pi}{\pi^2 + 4} - \rho^3 \frac{8\pi}{\pi^2 + 4} - \rho^4 \frac{\pi(15\pi^4 + 136\pi^2 + 176)}{(\pi^2 + 4)(\pi^4 + 8\pi^2 + 16)}. \quad (5.21)$$

Da die Floquet-Exponenten aus der Linearisierung eines nichtlinearen Problems gewonnen wurden, verschwindet erwartungsgemäß der Realteil Floquet-Exponenten zur Lösung  $\tilde{q}_\xi(\theta) = \dot{q}_0(\xi)$

## 5.5 Floquet-Eigenlösungen

Die Floquet-Eigenlösungen lassen sich über (2.53), (2.54), (2.61), (2.62), (2.96) bestimmen. Durch die Auswertung der Leiteroperatoren  $\mathbf{S}_0^m$  erhält man im Falle  $\lambda = \pm i$  eine Bestimmungsgleichung für die Fourierkomponente  $\phi_0^{\pm i}$ . Diese nimmt dann die Form

$$\phi_0^{\pm i} = \sqrt{2}\rho + \sqrt{2}\rho^2 + \frac{5}{8}\sqrt{2}\rho^3 \quad (5.22)$$

an. Die Floquet-Eigenlösung zu  $\lambda = \pm i$  entspricht dann gerade der zeitlichen Ableitung der periodischen Lösung. Eine Floquet-Eigenlösung zum kritischen Exponenten  $\lambda_c$  läßt sich durch das Auswerten der Leiteroperatoren  $\mathbf{S}_0^m$  zu

$$\begin{aligned}
 q^c(\xi) &= -e^{\lambda_c \xi} \frac{2\tilde{\phi}_0^{\lambda_c} \zeta \rho^2 (\pi - 2)(1 + 2\rho) ((4 - 2\pi) \sin(2\xi) + (\zeta\pi - 2\zeta - 2) \cos(2\xi))}{\zeta^2 \pi^2 - 4\zeta^2 \pi - 4\zeta \pi + 4\zeta^2 + 8\zeta + 20 + 4\pi^2 - 16\pi} \\
 &\quad + \frac{(\zeta\pi - 2\zeta - 2) \cos(2\xi)}{\zeta^2 \pi^2 - 4\zeta^2 \pi - 4\zeta \pi + 4\zeta^2 + 8\zeta + 20 + 4\pi^2 - 16\pi}, \\
 \zeta &= e^{-\frac{\pi}{\pi-2}}
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

finden. Die für das Langzeitverhalten relevanten Glieder der Floquet-Lösung sind damit an der Instabilität bis auf die Konstante  $\tilde{\phi}_0^{\lambda_c}$  vollständig bestimmt.

## Kapitel 6

# Anwendung auf den verallgemeinerten van-der-Pol Oszillator

Die Modellgleichung des van-der-Pol Oszillators beschreibt einen Oszillator mit nichtlinearer Dämpfung. Die Gleichung diente ursprünglich der Beschreibung eines elektronischen Schaltkreises. Der Grenzzyklus dieser Modellgleichung im nicht retardierten Fall für alle Werte des Kontrollparameters  $\mu > 0$  stabil.

### 6.1 Poincare-Lindstedt Verfahren

Der hier beschriebene Van-der-Pol Oszillator mit zeitlicher Verzögerung im nichtlinearen Term genügt folgender Modellgleichung :

$$\ddot{x}(t) + \mu(x^2(t - \tau) - 1)\dot{x}(t) + x(t) = 0. \quad (6.1)$$

Nach der Skalierung (2.5), (2.6) ergibt sich

$$\omega^2 \tilde{q}(\xi) + \mu \omega \dot{q}(\xi) (q^2(\xi - \omega\tau) - 1) + q(\xi) = 0. \quad (6.2)$$

Man entwickelt die Größen  $q(\xi, \mu)$  und  $\omega(\mu)$  in Übereinstimmung mit (2.9), (2.10) nach Potenzen von  $\mu$ . Die Auswertung dieser Potenzen ergibt dann das folgende Gleichungssystem: .

$$\ddot{q}_0(\xi) + q_0(\xi) = 0, \quad (6.3)$$

$$\ddot{q}_1(\xi) + q_1(\xi) = -2\omega_1 \dot{q}_0(\xi) - \dot{q}_0(\xi)(q_0^2(\xi - \tau) - 1) \quad (6.4)$$

$$\dots = \dots,$$

Die Lösung der niedrigsten Ordnung bestimmt sich aus den Anfangsbedingungen (2.21), (2.22), die garantieren, daß keine Säkularglieder auftreten zu

$$q_0(\xi) = A_0 \cos(\xi). \quad (6.5)$$



Durch die Bedingung der Elimination der Säkularterme (2.19), (2.20) werden die Konstanten  $A_0, \omega_1$  durch

$$A_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \cos(2\tau)}}, \quad (6.6)$$

$$\omega_1 = \frac{-\sin(2\tau)}{4 \left(1 - \frac{1}{2} \cos(2\tau)\right)} \quad (6.7)$$

festgelegt. Man prüft leicht nach, daß beim Grenzübergang  $\tau \rightarrow 0$  die periodische Referenzlösung in den Grenzzylus des gewöhnlichen Van-der-Pol Oszillators übergeht:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} A_0 = 2, \quad (6.8)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \omega = 1. \quad (6.9)$$

Die Abbildungen (6.1), (6.2), (6.3), (6.4) vergleichen die Unterschiede der numerisch ermittelten Werte der Amplitude  $A$  und der Frequenz  $\omega$  gegenüber den Werten der näherungsweise analytischen Lösung in niedrigster Ordnung. Wir merken an, daß eine Shohat-Entwicklung in dieser Näherung keine besseren Resultate liefert.

Die folgenden Abbildungen zeigen den Vergleich der numerisch ermittelten Werte (durchgezogene Linie) mit dem analytisch gewonnen Resultat (gestrichelte Linie) für  $\mu = 0.1, \mu = 0.3$ . Gesucht wird nun wiederum die Darstellung der Lösung des linearisierten Systems in der Form von Floquet-Eigenlösungen.

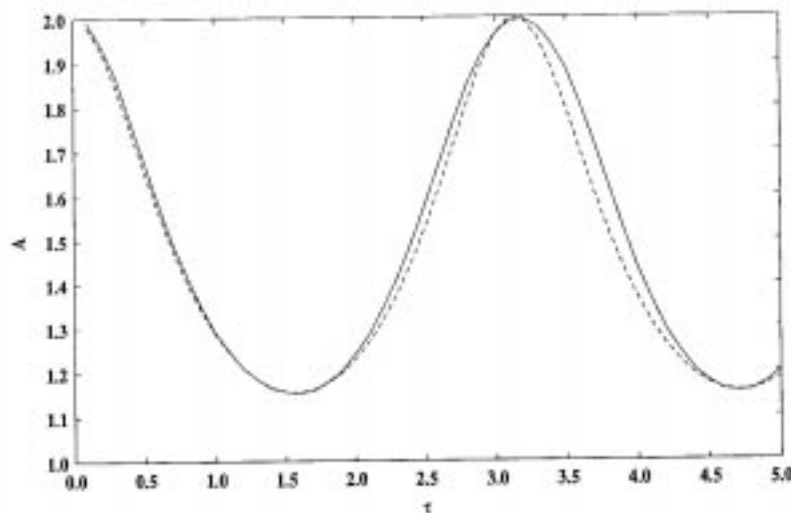


Abbildung 6.1: Amplitudenvergleich,  $\mu = 0.1$

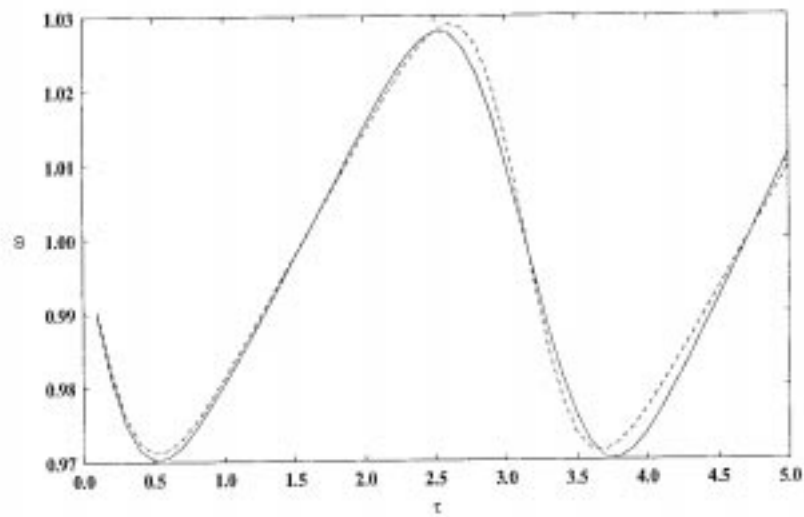


Abbildung 6.2: Frequenzvergleich,  $\mu = 0.1$

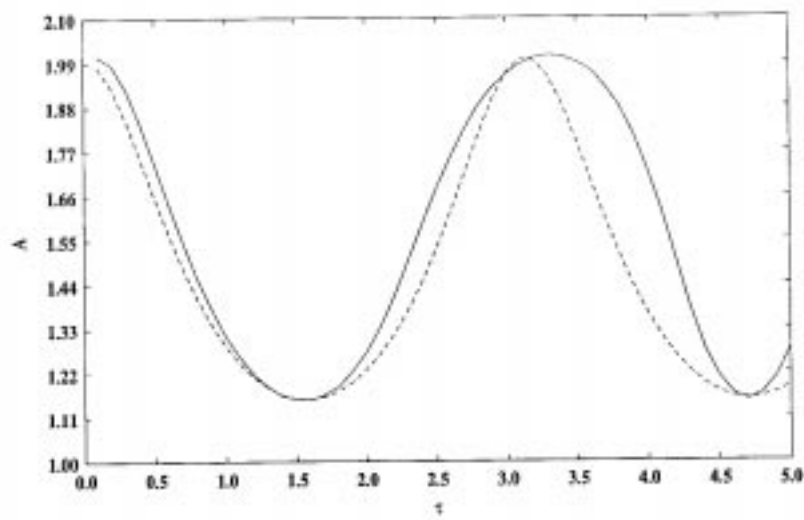


Abbildung 6.3: Amplitudenvergleich,  $\mu = 0.3$

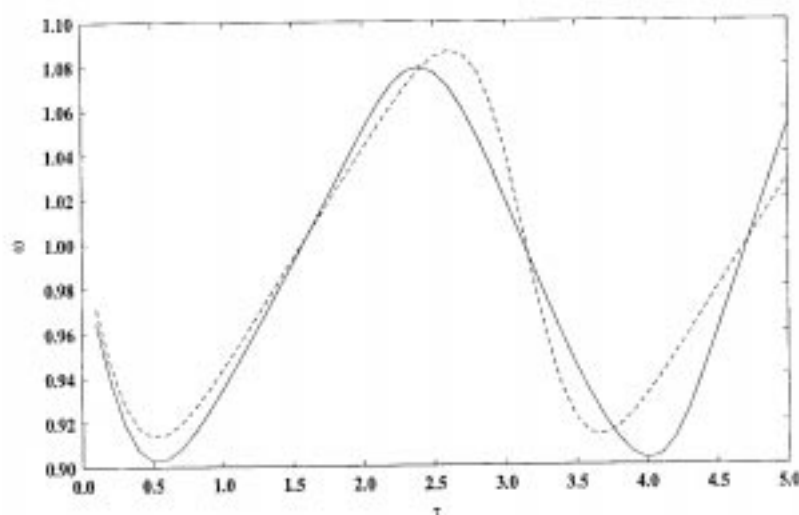


Abbildung 6.4: Frequenzvergleich,  $\mu = 0.3$

## 6.2 Linearisierung

Transformiert man das Differentialgleichungssystem 2.Ordnung (6.2) durch Einführung der neuen Variablen  $q_1^0(\xi), q_2^0(\xi)$

$$q_1^0(\xi) = q(\xi), \quad (6.10)$$

$$q_2^0(\xi) = \dot{q}(\xi), \quad (6.11)$$

dann kann man die periodische Lösung folgendermaßen zusammenfassen :

$$\vec{q}_\xi^0(0) = \begin{pmatrix} q_1^0(\xi) \\ q_2^0(\xi) \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \cos(2\tau)}} \begin{pmatrix} \cos(\xi) \\ -\sin(\xi) \end{pmatrix}, \quad (6.13)$$

$$\omega = 1 + \mu\omega_1 \quad (6.14)$$

$$= 1 - \mu \frac{\sin(2\tau)}{4 - 2 \cos(2\tau)}. \quad (6.15)$$

Das Ergebnis stimmt mit dem von J.K.Hale [13] mit Hilfe des Averaging-Verfahrens ermittelten Resultat überein (s.Anhang). Zur Berechnung von höheren Ordnungen

ist das Poincaré-Lindstedt-Verfahren jedoch vorzuziehen, da der Rechenaufwand vergleichsweise gering ist.

Für die zeitabhängige matrixwertige Dichte  $\Omega_\xi(\theta)$  erhält man mit (2.51)

$$\begin{aligned} \Omega_\xi(\theta) = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\omega^2} & -\frac{\mu}{\omega} ((q_1^0(\xi - \omega\tau)^2 - 1)) \end{pmatrix} \delta(\theta) + \\ & + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{2\mu}{\omega} q_1^0(\xi - \omega\tau) q_2^0(\xi) & 0 \end{pmatrix} \delta(\theta + \omega\tau) \end{aligned} \quad (6.16)$$

oder nach Einsetzen der periodischen Referenzlösung (6.13), (6.15):

$$\begin{aligned} \Omega_\xi(\theta) = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2\mu\omega_1 & -\frac{1}{2}\mu(A_0^2 \cos(2\xi - 2\tau) + A_0^2 - 2) \end{pmatrix} \delta(\theta) + \\ & + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu A_0^2 (\sin(2\xi - \tau) + \sin(\tau)) & 0 \end{pmatrix} \delta(\theta + \tau). \end{aligned} \quad (6.17)$$

### 6.3 Fourierentwicklung

Eine Fourierentwicklung mit (2.52), die die 1. Ordnung in  $\mu$  berücksichtigt, hat die Form

$$\begin{aligned} \Omega_0(\theta) = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2\mu\omega_1 & -\frac{1}{2}A_0^2 + \mu \end{pmatrix} \delta(\theta) + \\ & + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu A_0^2 \sin(\tau) & 0 \end{pmatrix} \delta(\theta + \tau), \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \Omega_1(\theta) = & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}\mu A_0^2 e^{2i(\xi - \tau)} \end{pmatrix} \delta(\theta) + \\ & + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}i\mu A_0^2 e^{i(2\xi - \tau)} & 0 \end{pmatrix} \delta(\theta + \tau), \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\Omega_{-1}(\theta) = \Omega_1^*(\theta). \quad (6.20)$$

Der Wert der Variablen  $\tilde{\omega}$  läßt sich direkt aus (6.19) zu  $\tilde{\omega} = 2$  ablesen.

### 6.4 Rekursionsrelationen

Mit (2.58) nehmen die Matrizen  $\mathbf{L}_{0|\pm 1, n}$  die Form

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{0, n} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2\mu\omega_1 - \frac{1}{2}i\mu A_0^2 e^{-\lambda\tau} (e^{-i(2n-1)\tau} - e^{-i(2n+1)\tau}) & -\frac{1}{2}\mu A_0^2 + \mu \end{pmatrix} \\ \mathbf{L}_{\pm 1, n} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mp \frac{1}{2}i\mu A_0^2 e^{-\tau(\lambda \pm i + 2n)} & -\frac{1}{4}\mu A_0^2 e^{\mp 2i\tau} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.21)$$

an.

## 6.5 Matrixwertiger transzendenter Kettenbruch

Zur Bestimmung der charakteristischen transzendenten Eigenwertgleichung bis zur 1.Ordnung in  $\mu$  ist es ausreichend, die Leiteroperatoren  $\mathbf{S}_0^{\pm 1}$  (2.72), (2.73) zu untersuchen, da die anderen Terme des matrixwertigen Kettenbruchs höhere Ordnungen tragen.

$$\begin{aligned} & [\mathbf{L}_{0,\pm 1} - (\lambda \pm 2i)\mathbf{I}]^{-1} & (6.22) \\ & = \frac{1}{\mathcal{D}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\mu A_0^2 + \mu - (\lambda \pm 2i) & -1 \\ 1 - 2\mu\omega_1 + \frac{1}{2}i\mu A_0^2 e^{-\lambda\tau} (e^{-i(\pm 2-1)\tau} - e^{-i(\pm 2+1)\tau}) & -(\lambda \pm 2i) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D} & = \lambda^2 \pm 4i\lambda - 4 + 1 + \mu \left( \lambda \left( \frac{A_0^2}{2} - 1 \right) - 2\omega_1 + \right. \\ & \quad \left. \pm i(A_0^2 - 2) + \frac{1}{2}iA_0^2 e^{-\lambda\tau \mp 2i\tau} (e^{i\tau} - e^{-i\tau}) \right), \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{-1,1}\mathbf{S}_0^1 & = ((\lambda + 2i)e^{2i\tau} - 2ie^{-\tau(\lambda+i)}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{i\mu^2 A_0^4}{8\mathcal{D}} e^{-\tau(\lambda+i)} & \frac{\mu^2 A_0^4}{16\mathcal{D}} e^{-2i\tau} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{L}_{+1,-1}\mathbf{S}_0^{-1} & = [\mathbf{L}_{-1,1}\mathbf{S}_0^1]^* \end{aligned} \quad (6.24)$$

Da die Determinante  $\mathcal{D}$  bis auf den Spezialfall  $n = \pm 1, \lambda = \mp i$  von nullter Ordnung in  $\mu$  ist, ist es also zunächst ausreichend sich auf den Term

$$[\mathbf{L}_{0,0} - \lambda\mathbf{I}] \vec{\phi}_0^\lambda = 0 \quad (6.25)$$

zu beschränken. Um nichttriviale reellwertige Lösungen  $\lambda \ll 1$  zu erhalten, fordert man das Verschwinden der Koeffizientendeterminante und entwickelt die erhaltene transzendente Gleichung

$$\lambda^2 + 1 + \mu \left( \frac{1}{2}\lambda A_0^2 - 2\omega_1 - \lambda - A_0^2 \sin(\tau)e^{-\lambda\tau} \right) = 0 \quad (6.26)$$

um den Wert  $\mathcal{R}e\lambda = 0$  nach  $\lambda$ . Das Resultat läßt sich in erster Näherung folgendermaßen angeben :

$$\lambda = \frac{1 - 2\mu\omega_1 - \mu \sin(\tau)A_0^2}{\mu \left( \frac{A_0^2}{2} + \tau \sin(\tau)A_0^2 - 1 \right)}. \quad (6.27)$$

Dem Nulldurchgang des reellen Exponenten entspricht hier wie beim PLL die Aufspaltung des Grenzzyklus. Der kritische Wert des Kontrollparameters  $\mu$  bestimmt sich daraus zu

$$\mu_c = \frac{1}{2\omega_1 + \sin(\tau)A_0^2}. \quad (6.28)$$

Durch eine perturbative Entwicklung in  $\lambda$

$$\lambda = \lambda_0 + \mu\lambda_1 + \dots \quad (6.29)$$

lassen sich zwei weitere Floquet-Exponenten analytisch bestimmen. Setzt man die Entwicklung (6.29) in den Kettenbruch ein, so erhält man

$$\lambda_0 = \pm i \quad (6.30)$$

$$\lambda_1 = 0, -1. \quad (6.31)$$

Es ist dabei zu beachten, daß hier genau der oben beschriebene resonante Fall  $\lambda = \pm i$  auftritt. Sucht man hier rein imaginäre Exponenten so läßt sich durch den Ansatz

$$\lambda = i\nu \quad (6.32)$$

tatsächlich eine Lösung finden:

$$0 = -\nu^2 + 1 + \mu(-2\omega_1 - A_0^2 \sin(\tau) \cos(\nu\tau)), \quad (6.33)$$

$$0 = \mu \left( \frac{1}{2} \nu A_0^2 - \nu + A_0^2 \sin(\tau) \sin(\nu\tau) \right), \quad (6.34)$$

$$= \left( \frac{1}{2} \nu A_0^2 - \nu + A_0^2 \sin(\tau) \sin(\nu\tau) \right). \quad (6.35)$$

Löst man die Gleichungen auf nach  $\sin(\nu\tau)$  bzw.  $\cos(\nu\tau)$  so erhält man nach dem quadrieren und addieren der umgeformten Gleichungen eine Bestimmungsgleichung für  $\nu$

$$\nu = \pm 1 \pm \left( \omega_1 + \frac{1}{16} \sqrt{64(A_0^2 - 1 + \sin(\tau)^2) - 16A_0^2} \right). \quad (6.36)$$

Setzt man dies in den Imaginärteil ein, so ergibt sich hieraus der kritische Wert des Kontrollparameters  $\mu$  in Abhängigkeit von  $\tau$ .

Die folgenden beiden Abbildungen zeigen den Vergleich des analytisch gefundenen kritischen Kontrollparameters  $\mu_c$  mit dem numerisch ermittelte Ergebnis im Bereich  $0 \leq \tau \leq 2.2$

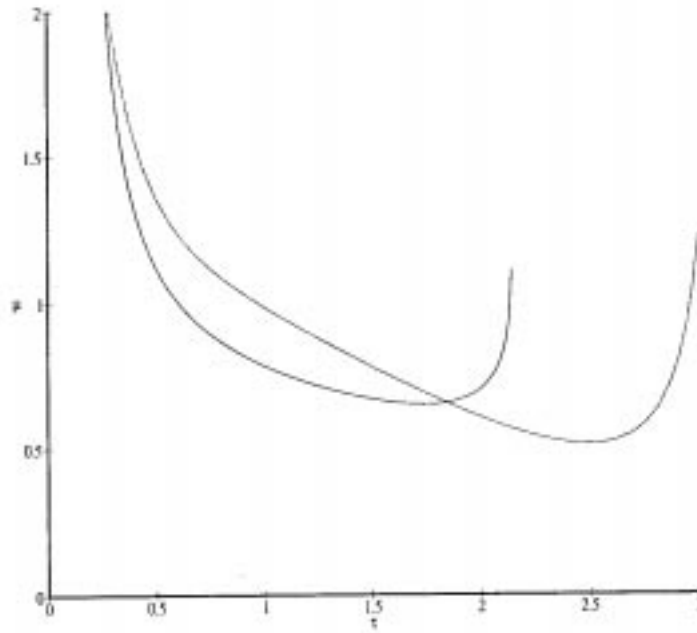


Abbildung 6.5: Analytisch gefundener kritischer Parameterwert  $\mu_c$ , 1,2.Ordnung in  $\mu$ ,  $0 \leq \tau \leq 3$

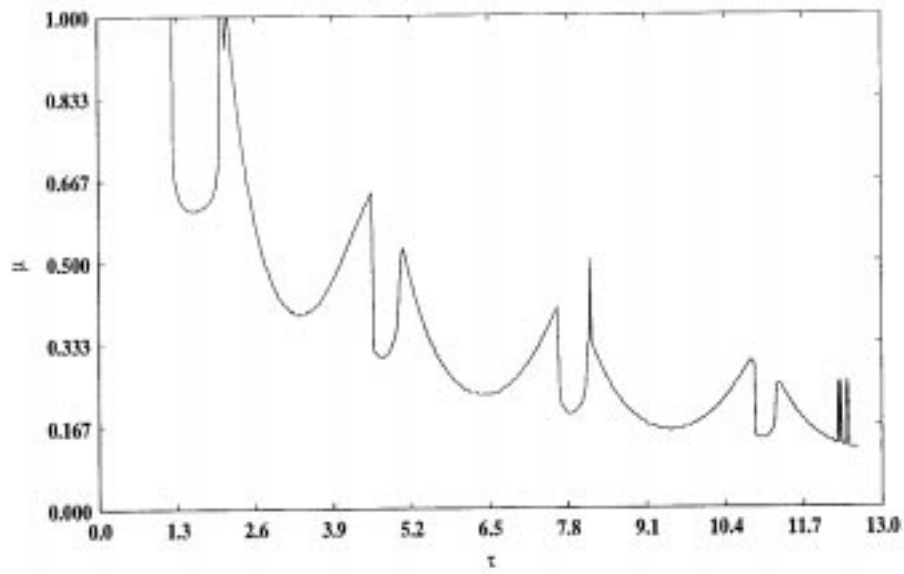


Abbildung 6.6: Numerisch gefundener kritischer Parameterwert  $\mu_c$ ,  $0 \leq \tau \leq 12$

Die Annäherung an den tatsächlichen kritischen Parameterwert  $\mu_c$  im Bereich  $0 \leq \tau \leq 2$  ist hier zumindest qualitativ erkennbar.

## 6.6 Algebraische Rechenprogramme

Mit algebraischen Rechenprogrammen läßt sich die Genauigkeit des Verfahrens fast beliebig erhöhen. Da das analytische Ergebnis beim Van-der-Pol Oszillator nur in der Größenordnung  $\mu$  mit der numerischen Simulation übereinstimmt, soll dies im folgenden kurz vorgestellt werden.

## 6.7 Poincare Lindstedt in 4.Ordnung

Um ein hinreichend gutes Ergebnis zur Bestimmung der Floquet-Exponenten zu erhalten, erweist es sich hier als zwingend notwendig, das Verfahren bis mindestens zur Ordnung  $\mu^4$  durchzuführen. Es wird der Spezialfall  $\tau = \pi/2$  betrachtet. Zusammengefaßt nimmt die Lösung mit Hilfe des Poincare-Lindstedt-Verfahrens folgende Form an

$$\begin{aligned}
 q(\xi) &= \frac{2}{3}\sqrt{3}\cos(\xi) + \mu\left(\frac{1}{36}\sqrt{3}\sin(3\xi) - \frac{1}{12}\sqrt{3}\sin(\xi)\right) + & (6.37) \\
 &+ \mu^2\left(\frac{1}{432}\sqrt{3}\cos(3\xi) - \frac{1}{2592}\sqrt{3}\cos(5\xi) - \right. \\
 &\left. - \frac{1}{216}\sqrt{3}\cos(\xi)\right) + \mu^3\left(\frac{1}{46656}\sqrt{3}\sin(7\xi) + \right. \\
 &+ \frac{1}{23328}\sqrt{3}\sin(5\xi) - \frac{67}{62208}\sqrt{3}\sin(3\xi) + \\
 &+ \frac{1}{5184}\sqrt{3}\cos(3\xi) + \frac{535}{186624}\sqrt{3}\sin(3\xi) - \\
 &\left. - \frac{1}{7776}\sqrt{3}\cos(\xi)\pi\right), \\
 \omega &= 1 - \mu^2\frac{1}{144} - \mu^3\frac{\pi}{864} + \mu^4\left(\frac{145}{248832} - \frac{\pi^2}{5184}\right). & (6.38)
 \end{aligned}$$

Die Zwischenrechnungen werden hier sehr aufwendig. Das Endergebnis jedoch läßt sich durch die Näherungen (2.89), (2.90) beträchtlich vereinfachen. So bestimmt sich der kritische Kontrollparameter  $\mu_c$  als Lösung des Polynoms

$$1 - \frac{4}{3}\mu - \frac{8}{27}\mu^2 - \frac{29}{216}\mu^3 - \mu^4\left(\frac{799}{8748} + \frac{\pi}{972} - \frac{\sqrt{3}}{729}\right) = 0 \quad (6.39)$$

zu

$$\mu_c = 0.627. \quad (6.40)$$



Vergleicht man die durch (2.89), (2.90) gewonnenen Floquet-Exponenten mit der Numerik, so erhält man ein Ergebnis, das bereits besser ist als das ( bei noch vertretbarer Rechenzeit ermittelte ) numerische Resultat.

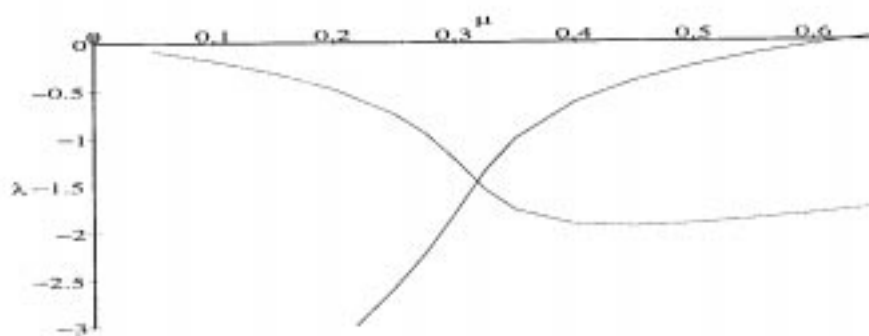


Abbildung 6.7: Bestimmung der Floquet-Exponenten  $\lambda_i$  aus der transzendenten Eigenwertgleichung

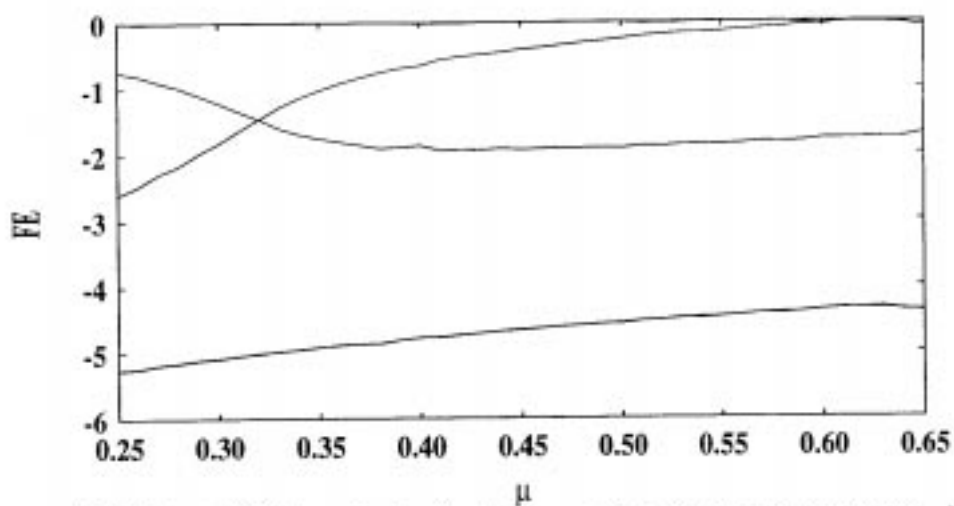


Abbildung 6.8: Numerische Bestimmung der Floquet-Exponenten  $\lambda_i$   
(Mit freundlicher Genehmigung von M.Schanz)

# Kapitel 7

## Zusammenfassung und Ausblick

Ziel der Diplomarbeit war es, den Einfluß endlicher Signallaufzeiten auf das dynamische Verhalten nichtlinearer Systeme theoretisch und numerisch zu untersuchen. Hierbei sind vor allem verzögerungsinduzierte Instabilitäten von Bedeutung, die selbst in einfachen Systemen eine reiche Vielfalt von verschiedenartigen Verhaltensweisen erzeugen können. Diese umfassen sowohl geordnete und niedrig-dimensionale chaotische Phasen als auch hochdimensionale turbulente Zustände. Um das dynamische Verhalten in der Umgebung solcher Instabilitäten analytisch zu untersuchen, bietet es sich an, den bei vielen dynamischen Systemen erfolgreichen synergetischen Formalismus [1, 2] auch auf zeitlich verzögerte Systeme zu übertragen. Im Falle einer stationären Instabilität wurden hierzu vor kurzen erste Erfolge erzielt [8, 9]. Deshalb bestand die Aufgabe darin, diesen Formalismus auf höhere Instabilitäten auszuweiten.

Die Behandlung zeitabhängiger Referenzzustände erfordert schon im einfachsten Fall die Entwicklung einer Floquet-Theorie für Systeme mit zeitlicher Verzögerung. Stokes [20] zeigte, daß eine Floquet-Darstellung der Lösungen existiert, bei der das Langzeitverhalten wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen durch Floquet-Exponenten bestimmt ist. Durch Hale [5, 6] und Kolmanovskii [26] wurde eine explizite Darstellung der Floquet-Eigenlösungen für solche Fälle gefunden, bei denen die Verzögerung gerade einem ganzzahligen Vielfachen der Periodendauer entspricht. Im Rahmen der vorliegenden Diplomarbeit wurde nun eine Floquet-Theorie für allgemeine zeitliche Verzögerungen entwickelt.

Dazu mußten zunächst durch eine Verallgemeinerung der Verfahren bei gewöhnlichen Differentialgleichungen die Methoden zur Bestimmung periodischer Referenzzustände erweitert werden [15, 17].

Die Übertragung eines bei gewöhnlichen Differentialgleichungen verwendeten Verfahrens (Risken [19]) auf den Fall retardierter Funktionaldifferentialgleichungen, führte dann auf einen Formalismus, der es ermöglicht, eine explizite Darstellung der Lösungen in Form von Floquet-Eigenlösungen auch für Systeme mit beliebiger zeitlicher Verzögerung anzugeben.

Es konnte weiterhin über die Definition einer explizit zeitabhängigen Bilinearform

[5, 6] ein Projektorformalismus eingeführt werden, der eine Beschreibung dieser Systeme in Form von verallgemeinerten Modenamplitudengleichungen ermöglicht.

Aus Zeitmangel war es jedoch nicht möglich einen Formalismus abzuleiten, der über die Anwendung der Theorie der zentralen Mannigfaltigkeit eine Reduktion dieser Modenamplitudengleichungen auf einen endlich dimensional Satz von Ordnungsparametergleichungen gestattet.

Das entwickelte Verfahren wurde auf einen zeitlich verzögerten Phasenregelkreis (PLL) sowie auf einen verallgemeinerten Van-der-Pol Oszillator angewendet. Die dabei erhaltenen Ergebnisse stimmen dabei sowohl mit früheren Veröffentlichungen (periodischer Orbit von PLL [8, 9] und Van-der-Pol [13]) als auch mit den numerisch ermittelten Resultaten (periodischer Orbit und Floquetexponenten) sehr gut überein. Neu gefunden wurde dabei außer den Floquet-Exponenten bzw. Floquet-Eigenlösungen eine bisher nicht beachtete Instabilität beim retardierten PLL.

Das Anwendungsspektrum des Verfahrens umfaßt Systeme mit relevanter zeitlicher Verzögerung, die durch Delay-Differentialgleichungen modelliert werden können( z.B das Mackey-Glass System ), als auch beispielsweise die Kontrolle chaotischen Verhaltens durch eine zeitlich rückgekoppelte Störung [21, 22, 23]. Die Störung

$$S = k(q(t - \tau) - q(t)) \quad (7.1)$$

bewirkt dabei eine Stabilisierung eines instabilen periodischen Orbits im chaotischen Attraktor. Die zeitliche Verzögerung  $\tau$  wird dabei gerade so gewählt, daß sie der Periodendauer des zu stabilisierenden Orbits entspricht.

# Anhang A

## Shohat-Entwicklung beim PLL

Die hier durchgeführte Nebenrechnung führt auf das Ergebnis (5.4). Durch die Umkehrrelation von (2.32) erhält man die Entwicklung der zeitlichen Verzögerung in Abhängigkeit vom Kleinheitsparameter  $\rho$ :

$$\tau = \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2} \tau_c + \tau_c \quad (\text{A.1})$$

$$= \tau_c + \tau_c \rho^2 + 2\tau_c \rho^3 + 3\tau_c \rho^4 + \dots \quad (\text{A.2})$$

In 1. Ordnung des Kleinheitsparameters ergibt sich nun mit den Entwicklungen (A.1), (2.24), (2.25), (2.26), (2.29):

$$q_0(\xi) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Die 2. Ordnung führt auf eine Delaydifferentialgleichung der Form

$$(\omega_0 \dot{q}_1(\xi) + k q_1(\xi - \omega_0 \tau_c)) \rho^2 = 0. \quad (\text{A.4})$$

Um die Gleichung zu lösen macht man den Ansatz

$$q_1(\xi) = C e^{i\Lambda \xi}, \quad (\text{A.5})$$

und fordert das jeweilige Verschwinden des Real bzw. Imaginärteils:

$$0 = \rho^2 k \cos(\Lambda \Omega_0 \tau_c) \quad (\text{A.6})$$

$$\rho^2 \Omega_0 \Lambda = \rho^2 k \sin(\Lambda \Omega_0 \tau_c) \quad (\text{A.7})$$

Hierdurch ergeben sich folgende Bedingungen für die Parameter  $\Omega_0$ ,  $\Lambda$ ,  $\tau_c$ :

$$\Omega_0 \Lambda \tau_c = (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad (\text{A.8})$$

$$\Lambda = \pm \frac{k}{\Omega_0} \quad (\text{A.9})$$

Definiert man  $\Omega_0$  zu

$$\Omega_0 = k, \quad (\text{A.10})$$

und wählt als Anfangsbedingungen

$$q(0) = q_0(0) + \rho q_1(0) + \rho^2 q_2(0), \quad (\text{A.11})$$

so ist die Lösung der Gleichung (A.4) vollständig bestimmt:

$$\Lambda = 1, \quad (\text{A.12})$$

$$\tau_c = \frac{\pi}{2k}, \quad (\text{A.13})$$

$$q_1(\xi) = A_1 \sin(\xi). \quad (\text{A.14})$$

In 3.Ordnung ergibt sich

$$\begin{aligned} & \rho^3 \left( k\ddot{q}_2(\xi) + kq_2(\xi - \frac{\pi}{2}) + \right. \\ & \left. + A_1 \cos(\xi) (\Omega_1 - k) - \frac{1}{2} A_1 \pi \sin(\xi) (\Omega_1 - k) \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Die Elimination der Säkularterme über (2.19), (2.20) liefert

$$\Omega_1 = k \quad (\text{A.16})$$

Da die Gleichung (A.15) damit die Struktur der Delaydifferentialgleichung (A.4) besitzt, ist die Lösung von (A.15) durch

$$q_2(\xi) = A_2 \sin(\xi) \quad (\text{A.17})$$

gegeben. Die Auswertung der 4.Ordnung des Gleichungssystems liefert

$$\begin{aligned} & \rho^4 \left( k\ddot{q}_3(\xi) + kq_3(\xi - \frac{\pi}{2}) + \frac{A_1}{8} \cos(\xi) (8\Omega_2 - 8k + kA_1^2) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} A_1 \pi \sin(\xi) \Omega_2 + \frac{1}{24} k A_1^3 \cos(3\xi) \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Eine Elimination der Säkularterme bestimmt die Größen  $\Omega_2$ ,  $A_1$  zu

$$\Omega_2 = 0, \quad (\text{A.19})$$

$$A_1 = 2\sqrt{2}. \quad (\text{A.20})$$

Mit dem Ansatz

$$q_3(\xi) = A_3 \sin(\xi) + C \sin(3\xi) \quad (\text{A.21})$$

läßt sich nun Gleichung (A.18) lösen. Nach Einsetzen in (A.18) ergibt sich als Bedingung für eine Lösung

$$\frac{2}{3}\rho^4 k \cos(3\xi) (6C + \sqrt{2}) = 0, \quad (\text{A.22})$$

$$C = -\frac{1}{6}\sqrt{2}. \quad (\text{A.23})$$

Die 5.Ordnung führt auf

$$\begin{aligned} & \rho^5 \left( k\dot{q}_4(\xi) + kq_4(\xi - \frac{\pi}{2}) + 2\cos(\xi) (kA_2 + \Omega_3\sqrt{2}) - \right. \\ & \left. - \sqrt{2}\pi \sin(\xi) (2k + \Omega_3) + kA_2 \cos(3\xi) \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Durch Elimination der Säkularterme erhält man

$$\Omega_3 = -2k, \quad (\text{A.25})$$

$$A_2 = 2\sqrt{2}. \quad (\text{A.26})$$

Als Lösungsansatz für (A.24) wählt man

$$q_4(\xi) = A_4 \sin(\xi) + C \sin(3\xi). \quad (\text{A.27})$$

Die Konstante  $C$  bestimmt sich dadurch zu

$$C = -\frac{1}{2}\sqrt{2}. \quad (\text{A.28})$$

Die 6.Ordnung des Gleichungssystems führt auf

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^6}{10} \left( k\dot{q}_5(\xi) + kq_5(\xi - \frac{\pi}{2}) + \cos(\xi) (20\Omega_4\sqrt{2} + 55k\sqrt{2} + 20kA_3) + \right. \\ & + \sqrt{2}\pi \sin(\xi) (10\sqrt{2}\Omega_4\pi + 40\sqrt{2}k\pi) + \cos(3\xi) (25k\sqrt{2} + 10kA_3) + \\ & \left. + k\sqrt{2} \cos(5\xi) \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Die Elimination der Säkularterme ergibt

$$\Omega_4 = -4k, \quad (\text{A.30})$$

$$A_3 = \frac{5}{4}\sqrt{2}. \quad (\text{A.31})$$

Zusammengefaßt ergibt sich das Ergebnis (5.4).

## Anhang B

# Averaging beim Van-der-Pol Oszillator mit zeitlicher Verzögerung

Das hier vorgestellte Verfahren des Averaging [5, 6, 13] läßt sich direkt im erweiterten Zustandsraum beschreiben. Zur Verdeutlichung wird daher zunächst der erweiterte Zustandsraum im Falle autonomer Systeme betrachtet.

### B.1 Autonomer Fall

Als Ausgangsgleichung dient wieder die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\vec{q}(t) = \vec{N}(\vec{q}(t), \vec{q}(t - \tau), \{\sigma_i\}). \quad (\text{B.1})$$

Der linearisierte infinitesimale Generator  $\mathcal{A}_L$  ergibt sich nun als Spezialisierung des nichtautonomen Falles zu

$$\frac{d}{dt}\vec{q}_i(\theta) = (\mathcal{A}_L \vec{q}_i)(\theta), \quad (\text{B.2})$$

wobei der Generators  $\mathcal{A}_L$  die Form

$$(\mathcal{A}_L \vec{q}_i)(\theta) = \begin{cases} \frac{d}{d\theta}\vec{q}_i(\theta) & -\tau \leq \theta < 0 \\ \int_{-\tau}^{\theta} d\theta \Omega(\theta) \vec{q}_i(\theta) & \theta = 0 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

besitzt. Die matrixwertige Dichte  $\Omega$  ist dabei nicht mehr explizit zeitabhängig.

#### B.1.1 Adjungiertes Problem und Bilinearform

Im autonomen Fall reduziert sich die Bilinearform (3.1) auf

$$\langle \vec{\psi}^\dagger, \vec{\phi} \rangle = \langle \vec{\psi}^\dagger(0), \vec{\phi}(0) \rangle - \int_{-\tau}^0 d\theta \int_0^\theta ds \langle \vec{\psi}^\dagger(s - \theta), \omega(\theta) \vec{\phi}(s) \rangle. \quad (\text{B.4})$$

Die Bewegungsgleichung im dualen erweiterten Zustandsraum ergibt sich damit zu

$$\frac{d}{dt}\vec{q}_i^\dagger(s) = -(\mathcal{A}_L^\dagger \vec{q}_i^\dagger)(s), \quad 0 \leq s \leq \tau. \quad (\text{B.5})$$

Im Unterschied zum nichtautonomen Fall ist der duale infinitesimale Generator nun jedoch durch

$$(\mathcal{A}_L^\dagger \vec{q}_i^\dagger)(s) = \begin{cases} -\frac{d}{ds}\vec{q}_i^\dagger(s) & -\tau \leq s < 0 \\ \int_{-\tau}^0 ds \Omega(s) \vec{q}_i^\dagger(s) & s = 0 \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

gegeben. Die Normalisierungskonstante  $N_\lambda$  kann durch

$$N_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\langle \vec{\psi}^\dagger \lambda_N(0), [I - \int_{-\tau}^0 d\theta \theta \omega(\theta) e^{\lambda\theta}] \vec{\phi}_N^\lambda(0) \rangle}} \quad (\text{B.7})$$

festgelegt werden.

### B.1.2 Projektoren im autonomen Fall

Die Projektoren auf die jeweiligen Unterräume sind wie im nichtautonomen Fall durch (4.3) bzw (4.4) gegeben.

### B.1.3 Aufspaltung

Die Methode des Averaging soll anhand des bereits behandelten Beispiels des Van-der-Pol Oszillator mit zeitlicher Verzögerung (6.1) vorgestellt werden, dessen Modellgleichung die Form

$$\ddot{x}(t) + \mu(x^2(t-\tau) - 1)\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (\text{B.8})$$

besitzt. Durch die Transformation (6.10), (6.11) erhält man daraus das Differentialgleichungssystem 1.Ordnung

$$\dot{q}_1(t) = q_2(t), \quad (\text{B.9})$$

$$\dot{q}_2(t) = -\omega_0^2 q_1(t) - \mu(q_1^2(t-\tau) - 1)q_2(t). \quad (\text{B.10})$$

Man spaltet nun das nichtlineare Funktional  $\mathcal{N}[\vec{q}_i(\cdot)]$  durch

$$\mathcal{N}[\vec{q}_i(\cdot)] = \mathcal{L}[\vec{q}_i(\cdot)] + \mu \tilde{\mathcal{N}}[\vec{q}_i(\cdot)], \quad (\text{B.11})$$

in den durch  $\mu$  gestörten Anteil  $\tilde{\mathcal{N}}$  bzw. ungestörten Anteil  $\mathcal{L}$  durch

$$\mathcal{L}[\vec{q}_i(\cdot)] = \int_{-\tau}^0 d\theta \Omega(\theta) \vec{q}_i(\theta), \quad (\text{B.12})$$

$$\tilde{\mathcal{N}}[\vec{q}_i(\cdot)] = \begin{pmatrix} 0 \\ q_{2i}(0)(1 - q_{1i}^2(-\tau)) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.13})$$



auf. Die Dichte  $\Omega(\theta)$  ist dabei durch die Auswertung der Funktionalableitung von  $\mathcal{N}$  an der Stelle  $\vec{q}_t^0 = 0$  festgelegt. Sie ergibt sich zu

$$\Omega(\theta) = \delta(\theta) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

### B.1.4 Das ungestörte Problem

Mit dem auf den autonomen Fall spezialisierten Ansatz

$$\vec{q}_t(\theta) = \vec{\phi}^\lambda(\theta) e^{\lambda t}, \quad \tau \leq \theta \leq 0, \quad (\text{B.15})$$

erhält man für den infinitesimalen Generator  $\mathcal{A}$  im ungestörten Fall das folgende Eigenwertproblem

$$(\mathcal{A}_c \vec{\phi}^\lambda)(\theta) = \lambda \vec{\phi}^\lambda, \quad \tau \leq \theta \leq 0. \quad (\text{B.16})$$

Wertet man dieses Eigenwertproblem in dem Intervall  $[-\tau, 0)$  aus, so ergibt sich für die Eigenfunktionen  $\vec{\phi}^\lambda$

$$\vec{\phi}^\lambda(\theta) = \vec{\phi}^\lambda(0) e^{\lambda \theta}, \quad \tau \leq \theta < 0. \quad (\text{B.17})$$

Die Eigenwerte werden dann durch die Anschlußbedingung (B.3) an der Stelle  $\theta = 0$  festgelegt, die zu folgender Eigenwertgleichung führt

$$L(\lambda) \vec{\phi}^\lambda(0) = \lambda \vec{\phi}^\lambda(0), \quad (\text{B.18})$$

$$L(\lambda) = \int_{-\tau}^0 d\theta \Omega(\theta) e^{\lambda \theta}. \quad (\text{B.19})$$

Fordert man das Verschwinden der Koeffizientendeterminante so erhält man die nichttrivialen Lösungen  $\lambda_i$

$$\det(L(\lambda) - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_0^2 & -\lambda \end{pmatrix} \quad (\text{B.20})$$

$$= \lambda^2 + \omega_0^2 \quad (\text{B.21})$$

als Lösung der charakteristischen Gleichung zu

$$\lambda_{\pm} = \pm i\omega_0. \quad (\text{B.22})$$

Die zugehörigen Eigenfunktionen  $\vec{\phi}^{\lambda_{\pm}}(\theta)$ ,  $-\tau \leq \theta \leq 0$  bestimmen sich damit zu

$$\vec{\phi}^{\lambda_+}(\theta) = N_{\lambda_+} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{i\omega_0}{2} \end{pmatrix} e^{i\omega_0 \theta}, \quad (\text{B.23})$$

$$\vec{\phi}^{\lambda_-}(\theta) = N_{\lambda_-} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-i\omega_0}{2} \end{pmatrix} e^{-i\omega_0 \theta}. \quad (\text{B.24})$$

Für das adjungierte Eigenwertproblem

$$\vec{\psi}^{\dagger\lambda\pm}(0) (L(\lambda_{\pm}) - \lambda_{\pm} I) = \vec{0}, \quad (\text{B.25})$$

nehmen die Eigenfunktionen  $\vec{\psi}^{\dagger\lambda+}(s)$ ,  $0 \leq s \leq \tau$  folgende Form an :

$$\vec{\psi}^{\dagger\lambda+}(s) = N_{\lambda+} \left(1, \frac{-i}{\omega_0}\right) e^{-i\omega_0 s} \quad (\text{B.26})$$

$$\vec{\psi}^{\dagger\lambda-}(s) = N_{\lambda-} \left(1, \frac{i}{\omega_0}\right) e^{i\omega_0 s}. \quad (\text{B.27})$$

Aus den Biorthnormalitätsrelationen ergibt sich mit

$$\int_{-\tau}^0 d\theta e^{\lambda\theta} \theta \Omega(\theta) = 0, \quad (\text{B.28})$$

für die Normierungskonstanten  $N_{\lambda_{\pm}}$

$$N_{\lambda+} = 1 \quad N_{\lambda-} = 1. \quad (\text{B.29})$$

In Matrixform nehmen die Eigenfunktionen dann die Form

$$\Phi_{\mathbf{v}}(\theta) = \left( \vec{\phi}^{\lambda+}(\theta), \vec{\phi}^{\lambda-}(\theta) \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{i\omega_0 \theta} & \frac{1}{2} e^{-i\omega_0 \theta} \\ \frac{i\omega_0}{2} e^{i\omega_0 \theta} & -\frac{i\omega_0}{2} e^{-i\omega_0 \theta} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.30})$$

$$\Psi_{\mathbf{u}}^{\dagger}(s) = \begin{pmatrix} \vec{\psi}^{\dagger\lambda+}(s) \\ \vec{\psi}^{\dagger\lambda-}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 s} & \frac{-i}{\omega_0} e^{-i\omega_0 s} \\ e^{i\omega_0 s} & \frac{i}{\omega_0} e^{i\omega_0 s} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.31})$$

an.

### B.1.5 Das gestörte Problem

Wir spalten nun den erweiterten Zustandsvektor auf in die beiden Anteile

$$\vec{q}_t(\theta) = \vec{U}_t(\theta) + \vec{S}_t(\theta) \quad (\text{B.32})$$

wobei  $S_t(\theta)$  von der Ordnung  $\mu$  sein soll. Mit obigen Gleichungen nimmt die nicht-lineare Gleichung im erweiterten Zustandsraum folgende Form an:

$$\frac{d}{dt} \vec{q}_t(\theta) = (\mathcal{A}_C \vec{q}_t)(\theta) + \mu X_0(\theta), \tilde{\mathcal{N}}[\vec{q}_t(\cdot)], \quad -\tau \leq \theta \leq 0, \quad (\text{B.33})$$

wobei

$$X_0(\theta) = \begin{cases} 0 & : -\tau \leq \theta < 0 \\ 1 & : \theta = 0 \end{cases} \quad (\text{B.34})$$

eine matrixwertige Funktion darstellt. Die Projektion auf das ungestörte Problem erfolgt nun über die Anwendung der Projektoren (4.3), (4.4):

$$\vec{U}_i(\theta) = \Phi_u(\theta)\vec{u}(t). \quad (\text{B.35})$$

Man erhält so das gekoppelte System von gestörten und ungestörten Zustandsvektoren

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{u}(t) &= \Lambda_u\vec{u}(t) + \mu \langle \Psi_u^\dagger(0), \tilde{\mathcal{N}}[\Phi_u(\cdot)\vec{u}(t) + \vec{s}_i(\cdot)] \rangle \\ \frac{d}{dt}\vec{s}_i(\theta) &= (\mathcal{A}_c\vec{s}_i)(\theta) + \mu \langle [X_0(\theta) - \Phi_u(\theta)\Psi_u^\dagger(0)], \tilde{\mathcal{N}}[\Phi_u(\cdot)\vec{u}(t) + \vec{s}_i(\cdot)] \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Der Formalismus entspricht durchgehend dem Verfahren in Kapitel 2. Der Unterschied besteht darin, daß hier die Projektoren nicht auf die stabilen bzw. instabilen, sondern auf die zum gestörten bzw. ungestörten Problem gehörigen Unterräume projizieren.

### Störungsterme 1.Ordnung in $U_i(\theta)$

Mit der Beschränkung auf die 1.Ordnung in  $\mu$  nimmt (B.36) folgende Form an :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u(t) \\ u^*(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i\omega_0 & 0 \\ 0 & -i\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ u^*(t) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 & \frac{-i}{\omega_0} \\ 1 & \frac{i}{\omega_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\mathcal{N}}_2[u(t), u^*(t)] \end{pmatrix}, \\ \frac{d}{dt}u(t) &= i\omega_0 u(t) + \frac{\mu}{i\omega_0} \tilde{\mathcal{N}}_2[u(t), u^*(t)]. \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Der gestörte Term läßt sich in dieser ersten Näherung über

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{N}}_2[\cdot] &= q_{21}(0)(1 - q_{11}(-\tau)^2) \\ &= \frac{i\omega_0}{2} ((u(t) - u^*(t)) \left( 1 - \left( \frac{1}{2}e^{-i\omega_0\tau}u(t) + \frac{1}{2}e^{i\omega_0\tau}u^*(t) \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

ausdrücken.

### B.1.6 Averaging

Die Ausgangsgleichung des Averaging nimmt damit folgende Form an :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) &= i\omega_0 u(t) + \frac{\mu}{2} (u(t) - u^*(t)) * \\ &\quad \left( 1 - \left( \frac{1}{2}e^{-i\omega_0\tau}u(t) + \frac{1}{2}e^{i\omega_0\tau}u^*(t) \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Mit dem Ansatz  $u(t) = r(t)e^{i\omega\phi(t)}$  ergibt sich nach der Trennung in Real -bzw. Imaginärteil :

$$\begin{aligned} \dot{r} = & \mu r \left( 1 - \cos^2(\omega_0\phi) + r^2 \left( \sin(2\omega_0\tau) \left( \sin(\omega_0\phi) \cos^3(\omega_0\phi) - \right. \right. \right. \quad (\text{B.40}) \\ & \left. \left. \left. - \sin(\omega_0\phi) \cos(\omega_0\phi) \right) + \cos^2(\omega_0\tau) \left( 1 + 2 \cos^4(\omega_0\phi) - 3 \cos^2(\omega_0\phi) \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \cos^2(\omega_0\phi) - \cos^4(\omega_0\phi) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} = & 1 + \frac{\mu}{2\omega_0} \sin(2\omega_0\phi) - \frac{\mu r^2}{\omega_0} \left( \sin(2\omega_0\tau) (\cos^4(\omega_0\phi) - \cos^2(\omega_0\phi)) - \right. \quad (\text{B.41}) \\ & \left. - \cos(2\omega_0\tau) \sin(\omega_0\phi) \cos^3(\omega_0\phi) + \sin(\omega_0\phi) \cos(\omega_0\phi) (\cos^2(\omega_0\tau) - 1) \right). \end{aligned}$$

Durch eine Koordinatentransformation  $\tilde{r} = r + \mu h(r, \phi)$  läßt sich das  $2\pi$ -periodische Differentialgleichungssystem  $(\dot{r}, \dot{\phi})$

$$\dot{r} = \mu g(r, \phi, \mu), \quad \dot{\phi} = 1 + \mu f(r, \phi, \mu) \quad (\text{B.42})$$

auf ein System  $(\dot{\tilde{r}}, \dot{\phi})$  abbilden, das in  $\tilde{r}$  lösbar ist. Hierzu zerlegen wir die Funktion  $g(r, \phi, \mu)$  in

$$g(\tilde{r}, \phi, \mu) = \bar{g}(\tilde{r}, \mu) + \tilde{g}(\tilde{r}, \phi, \mu), \quad (\text{B.43})$$

wobei  $\bar{g}(\tilde{r}, \mu)$ , bzw.  $\tilde{g}(\tilde{r}, \phi, \mu)$  die Eigenschaft

$$\bar{g}(\tilde{r}, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi g(\tilde{r}, \phi, \mu), \quad \int_0^{2\pi} \tilde{g}(\tilde{r}, \phi, \mu) = 0, \quad (\text{B.44})$$

besitzen soll. Wählt man  $\tilde{g} = -\frac{\partial h}{\partial \phi}$  so erhält man mit Hilfe der Koordinatentransformation

$$\dot{\tilde{r}} = \mu \bar{g}(\tilde{r}, \mu). \quad (\text{B.45})$$

Angewandt auf die Ausgangsgleichung ergibt sich also :

$$\dot{\tilde{r}} = \frac{\mu \tilde{r}}{2} \left( 1 - \frac{\tilde{r}^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \cos(2\omega_0\tau) \right) \right) \quad (\text{B.46})$$

Die stationäre Lösung lautet damit

$$\tilde{r}_s = \sqrt{\frac{2}{1 - \frac{1}{2} \cos(2\omega_0\tau)}}. \quad (\text{B.47})$$

Es läßt sich nun über die zugehörige Umkehrabbildung  $r_s = \tilde{r}_s - \mu h(\tilde{r}_s, \phi)$  eine Korrektur in  $\mu$  finden . Mit

$$h(\tilde{r}_s, \phi) = - \int_0^\phi \tilde{g}(\tilde{r}_s, \xi) d\xi \quad (\text{B.48})$$

läßt sich  $r_s$  bestimmen zu

$$r_s = \sqrt{\frac{2}{1 - \frac{1}{2} \cos(2\omega_0\tau)}} + \frac{\mu}{2\omega_0 \left[1 - \frac{1}{2} \cos(2\omega_0\tau)\right]^{3/2}} + \left(\sin(2\omega_0\tau) \left[-1 + 2 \cos^2(\omega_0\phi) - \cos^4(\omega_0\phi)\right] + \cos(2\omega_0\tau) \left[\cos^3(\omega_0\phi) \sin(\omega_0\phi) - \cos(\omega_0\phi) \sin(\omega_0\phi)\right]\right). \quad (\text{B.49})$$

Setzt man in der Gleichung für die Phase  $\phi = \phi_0 + \mu\phi_1$ ,  $r = r_s$  und integriert über die jeweiligen Ordnungen so erhält man

$$\phi = \left(1 - \frac{\mu \sin(2\omega_0\tau)}{4\omega_0(1 - \frac{1}{2} \cos(2\omega_0\tau))}\right) t + \frac{\mu}{4\omega_0(1 - \frac{1}{2} \cos(2\omega_0\tau))} \left(\cos(2\omega_0\tau) \left[2 \cos^4(\omega_0 t) - 1 - \cos^2(\omega_0 t)\right] + \sin(2\omega_0\tau) \left[2 \cos^3(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t)\right]\right). \quad (\text{B.50})$$

Zu beachten ist hier die auftretende Frequenznormierung. Die Zustandsvektoren  $q_i$  nehmen hier folgende Form an

$$q_1(t) = q_{1r}(0) \quad (\text{B.51})$$

$$= \Phi_{u1k}(0) \vec{u}_k(t) \quad (\text{B.52})$$

$$= \cos(\omega_0\phi(t)) r_s(t) \quad (\text{B.53})$$

$$q_2(t) = q_{2r}(0) \quad (\text{B.54})$$

$$= \Phi_{u2k}(0) \vec{u}_k(t) \quad (\text{B.55})$$

$$= -\omega_0 \sin(\omega_0\phi(t)) r_s(t) \quad (\text{B.56})$$

Man hat nun die jeweiligen 1. Ordnungen  $\mu$  in  $\phi$  und  $r_s$  zu berücksichtigen. Trägt man weiterhin der Frequenznormierung über

$$\tilde{t} = \left(1 - \frac{\mu \sin(2\omega_0\tau)}{4\omega_0(1 - \frac{1}{2} \cos(2\omega_0\tau))}\right) t, \quad (\text{B.57})$$

Rechnung so nimmt die Lösung die Form

$$q_1(\tilde{t}) = \sqrt{\frac{2}{1 - \frac{1}{2} \cos(2\omega_0\tau)}} \cos(\omega_0\tilde{t}) + \frac{\mu}{8\omega_0\sqrt{2} \left[1 - \frac{1}{2} \cos(2\omega_0\tau)\right]^{3/2}} \left(\sin(2\omega_0\tau) \left[\cos(3\omega_0\tilde{t}) - \cos(\omega_0\tilde{t})\right] + \cos(2\omega_0\tau) \left[3 \sin(\omega_0\tilde{t}) - \sin(3\omega_0\tilde{t})\right]\right) \quad (\text{B.58})$$

an.

### Störungsterme 1.Ordnung in $S_i(\theta)$

Um die Störungsterme in  $s_i(\theta)$  zu erhalten macht man nun den Ansatz

$$\vec{s}_i(\theta) = \vec{h}(\theta, \vec{u}(t)). \quad (\text{B.59})$$

Setzt man diese Bestimmungsgleichung in die gekoppelten Zustandsvektorgleichungen ein, und beschränkt sich wiederum auf die 1.Ordnung in  $\mu$ , so ergibt sich

$$\frac{d\vec{h}(\theta, \vec{u}(t))}{du} \left[ \Lambda_u \vec{u}(t) + \mu \left\langle \Psi_u^\dagger(0), \tilde{\mathcal{N}}[\Phi_u(\cdot) \vec{u}(t) + \vec{h}(\cdot, \vec{u}(t))] \right\rangle \right] = \quad (\text{B.60})$$

$$= \left( \mathcal{A}_C \vec{h}(\cdot, \vec{u}(t)) \right) (\theta) + \\ + \mu \left\langle \left[ X_0(\theta) - \Phi_u(\theta) \Psi_u^\dagger(0) \right], \tilde{\mathcal{N}}[\Phi_u(\cdot) \vec{u}(t) + \vec{h}(\cdot, \vec{u}(t))] \right\rangle. \quad (\text{B.61})$$

Zur Bestimmung der Mannigfaltigkeit  $\vec{h}(\theta, \vec{u}(t))$  in 1.Ordnung ist es daher ausreichend sich auf das genäherte Funktional

$$\tilde{\mathcal{N}}_i[\Phi_u \vec{u}(t) + \vec{h}(\cdot, \vec{u}(t))] \approx \tilde{\mathcal{N}}_i[\Phi_u(\cdot) \vec{u}(t)] \quad (\text{B.62})$$

zu beschränken. Benutzt man hier die explizite Darstellung und macht den Ansatz

$$h_i(\theta, \vec{u}(t)) \approx H_{ij_1 \dots j_r}(\theta) u_{j_1}(t) \dots u_{j_r}(t), \quad (\text{B.63})$$

so ergibt sich für H in dieser Näherung

$$H_{ij_1 \dots j_r}(\theta) = ([\mathcal{A}_C - (\lambda_{j_1} + \dots + \lambda_{j_r})\mathcal{I}] * \quad (\text{B.64})$$

$$+ [\Phi_u(\cdot) \Psi_u^\dagger(0) - X_0(\cdot)]) \tilde{\mathcal{N}}_{ij_1 \dots j_r}, \\ = \tilde{\mathcal{N}}_{ij_1 \dots j_r} G_{j_1 \dots j_r}(\theta), \quad (\text{B.65})$$

wobei über die  $j_i$  hier nicht zu summieren ist. Die Koeffizienten zu

$$\tilde{\mathcal{N}}_2[\Phi_u(\theta) \vec{u}(t)] = \tilde{\mathcal{N}}_{21} u(t) + \tilde{\mathcal{N}}_{22} u^*(t) + \tilde{\mathcal{N}}_{211} u^3(t) + \\ + \tilde{\mathcal{N}}_{222} u^{*3}(t) + \tilde{\mathcal{N}}_{212} u(t) u^{*2}(t) + \tilde{\mathcal{N}}_{2112} u^2(t) u^*(t), \quad (\text{B.66})$$

lassen sich direkt aus der Formulierung im vorigen Abschnitt ablesen. Die Wichtungstensoren  $G_{j_1 \dots j_r}$  nehmen folgende Form an (s. W.Wischert [8, 9]):

$$G_{j_1 \dots j_r} = \left[ \Phi_u(\theta) [\Lambda_u - \lambda \mathcal{I}]^{-1} \Psi_u^\dagger(0) - [L(\lambda) - \lambda \mathcal{I}]^{-1} e^{\lambda \theta} \right]_{\lambda = \lambda_{j_1} + \dots + \lambda_{j_r}}. \quad (\text{B.67})$$

Beim Auswerten obiger Gleichung hat man gegebenenfalls einen Grenzübergang  $\epsilon \rightarrow 0$  für  $\lambda = \pm i\omega + \epsilon$  durchzuführen, um die jeweils auftretenden Singularitäten zu eliminieren. Bestimmt man alle Wichtungstensoren, so erhält man nach Auswertung obiger Relationen

$$h(0, u(t), u^*(t)) = 0. \quad (\text{B.68})$$

Durch eine weitere Koordinatentransformation [13, 25] läßt sich das Verfahren auch für höhere Ordnungen durchführen. Der Rechenaufwand ist hier jedoch beträchtlich, so daß das Verfahren in der Praxis von untergeordneter Bedeutung ist.

## Literaturverzeichnis

- [1] H.Haken : Synergetik. Eine Einführung, (Springer, Berlin 1983)
- [2] H.Haken : Advanced Synergetics, (Springer, Berlin 1983)
- [3] L.Glass ,A. Beuter , and D. Larocque : 'Time Delays, Oscillations, and Chaos in Physiological Systems' in 'Nonlinearity in Biology and Medicine ( Eds. A.S. Perelson, B. Goldstein, M.Dembo and J.A. Jadquez), (Elsevier, New York 1988)
- [4] M. Le Berre ,Y.Pomeau, E.Ressayre , A.Tallet, H.M. Gibbs, D.L Kaplan, and M.J. Rose : 'From Deterministic Chaos to Noise in Retarded Feedback Systems' , in 'Far from Equilibrium Phase Transitions, (Ed. L. Garrido), Proceedings, Sitges, Barcelona
- [5] J.K. Hale : Introduction to Functional Differential Equations 3rd ed., (Springer,
- [6] J.K. Hale : Introduction to Functional Differential Equations 2nd ed., (Springer, New York 1977)
- [7] W.Wischert , A.Wunderlin, A.Pelster, M.Olivier and J.Groslambert : 'Delay induced Instabilities in Nonlinear Feedback Systems' ( Phys.Rev.E, Vol. 49, No.1, 1994)
- [8] W.Wischert : Anwendung synergetischer Konzepte auf Selbstorganisationsprozesse in zeitlich verzögerten Systemen (Shaker, Aachen ,1993)
- [9] W.Wischert, M.Olivier, and J.Groslambert : 'Frequency Instabilities in Phase-Locked Synthesizers Induced by Time Delays', in Proceedings of the 1992 IEEE Frequency Control Symposium, Hershey (1992)
- [10] W.Wischert, M. Olivier, and J. Groslambert : '1/f Cycle Slipping Behaviour in Phase-Locked Loops with Time Delays' , in Proceedings of the 12th International Conference on Noise in Physical Systems and 1/f Fluctuations, St.Louis 1993
- [11] W.Wischert, A.Wunderlin, and A.Pelster : 'On the Theory of Instabilities in Nonlinear Feedback Systems', Proceedings of the 2nd European Congress on System Science, Prague 1993'

- [12] N.Krasovskii : Stability of Motion, Moscow, 1959. Translation, Stanford University Press, 1963
- [13] J.K.Hale : Averaging in Delay-Differential Systems J.Diff.Eq.1968
- [14] Norman MacDonald : Time Lags in Biological Models (Springer Berlin Heidelberg 1978)
- [15] H.C.Morris : Approximate periodic solutions for a delay-differential model of interacting populations (Int. J. Systems Sci. Vol.9 No. 1 1978)
- [16] R.Mickens : Introduction to Nonlinear Oscillations (Cambridge University Press 1981)
- [17] J.Shohat J. Appl. Phys. 15, 568 (1944)
- [18] N.Minorsky : Nonlinear Oscillations, (D.Van Nostrad Company 1962)
- [19] H.Risken : The Fokker-Planck Equation (Springer Berlin 1984)
- [20] A.Stokes : A Floquet theory for functional-differential equations (Proc. Nat. Acad. Sci U.S.A, 48,1330-1334 (1962))
- [21] K.Pyragas : Predictable chaos in slightly perturbed unpredictable chaotic systems (Physics Letters A 181 (1993)
- [22] A.Kittel, J.Parisi,K.Pyragas,R.Richter : Using small continuous-time perturbations to control chaos (Proc. First International Conference on Applied Synergetic and Synergetic Engineering, 1994, Erlangen, Germany)
- [23] Experimental control of chaos by delayed self-controlling feedback (Physics Letters A 180 (1993)
- [24] E.Ott, C.Grebogi and J.A.Yorke : Phys.Rev.Lett. 64 (1990) 1196
- [25] J.Guckenheimer and P.Holmes : Nonlinear oscillations, dynamical Systems, and bifurcations of vector fields (Springer, Berlin 1983)
- [26] Kolmanovskii,Nosov : Stability of Functional Differential Equations, (Academic Press 1986)
- [27] Suzan Yigitbasi : Doktorarbeit Universität Stuttgart 1995