

**Anwendung synergetischer Konzepte auf
Selbstorganisationsprozesse
in zeitlich verzögerten Systemen**

Von der Fakultät Physik der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Wolfgang Wischert

aus Stuttgart

Hauptberichter:	Prof. Dr. A. Wunderlin
Mitberichter:	Prof. Dr. Dr. h.c. W. Weidlich Prof. Dr. M. Olivier (Besançon)
Tag der mündlichen Prüfung:	16. Juli 1993

Institut für Theoretische Physik und Synergetik der
Universität Stuttgart

Reihe Physik

Wolfgang Wischert

**Anwendung synergetischer Konzepte auf
Selbstorganisationsprozesse
in zeitlich verzögerten Systemen**

D 93 (Diss. Univ. Stuttgart)

**Verlag Shaker
Aachen 1993**

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Wischert, Wolfgang:

Anwendung synergetischer Konzepte auf Selbstorganisationsprozesse
in zeitlich verzögerten Systemen / Wolfgang Wischert. -

Aachen : Shaker, 1993

(Reihe Physik)

Zugl.: Stuttgart, Univ., Diss., 1993

ISBN 3-86111-621-9

Copyright Verlag Shaker 1993

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes,
der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der
Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der
Übersetzung, vorbehalten.

Als Manuskript gedruckt. Printed in Germany

ISBN 3-86111-621-9

Verlag Dr. Chaled Shaker, Hubertusstr. 40, 52064 Aachen
Telefon: 0241 / 406351 - Telefax: 0241 / 406354

In liebevoller Erinnerung

an meine Mutter

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	3
Symbolverzeichnis	5
Zusammenfassung	7
1 Einleitung	9
2 Die Methodik der Synergetik	13
3 Erweiterung der synergetischen Konzepte	25
3.1 Einordnung zeitlich verzögerter Systeme in Klassen	26
3.2 Dynamik im unendlich dimensionalen Zustandsraum	29
3.3 Lineare Systeme	33
3.3.1 Stabilitätsanalyse in unendlich dimensionalen Systemen	33
3.3.2 Eigenwertproblem	34
3.3.3 Die charakteristische Gleichung	35
3.3.4 Adjungiertes Eigenwertproblem	37
3.3.5 Biorthonormalitätsrelationen	41
3.4 Projektorformalismus	42

3.4.1	Definition der Projektoren	43
3.4.2	Untersuchung der Projektoren	44
3.5	Das verallgemeinerte Ordnungsparameterkonzept	46
3.5.1	Modenamplitudengleichungen	46
3.5.2	Eliminationsverfahren	47
4	Dynamische Instabilitäten eines zeitlich verzögerten PLL	51
4.1	Herleitung der Modellgleichung	53
4.2	Anwendung des Eliminationsverfahrens	56
4.2.1	Stabilitätsanalyse	56
4.2.2	Ordnungsparametergleichungen	60
4.2.3	Adiabatische Elimination	62
4.3	Experimentelle Untersuchungen	64
4.3.1	Verzögerungsleitungen	65
4.3.2	Oszillatorische Instabilität	66
4.3.3	Chaotische Instabilitäten	74
4.3.4	Das Auftreten von Phasensprüngen	77
5	Diskussion und Ausblick	85
A	Modellgleichung des PLL mit endlicher Bandbreite	87
B	Skalierungseigenschaften der Modellgleichung	90
C	Nichtlineare Stabilitätsanalyse	91
	Literaturverzeichnis	94

Abbildungsverzeichnis

2.1	Schematische Darstellung eines synergetischen Systems	15
2.2	Flächen mit $Re(\lambda_u) = 0$ im Kontrollparameterraum $\{\sigma_i\}$	22
2.3	<i>Bottom up</i> und <i>Top down</i> Zugang der Synergetik	23
3.1	Synergetisches System mit zeitlicher Verzögerung	27
3.2	Übersicht zur Einordnung zeitlich verzögerter Vorgänge in Klassen . . .	28
3.3	Zusammenhang der Lösungskurve $q(t)$ mit dem erweiterten Zustandsvektor $q_t(\Theta)$	30
3.4	Definitionsbereich einer Funktionaldifferentialgleichung	31
3.5	Spektrum einer Delay-Differentialgleichung	42
4.1	Vergleich optisch bistabiler Systeme mit Phasenregelkreisen	52
4.2	Phasenregelkreis 1. Ordnung mit zeitlicher Verzögerung	53
4.3	Spektrum der Modellgleichung bei einer Hopf-Bifurkation	59
4.4	Funktionsprinzip einer analogen Verzögerungsleitung	65
4.5	Charakteristik einer analogen Verzögerungsleitung	66
4.6	Funktionsprinzip einer numerischen Verzögerungsleitung	67
4.7	Synchronisationsbereich eines PLL 1. Ordnung in Abhängigkeit von dem 'open loop gain'	68

4.8	Dynamisches Verhalten eines PLL 1. Ordnung mit zeitlicher Verzögerung	70
4.9	Oszillationsfrequenz eines PLL 1. Ordnung in Abhängigkeit von der zeitlichen Verzögerung	71
4.10	Numerische Untersuchungen der 1. oszillatorischen Instabilität	73
4.11	Chaotisches Verhalten des zeitlich verzögerten PLL	75
4.12	Experimentell beobachtete Instabilitäten des PLL	76
4.13	Numerische Simulationen zum chaotischen Verhalten eines PLL	78
4.14	Versuchsaufbau zum Nachweis von Phasensprüngen	79
4.15	Phasensprünge eines PLL 1. Ordnung ohne zeitliche Verzögerung unter dem Einfluß stochastischer Kräfte	80
4.16	Phasensprünge eines PLL 1. Ordnung mit zeitlicher Verzögerung	82
4.17	Numerische Simulationen zu Phasensprüngen eines PLL 1. Ordnung mit zeitlicher Verzögerung	84
A.1	Phasenregelkreis 1. Ordnung mit numerischer Verzögerungsleitung	87
A.2	Kreisfrequenz der Oszillation in Abhängigkeit von der Bandbreite des Tiefpaßfilters	89
C.1	Amplitudenbestimmung aus nichtlinearer Stabilitätsanalyse	93

Symbolverzeichnis

A	Amplitude des Referenzoszillators
$A (A_L)$	(Linearer) infinitesimaler Generator
B	Amplitude des VCO
b	Parameter der Hopf-Bifurkation
C	Erweiterter unendlich dimensionaler Zustandsraum
\bar{g}	Vektorwertige Anfangsfunktion
$G_{j_1 j_2 j_3}$	Wichtungsfaktor der zentralen Mannigfaltigkeit
H	Koeffizient der zentralen Mannigfaltigkeit
\bar{h}	Zentrale Mannigfaltigkeit
$I (\mathcal{I})$	Einheitsmatrix (-operator)
J_i	Besselfunktionen
K	Open loop gain
K_1	Empfindlichkeit des VCO
L	Matrix des linearen Systems
\mathcal{L}	Lineares Funktional
M	Amplitude der instabilen Mode
\bar{N}, \tilde{N}	Nichtlineares Vektorfeld
$\mathcal{N}, \tilde{\mathcal{N}}$	Nichtlineares Funktional
N_λ	Normierungskonstante
\mathcal{P}_u	Projektor
$\bar{q} (\bar{q}_i)$	(Erweiterter) Zustandsvektor
Q_u	Projektor
\mathcal{U}	Unterraum der Ordnungsparameter
\bar{u}	Ordnungsparameter

S	Unterraum der stabilen Moden
\vec{s} (\vec{s}_t)	(Verallgemeinerte) stabile Moden
T (T_L)	(Linearer) Lösungsoperator
$w^{(i)}$	Dichteverteilung
X_0	Matrixwertige Stufenfunktion
y_i	Signalspannungen
β	Charakteristische Konstante des Phasendetektors
γ	Realteil des Eigenwertes
Γ	Zustandsraum
Θ	Phase des Referenzsignals
Λ_u, Λ_s	Eigenwertmatrizen
λ	Eigenwert
μ	Empfindlichkeit des Phasendetektors
$\Delta\nu$	Bandbreite des Tiefpaßfilters
σ_i	Kontrollparameter
τ, τ'	Zeitliche Retardierung
τ_i, τ_u, τ_s	Relaxationszeiten
ξ_i	Modenamplituden
ϕ	Phasenfehlersignal
Φ_u	Matrix der instabilen Eigenfunktionen
ϕ^λ	Eigenfunktionen
Ψ	Phase des VCO
Ψ_u	Matrix der adjungierten instabilen Eigenfunktionen
ψ^{λ}	Adjungierte Eigenfunktionen
Ω	Imaginärteil der Eigenwerte
ω (ω_0)	Zentrale Kreisfrequenz des VCO (Referenzoszillators)
$\Delta\omega$	Äußere Frequenzverschiebung
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Kanonisches Skalarprodukt
(\cdot, \cdot)	Verallgemeinerte Bilinearform

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich sowohl mit der theoretischen als auch experimentellen Untersuchung des Einflusses zeitlicher Retardierungen auf die dynamischen Eigenschaften nichtlinearer Systeme. Solche Retardierungseffekte, die ihre physikalische Ursache in der Berücksichtigung endlicher Laufzeiten innerhalb eines rückgekoppelten Systems haben, können zu einem oszillatorischen oder chaotischen Zustand des Ausgangssignals führen. Die Bedeutung der Untersuchung verzögerungsinduzierter Instabilitäten liegt in der Tatsache begründet, daß jedem physikalischen System zeitliche Verzögerungen inhärent sind und selbst einfache Systeme, deren Stabilität bei Abwesenheit von zeitlichen Retardierungen wenig beeinflusst werden kann, durch deren Auftreten ihre dynamischen Eigenschaften qualitativ verändern.

Die theoretischen Untersuchungen hatten zum Ziel, ein systematisches Verfahren zu formulieren, welches die Methodik der Synergetik dahingehend erweitert, daß sie auf eine allgemeinere Klasse von zeitlich verzögerten Systemen anwendbar wird. Ausgehend von der Notwendigkeit, den Zustand eines solchen Systems in einem unendlich dimensionalen Zustandsraum durch eine abstrakte Funktionaldifferentialgleichung zu beschreiben, mußten die Konzepte der Synergetik, die in ihrer bisherigen mathematischen Formulierung auf Selbstorganisationsprozesse mit zeitlich lokalen Wechselwirkungen beschränkt sind, auf diesen erweiterten Zustandsraum übertragen werden. Dazu wurde ein verallgemeinertes Ordnungsparameterkonzept entwickelt, welches den Spektraleigenschaften von Funktionaldifferentialgleichungen Rechnung trägt und mit dem Versklavungsprinzip eine Elimination des unendlich dimensional Satztes von stabilen Moden gestattet. Das damit bereitgestellte Eliminationsverfahren erlaubt eine systematische Beschreibung von Selbstorganisationsprozessen, bei welchen zeitlich nichtlokale Effekte eine entscheidende Rolle übernehmen.

Ziel der experimentellen Untersuchungen, die an einem Phasenregelkreis 1. Ordnung mit integrierten analogen und numerischen Verzögerungsleitungen durchgeführt wurden, war es, einerseits ein reales System zur Verfügung zu haben, an dem die theoretischen Resultate im Detail überprüft werden konnten. Andererseits sollte aufgezeigt werden, daß selbst dieses einfachst denkbare nichtlineare Rückkopplungssystem unter dem Einfluß endlicher Signallaufzeiten eine Hierarchie von verzögerungsinduzierten Instabilitäten durchlaufen kann. Dieses unerwartete Verhalten des nichtlinearen Regelkreises wird ausführlich diskutiert.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt: Nach einer Einführung in die grundlegenden Konzepte der Synergetik in Kapitel 2, wird in Kapitel 3 ein Verfahren entwickelt, welches die Anwendung des mathematischen Formalismus der Synergetik auf eine allgemeine Klasse von zeitlich verzögerten Systemen ermöglicht. Wir formulieren dazu zuerst die Dynamik eines zeitlich verzögerten Systems in einem erweiterten unendlich dimensionalen Zustandsraum und diskutieren die Spektraleigenschaften des linearisierten Problems. Darauf aufbauend wird ein Projektorformalismus entwickelt, der eine Aufspaltung des Zustandsvektors in Ordnungsparameter und stabile Moden ermöglicht. Schließlich zeigen wir auf, wie sich die stabilen Moden in der Umgebung einer Instabilität systematisch eliminieren lassen und näherungsweise zu einem endlich dimensional Satz von Ordnungsparametergleichungen führen, die keine Gedächtnisterme mehr enthalten. Der entwickelte Formalismus wird in Kapitel 4 explizit auf eine skalare nichtlineare Delay-Differentialgleichung angewandt, die das Synchronisationsverhalten eines zeitlich verzögerten Phasenregelkreises 1. Ordnung beschreibt. Daran schließt sich eine eingehende experimentelle Untersuchung des dynamischen Verhaltens des Regelkreises an. Kapitel 5 faßt die Ergebnisse zusammen und diskutiert die sich ergebenden Anwendungsmöglichkeiten.

Kapitel 1

Einleitung

Das Verständnis für das Entstehen hochgeordneter Strukturbildungen in der belebten wie unbelebten Natur hat in den letzten beiden Jahrzehnten entscheidende Fortschritte erlebt. Waren früher Erklärungsmodelle vielfach rein empirischer Natur und darüber hinaus auf das jeweilige Naturphänomen beschränkt, so gelangt man heute immer mehr zu der Überzeugung, daß diesen Strukturbildungsprozessen in komplexen Systemen universelle Entstehungsmechanismen zugrunde liegen. Theoretische Ansätze, die aus physikalischen Anwendungen stammen, konnten, nicht zuletzt aufgrund des Einsatzes moderner Hochleistungscomputer, selbst in so komplexe Gebiete wie die Biologie, Physiologie oder die Kognitionswissenschaften Einzug halten. Die theoretischen Vorhersagen über das Auftreten von makroskopischen Ordnungszuständen kamen dabei den in der Realität beobachteten Gegebenheiten erstaunlich nahe. Aus der Erkenntnis heraus, daß diese Ordnungszustände dem jeweiligen System nicht von außen aufgeprägt werden sondern gewissermaßen spontan entstehen, wurden mathematische Konzepte entwickelt, die man als Selbstorganisationstheorien bezeichnet. Die Stärke einer solchen Theorie zeichnet sich dadurch aus, daß sie Erklärungsmechanismen für das kooperative Zusammenwirken von unabhängigen Untersystemen bereitstellt, aus denen sich das zu beschreibende Objekt zusammensetzt und damit auf eine Vielzahl naturwissenschaftlicher wie auch gesellschaftswissenschaftlicher Disziplinen anwendbar wird. Das interdisziplinäre Forschungsgebiet der Synergetik, von Hermann Haken 1969 an der Universität Stuttgart begründet [34, 35], trägt diesem Anspruch Rechnung, indem es ein umfassendes Konzept zur Beschreibung von zeitlichen, räumlichen, raum-

zeitlichen oder funktionalen Strukturbildungsprozessen in komplexen Systemen bereitstellt. Dabei erstreckt sich die mathematische Beschreibungsebene der Synergetik von gewöhnlichen über partielle Differentialgleichungen bis hin zu deren stochastische Verallgemeinerung und deckt damit eine breite Klasse von dynamischen Systemen ab, die durch räumliche und zeitliche Lokalität ausgezeichnet sind.

Selbstorganisationsprozesse dagegen, die durch die Berücksichtigung endlicher Laufzeiten innerhalb eines Systems zustande kommen, haben in der Vergangenheit in physikalischen Problemstellungen nur eine untergeordnete Rolle gespielt. Dies lag zum einen daran, daß zeitliche Retardierungen oftmals als zu klein angesehen wurden, um eine qualitative Auswirkung auf das dynamische Verhalten ausüben zu können. Zum anderen verhinderten die mathematischen Schwierigkeiten, die mit einer korrekten Formulierung des Anfangswertproblems verbunden ist, eine systematische Theorie, wie sie für gewöhnliche Differentialgleichungen bereits seit langem existiert.

In den ingenieurwissenschaftlichen Bereichen, insbesondere in der Regelungstechnik, werden seit langem Stabilitätskonzepte diskutiert, die möglichen Einflüssen endlicher Signallaufzeiten Rechnung tragen. Anwendungsbedingt stehen dabei jedoch gerade Untersuchungen zur Vermeidung verzögerungsinduzierter Instabilitäten im Mittelpunkt des Interesses (siehe z.B. [57]). Bemerkenswert erscheint deshalb die Tatsache, daß dennoch bereits im Jahre 1979 erste systematische Untersuchungen zum chaotischen Verhalten zeitlich retardierter Rückkopplungssysteme durchgeführt wurden [56].

Der in den letzten Jahren im naturwissenschaftlichen Bereich begonnene Versuch ein tieferes Verständnis des Einflusses von Gedächtnistermen auf das dynamische Verhalten komplexer Systeme zu erhalten, geht auf fundamentale Arbeiten von Ikeda et al. [47, 48, 49], Farmer [23] sowie der Arbeitsgruppe um Hopf und Gibbs [28, 45] zurück. Darin wurde zum ersten Mal auf die Möglichkeit verzögerungsinduzierter chaotischer Instabilitäten in optisch bistabilen Systemen hingewiesen. In den darauf folgenden Jahren wurden darauf aufbauend, verschiedenartige experimentelle und theoretische Untersuchungen vor allem an Halbleiterlaser mit zeitlich verzögerter Rückkopplung [11, 27, 72, 81] sowie zeitlich verzögerten elektro- und akusto-optisch bistabilen Systemen durchgeführt. (Für einen Überblick siehe z.B. [29, 53, 68, 71].) Dort konnten in Analogie zu nichtlinearen Systemen mit zeitlich lokaler Dynamik Periodenverdopplun-

gen [24, 25, 26, 32, 73, 83, 85, 86], Quasiperiodizität [2, 6, 54, 61, 63] und intermittentes Verhalten [41, 54, 62, 71] experimentell nachgewiesen werden. Auswirkungen mehrerer Retardierungen auf das Stabilitätsverhalten [50, 70, 95] wurden ebenso untersucht wie stochastische Einflüsse [15, 64, 67, 79]. Gekoppelte zeitlich verzögerte Systeme wurden zur Untersuchung raum-zeitlicher Instabilitäten herangezogen [10, 77, 78]. Eine theoretische Erklärung all dieser Erscheinungen steht, abgesehen von einigen wenigen Erklärungsmodellen [40], allerdings noch aus.

Besonderes physikalisches Interesse wird inzwischen zeitlich verzögerten nichtlinearen Systemen bei der Untersuchung der Struktur seltsamer Attraktoren entgegengebracht. In einer Vielzahl von Experimenten konnte dabei nachgewiesen werden, daß die Dimension chaotischer Attraktoren unabhängig von dem speziell gewählten System proportional zur Retardierung ansteigt [17, 23, 59, 60]. Die sich daraus ergebende Möglichkeit hochdimensionale seltsame Attraktoren durch einfache Erhöhung der Retardierung zu erzeugen, stellt eine neue Möglichkeit als Zugang zur Deutung des noch unvollständig verstandenen Phänomens der vollentwickelten Turbulenz dar [17, 51, 52, 58, 60].

Ferner dienen verzögerungsinduzierte Instabilitäten in physiologischen Kontrollsystemen in zunehmenden Maße als Erklärungsmodelle komplexer Erscheinungen. Experimentelle Untersuchungen neurophysiologischer Kontrollfunktionen belegen, daß zeitliche Verzögerungen zu Instabilitäten im Kontrollsystem führen können. So ist bekannt, daß hinreichend lange akustische Verzögerungen in einem Auditorium zu einer merklichen Absenkung der Sprechgeschwindigkeit oder einem Stottern des Vortragenden führen können. Visuelle Verzögerungen können es Testpersonen unmöglich machen, selbst einfache geometrische Figuren zu zeichnen (siehe z.B. [30]). Während jedoch frühere Untersuchungen auf oszillatorische Störungen im Kontrollsystem beschränkt waren, lassen neuere Experimente die Folgerung zu, daß zeitliche Verzögerungen ein weitaus komplexeres dynamisches Verhalten bewirken können. Das sogenannte Mackey-Glass Modell beispielsweise, eine skalare nichtlineare zeitlich verzögerte Differentialgleichung, wurde zur Beschreibung von beobachteten Anomalien in der Regeneration weißer Blutkörper infolge des Einflusses endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeiten chemosensitiver Substanzen im Blutkreislauf aufgestellt. Im chaotischen Bereich erlaubt dieses Modell einen qualitativen Vergleich mit experimentellen Daten [31].

Von besonderer Bedeutung bei der Untersuchung verzögerungsbedingter Instabilitäten sind Experimente des menschlichen Pupillenreflexes [65, 66], da es in diesem Fall durch einen nichtinvasiven Eingriff in das menschliche Kontrollsystem zum ersten Mal möglich wurde, den Einfluß zeitlicher Verzögerungen systematisch zu untersuchen.

Daß Verzögerungseffekte in neuerster Zeit auch in wirtschaftswissenschaftliche Fragestellungen [9] oder in der Theorie neuronaler Netze [8, 18, 75] Einzug gehalten haben, mag als ein Anzeichen dafür gesehen werden, daß sich aus der Berücksichtigung des Einflusses endlicher Laufzeiten auf das dynamische Verhalten nichtlinearer rückgekoppelter Systeme ein weites Gebiet für zukünftige Forschungsaktivitäten eröffnen wird.

Kapitel 2

Die Methodik der Synergetik

Das interdisziplinäre Forschungsgebiet der Synergetik wurde von Hermann Haken 1969 mit dem Anliegen gegründet, allgemeingültige Prinzipien aufzuzeigen, die einer spontanen Entstehung von zeitlichen, räumlichen, raum-zeitlichen oder funktionalen makroskopischen Strukturen zugrundeliegen [34, 35].

Als Beispiel eines solchen Selbstorganisationsprozesses kann man etwa die Lasertätigkeit aufführen. Hier ordnen sich lichtemittierende Atome intern spontan auf einem makroskopischen Maßstab an und strahlen kohärentes Laserlicht aus. In Flüssigkeiten und Gasen treten Instabilitäten auf, die als makroskopisch geordnete Bewegung der Strömungselemente zu interpretieren sind. Autokatalytische chemische Reaktionen – eines der prominentesten Beispiele ist die Belousov-Zhabotinsky Reaktion – zeigen räumlich, zeitlich und raum-zeitlich geordnete Reaktionszustände von hohem Ordnungsgrad. Das Besondere an diesen Phänomenen ist, daß die Strukturen dem jeweiligen System nicht von außen aufgeprägt, sondern vom System selber erzeugt werden.

Besonders reichhaltige Formen der Musterbildung trifft man in der Morphogenese, einem Teilgebiet der Biologie, an. In der Physiologie ist es etwa die Koordination von Bewegungsvorgängen, die eine bemerkenswerte Realisierung spontan generierter Ordnungsformen repräsentiert. Ferner ist von herausragender Bedeutung für beide Wissenschaftszweige die Funktionsweise des menschlichen Gehirns, zu dessen tieferem Verständnis Selbstorganisationsphänomene grundlegende Bedeutung erlangen.

Die Synergetik geht bei ihrer mathematischen Beschreibung von Selbstorganisations-

prozessen von Vielteilchensystemen aus, deren Untersysteme nichtlinearen Evolutionsgleichungen genügen. Dabei soll durch einen von außen zugeführten unspezifischen Fluß von Energie, Materie oder Information das System fernab vom thermodynamischen Gleichgewicht betrieben werden. Diese äußere Anregung wird über einen Satz von Kontrollparametern beschrieben. Um das Anliegen der Synergetik verständlich zu machen, betrachten wir ein solches offenes System, das sich durch eine Energie- und/oder Materiezufuhr in einem Nichtgleichgewichtszustand befindet. Verändert man die Kontrollparameter, so wird das System bei einem kritischen Wert seine ursprüngliche Stabilität verlieren und in einen neuen Ordnungszustand übergehen. Durch eine weitere Veränderung der Kontrollparameter kann so das System eine ganze Hierarchie von Instabilitäten durchlaufen, bis es schließlich in den Einzugsbereich eines chaotischen Attraktors mündet, der die Ordnungsstruktur zumindest teilweise zerstören wird. Wie in diesem Kapitel ausgeführt werden soll, beruht der interdisziplinäre Charakter der Synergetik gerade darauf, eine universelle Theorie bereitzustellen, die, unabhängig von der Art der Untersysteme, das dynamische Verhalten von komplexen Systemen in der Nähe solcher Instabilitäten vorhersagen kann.

Für das im folgenden beschriebene Verfahren einer synergetischen Systemanalyse denken wir uns das zu analysierende System durch Abbildung 2.1 schematisch repräsentiert.

1. Modellierung

Aufgabe einer jeden Fachdisziplin ist es, dynamische Modellgleichungen in Form von Evolutionsgleichungen für die verschiedenen Untersysteme aufzustellen. Faßt man deren Variablen in einem Zustandsvektor \vec{q} zusammen, der den n -dimensionalen Zustandsraum Γ aufspannt, so lautet eine typische Evolutionsgleichung für \vec{q} , die raumzeitliche Strukturbildungsprozesse unter dem Einfluß äußerer Fluktuationen beschreiben kann

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{q}(\vec{x}, t) = \vec{N}(\vec{q}(\vec{x}, t), \vec{x}, t, \vec{\nabla}, \{\sigma_i\}) + \vec{F}(\vec{q}(\vec{x}, t), t). \quad (2.1)$$

Das nichtlineare Vektorfeld \vec{N} kann explizit von Ort \vec{x} und Zeit t abhängen. Der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ steht für räumliche Inhomogenitäten und $\{\sigma_i\}$ faßt den Satz von Kontrollparametern zusammen. Zusätzlich zu diesem deterministischen Anteil können auch

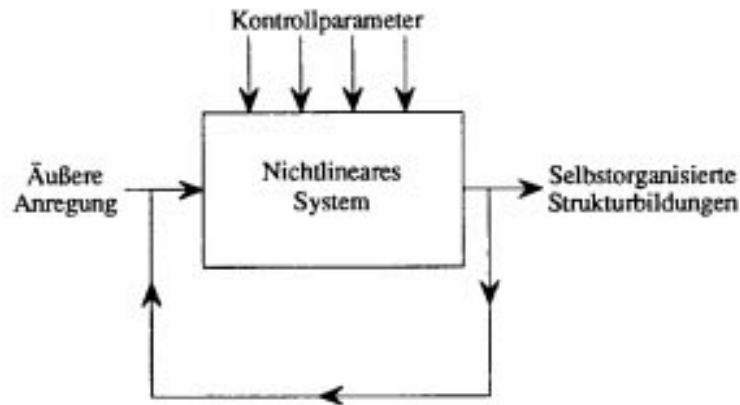


Abb. 2.1: Schematische Darstellung eines synergetischen Systems. Das nichtlineare System, bestehend aus einer Vielzahl von Untersystemen mit nichtlinearer Dynamik und/oder nichtlinearer Kopplung, wird von außen durch einen Satz von Kontrollparametern angeregt. Durch die Rückwirkung des Ausgangssignals auf den Eingang können sich selbst organisierende Strukturen auf einem makroskopischen Maßstab ausbilden.

noch Rauschprozesse, die durch \vec{F} beschrieben werden, zu dem dynamischen Verhalten beitragen. Da das vollständige System von nichtlinearen partiellen stochastischen Differentialgleichungen (2.1) den Rahmen einer einführenden Darstellung der Methodik der Synergetik sprengen würde, beschränken wir uns im folgenden auf die einfachere Klasse zeitlich und räumlich homogener deterministischer Systeme, die durch einen Satz von gewöhnlichen nichtlinearen autonomen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\vec{q}(t) = \vec{N}(\vec{q}(t), \{\sigma_i\}) \quad (2.2)$$

beschrieben werden.

2. Stationäre Lösungen

In den allermeisten Fällen würde eine vollständige globale Analyse des nichtlinearen Systems (2.2) ein hoffnungsloses Unterfangen darstellen. Daher ist man gezwungen, die Untersuchung des dynamischen Verhaltens auf die Umgebung eines Referenzzustandes \vec{q}_{stat} zu beschränken. Im einfachsten Fall, und dies reicht für eine schematische Darstellung der Methodik der Synergetik aus, geht man von einer zeitunabhängigen Lösung

\vec{q}_{Stat} aus, die sich aus

$$\vec{N}(\vec{q}_{Stat}, \{\sigma_i\}) = 0 \quad (2.3)$$

bestimmen läßt. Es bleibt anzumerken, daß man sich bei dieser Wahl einer stationären Lösung unter Umständen noch im thermodynamischen Lösungszweig befinden kann und infolgedessen Stabilitätsaussagen auch noch mit Hilfe der Methoden der irreversiblen Thermodynamik möglich sind. Die Methodik der Synergetik geht in ihrer allgemeinen Formulierung jedoch weit über diesen Spezialfall hinaus, indem sie auch lokale Untersuchungen um periodische oder quasiperiodische Attraktoren erlaubt, die echten Nichtgleichgewichtszuständen entsprechen.

3. Linearisierung um die stationäre Lösung

Um zu entscheiden, ob die stationäre Lösung \vec{q}_{Stat} stabil gegenüber äußeren Störungen ist, lenkt man den Zustandsvektor \vec{q} um eine kleine Größe $\vec{\tilde{q}}$ aus seiner Ruhelage \vec{q}_{Stat} aus

$$\vec{q}(t) = \vec{q}_{Stat} + \vec{\tilde{q}}(t). \quad (2.4)$$

Gleichung (2.2) geht in einer linearen Stabilitätsanalyse über in eine lineare Differentialgleichung für die Auslenkungen $\vec{\tilde{q}}$

$$\frac{d}{dt} \vec{\tilde{q}}(t) = L(\vec{q}_{Stat}, \{\sigma_i\}) \vec{\tilde{q}}(t). \quad (2.5)$$

Die zeitunabhängige Matrix L ergibt sich aus

$$L_{ij} = \left. \frac{\partial N_i}{\partial q_j} \right|_{\vec{q}=\vec{q}_{Stat}}. \quad (2.6)$$

Mit dem Ansatz

$$\vec{\tilde{q}}(t) = \vec{\phi}^\lambda e^{\lambda t} \quad (2.7)$$

lassen sich die Stabilitätseigenschaften aus dem linearen algebraischen Eigenwertproblem

$$L\vec{\phi}^\lambda = \lambda\vec{\phi}^\lambda \quad (2.8)$$

gewinnen. Nichttriviale Lösungen erfordern das Verschwinden der Koeffizientendeterminante

$$\det(L - \lambda I) = 0, \quad (2.9)$$

woraus sich Eigenwerte λ_i und mit (2.8) die dazugehörigen Eigenvektoren $\vec{\phi}^{\lambda_i}$ bestimmen lassen. Einen bezüglich des kanonischen Skalarproduktes zu $\{\vec{\phi}^{\lambda_i}\}$ biorthonormalen Satz von adjungierten Eigenvektoren $\{\vec{\psi}^{\lambda_i}\}$ erhält man aus der zu (2.8) adjungierten Gleichung

$$\vec{\psi}^{\lambda_i} L = \lambda_i \vec{\psi}^{\lambda_i}. \quad (2.10)$$

Die Orthonormalitätsrelationen lauten

$$\langle \vec{\psi}^{\lambda_i}, \vec{\phi}^{\lambda_j} \rangle = \delta_{ij}, \quad (2.11)$$

Die Vollständigkeit des biorthonormalen Eigenfunktionensystems ergibt sich in der Form

$$\sum_{i=1}^n \vec{\phi}^{\lambda_i} \vec{\psi}^{\lambda_i} = I. \quad (2.12)$$

4. Ordnungsparameterkonzept

Die allgemeine Lösung der nichtlinearen Evolutionsgleichung (2.2) läßt sich in der Form

$$\vec{q}(t) = \vec{q}_{stat} + \sum_{j=1}^n \xi_j(t) \vec{\phi}^{\lambda_j} \quad (2.13)$$

mit noch zu bestimmenden zeitabhängigen Modenamplituden $\xi_j(t)$ schreiben. Setzt man (2.13) in (2.2) ein, so erhält man einerseits

$$\frac{d}{dt} \vec{q}(t) = \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \xi_j(t) \vec{\phi}^{\lambda_j}. \quad (2.14)$$

Andererseits ergibt sich für das nichtlineare Vektorfeld \vec{N} mit (2.3), (2.6) und (2.8)

$$\vec{N} \left(\vec{q}_{stat} + \sum_{j=1}^n \xi_j(t) \vec{\phi}^{\lambda_j} \right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \xi_j(t) \vec{\phi}^{\lambda_j} + \vec{G}(\{\xi_j\}), \quad (2.15)$$

wobei das Vektorfeld \vec{G} nichtlinear in seinen Argumenten ist. Bildet man das Skalarprodukt mit den adjungierten Eigenfunktionen $\vec{\psi}^{\lambda_i}$, so erhält man mit den Orthonor-

malitätsrelationen (2.11) das folgende gekoppelte Systeme von Bewegungsgleichungen für die Modenamplituden $\xi_i(t)$

$$\frac{d}{dt}\xi_i(t) = \lambda_i \xi_i(t) + \tilde{N}_i(\{\xi_j\}). \quad (2.16)$$

Die nichtlineare vektorwertige Funktion \tilde{N} hat dabei die explizite Darstellung

$$\tilde{N}_i(\{\xi_j\}) = \left\langle \tilde{\psi}^{\lambda_i}, \tilde{G}(\{\xi_j\}) \right\rangle = \sum_{k=2} \tilde{N}_{i j_1 \dots j_k}^{(k)} \xi_{j_1} \cdots \xi_{j_k}. \quad (2.17)$$

Das Gleichungssystem (2.16) ist exakt und äquivalent zu den Ausgangsgleichungen (2.2). Der Vorteil, der sich aus einer Formulierung des dynamischen Verhaltens in Form von Modenamplitudengleichungen (2.16) ergibt liegt darin, daß diese das kollektive Verhalten der Untersysteme bezogen auf den Referenzzustand beschreiben, während (2.2) eine Bewegungsgleichung für die einzelnen Untersysteme darstellt.

Mit dem Ordnungsparameterkonzept der Synergetik gelangen wir zu einem zentralen Punkt des synergetischen Formalismus. Die Stabilität der stationären Lösung \vec{q}_{stat} drückt sich dadurch aus, daß für einen gewissen Bereich der Kontrollparameter sämtliche Realteile der Eigenwerte $\lambda_j = \lambda_j(\{\sigma_i\})$ negativ sind. Erreicht man einen kritischen Kontrollparameterwert $\{\sigma_i\} = \{\sigma_i^{(crit)}\}$, so wird der Realteil einiger weniger Eigenwerte λ_u verschwinden, während der überwiegende Anteil an Eigenwerten λ_s einen negativen Realteil behält

$$Re(\lambda_u(\{\sigma_i^{(crit)}\})) = 0, \quad u = 1, \dots, m, \quad (2.18)$$

$$Re(\lambda_s(\{\sigma_i^{(crit)}\})) < 0, \quad s = m + 1, \dots, n. \quad (2.19)$$

Die Modenamplituden werden daher an einer solchen Schwelle in linear instabile Moden $\xi_u(t)$, die sogenannten Ordnungsparameter sowie linear stabile Moden $\xi_s(t)$ gemäß

$$\xi_j(t) \begin{cases} \xi_u(t) \equiv \vec{u}(t) & (u = \text{unstable}) \\ \xi_s(t) \equiv \vec{s}(t) & (s = \text{stable}) \end{cases} \quad (2.20)$$

aufgespalten. Faßt man die jeweiligen Eigenwerte λ_u bzw. λ_s zu den Matrizen

$$\Lambda_u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}, \quad \Lambda_s = \begin{pmatrix} \lambda_{m+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

zusammen (die wir hier in Diagonalgestalt vorliegend annehmen), dann geht (2.16) in das gekoppelte System von Modenamplitudengleichungen

$$\frac{d}{dt} \vec{u}(t) = \Lambda_u \vec{u}(t) + \tilde{N}_u(\vec{u}(t), \vec{s}(t)), \quad (2.22)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{s}(t) = \Lambda_s \vec{s}(t) + \tilde{N}_s(\vec{u}(t), \vec{s}(t)) \quad (2.23)$$

über.

5. Versklavungsprinzip

Befindet man sich in der Nähe einer Instabilität, so gilt für die Eigenwerte wegen (2.18) und (2.19)

$$\left| \operatorname{Re}(\lambda_u) \right| \ll \left| \operatorname{Re}(\lambda_s) \right|. \quad (2.24)$$

Interpretiert man die Realteile der Eigenwerte λ_i als Dämpfungskonstante des Systems, so kann man Relaxationszeiten τ_i über

$$\tau_i = \frac{1}{\left| \operatorname{Re}(\lambda_i) \right|} \quad (2.25)$$

einführen. Mit (2.25) sieht man, daß in der Umgebung einer Instabilität eine Hierarchie von Zeitskalen gemäß

$$\tau_u \gg \tau_s \quad (2.26)$$

erzeugt wird. Gleichung (2.26) besagt, daß die Dynamik der stabilen Moden, bezogen auf die Zeitskala der Ordnungsparameter, sehr schnell abläuft. Anders ausgedrückt, die Dynamik der stabilen Moden wird nach einer kurzen Einschwingphase durch die Ordnungsparameterdynamik vollständig vorgeschrieben, die stabilen Moden also von den Ordnungsparametern gewissermaßen versklavt. Mathematisch drückt sich diese

Versklavung durch die Relation

$$\vec{s}(t) = \vec{h}(\vec{u}(t)) \quad (2.27)$$

aus [33, 34, 35, 92]. Eine Bestimmungsgleichung für die zentrale Mannigfaltigkeit \vec{h} erhält man, indem man Gleichung (2.27) in das gekoppelte System von Modengleichungen (2.22) und (2.23) einsetzt

$$\frac{d}{d\vec{u}} \vec{h}(\vec{u}(t)) \left[\Lambda_u \vec{u}(t) + \vec{N}_u(\vec{u}(t), \vec{h}(\vec{u}(t))) \right] = \Lambda_s \vec{h}(\vec{u}(t)) + \vec{N}_s(\vec{u}(t), \vec{h}(\vec{u}(t))). \quad (2.28)$$

Löst man Gleichung (2.28), so erhält man mit (2.27) und (2.22) ein niedrigdimensionales geschlossenes Differentialgleichungssystem für die Ordnungsparameter \vec{u}

$$\frac{d}{dt} \vec{u}(t) = \Lambda_u \vec{u}(t) + \vec{N}_u(\vec{u}(t), \vec{h}(\vec{u}(t))). \quad (2.29)$$

Diese sogenannten Ordnungsparametergleichungen beschreiben die sich in der Nähe einer Instabilität ausbildenden makroskopischen Strukturen vollständig. Nach einer Klassifizierung in ihre jeweiligen Normalformen lassen sich die Ordnungsparametergleichungen mit den Methoden der Bifurkationstheorie von einem universellen Standpunkt weiter diskutieren.

Um die zentrale Mannigfaltigkeit in niedrigster Ordnung (adiabatische Elimination) zu bestimmen, nehmen wir an, daß die nichtlineare Funktion \vec{N} in (2.17) mit Termen der Ordnung $\mathcal{O}(|\vec{\xi}|^r)$ startet. Es gilt dann näherungsweise

$$\vec{N}_{u,i} \approx \vec{N}_{u,i j_1 \dots j_r}^{(r)} u_{j_1} \cdots u_{j_r}, \quad (2.30)$$

$$\vec{N}_{s,i} \approx \vec{N}_{s,i j_1 \dots j_r}^{(r)} u_{j_1} \cdots u_{j_r}. \quad (2.31)$$

Um die zentrale Mannigfaltigkeit bis zur Ordnung $\mathcal{O}(|\vec{u}|^r)$ zu bestimmen, setzt man den Ansatz

$$h_i(\vec{u}(t)) \approx H_{i j_1 \dots j_r} u_{j_1} \cdots u_{j_r} \quad (2.32)$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten $H_{i j_1 \dots j_r}$ in Gleichung (2.28) ein. Unter Berücksichtigung von Gleichung (2.17) erhält man

$$H_{i j_1 \dots j_r} = - \left[\Lambda_s - (\lambda_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_r}) I \right]_{\vec{u}}^{-1} \vec{N}_{s,i j_1 \dots j_r}. \quad (2.33)$$

Der Eigenwert λ_j entspricht dabei dem i -ten Eigenwert von Λ_u . Zusammen mit Gleichung (2.32) liefert (2.33) schließlich eine Bestimmungsleichung für die zentrale Mannigfaltigkeit \vec{h} .

Die zentrale Bedeutung des Versklavungsprinzip zur Beschreibung selbstorganisierter Strukturbildungen in komplexen System liegt darin begründet, daß hierdurch ein konstruktives Verfahren bereitgestellt wird, das in der Umgebung einer Instabilität zu einer systematischen Reduktion der Freiheitsgrade und zu einer niedrigdimensionalen Ordnungsparametergleichung führt. Um zu verdeutlichen, weshalb bei den meisten in der Natur auftauchenden selbstorganisierten Phänomenen nur wenige Moden instabil werden, betrachten wir die Bedingung (2.18). Diese beschreibt im Raum der Kontrollparameter $\{\sigma_i\}$ eine Fläche der Kodimension 1 und führt daher zu einem (reellen) oder zwei (komplexen) Eigenwerten, die linear instabil werdenden Moden entsprechen. Natürlich kann die Instabilitätsbedingung (2.18) für eine Vielzahl von Eigenwerten λ_i erfüllt werden. Allerdings wird dies im allgemeinen bei verschiedenen kritischen Kontrollparametern $\{\sigma^{(crit)}\}$ der Fall sein. Der gemeinsame Schnitt der daraus resultierenden Flächen wird jedoch von höherer Kodimension sein und darf daher von einem physikalischen Standpunkt aus betrachtet als wenig relevant angesehen werden. In Abbildung 2.2 ist dieser Sachverhalt schematisch für den Fall zweier Eigenwerte dargestellt, die der Bedingung (2.18) genügen.

Zum Abschluß soll anhand Abbildung 2.3 der allgemeine Formalismus der Synergetik noch einmal graphisch dargestellt und neuere Entwicklungen diskutiert werden.

In dem bisher vorgestellten sogenannten *Bottom up* Zugang versucht man aus der mikroskopisch oder mesoskopischen Kenntnis der Untersysteme Ordnungsparametergleichungen herzuleiten. Die Problematik dieser Vorgehensweise ergibt sich aus der Beobachtung, daß es komplexe Systeme gibt, deren Untersysteme selbst schon so komplizierte Gebilde darstellen, daß ihre Dynamik und ihre Wechselwirkungen nicht befriedigend darstellbar sind. Damit ist gemeint, daß wir auf der mikroskopischen Ebene der Untersysteme keine vollständigen Gleichungen der Form (2.2) aufstellen können. Beispiele für derartige Untersysteme bilden etwa die Zellen, die Organe aufbauen, die Organe selbst, die den Organismus konstituieren, Menschen in sozialen Systemen oder Gesellschaften usw. Solange man nur an den resultierenden makroskopischen Prozessen

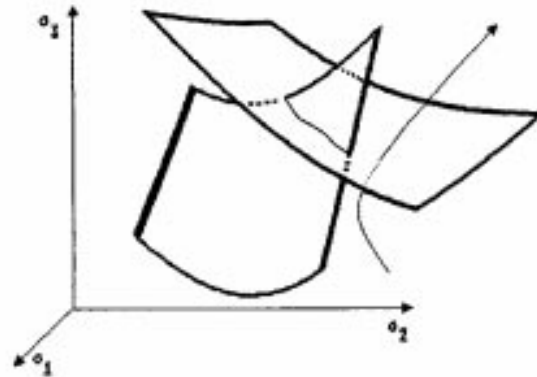


Abb. 2.2: Flächen mit $Re(\lambda_n) = 0$ im Kontrollparameterraum $\{\sigma_i\}$. Jeder Eigenwert, der die Bedingung (2.18) erfüllt, erzeugt im Kontrollparameterraum eine Fläche der Kodimension 1. Abgebildet sind zwei derartige Flächen. Ihre gemeinsame Schnittlinie ist von Kodimension 2. Ändert man nur einen Kontrollparameterwert, z.B. σ_3 , so wird i.a. nur eine Fläche der Kodimension 1 durchstoßen.

interessiert ist, kann man mit dem Verweis auf die Unabhängigkeit des makroskopischen Verhaltens von den Details der Untersysteme absehen [87]. Allerdings läuft man dabei Gefahr, daß man in der Interpretation der kollektiven Phänome oft auf zu vereinfachte, im Mikroskopischen entwickelte Vorstellungen zurückgreift.

In der phänomenologischen Synergetik beschränkt man sich von vornherein auf rein makroskopische Daten und Beobachtungen. Man versucht die Kontrollparameter und Ordnungsparameter von diesen makroskopischen Daten her zu identifizieren und die dem makroskopischen Verhalten zugrunde liegende Dynamik zu rekonstruieren.

Diese Methode des *Top down* Zugangs ist an ganz verschiedenartigen Systemen erprobt worden. Als Beispiel benennen wir Modelle zur Koordination von Bewegungen bei Tieren und Menschen, kollektive Erscheinungen bei der Meinungsbildung usw.[37, 90, 93, 94]. Diese Modelle geben allerdings nur wenig Aufschluß über die zugrundeliegende mikroskopische Dynamik. Ihre Resultate sind auch nicht immer eindeutig und ihr Wert ist stark mit der Güte der angegebenen Interpretation korreliert. Als eine bemerkenswerte Anwendung dieser Methode erwähnen wir hier die Konstrukti-

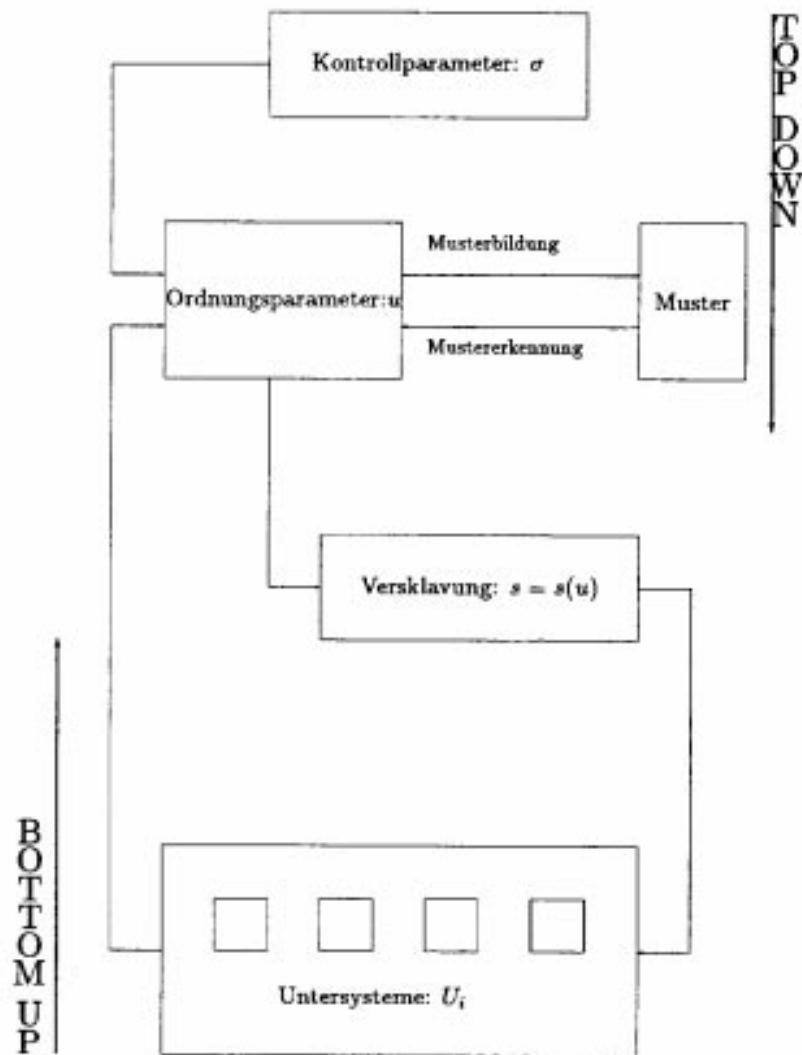


Abb. 2.3: *Bottom up* und *Top down* Zugang einer synergetischen Systemanalyse. In dem *Bottom up* Zugang startet man von mikroskopischen oder mesoskopischen Evolutionsgleichungen und leitet daraus die entstehenden Ordnungsparametergleichungen ab. Der *Top down* Zugang startet hingegen von rein makroskopischen Daten. Davon ausgehend versucht man die Ordnungs- und Kontrollparameter von diesen Daten her zu identifizieren und die dem makroskopischen Verhalten zugrundeliegende Dynamik zu rekonstruieren.

onsvorschriften für einen synergetischen Computer der auf dem makroskopischen Konzept der Ordnungsparameter basiert [36]. Es geht hier insbesondere darum, Prozesse, die in einem assoziativen Verhalten des Gedächtnisses ablaufen, zu simulieren. Dies gelingt durch eine massive Parallelverarbeitung der aufgenommenen Signale, die durch die makroskopische Dynamik der Ordnungsparameter koordiniert wird.

Wir bemerken hier der Vollständigkeit wegen, daß ein um den statistischen Aspekt erweiterter makroskopischer Zugang als 'Methode der makroskopischen Synergetik' bezeichnet wird. Sie basiert auf von Jaynes und Haken erweiterten Konzepten der Shannonschen Informationstheorie. Fluktuationen spielen dabei bei der Beschreibung des makroskopischen Verhaltens von komplexen Systemen eine entscheidende Rolle.

Kapitel 3

Erweiterung der synergetischen Konzepte auf zeitlich verzögerte Systeme

Die Methodik der Synergetik, wie sie im vorangegangenen Kapitel ausführlich dargestellt wurde, stellt ein umfassendes Konzept zur mathematischen Beschreibung von Nichtgleichgewichtsphasenübergängen in Vielteilchensystemen dar. Formuliert wurde sie für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen mitsamt ihren stochastischen Verallgemeinerungen. Ihr Anwendungsbereich umfaßt daher die Beschreibung von Selbstorganisationsprozessen in räumlich homogenen wie auch inhomogenen Medien. Effekte, die durch die Berücksichtigung endlicher Laufzeiten innerhalb eines Systems hervorgerufen werden, sind bisher jedoch noch nicht mit dem Formalismus der Synergetik behandelt worden. Ziel dieses Kapitels ist es daher, die der Beschreibung zeitlich retardierter Systeme mathematisch zugrundeliegenden Methoden so zu entwickeln, daß eine Anwendung der Konzepte der Synergetik darauf möglich wird.

Nach einer allgemeinen Diskussion zur Einordnung zeitlich verzögerter Systeme in unterschiedliche mathematische Klassen (Abschnitt 3.1) wird in Abschnitt 3.2 aufgezeigt, wie sich Funktionaldifferentialgleichungen in einen unendlich dimensionalen Zustandsraum einbetten lassen. Dieser bildet in Abschnitt 3.3 die Grundlage zur Diskussion des Eigenwertproblems von zeitlich verzögerten linearen Systemen. In Abschnitt 3.4

wird ein Projektorformalismus eingeführt, der eine Aufspaltung der Modenamplituden in Ordnungsparameter und stabile Moden ermöglicht. Schließlich wird in Abschnitt 3.5 das Ordnungsparameterkonzept für eine allgemeine Klasse von zeitlich verzögerten nichtlinearen Systemen formuliert und ein Eliminationsverfahren der stabilen Moden vorgestellt.

3.1 Einordnung zeitlich verzögerter Systeme in Klassen

Bei der Beschreibung des dynamischen Verhaltens eines synergetischen Systems in Form von Evolutionsgleichungen (vgl. Kapitel 2) wurde implizit von der Annahme ausgegangen, daß aus der Kenntnis des momentanen Systemzustandes, die zeitliche Änderung des Zustandsvektors bereits eindeutig festliegt. Diese Annahme schließt jedoch die Behandlung jeglicher Gedächtniseffekte aus. In diesen Fällen ist zur eindeutigen Festlegung der zeitlichen Änderung des Zustandsvektors die Kenntnis früherer Zustände notwendig. An die Stelle gewöhnlicher oder partieller Differentialgleichungen, die die Grundlage des mathematischen Formalismus der Synergetik bilden, treten nun Funktionaldifferentialgleichungen, die zur Beschreibung zeitlicher Verzögerungsvorgänge besser geeignet sind. Das allgemeine Schema eines synergetischen Systems, welches die Grundlage der nachfolgenden Betrachtungen bildet, ist in Abbildung 3.1 dargestellt.

Ist die Retardierung in der Rückkopplungsschleife so beschaffen, daß die zeitliche Entwicklung des Zustandsvektors von einer festen früheren Zeit abhängt, so läßt sich die Evolutionsgleichung für ein solches System in Verallgemeinerung von (2.2) schreiben als

$$\frac{d}{dt} \vec{q}(t) = \vec{N}(\vec{q}(t), \vec{q}(t - \tau), \{\sigma_i\}). \quad (3.1)$$

Das um die Zeit τ retardierte Argument des Zustandsvektors macht Gleichung (3.1) nichtlokal in der Zeit. Dieser Gleichungstyp stellt einen wichtigen Spezialfall einer retardierten Funktionaldifferentialgleichung dar und wird als Delay-Differentialgleichung bezeichnet. Treten Retardierungseffekte außer im Zustandsvektor selbst auch noch in dessen Ableitungen auf, so spricht man von neutralen Funktionaldifferentialgleichun-

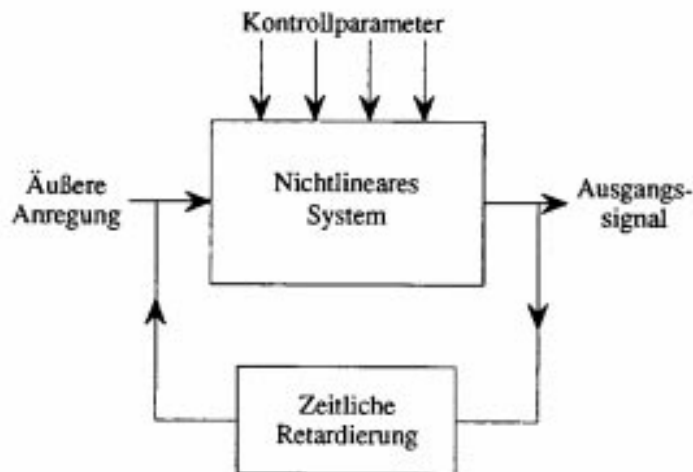


Abb. 3.1: Synergetisches System mit zeitlicher Verzögerung. Ein nichtlineares System wird, gesteuert über unspezifisch wirkende Kontrollparameter, von außen angeregt. Das Ausgangssignal wird zu einem bestimmten Bruchteil zeitlich verzögert an den Eingang zurückgekoppelt.

gen, beispielsweise stellt

$$\frac{d}{dt} \vec{q}(t - \tau') = \vec{N}(\vec{q}(t), \vec{q}(t - \tau), \{\sigma_i\}) \quad (3.2)$$

einen entsprechenden Repräsentanten dar. Integrodifferentialgleichungen liegen dann vor, wenn der Zustandsvektor von einem ganzen Intervall vergangener Zeiten abhängt

$$\frac{d}{dt} \vec{q}(t) = \int_{-\tau}^0 \vec{N}(\vec{q}(t + \Theta), \{\sigma_i\}) d\Theta. \quad (3.3)$$

Ein System, welches von zukünftigen Zeiten beeinflusst wird, kann im einfachsten Fall durch eine avancierte Funktionaldifferentialgleichung der Form

$$\frac{d}{dt} \vec{q}(t) = \vec{N}(\vec{q}(t), \vec{q}(t + \tau), \{\sigma_i\}) \quad (3.4)$$

beschrieben werden. Anwendungen diesbezüglicher Art sind in naher Zukunft vor allem in den Kognitionswissenschaften zu erwarten, wo es um das Verständnis antizipierter Vorgänge geht. So lassen neurophysiologische Experimente den Schluß zu, daß Handlungen bereits vor ihrer Ausführung im Gehirn vorweg genommen werden [55].

Funktionaldifferentialgleichungen beinhalten die oben erwähnten Systeme als Spezialfälle, beschreiben aber eine noch viel allgemeinere Klasse von zeitlichen Verzögerun-

gen, bei denen z.B. die Retardierung vom Zustandsvektor selber abhängen kann¹.

Da eine hinreichend ausgearbeitete Theorie bisher nur für autonome Delay-Differentialgleichungen existiert, werden wir uns im folgenden auf Systeme dieser Art konzentrieren. Wo immer es jedoch möglich wird, werden die Begriffe so allgemein gehalten, daß das Verfahren auch auf die allgemeinere Klasse von Funktionaldifferentialgleichungen angewandt werden kann. Eine Einordnung zeitlich verzögerter Systeme in die erwähnten mathematischen Klassen wird im folgenden Diagramm noch einmal zusammengefaßt.

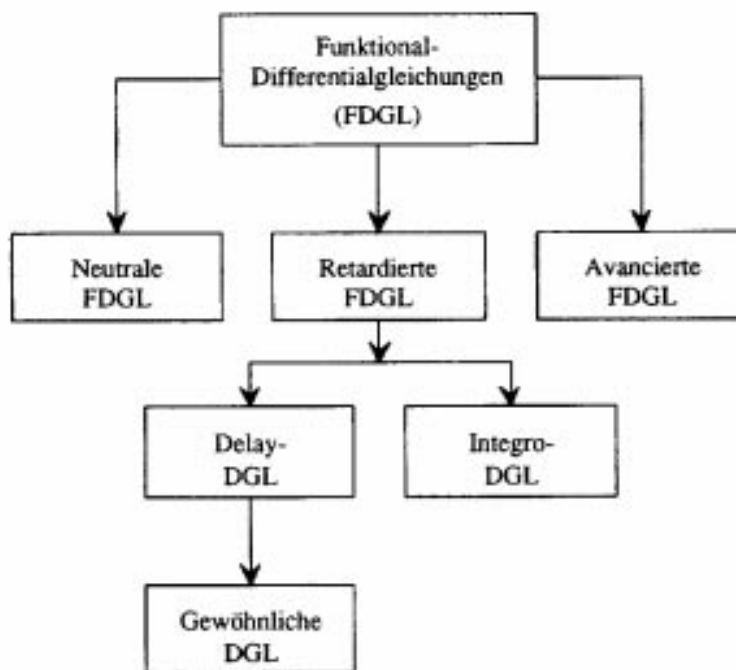


Abb. 3.2: Übersicht zur Einordnung zeitlich verzögerter Vorgänge in Klassen.

¹Dies ist z.B. der Fall bei den Liénard-Wiechert-Potentialen der Elektrodynamik.

3.2 Dynamik im unendlich dimensionalen Zustandsraum

Das dynamische Verhalten eines komplexen Systems wird gewöhnlich durch die zeitliche Evolution eines, das System vollständig charakterisierenden Zustandsvektors \vec{q} in einem n -dimensionalen Zustandsraum Γ beschrieben. Der mathematische Grund, weshalb dieses Vorgehen bei der Einbeziehung zeitlich retardierter Vorgänge zu Schwierigkeiten führt, rührt von den besonderen Anfangsbedingungen her, die einem zeitlich verzögerten System aufzuerlegen sind. Hat man z. B. eine Evolutionsgleichung der Form (3.1) im Zustandsraum Γ gegeben, so erfordert die eindeutige Charakterisierung des dynamischen Systems die Vorgabe des Zustandsvektors \vec{q} auf dem gesamten Intervall $[-\tau, 0]$. Das Anfangswertproblem wird also definiert durch Gleichung (3.1) zusammen mit der Anfangsbedingung

$$\vec{q}(\Theta) = \vec{g}(\Theta), \quad -\tau \leq \Theta \leq 0, \quad (3.5)$$

wobei \vec{g} eine auf einem geeignet gewählten Funktionenraum vorgegebene vektorwertige Anfangsfunktion darstellt.

Das Anfangswertproblem (3.1) und (3.5) stellt insofern eine unbefriedigende Situation dar, als eine in einem unendlich dimensionalen Funktionenraum definierte vektorwertige Anfangsfunktion, in den n -dimensionalen Zustandsraum Γ abgebildet wird. Damit verbunden ist der Verlust der Existenz einer eindeutigen Lösung. Gibt man nämlich als Anfangsbedingungen zwei unterschiedliche Funktionen $\vec{g}^{(1)}$ und $\vec{g}^{(2)}$ auf dem Intervall $[-\tau, 0]$ vor, die sich in einer endlichen Anzahl von Punkten überschneiden, dann bedeutet dies, daß sich im endlich dimensionalen Zustandsraum Γ auch die dazugehörigen Trajektorien $\vec{q}^{(1)}(t)$ und $\vec{q}^{(2)}(t)$ überschneiden werden. Die Eindeutigkeit der Lösung einer Funktionaldifferentialgleichung läßt sich daher nicht punktweise in Γ herstellen. Vielmehr ist es erforderlich, den das System charakterisierenden Zustand durch einen erweiterten Zustandsvektor \vec{q}_t in einem, durch die Anfangsfunktion \vec{g} vorgegebenen unendlich dimensionalen Zustandsraum \mathcal{C} zu beschreiben.² Dieser erweiterte Zustands-

²Dies ist auch der Grund dafür, warum selbst für Delay-Differentialgleichungen mit diskreten Retardierungen eine Anfangsfunktion über dem gesamten Retardierungsintervall vorgegeben ist.

vektor wird aus der Trajektorie $\vec{q}(t) \in \Gamma$ durch die Vorschrift

$$\vec{q}_t(\Theta) = \vec{q}(t + \Theta), \quad -\tau \leq \Theta \leq 0 \quad (3.6)$$

gewonnen. Man greift also die Trajektorie $\vec{q}(t)$ im Intervall $[t - \tau, t]$ ab und ordnet diesen Abschnitt dem erweiterten Zustandsvektor \vec{q}_t zu (vgl. Abbildung 3.3).

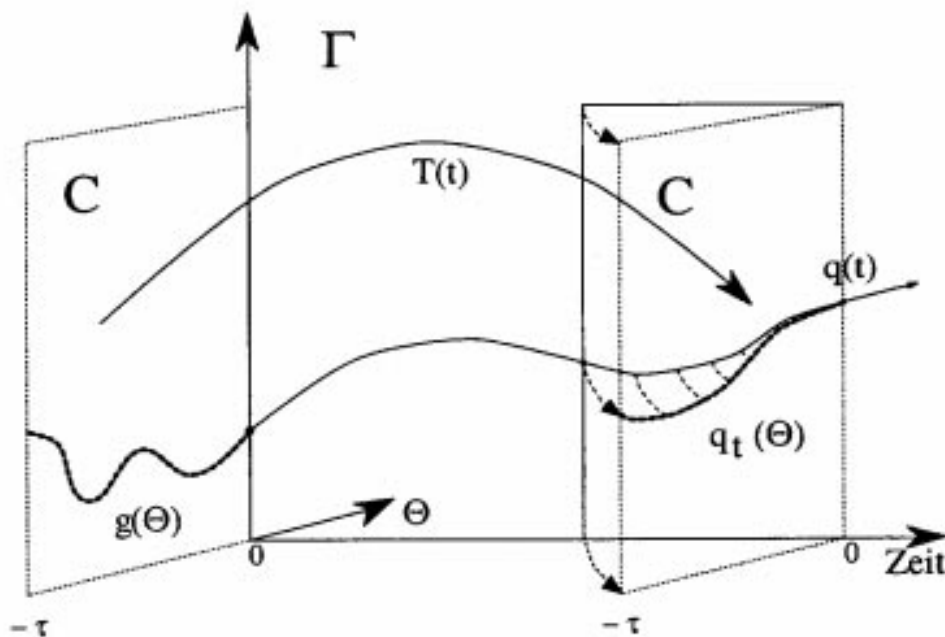


Abb. 3.3: Zusammenhang der Lösungskurve $\vec{q}(t)$ mit dem erweiterten Zustandsvektor $\vec{q}_t(\Theta)$. Sei die Trajektorie im Zustandsraum Γ durch den Zustandsvektor $\vec{q}(t)$ gegeben, dann erhält man hieraus den erweiterten Zustandsvektor \vec{q}_t , indem man die Trajektorie im Intervall $[t - \tau, t]$ abgreift und dieses Intervall auf die (\vec{q}_t, Θ) -Ebene umklappt.

Gleichung (3.6) ermöglicht es, die Dynamik des zeitlich verzögerten Systems vollständig im erweiterten Zustandsraum C zu beschreiben. Führt man nämlich dazu einen nicht-linearen Lösungsoperator \mathcal{T} ein, der die Anfangsfunktion \vec{g} auf den erweiterten Zustandsvektor \vec{q}_t zur Zeit t abbildet (vgl. Abbildung 3.3)

$$\vec{q}_t(\Theta) = (\mathcal{T}\vec{g})(\Theta), \quad -\tau \leq \Theta \leq 0, \quad (3.7)$$

dann folgt die Eindeutigkeit dieser Abbildung aus den Halbgruppeneigenschaften des nichtlinearen Lösungsoperators

$$\mathcal{T}(t+s) = \mathcal{T}(t)\mathcal{T}(s), \quad t, s \geq 0, \quad \text{mit } \mathcal{T}(0) = \mathcal{I}. \quad (3.8)$$

Um zu einer (3.1) und (3.5) entsprechenden Formulierung des Anfangswertproblems im erweiterten Zustandsraum \mathcal{C} zu gelangen, differenziert man (3.7) bezüglich der Zeit t und erhält

$$\frac{d}{dt} \vec{q}_t(\Theta) = (\mathcal{A} \vec{q}_t)(\Theta), \quad -\tau \leq \Theta \leq 0. \quad (3.9)$$

Der zu \mathcal{T} gehörende infinitesimale Generator \mathcal{A} wird hierbei durch

$$(\mathcal{A} \vec{q}_t)(\Theta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [(\mathcal{T}(\epsilon) \vec{q}_t)(\Theta) - \vec{q}_t(\Theta)] \quad (3.10)$$

definiert. Um den Grenzübergang durchzuführen, hat man zu beachten, daß nach Abbildung 3.4 der Lösungsoperator $\mathcal{T}(\epsilon)$ bei einer Anwendung auf \vec{q}_t verschiedenartig wirkt.

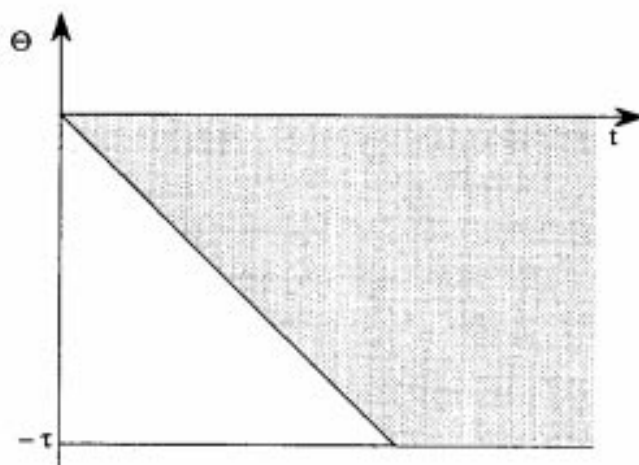


Abb. 3.4: Definitionsbereich einer Funktionaldifferentialgleichung. Im schraffierten Gebiet wirkt der nichtlineare Lösungsoperator \mathcal{T} auf den erweiterten Zustandsvektor \vec{q}_t selbst, während im nichtschraffierten Gebiet die Anfangsbedingung \vec{g} maßgebend ist.

Mit den Gleichungen (3.1) und (3.5) ergibt sich nämlich

$$(\mathcal{T}(\epsilon)\vec{q}_i)(\Theta) = \begin{cases} \vec{q}(t + \Theta + \epsilon) & , \quad t + \Theta + \epsilon \leq t, \\ \vec{q}(t) + \int_t^{t+\Theta+\epsilon} \vec{N}(\vec{q}(s), \vec{q}(s-\tau)) ds & , \quad t + \Theta + \epsilon > t. \end{cases} \quad (3.11)$$

Die explizite Gestalt des infinitesimalen Generators \mathcal{A} kann folgendermaßen bestimmt werden: Nimmt man an, daß sich das nichtlineare Vektorfeld \vec{N} in eine Taylorreihe um eine stationäre Lösung \vec{q}_{stat} entwickeln läßt, so hat die i -te Komponente eines typischen Terms zweiter Ordnung die Form

$$N_{ijk}^{(2)} q_j(t) q_k(t - \tau). \quad (3.12)$$

Drückt man die in dem Argument von \vec{N} auftauchenden Zustandsvektoren $\vec{q}(t)$ und $\vec{q}(t - \tau)$ durch den erweiterten Zustandsvektor \vec{q}_i über

$$\vec{q}(t) = \int_{-\tau}^0 d\Theta \delta(\Theta) \vec{q}_i(\Theta) \quad \text{und} \quad \vec{q}(t - \tau) = \int_{-\tau}^0 d\Theta \delta(\Theta + \tau) \vec{q}_i(\Theta) \quad (3.13)$$

aus und führt diese Prozedur für jeden Term in der Taylorreihe durch, dann wird das nichtlineare Vektorfeld $\vec{N}(\vec{q}(t), \vec{q}(t - \tau))$ in ein Funktional von \vec{q}_i mit der expliziten Darstellung

$$\mathcal{N}[\vec{q}_i(\cdot)] = \sum_{k=1} \mathcal{N}^{(k)}[\vec{q}_i(\cdot)], \quad (3.14)$$

mit

$$\mathcal{N}_i^{(k)}[\vec{q}_i(\cdot)] = \int_{-\tau}^0 d\Theta_1 \cdots \int_{-\tau}^0 d\Theta_k w_{i j_1 \dots j_k}^{(k)}(\Theta_1, \dots, \Theta_k) q_{t, j_1}(\Theta_1) \cdots q_{t, j_k}(\Theta_k) \quad (3.15)$$

überführt. Für den Fall von Delay-Differentialgleichungen sind die matrixwertigen Dichten $w^{(k)}$ Linearkombinationen von δ -Funktionen. Integro-Differentialgleichungen werden hingegen durch stückweise stetige Dichten $w^{(k)}$ beschrieben.

Die explizite Gestalt des infinitesimalen Generators erhält man aus Gleichung (3.10) im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ zu

$$(\mathcal{A}\vec{q}_i)(\Theta) = \begin{cases} \frac{d}{d\Theta} \vec{q}_i(\Theta) & , \quad -\tau \leq \Theta < 0, \\ \mathcal{N}[\vec{q}_i(\cdot)] & , \quad \Theta = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Mit (3.9) und (3.16) ist es gelungen, das dynamische Verhalten eines zeitlich verzögerten Systems alleinig durch Größen zu beschreiben, die in dem unendlich dimensional

erweiterten Zustandsraum \mathcal{C} definiert sind.³ Erwähnt sei an dieser Stelle, daß man zu dem Grenzfall gewöhnlicher Differentialgleichungen gelangt, indem man das Retardierungsintervall auf die Länge Null schrumpfen läßt, wodurch der Umklappmechanismus in Abbildung 3.3 entfällt und $\bar{q}_i(0)$ mit der Lösungskurve $\bar{q}(t)$ zusammenfällt. Mathematisch drückt sich dieser Grenzfall aus durch

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \bar{q}_i(\Theta) = \lim_{\Theta \rightarrow 0} \bar{q}_i(\Theta) = \bar{q}_i(0) \equiv \bar{q}(t). \quad (3.18)$$

3.3 Lineare Systeme

Die folgenden Überlegungen dienen dazu, Aussagen über das Spektrum des infinitesimalen Generator \mathcal{A}_L des linearen Problems zu gewinnen, um damit das lineare Eigenwertproblem vollständig zu lösen.

3.3.1 Stabilitätsanalyse in unendlich dimensionalen Systemen

Eine Systemanalyse der Synergetik startet in der Regel mit dem Auffinden eines Referenzzustandes, welcher für einen gewissen Kontrollparameterbereich stabil ist. Durch Verändern der Kontrollparameter kann diese stabile Lösung destabilisiert werden und zu selbstorganisierten Strukturbildungen führen. Eine zentrale Rolle zur Bestimmung der Instabilitätsgrenzen kommt dabei der linearen Stabilitätsanalyse zu. Ihre Bedeutung gewinnt sie in der Untersuchung endlich dimensionaler Systeme dadurch, daß sie nicht nur Aussagen über das Stabilitätsverhalten eines infinitesimal gestörten Systems machen kann, sondern Rückschlüsse auf das lokale Stabilitätsverhalten des vollen nichtlinearen Systems erlaubt. Wir werden sehen, daß eine entsprechende Aussage auch auf den Fall unendlich dimensionaler Systeme übertragbar sein wird.

³In der mathematischen Literatur wird eine Funktionaldifferentialgleichung häufig durch

$$\frac{d}{dt} \bar{q}(t) = \mathcal{N}[\bar{q}_i(\cdot)], \quad t \geq 0 \quad \text{mit} \quad \bar{q} \in R^n, \quad \bar{q}_i \in \mathcal{C}([- \tau, 0], R^n) \quad (3.17)$$

eingeführt. Obwohl sich hiermit Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung nachweisen lassen, steht demgegenüber der Nachteil, daß die zeitliche Änderung des Zustandsvektors weiterhin in einem endlich dimensionalen Zustandsraum beschrieben wird, während das nichtlineare vektorwertige Funktional \mathcal{N} auf Elemente des erweiterten unendlich dimensionalen Zustandsraumes wirkt.

Angenommen, das nichtlineare zeitlich verzögerte System befinde sich für einen gewissen Kontrollparameterbereich in dem Referenzzustand $\vec{q}_{Stat} \in \Gamma$. Im einfachsten Fall ist dieser zeitunabhängig und kann entweder mit Gleichung (3.1) oder (3.9) und (3.16) aus

$$\vec{N}(\vec{q}_{Stat}, \vec{q}_{Stat}) = 0, \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{N}[\vec{q}_{Stat}] = 0 \quad (3.19)$$

bestimmt werden. In Analogie zu Kapitel 2 analysieren wir das Verhalten des nichtlinearen Systems in der Umgebung dieses Referenzzustandes, indem wir kleine Abweichungen \vec{q}_t von \vec{q}_{Stat} betrachten. Setzt man

$$\vec{q}_t(\Theta) = \vec{q}_{Stat} + \tilde{\vec{q}}_t(\Theta), \quad -\tau \leq \Theta \leq 0 \quad (3.20)$$

in die Gleichungen (3.9), (3.14) und (3.16) ein, so ergibt sich in einer linearen Näherung

$$\frac{d}{dt} \tilde{\vec{q}}_t(\Theta) = (\mathcal{A}_L \tilde{\vec{q}}_t)(\Theta), \quad -\tau \leq \Theta \leq 0, \quad (3.21)$$

$$(\mathcal{A}_L \tilde{\vec{q}}_t)(\Theta) = \begin{cases} \frac{d}{d\Theta} \tilde{\vec{q}}_t(\Theta) & , \quad -\tau \leq \Theta < 0, \\ \mathcal{L}[\tilde{\vec{q}}_t(\cdot)] & , \quad \Theta = 0, \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\mathcal{L}[\tilde{\vec{q}}_t(\cdot)] = \int_{-\tau}^0 d\Theta w(\Theta) \tilde{\vec{q}}_t(\Theta), \quad (3.23)$$

wobei wir die Tilde wieder weggelassen haben. Das vektorwertige Funktional \mathcal{L} stellt die lineare Approximation von \mathcal{N} in der Umgebung des Referenzzustandes \vec{q}_{Stat} dar. Seine matrixwertige Dichteverteilung w ergibt sich aus der Funktionalableitung

$$w(\Theta) = \left. \frac{\delta \mathcal{N}[\tilde{\vec{q}}_t(\cdot)]}{\delta \tilde{\vec{q}}_t(\Theta)} \right|_{\tilde{\vec{q}}_t = \vec{q}_{Stat}}, \quad -\tau \leq \Theta \leq 0. \quad (3.24)$$

3.3.2 Eigenwertproblem

Die Kenntnis des infinitesimalen Generators \mathcal{A}_L gestattet es uns, Eigenfunktionen $\vec{\phi}^\lambda$ zu \mathcal{A}_L in dem erweiterten Zustandsraum \mathcal{C} zu konstruieren. Setzt man hierzu den Ansatz

$$\vec{q}_t(\Theta) = \vec{\phi}^\lambda(\Theta) e^{\lambda t}, \quad -\tau \leq \Theta \leq 0 \quad (3.25)$$

in die lineare Evolutionsgleichung (3.21-23) ein, so erhält man für den infinitesimalen Generator \mathcal{A}_L das folgende Eigenwertproblem

$$\left(\mathcal{A}_L \vec{\phi}^\lambda\right)(\Theta) = \lambda \vec{\phi}^\lambda(\Theta), \quad -\tau \leq \Theta \leq 0. \quad (3.26)$$

Wertet man dieses Eigenwertproblem in dem halboffenen Intervall $[-\tau, 0)$ aus, so ergibt sich für die Eigenfunktionen $\vec{\phi}^\lambda$

$$\vec{\phi}^\lambda(\Theta) = \vec{\phi}^\lambda(0)e^{\lambda\Theta}, \quad -\tau \leq \Theta < 0. \quad (3.27)$$

Die noch unbestimmten Eigenwerte λ werden durch die Anschlußbedingung an der Stelle $\Theta = 0$ festgelegt, die zu folgender Eigenwertgleichung für die Matrix $L(\lambda)$ führt

$$L(\lambda)\vec{\phi}^\lambda(0) = \lambda\vec{\phi}^\lambda(0), \quad \text{mit} \quad L(\lambda) = \int_{-\tau}^0 d\Theta w(\Theta)e^{\lambda\Theta}. \quad (3.28)$$

Nichttriviale Lösungen erfordern das Verschwinden der Koeffizientendeterminante. Dies führt zu einer transzendenten charakteristischen Gleichung für die Eigenwerte λ

$$\det(L(\lambda) - \lambda I) = 0. \quad (3.29)$$

Für eine nichtlineare Analyse des zeitlich verzögerten Systems sind die Spektraleigenschaften von \mathcal{A}_L von entscheidender Bedeutung. Deshalb soll im folgenden Abschnitt die charakteristische Gleichung (3.29) ausführlich diskutiert werden.

3.3.3 Die charakteristische Gleichung

Die transzendente Eigenwertgleichung (3.29) besitzt eine unendliche Anzahl von komplexwertigen Eigenwerten λ . Diese Struktur der charakteristischen Gleichung ist allen Funktionaldifferentialgleichungen mit beschränkter Retardierung⁴ gemein und erschwert eine mathematische Theorie außerordentlich. Da über die Lage der Eigenwerte in der komplexen Ebene selbst für die einfachsten Funktionaldifferentialgleichungen wenig bekannt ist, und ein Verfahren zur genauen Bestimmung der Eigenwerte sich kaum finden lassen wird, ist man auf die wenigen Resultate angewiesen, die über diese

⁴Für zeitlich unbeschränkte Retardierungen ist die charakteristische Gleichung von anderer Struktur. Insbesondere können in diesem Fall auch nur endlich viele Eigenwerte existieren.

Gleichung existieren. Dabei kommt dem Begriff eines exponentiellen Polynoms eine entscheidende Rolle zu.

Während die charakteristische Gleichung einer gewöhnlichen Differentialgleichung die Form eines Polynoms für den komplexen Eigenwert λ annimmt, hat die charakteristische Gleichung einer Funktionaldifferentialgleichung mit zueinander kommensurablen zeitlichen Verzögerungen die allgemeine Gestalt $P(\lambda, e^\lambda) = 0$, wobei $P(\lambda, e^\lambda)$ ein sogenanntes exponentielles Polynom (Quasipolynom) der Form $P(\lambda, e^\lambda) = \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^s a_{mn} \lambda^m e^{n\lambda}$ darstellt. Unter dem führenden Term eines solchen exponentiellen Polynoms (falls es einen solchen geben sollte) versteht man den Koeffizienten $a_{rs} \lambda^r e^s$ falls $a_{rs} \neq 0$, und falls für jeden anderen Term $a_{mn} \lambda^m e^{n\lambda}$ mit $a_{mn} \neq 0$ entweder $r > m, s > n$ oder $r = m, s > n$ oder $s = n, r > m$ gilt.

Hat das zu einer Funktionaldifferentialgleichung gehörende exponentielle Polynom einen führenden Term, dann gelten folgende Aussagen [38]:

- \mathcal{A}_L besitzt ein reines Punktspektrum mit einer unendlichen Anzahl von Eigenwerten.
- In jedem endlichen Streifen parallel zur imaginären Achse liegen nur endlich viele Eigenwerte.
- Die Eigenwerte häufen sich für $Re(\lambda) \rightarrow -\infty$.
- Unabhängig von der Wahl der Kontrollparameter ist das Spektrum des infinitesimalen Generators \mathcal{A}_L nach oben beschränkt.

Hat das exponentielle Polynom $P(\lambda, e^\lambda)$ dagegen keinen führenden Term, so hat die dazugehörige charakteristische Gleichung $P(\lambda, e^\lambda) = 0$ unendlich viele Eigenwerte mit beliebig großem Realteil.⁵

Das fundamentale Stabilitätsresultat für Funktionaldifferentialgleichungen geht auf eine Verallgemeinerung des Routh-Hurwitz Kriteriums durch Pontryagin aus dem Jahre 1942 zurück (siehe z.B. [3]):

Es liege ein exponentielles Polynom $P(\lambda, e^\lambda)$ mit führendem Term vor. Dieses soll

⁵Ein Beispiel für ein exponentielles Polynom ohne führenden Term stellt z. B. die lineare avancierte Funktionaldifferentialgleichung $\dot{z}(t) = \alpha z(t + \tau)$ mit beliebigem reellen Koeffizienten α dar.

für $\lambda = i\Omega$, mit $\Omega \in \mathbb{R}$ einer beliebigen reellen Zahl in seinen Real- und Imaginärteil gemäß $P(i\Omega, e^{i\Omega}) = F(\Omega) + iG(\Omega)$ aufgespalten sein. Eine notwendige und hinreichende Bedingung, daß alle Eigenwerte der zu dem exponentiellen Polynom gehörenden charakteristischen Gleichung die Bedingung $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ erfüllen, ergibt sich aus den drei folgenden zueinander äquivalenten Bedingungen:

- Alle Nullstellen der reellen Funktion $F(\Omega)$ sowie von $G(\Omega)$ sind reell, einfach und zwischen je zwei Nullstellen einer der beiden Funktionen befindet sich mindestens eine Nullstelle der anderen Funktion. Weiterhin wird die Ungleichung $G'(\Omega)F(\Omega) - G(\Omega)F'(\Omega) > 0$ für zumindest eine Nullstelle $\tilde{\Omega}$ erfüllt.
- Alle Nullstellen von $F(\Omega)$ sind reell und einfach, und die Ungleichung $G(\Omega)F'(\Omega) < 0$ wird für alle Nullstellen $\tilde{\Omega}$ von $F(\Omega)$ erfüllt.
- Alle Nullstellen von $G(\Omega)$ sind reell und einfach, und die Ungleichung $G'(\Omega)F(\Omega) > 0$ wird für alle Nullstellen $\tilde{\Omega}$ von $G(\Omega)$ erfüllt.

Die aufgeführten Eigenschaften sind, wie bereits erwähnt, auf Funktionaldifferentialgleichungen beschränkt, deren zeitliche Retardierungen rationale Verhältnisse zueinander bilden, denn nur in diesem Fall läßt sich ein exponentielles Polynom der oben angegebenen Form einführen. Einen Überblick über Stabilitätsaussagen für Funktionaldifferentialgleichungen mit inkommensurablen zeitlichen Verzögerungen findet man in [57].

3.3.4 Adjungiertes Eigenwertproblem

Da der infinitesimale Generator \mathcal{A} keinen selbstadjungierten Operator darstellt, erweist es sich als notwendig, zusätzlich zu dem Eigenfunktionensystem $\{\vec{\phi}^{(i)}\}$ ein dazu adjungiertes in einem zu \mathcal{C} dualen Raum zu konstruieren. Die Verbindung beider Funktionenräume über eine geeignet zu wählende Bilinearform wird durch den Fredholmschen

Alternativsatz⁶ für die inhomogene Version der Gleichung (3.26) motiviert

$$\left([\mathcal{A}_L - \lambda \mathcal{I}] \tilde{\zeta}^\lambda \right) (\Theta) = \tilde{\chi}(\Theta), \quad -\tau \leq \Theta \leq 0. \quad (3.30)$$

Deren Lösung läßt sich für das Intervall $\Theta \in [-\tau, 0)$ schreiben als

$$\tilde{\zeta}^\lambda(\Theta) = \tilde{\zeta}^\lambda(0) e^{\lambda\Theta} + \int_0^\Theta ds e^{\lambda(\Theta-s)} \tilde{\chi}(s). \quad (3.31)$$

Im Falle $\Theta = 0$ geht Gleichung (3.30) über in

$$\int_{-\tau}^0 d\Theta w(\Theta) \tilde{\zeta}^\lambda(\Theta) - \lambda \tilde{\zeta}^\lambda(0) = \tilde{\chi}(0). \quad (3.32)$$

Setzt man (3.31) in (3.32) ein, erhält man die Lösungsbedingung

$$[L(\lambda) - \lambda \mathcal{I}] \tilde{\zeta}^\lambda(0) = \tilde{\chi}(0) - \int_{-\tau}^0 d\Theta \int_0^\Theta ds e^{-\lambda(s-\Theta)} w(\Theta) \tilde{\chi}(s). \quad (3.33)$$

Aus den Gleichungen (3.31) und (3.33) ist ersichtlich, daß die inhomogene Gleichung (3.30) nur dann eine eindeutige Lösung besitzt, wenn die transzendente Gleichung (3.29) nicht erfüllt ist. In diesem Fall lautet die Lösung

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}^\lambda(\Theta) &= \left([\mathcal{A}_L - \lambda \mathcal{I}]^{-1} \tilde{\chi} \right) (\Theta) \\ &= [L(\lambda) - \lambda \mathcal{I}]^{-1} \left[\tilde{\chi}(0) - \int_{-\tau}^0 d\Theta \int_0^\Theta ds e^{-\lambda(s-\Theta)} w(\Theta) \tilde{\chi}(s) \right] e^{\lambda\Theta} \\ &\quad + \int_0^\Theta ds e^{\lambda(\Theta-s)} \tilde{\chi}(s). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Diese Lösungsbedingung legt darüber hinaus die Einführung des erweiterten dualen Zustandsraums \mathcal{C}^\dagger und einer Bilinearform nahe. Angenommen, \mathcal{C}^\dagger bestehe aus n -dimensionalen vektorwertigen Funktionen, die auf dem Intervall $[0, \tau]$ definiert sind,

⁶Der Fredholmsche Alternativsatz besagt, daß die Operatorgleichung $Tx = y$ genau dann lösbar ist, wenn das Skalarprodukt $\langle y, z \rangle = 0 \quad \forall z$, wobei z im Nullraum des adjungierten Operators T^\dagger liegen soll, also $T^\dagger z = 0$ erfüllt sein muß. Dabei spielt es keine Rolle, ob der Funktionenraum bzgl. einer vorgegebenen Norm vollständig ist.

dann läßt sich die gewünschte Bilinearform durch

$$\left(\vec{\psi}^\dagger, \vec{\phi}\right) = \left\langle \vec{\psi}^\dagger(0), \vec{\phi}(0) \right\rangle - \int_{-\tau}^0 d\Theta \int_0^\Theta ds \left\langle \vec{\psi}^\dagger(s - \Theta), w(\Theta) \vec{\phi}(s) \right\rangle \quad (3.35)$$

für alle $\vec{\phi} \in \mathcal{C}$ und $\vec{\psi}^\dagger \in \mathcal{C}^\dagger$ definieren.⁷ Im Grenzfall ($\tau \rightarrow 0$) geht die Bilinearform (3.35) in das kanonische Skalarprodukt über.

Wir können mit diesen Definitionen Gleichung (3.33) in der übersichtlicheren Form

$$\left[W_{ij}(\lambda) - \lambda \delta_{ij} \right] \zeta_j^\lambda = \left(\vec{\alpha}_i^\dagger, \vec{\chi} \right). \quad (3.36)$$

schreiben. Die vektorwertigen Funktionen $\vec{\alpha}_i^\dagger$, die im dualen Zustandsraum \mathcal{C}^\dagger definiert sind, ergeben sich zu

$$\vec{\alpha}_i^\dagger(s) = e^{-\lambda s} \vec{e}_i^\dagger, \quad s \in [0, \tau], \quad (3.37)$$

wobei \vec{e}_i^\dagger die i -th Spalte der Einheitsmatrix I darstellt. Die eingeführte Bilinearform ermöglicht es also, die Fredholmalternative in derselben Weise einzuführen wie im Falle einer gewöhnlichen Differentialgleichung, für die ein kanonisches Skalarprodukt existiert.

Im folgenden wird die Bilinearform (3.35) dazu verwendet eine Evolutionsgleichung des linearen Systems in dem dualen erweiterten Zustandsraum \mathcal{C}^\dagger zu formulieren. Die Dynamik des zeitlich verzögerten Systems kann entweder durch einen erweiterten Zustandsvektor $\vec{q}_t \in \mathcal{C}$ oder, äquivalent dazu, durch einen adjungierten Zustandsvektor $\vec{q}_t^\dagger \in \mathcal{C}^\dagger$ beschrieben werden. Dabei ist zu berücksichtigen, daß eine Beschreibung durch \vec{q}_t einer Vorwärtsentwicklung für $t \geq 0$ entspricht, eine Beschreibung durch den dualen Zustandsvektor \vec{q}_t^\dagger hingegen einer zeitlich rückwärts gerichteten Evolution für $t \leq 0$. Beide können jedoch durch

$$\vec{q}_t^\dagger(s) = \vec{q}_{-t}^\dagger(-s), \quad 0 \leq s \leq \tau \quad (3.38)$$

⁷Es bleibt anzumerken, daß durch diese Wahl der Bilinearform jedes zeitlich verzögerte System sein eigenes Skalarprodukt induziert, welches i.a. nicht die Eigenschaften des gewöhnlichen Skalarproduktes aufweist. Diese sind nur in dem speziellen Fall erfüllt, wenn die matrixwertigen Dichteverteilungen $w(\Theta)$ symmetrisch und positiv definit für alle Werte von $\Theta \in [-\tau, 0]$ sind.

miteinander in Verbindung gebracht werden. Eine Evolutionsgleichung im Dualraum C^1 erhält man aus der Forderung einer zeitunabhängigen Bilinearform, d.h.,

$$\frac{d}{dt}(\vec{q}_t^t, \vec{q}_t) = 0, \quad (3.39)$$

die unmittelbar zu der Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\vec{q}_t^t(s) = -(\mathcal{A}_L^t \vec{q}_t^t)(s), \quad 0 \leq s \leq \tau \quad (3.40)$$

führt. Die explizite Form des infinitesimalen Generators wird über die Bilinearform durch

$$(\vec{q}_t^t, \mathcal{A}_L \vec{q}_t) = (\mathcal{A}_L^t \vec{q}_t^t, \vec{q}_t) \quad (3.41)$$

gewonnen. Wendet man deshalb Gleichungen (3.22-23) auf die Gleichungen (3.35) und (3.41) an und führt eine partielle Integration durch, dann läßt sich der duale infinitesimale Generator \mathcal{A}_L^t schreiben als

$$(\mathcal{A}_L^t \vec{q}_t^t)(s) = \begin{cases} -\frac{d}{ds}\vec{q}_t^t(s) & , \quad 0 < s \leq \tau, \\ \mathcal{L}^t[\vec{q}_t^t(\cdot)] & , \quad s = 0, \end{cases} \quad (3.42)$$

$$\mathcal{L}^t[\vec{q}_t^t(\cdot)] = \int_0^\tau ds \vec{q}_t^t(s) w(-s). \quad (3.43)$$

Das zu Gleichung (3.26) duale Eigenwertproblem für die linksseitigen Eigenfunktionen $\vec{\psi}^{\vec{\lambda}}$ lautet infolgedessen⁸

$$(\mathcal{A}_L^t \vec{\psi}^{\vec{\lambda}})(s) = \lambda \vec{\psi}^{\vec{\lambda}}(s), \quad 0 \leq s \leq \tau. \quad (3.44)$$

In Analogie zu dem ursprünglich formulierten Eigenwertproblem kann man $\vec{\psi}^{\vec{\lambda}}$ wieder in Vektor- und Funktionsanteil gemäß

$$\vec{\psi}^{\vec{\lambda}}(s) = \vec{\psi}^{\vec{\lambda}}(0) e^{-\lambda s}, \quad 0 \leq s \leq \tau \quad (3.45)$$

⁸Die Verwendung unterschiedlicher Notationen für die Eigenfunktionen $\vec{\phi}^{\vec{\lambda}}$ und den dazu dualen Eigenfunktionen $\vec{\psi}^{\vec{\lambda}}$ rührt daher, daß der infinitesimale Generator \mathcal{A}_L im allgemeinen nicht selbstadjungiert ist. Dadurch wird ausgeschlossen, daß die jeweiligen Eigenfunktionen durch Transposition und Substitution von $\Theta = -s$ ineinander überführt werden können.

separieren, wobei $\vec{\psi}^{\dagger\lambda}(0)$ den linksseitigen Eigenvektor zu der Matrix $L(\lambda)$ darstellt

$$\vec{\psi}^{\dagger\lambda}(0)L(\lambda) = \lambda\vec{\psi}^{\dagger\lambda}(0). \quad (3.46)$$

Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, daß die Eigenfunktionen $\vec{\phi}^\lambda$ und $\vec{\psi}^{\dagger\lambda}$ biorthonormal zueinander sind.

3.3.5 Biorthonormalitätsrelationen

Um die Biorthogonalität für verschiedene Eigenwerte $\mu \neq \lambda$ zu zeigen, benützen wir die explizite Form der Bilinearform (3.35) und wenden darauf die Gleichungen (3.27) und (3.45) an

$$\langle \vec{\psi}^{\dagger\lambda}, \vec{\phi}^\mu \rangle = \langle \vec{\psi}^{\dagger\lambda}(0), \vec{\phi}^\mu(0) \rangle - \left\langle \vec{\psi}^{\dagger\lambda}(0), \left[\int_{-\tau}^0 d\Theta \int_0^\Theta ds e^{-\lambda(\tau-\Theta)} w(\Theta) e^{\mu s} \right] \vec{\phi}^\mu(0) \right\rangle. \quad (3.47)$$

Führt man die Integration über s aus, so ergibt sich für die rechte Seite

$$\langle \vec{\psi}^{\dagger\lambda}(0), \vec{\phi}^\mu(0) \rangle - \left\langle \vec{\psi}^{\dagger\lambda}(0), \left[\int_{-\tau}^0 d\Theta \frac{[e^{(\mu-\lambda)\Theta} - 1] e^{\lambda\Theta}}{\mu - \lambda} w(\Theta) \right] \vec{\phi}^\mu(0) \right\rangle. \quad (3.48)$$

Die Biorthogonalität folgt nun unmittelbar aus der Eigenwertgleichung (3.28)

$$\langle \vec{\psi}^{\dagger\lambda}(0), \vec{\phi}^\mu(0) \rangle - \frac{1}{\mu - \lambda} \langle \vec{\psi}^{\dagger\lambda}(0), [L(\mu) - L(\lambda)] \vec{\phi}^\mu(0) \rangle = 0. \quad (3.49)$$

Um den biorthogonalen Satz von Eigenfunktionen zu normieren, führen wir eine Normierungskonstante N_λ durch

$$\vec{\phi}^\lambda(0) = N_\lambda \vec{\phi}_N^\lambda(0), \quad \vec{\psi}^{\dagger\lambda}(0) = N_\lambda \vec{\psi}_N^{\dagger\lambda}(0) \quad (3.50)$$

ein. Aus der Forderung

$$\langle \vec{\psi}_N^{\dagger\lambda}, \vec{\phi}_N^\lambda \rangle = 1 \quad (3.51)$$

kann man die Normierungskonstante N_λ durch ein analoges Vorgehen wie im vorigen Fall, nur diesmal für $\mu = \lambda$ gewinnen. Es ergibt sich

$$N_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\langle \vec{\psi}_N^{\dagger\lambda}(0), [I - \int_{-\tau}^0 d\Theta w(\Theta) \Theta e^{\lambda\Theta}] \vec{\phi}_N^\lambda(0) \rangle}}. \quad (3.52)$$

Zusammengefaßt lauten die Biorthonormalitätsrelationen jetzt

$$\left(\vec{\psi}^{\lambda}, \vec{\phi}^{\mu}\right) = \delta_{\lambda\mu}. \quad (3.53)$$

3.4 Projektorformalismus

Im folgenden soll das dynamische Verhalten des nichtlinearen zeitlich verzögerten Systems in der Umgebung einer Instabilität untersucht werden. Dazu betrachten wir eine Situation, bei der die Kontrollparameter $\{\sigma_i\}$ so gewählt sind, daß das Spektrum des infinitesimalen Generators \mathcal{A}_L durch die imaginäre Achse von oben beschränkt ist. Ändert man die Kontrollparameter dahingehend, daß einige Eigenwerte die imaginäre Achse überschreiten, dann garantieren die Spektraleigenschaften von \mathcal{A}_L (vgl. Abschnitt 3.3.3), daß nur eine endliche Anzahl von Moden instabil werden. In Abbildung 3.5 ist das zu dieser Situation gehörende Spektrum schematisch dargestellt.

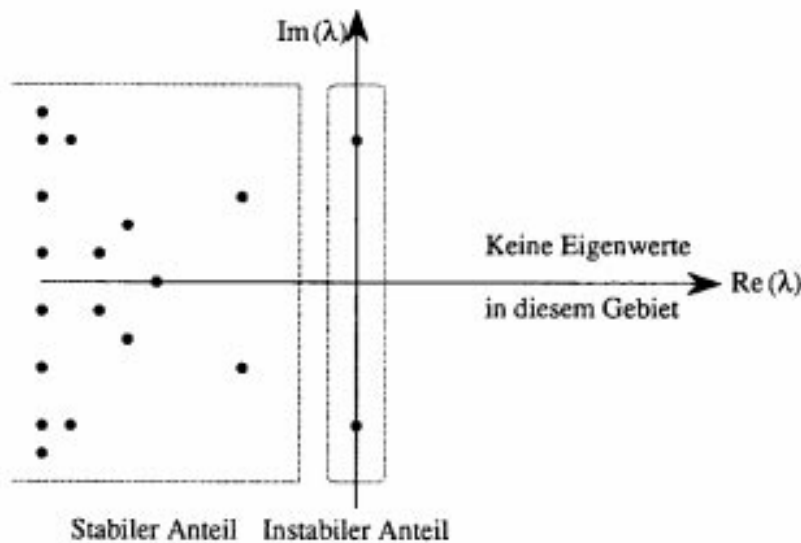


Abb. 3.5: Schematische Darstellung des Spektrums einer Delay-Differentialgleichung an einer Instabilität. Der instabile Teil des Spektrums wird durch diejenigen Eigenwerte aufgespannt, deren Realteil verschwindet. Die Eigenwerte der verbleibenden stabilen Moden sind durch einen endlichen Abstand von den instabilen getrennt.

Diese Spektraleigenschaften legen eine Aufspaltung des erweiterten Zustandsraumes \mathcal{C}

in einen endlich dimensionalen Unterraum \mathcal{U} , der von den linear instabilen Moden (den späteren Ordnungsparametern) aufgespannt wird und einen unendlich dimensionalen Unterraum \mathcal{S} , in dem die Dynamik der stabilen Moden abläuft nahe.

Im Falle gewöhnlicher Differentialgleichungen liefert die Methodik der Synergetik, ausgehend von einer linearen Stabilitätsanalyse, eine Aufspaltung der Bewegungsgleichungen in linear instabile Moden, die späteren Ordnungsparameter, sowie den verbleibenden Teil von linear stabilen Moden. Diese Aufspaltung stellt eines der fundamentalen Konzepte der Synergetik dar, erlaubt sie doch, diejenigen kollektiven Moden zu bestimmen, die für eine selbstorganisierte makroskopische Musterbildung verantwortlich sind. Eine Verallgemeinerung dieser Vorgehensweise auf Funktionaldifferentialgleichungen erscheint nicht offensichtlich, da man es in diesem Fall mit einem unendlich dimensional System von Evolutionsgleichungen zu tun hat. Um zu einer entsprechenden Aufspaltung in kollektive Moden zu gelangen, bedarf es geeignet gewählter Projektionsoperatoren, die diese Aufspaltung ermöglichen.

3.4.1 Definition der Projektoren

Um die Projektoren, mit denen eine Aufspaltung des unendlich dimensional Zustandsraums \mathcal{C} in die beiden invarianten Teilräume \mathcal{U} und \mathcal{S} ermöglicht wird, explizit angeben zu können, nehmen wir an, daß sich genau m Eigenwerte in unmittelbarer Umgebung der imaginären Achse befinden. Die zu diesen Eigenwerten gehörenden Eigenfunktionen $\vec{\phi}^{\lambda_1}, \dots, \vec{\phi}^{\lambda_m}$ stellen somit eine Basis des Unterraums \mathcal{U} dar. Faßt man diese Eigenfunktionen zu der $n \times m$ -matrix

$$\Phi_u(\Theta) = \left(\vec{\phi}^{\lambda_1}(\Theta) \dots \vec{\phi}^{\lambda_m}(\Theta) \right) \quad (3.54)$$

zusammen und analog dazu die adjungierten Eigenfunktionen in eine $m \times n$ -Matrix

$$\Psi_u^\dagger(s) = \begin{pmatrix} \vec{\psi}^{\dagger\lambda_1}(s) \\ \vdots \\ \vec{\psi}^{\dagger\lambda_m}(s) \end{pmatrix}, \quad (3.55)$$

dann läßt sich die Biorthonormalitätsrelation (3.53) in Matrixform schreiben als

$$(\Psi_u^\dagger, \Phi_u) = I. \quad (3.56)$$

Mit diesen Definitionen nehmen das Eigenwertproblem (3.26) und das dazu adjungierte (3.44) die Form

$$\left(\mathcal{A}_L \Phi_u\right)(\Theta) = \Phi_u(\Theta) \Lambda_u, \quad \left(\mathcal{A}_L^\dagger \Psi_u^\dagger\right)(s) = \Lambda_u \Psi_u^\dagger(s) \quad (3.57)$$

an. Λ_u stellt eine $m \times m$ -Matrix in kanonischer Form dar. Der Projektionsoperator \mathcal{P}_U , der auf den endlich dimensionalen Unterraum \mathcal{U} projiziert, lautet

$$\mathcal{P}_u \bullet = \Phi_u(\Theta) \left(\Psi_u^\dagger, \bullet \right). \quad (3.58)$$

Entsprechend führen wir die Projektion auf den zu \mathcal{U} komplementären unendlich dimensionalen Unterraum \mathcal{S} durch den Operator

$$\mathcal{Q}_s \bullet = \left(\mathcal{I} - \mathcal{P}_U \right) \bullet \quad (3.59)$$

ein. Idempotenz und Disjunktheit von \mathcal{P}_u und \mathcal{Q}_s folgen unmittelbar aus Gleichung (3.56).

3.4.2 Untersuchung der Projektoren

Bevor wir die Projektoren auf das nichtlineare Problem (3.9) und (3.16) anwenden, sollen deren Eigenschaften näher untersucht werden. Es wird sich dabei herausstellen, daß die in (3.58) und (3.59) eingeführten Projektoren nur näherungsweise auf einen endlich und einen dazu komplementären unendlich dimensionalen Teilraum projizieren. Um dies zu sehen, spalten wir den erweiterten Zustandsvektor \vec{q}_t des nichtlinearen Problems in die beiden Anteile

$$\vec{q}_t(\Theta) = \vec{U}_t(\Theta) + \vec{S}_t(\Theta), \quad (3.60)$$

auf. \vec{U}_t und \vec{S}_t sind im folgenden noch näher zu spezifizieren. In Analogie zu gewöhnlichen Differentialgleichungen betrachten wir zuerst eine lineare Evolution, für die \vec{U}_t folgendermaßen gewählt werden kann

$$\vec{U}_t(\Theta) = \left(\mathcal{P}_u \vec{q}_t \right)(\Theta) = \Phi_u(\Theta) e^{\Lambda \cdot t} \vec{u}(0). \quad (3.61)$$

$\vec{u}(0)$ wird dabei durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Mit diesem Ansatz wird gewährleistet, daß \vec{U}_t und \vec{S}_t für alle Zeiten Elemente der jeweiligen Unterräume \mathcal{U} und \mathcal{S} sind. Darüber hinaus läßt sich aus dem dynamischen Verhalten von \vec{U}_t im

erweiterten Zustandsraum \mathcal{C} die Dynamik im dazu entsprechenden Zustandsraum Γ ableiten. Definiert man dazu den Zustandsvektor in Γ durch $\vec{U}(t) = \vec{U}_t(0)$, so überprüft man unmittelbar, daß die Bedingung

$$\vec{U}_t(\Theta) = \vec{U}(t + \Theta) \quad (3.62)$$

erfüllt ist. Im nichtlinearen Fall hingegen muß \vec{u} in Gleichung (3.61) als eine zeitlich veränderliche Größe betrachtet werden. Daraus resultieren zwei gegensätzliche Vorgehensweisen: Einerseits sollte ein sich zeitlich änderndes $\vec{u}(0)$ weiterhin im invarianten Unterraum \mathcal{U} liegen. Dies würde den Ansatz

$$\vec{U}_t(\Theta) = \Phi_{\mathbf{u}}(\Theta)e^{\Lambda \cdot t} \vec{u}(t) \quad (3.63)$$

motivieren. Während diese Bewegung zwar weiterhin in \mathcal{U} abläuft, was man daran sieht, daß die Bedingung

$$\left(\mathcal{P}_{\mathbf{u}} \vec{U}_t\right)(\Theta) = \vec{U}_t(\Theta) \quad (3.64)$$

erfüllt wird, zerstört der gewählte Ansatz (3.63) den Zusammenhang zwischen den Zustandsräumen Γ und \mathcal{C} , da die Bedingung (3.62) offensichtlich nicht erfüllt ist.⁹ Um diesen Zusammenhang weiterhin zu gewährleisten, liegt es nahe, den Ansatz (3.63) durch

$$\vec{U}_t(\Theta) = \Phi_{\mathbf{u}}(\Theta)e^{\Lambda \cdot t} \vec{u}_t(\Theta) \quad \text{mit} \quad \vec{u}_t(\Theta) = \vec{u}(t + \Theta) \quad (3.65)$$

zu verallgemeinern. Diesmal jedoch zeigt es sich, daß eine solche Bewegung nicht mehr in dem endlich dimensionalen Unterraum \mathcal{U} ablaufen wird. Wendet man nämlich den Projektor $\mathcal{P}_{\mathbf{u}}$ auf \vec{U}_t an, so gilt

$$\left(\mathcal{P}_{\mathbf{u}} \vec{U}_t\right)(\Theta) \neq \vec{U}_t(\Theta). \quad (3.66)$$

Die Ungleichung (3.66) sagt aus, daß \vec{U}_t Anteile aus dem Unterraum \mathcal{S} enthalten muß. Dieser Gegensatz läßt sich nur durch eine geeignete Näherung lösen, die wir im folgenden motivieren möchten. Aus dem Ansatz (3.65) ist ersichtlich, daß sich $\mathcal{P} \vec{U}_t$ und \vec{U}_t nur durch die Abweichung $\vec{u}_t(\Theta) - \vec{u}_t(0)$ unterscheiden. In der Umgebung einer Instabilität stellt \vec{u}_t jedoch eine langsam veränderliche Größe in beiden Variablen t und Θ dar.

⁹Strenggenommen bedeutet dies, daß die sich ergebenden Evolutionsgleichungen für \vec{U}_t und damit auch \vec{S}_t keine Funktionaldifferentialgleichungen mehr darstellen.

Daher ist es nicht unvernünftig, anzunehmen, daß die Kontrollparameter so gewählt werden können, daß in dem Intervall $\Theta \in [-\tau, 0]$ die folgende Bedingung erfüllt ist

$$\tau \left| \frac{d}{d\Theta} \tilde{u}_i(\Theta) \right| \ll \left| \tilde{u}_i(\Theta) \right|. \quad (3.67)$$

In diesem Fall wird die Bedingung (3.64) näherungsweise erfüllt, so daß die langsam veränderliche Dynamik der linear instabilen Moden im Unterraum \mathcal{U} durch einen Satz von gewöhnlichen Differentialgleichungen beschrieben werden kann.

3.5 Das verallgemeinerte Ordnungsparameterkonzept

Um die Resultate aus Abschnitt 3.4 auf das vollständige nichtlineare Problem anzuwenden, spalten wir das nichtlineare vektorwertige Funktional $\mathcal{N}[\tilde{q}_i]$ in seinen linearen $\mathcal{L}[\tilde{q}_i]$ und nichtlinearen Anteil $\tilde{\mathcal{N}}[\tilde{q}_i]$ gemäß

$$\mathcal{N}[\tilde{q}_i(\cdot)] = \mathcal{L}[\tilde{q}_i(\cdot)] + \tilde{\mathcal{N}}[\tilde{q}_i(\cdot)]. \quad (3.68)$$

auf. Mit den Gleichungen (3.16) und (3.22) nimmt die nichtlineare Evolutionsgleichung (3.9) in dem unendlich dimensionalen erweiterten Zustandsraum \mathcal{C} die Form

$$\frac{d}{dt} \tilde{q}_i(\Theta) = \left(\mathcal{A}_L \tilde{q}_i \right) (\Theta) + X_0(\Theta) \tilde{\mathcal{N}}[\tilde{q}_i(\cdot)], \quad -\tau \leq \Theta \leq 0, \quad (3.69)$$

an. X_0 stellt eine matrixwertige Funktion dar mit den Eigenschaften

$$X_0(\Theta) = \begin{cases} 0 & , \quad -\tau \leq \Theta < 0, \\ 1 & , \quad \Theta = 0. \end{cases} \quad (3.70)$$

3.5.1 Modenamplitudengleichungen

Im Rahmen der in Abschnitt 3.4 diskutierten Näherungen kann man nun die Projektoren \mathcal{P}_u und \mathcal{Q} , auf das nichtlineare Problem (3.69) anwenden und nach [12, 34, 35, 38] verallgemeinerte Ordnungsparameter \vec{u} durch

$$\vec{U}_i(\Theta) = (\mathcal{P}_u \tilde{q}_i)(\Theta) = \Phi_u(\Theta) \vec{u}(t), \quad (3.71)$$

$$\vec{u}(t) = (\Psi_u^\dagger, \tilde{q}_i) \quad (3.72)$$

definieren. Die stabilen Moden \vec{s}_t werden durch

$$\vec{S}_t(\Theta) = (Q_s \vec{q}_t)(\Theta) = \vec{s}_t(\Theta) \quad (3.73)$$

definiert.¹⁰

Projiziert man die nichtlineare Evolutionsgleichung (3.69) auf die beiden Unterräume \mathcal{U} und \mathcal{S} , so erhält man ein gekoppeltes System von nichtlinearen Modenamplitudengleichungen

$$\frac{d}{dt} \vec{u}(t) = \Lambda_u \vec{u}(t) + \left\langle \Psi_u^\dagger(0), \tilde{\mathcal{N}}[\Phi_u(\cdot) \vec{u}(t) + \vec{s}_t(\cdot)] \right\rangle, \quad (3.74)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{s}_t(\Theta) = (\mathcal{A}_L \vec{s}_t)(\Theta) + \left\langle \{X_0(\Theta) - \Phi_u(\Theta) \Psi_u^\dagger(0)\}, \tilde{\mathcal{N}}[\Phi_u(\cdot) \vec{u}(t) + \vec{s}_t(\cdot)] \right\rangle. \quad (3.75)$$

3.5.2 Eliminationsverfahren

Gelingt es, das Versklavungsprinzip der Synergetik auch in dem unendlich dimensionalen Zustandsraum \mathcal{C} zu formulieren, dann lassen sich die stabilen Moden systematisch eliminieren, wodurch ein niedrigdimensionales System von Ordnungsparametergleichungen verbleibt, welches das dynamische Verhalten des nichtlinearen Systems in der Umgebung einer Instabilität beschreibt. Ein solches Eliminationsverfahren läßt sich in der Tat formulieren. Dabei kommt insbesondere der linearisierten Funktionaldifferentialgleichung (3.21-23) besondere Bedeutung zu. Sei nämlich $\tilde{\mathcal{N}}$ ein beschränktes stetig differenzierbares vektorwertiges Funktional seiner Argumente mit $\tilde{\mathcal{N}}[\vec{q}_{stat}] = 0$ sowie $\left. \frac{\delta \tilde{\mathcal{N}}[\vec{q}_{stat}]}{\delta \vec{q}_t} \right|_{\vec{q}_t = \vec{q}_{stat}} = 0$ und liege weiterhin kein Eigenwert der linearisierten Gleichung auf der imaginären Achse, dann stimmt das lokale Stabilitätsverhalten der stationären Lösungen von (3.21-23) mit dem der nichtlinearen Funktionaldifferentialgleichung (3.69) überein¹¹ (siehe z.B. [39]).

¹⁰Wir vermeiden es, eine explizite Darstellung der stabilen Moden \vec{s}_t zu geben, da nicht gewährleistet ist, daß das Eigenfunktionensystem (3.27) den unendlich dimensionalen Zustandsraum \mathcal{C} vollständig aufspannt.

¹¹Für endlich dimensionale Systeme folgt dieses Theorem direkt aus dem Hartman-Grobman-Theorem, welches besagt, daß es einen Homöomorphismus gibt, welcher den Phasenfluß des nichtlinearen Problems lokal auf den dazugehörigen linearen Phasenfluß abbildet. Für Funktionaldifferentialgleichun-

Durch die Transformation auf das unendlich dimensionale gekoppelte System von Modenamplitudengleichungen (3.74) und (3.75) ist es also möglich, die stabilen Moden mittels des Versklavungsprinzips der Synergetik zu eliminieren. Die notwendige Zeitskalenhierarchie wird dadurch gewährleistet, daß an einer Instabilität der Realteil der Eigenwerte der Ordnungsparameter $\bar{u}(t)$ verschwindet, während der der stabilen Moden \bar{s}_i negativ bleibt. Mit denselben Überlegungen wie in Kapitel 2 (vgl. (2.25)) kann man Relaxationszeiten τ_u und τ_s durch

$$\tau_{u,s} \sim \frac{1}{|\operatorname{Re}(\lambda_{u,s})|} \quad (3.76)$$

einführen. Die Zeitskalenhierarchie ergibt sich wieder aus der Bedingung

$$\tau_u \gg \tau_s. \quad (3.77)$$

Gleichung (3.77) drückt aus, daß sich die stabilen Moden auf einer gegenüber den Ordnungsparametern viel schnelleren Zeitskala bewegen. Die Dynamik der stabilen Moden wird daher nach einer kurzen Einschwingphase vollständig von den Ordnungsparametern vorgeschrieben. Anders ausgedrückt; die asymptotische Dynamik wird auf einer zentralen Mannigfaltigkeit ablaufen, die von den Ordnungsparametern aufgespannt wird. Wie in [7, 13, 14] gezeigt wird, läßt sich auch für unendlich dimensionale Systeme die Existenz einer zentralen Mannigfaltigkeit $\bar{h}(\Theta, \bar{u}(t))$ mit den Eigenschaften $\bar{h}(\Theta, 0) = 0$ und $\frac{d\bar{h}(\Theta, 0)}{d\bar{u}} = 0$ zeigen. Das Versklavungsprinzip der Synergetik kann daher in Verallgemeinerung von Gleichung (2.27) folgendermaßen formuliert werden [91]

$$\bar{s}_i(\Theta) = \bar{h}(\Theta, \bar{u}(t)). \quad (3.78)$$

Setzt man Gleichung (3.78) in die Gleichungen (3.74) und (3.75) ein, so erhält man eine implizite Bestimmungsgleichung für die zentrale Mannigfaltigkeit \bar{h}

$$\begin{aligned} & \frac{d\bar{h}(\Theta, \bar{u}(t))}{d\bar{u}} \left[\Lambda_u \bar{u}(t) + \left\langle \Psi_u^\dagger(0), \tilde{\mathcal{N}}[\Phi_u(\cdot)\bar{u}(t) + \bar{h}(\cdot, \bar{u}(t))] \right\rangle \right] = \\ & \left(\mathcal{A}_L \bar{h}(\cdot, \bar{u}(t)) \right) (\Theta) + \left\langle \{X_0(\Theta) - \Phi_u(\Theta)\Psi_u^\dagger(0)\}, \tilde{\mathcal{N}}[\Phi_u(\cdot)\bar{u}(t) + \bar{h}(\cdot, \bar{u}(t))] \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Setzt man die Lösung von Gleichung (3.79) in (3.74) ein, so wird das dynamische Verhalten des nichtlinearen zeitlich verzögerten Systems unter den bereits erwähnten

gen läßt sich hingegen bisher keine Verallgemeinerung des Hartman-Grobman-Theorems angeben [39]. Umso bedeutsamer ist daher die Aussage obigen Theorems.

Näherungen durch das geschlossene endlich dimensionale System von Ordnungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \vec{u}(t) = \Lambda_u \vec{u}(t) + \left\langle \Psi_u^\dagger(0), \tilde{\mathcal{N}}[\Phi_u(\cdot)\vec{u}(t) + \vec{h}(\cdot, \vec{u}(t))] \right\rangle \quad (3.80)$$

beschrieben.

Um die zentrale Mannigfaltigkeit \vec{h} in niedrigster Ordnung zu bestimmen, nimmt man entsprechend dem Vorgehen in Kapitel 2 an, daß das nichtlineare Funktional $\tilde{\mathcal{N}}$ mit Termen der Ordnung $\mathcal{O}(|\vec{q}_i|^r)$ startet. Beschränkt man sich daher auf das genäherte Funktional

$$\tilde{\mathcal{N}}_i[\Phi_u(\cdot)\vec{u}(t) + \vec{h}(\cdot, \vec{u}(t))] \approx \tilde{\mathcal{N}}_i^{(r)}[\Phi_u(\cdot)\vec{u}(t)] \quad (3.81)$$

und benützt die explizite Darstellung aus Gleichung (3.15), so erhält man

$$\tilde{\mathcal{N}}_i^{(r)}[\Phi_u(\cdot)\vec{u}(t)] = \tilde{N}_{i j_1 \dots j_r}^{(r)} u_{j_1}(t) \cdots u_{j_r}(t), \quad (3.82)$$

wobei der $n \times m \times \cdots \times m$ -Tensor $\tilde{N}^{(r)}$ die explizite Darstellung

$$\tilde{N}_{i j_1 \dots j_r}^{(r)} = \int_{-\tau}^0 d\Theta_1 \cdots \int_{-\tau}^0 d\Theta_r w_{i j_1 \dots j_r}^{(r)}(\Theta_1, \dots, \Theta_r) \Phi_{u, j_1 j_1}(\Theta_1) \cdots \Phi_{u, j_r j_r}(\Theta_r) \quad (3.83)$$

hat. Bis zur Ordnung $\mathcal{O}(|\vec{u}|^r)$ kann man die zentrale Mannigfaltigkeit \vec{h} aus dem Ansatz

$$h_i(\Theta, \vec{u}(t)) \approx H_{i j_1 \dots j_r}(\Theta) u_{j_1}(t) \cdots u_{j_r}(t), \quad (3.84)$$

mit dem in seinen letzten r Indices vollsymmetrischen $n \times m \times \cdots \times m$ -Tensor H bestimmen. In Gleichung (3.79) eingesetzt, erhält man für H mit der Näherung (3.81)

$$H_{i j_1 \dots j_r}(\Theta) = \sum_{l=1}^n \tilde{N}_{i j_1 \dots j_r}^{(r)} \left(\left[\mathcal{A}_L - (\lambda_{j_1} + \dots + \lambda_{j_r}) \mathcal{I} \right]^{-1} \times \left[\sum_{l'=1}^m \Phi_{u, l' l'} \Psi_{u, l' l'}^\dagger(0) - X_{0, u}(\cdot) \right] \right) (\Theta), \quad (3.85)$$

wobei λ_j für den j -ten Eigenwert von Λ_u steht. Es ist zu beachten, daß in Gleichung (3.85) über doppelt vorkommende Indices nicht zu summieren ist. Da der Operator $\left[\mathcal{A}_L - (\lambda_{j_1} + \dots + \lambda_{j_r}) \mathcal{I} \right]^{-1}$ in Gleichung (3.85) nur auf Elemente in dem stabilen Unterraum \mathcal{S} wirkt, kann dieser über die Relation (3.34) ausgewertet werden. Um den Formalismus nicht unnötig zu überladen, führen wir die Bestimmung der zentralen Mannigfaltigkeit \vec{h} in dem folgenden Kapitel für den einfacheren Fall einer skalaren

Delay-Differentialgleichung explizit aus.

Mit diesen Ergebnissen ist die Erweiterung der Methodik der Synergetik auf eine allgemeinere Klasse von autonomen Funktionaldifferentialgleichungen abgeschlossen. Durch (3.80) wurde ein geschlossenes endlich dimensionales System von verallgemeinerten Ordnungsparametergleichungen für die nichtlineare Funktionaldifferentialgleichung (3.69) konstruiert, welches näherungsweise die Form von gewöhnlichen Differentialgleichungen annimmt, also keine Gedächtnisterme mehr enthält. Die spontane Entstehung von selbstorganisierten makroskopischen Strukturbildungen kann damit auch in zeitlich verzögerten Systemen systematisch untersucht werden.

Kapitel 4

Dynamische Instabilitäten eines zeitlich verzögerten PLL

Die in diesem Kapitel durchzuführenden Untersuchungen an einem nichtlinearen zeitlich verzögerten Kontrollsystem dienen in erster Linie dazu, das in Kapitel 3 entwickelte Verfahren auf ein konkretes System anzuwenden, bei welchem die Berücksichtigung endlicher Signallaufzeiten zu verzögerungsinduzierten Instabilitäten führen.

Ausgangspunkt der nachfolgenden Experimente war ein elektronischer Phasenregelkreis (PLL) 1. Ordnung¹, in welchen analoge und numerische Verzögerungsleitungen implementiert wurden. Die unproblematische Realisierung sowie das ungewöhnlich reichhaltige dynamische Verhalten haben uns bewogen, diesen Regelkreis als Modellsystem zur Untersuchung von Laufzeiteffekten zu wählen. Die einfache mathematische Struktur der diesem System zugrunde liegenden Modellgleichung erlaubt darüber hinaus einen quantitativen Vergleich der theoretisch abgeleiteten Ergebnisse mit den experimentellen Daten.

PLL's sind in der Regelungstechnik weit verbreitet. Ihre Anwendung erfahren sie überall dort, wo Information über Frequenz und Phase von verrauschten Signalen gewonnen werden soll; so z.B. in der Signalverarbeitung, wo sie zumeist zur Demodulation frequenz- oder amplitudenmodulierter Signale verwendet werden, oder aus einem ver-

¹Ein Phasenregelkreis 1. Ordnung enthält im Unterschied zu Phasenregelkreisen höherer Ordnung keinen Filter und stellt deshalb den einfachst denkbaren PLL dar.

rauschten Signal den deterministischen Anteil herausfiltern helfen. Andere wichtige Anwendungen ergeben sich in der Radartechnik oder bei der Erzeugung frequenz- und phasenstabiler Systeme (Synthesizer) [19].

Obwohl das Grundprinzip eines PLL seit mehr als sechzig Jahren bekannt ist, wurden Untersuchungen des dynamischen Verhaltens meist nur auf der Grundlage einer linearen Theorie durchgeführt. Endliche Laufzeiteffekte, über deren Einfluß man sich in der Regelungstechnik seit langem bewußt ist, äußern sich in dieser Näherung jedoch nur in einem oszillatorischen Verhalten des Phasenfehlersignals. Es mag erstaunen, daß man erst in den letzten Jahren überhaupt begonnen hat, systematische Untersuchungen der nichtlinearen Dynamik von PLL's durchzuführen. So konnten an PLL's 2. Ordnung mit einer äußeren Anregung in bestimmten Parameterbereichen chaotische Lösungen aufgefunden werden [20, 21, 22, 44, 76]. Es sind uns jedoch keine entsprechenden Experimente an zeitlich verzögerten Regelkreisen bekannt, obgleich das Funktionsprinzip ihres einfachsten Vertreters, des PLL 1. Ordnung, eng verwandt ist mit elektro- und akustooptischen bistabilen Schaltkreisen (vgl. Abbildung 4.1), welche zu den bestuntersuchten zeitlich verzögerten nichtlinearen Systeme mit chaotischer Dynamik gerechnet werden dürfen.

Akustooptisches bistabiles System	Phasenregelkreis
Bragg-Zelle	Phasendetektor
Äußere Anregung mit Laserquelle	Referenzsignal
Akustischer Modulationsgenerator	VCO
Intensität des Lasers	Phasenfehlersignal

Abb. 4.1: Vergleich optisch bistabiler Systeme mit Phasenregelkreisen

Hierfür dürfte maßgebend sein, daß ein PLL 1. Ordnung in Abwesenheit von zeitlichen Verzögerungen und stochastischen Einflüssen innerhalb seines Synchronisationsbereichs grundsätzlich stabil ist. Die in diesem Kapitel beschriebenen Experimente können daher als die ersten systematischen Untersuchungen des chaotischen Verhaltens angesehen werden, die an diesem zeitlich verzögerten System durchgeführt wurden.

Der Aufbau des Kapitels gliedert sich wie folgt: In Abschnitt 4.1 wird eine Modellgleichung für das dynamische Verhalten eines PLL 1. Ordnung unter Berücksichtigung endlicher Signallaufzeiten hergeleitet. Daran schließt sich in Abschnitt 4.2 eine theoretische Analyse der Stabilitätsgrenzen sowie eine vollständige Beschreibung der Phasendyna-

mik an der Schwelle zur ersten oszillatorischen Instabilität mit Hilfe des angegebenen verallgemeinerten Konzeptes der Synergetik an. Schließlich werden in Abschnitt 4.3 experimentelle und numerische Resultate des dynamischen Verhaltens des Phasenregelkreises vorgestellt.

4.1 Herleitung der Modellgleichung

Ein PLL besteht im wesentlichen aus einem Referenzoszillator, einem lokalen spannungskontrollierten Oszillator (VCO), dessen Ausgangssignal mit dem Referenzsignal synchronisiert werden soll, einem Tiefpaßfilter und einem Phasendetektor. In dem betrachteten Fall eines PLL 1. Ordnung mit zeitlicher Verzögerung, wurde die endliche Signallaufzeit durch die Implementierung einer Verzögerungsleitung in den Regelkreis eingeführt. Der schematische Aufbau geht aus Abbildung 4.2 hervor.

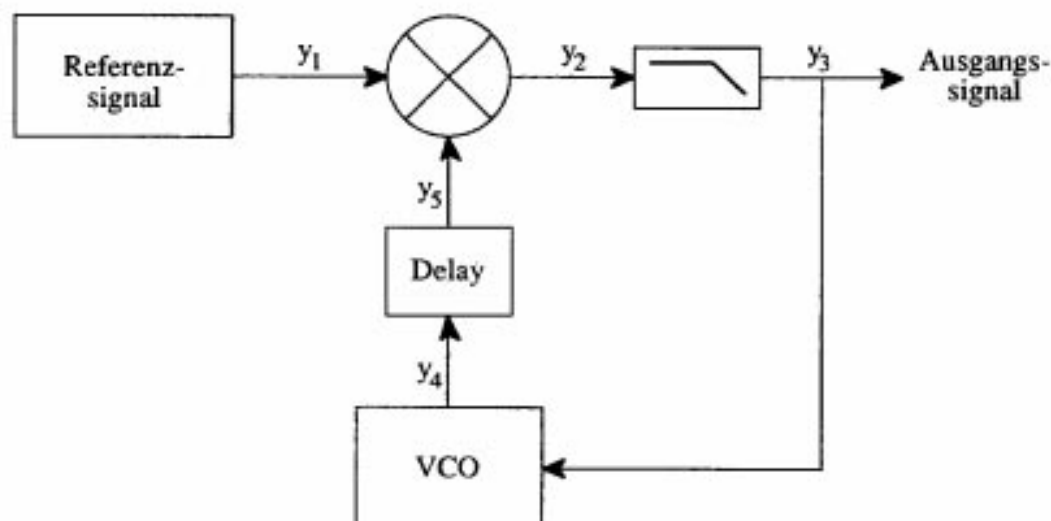


Abb. 4.2: Phasenregelkreis 1. Ordnung mit zeitlicher Verzögerung

Für das Referenzsignal $y_1(t)$ wird eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz ω_0 [rad/s] und der Amplitude A [V/rad] angenommen

$$y_1(t) = A \sin(\Theta(t)), \quad \text{mit} \quad \frac{d}{dt} \Theta(t) = \omega_0. \quad (4.1)$$

Der spannungskontrollierte Oszillator liefert ein Signal $y_4(t)$, dessen Kreisfrequenz pro-

portional zur ankommenden Spannung $y_3(t)$ ist

$$y_4(t) = B \cos(\Psi(t)), \quad \text{mit} \quad \frac{d}{dt}\Psi(t) = \omega + K_1 y_3(t). \quad (4.2)$$

ω ist dabei die zentrale Kreisfrequenz des VCO und K_1 [rad/Vs] dessen Empfindlichkeit.

Die Verzögerungsleitung bewirkt, daß das Ausgangssignal des VCO zeitlich verzögert am Eingang des Mixers ankommt

$$y_5(t) = y_4(t - \tau). \quad (4.3)$$

Der Mixer wird als Phasendetektor eingesetzt und stellt das einzige nichtlineare Element des Phasenregelkreises dar. Für den gewählten Fall einer sinusoidalen Charakteristik liefert er ein Ausgangssignal $y_2(t)$, welches proportional ist zu dem Produkt der beiden Eingangssignale

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \beta y_1(t) y_5(t) \\ &= \mu (\sin[\Theta(t) - \Psi(t - \tau)] + \sin[\Theta(t) + \Psi(t - \tau)]), \end{aligned} \quad (4.4)$$

mit β als einer charakteristischen Konstante des Phasendetektors und $\mu = \frac{\beta AB}{2}$ [V/rad] als Maß für dessen Empfindlichkeit.

Das Signal am Ausgang des Phasendetektors besteht aus einem niederfrequenten (1. Term auf der r.h.s. von (4.4)) und einem hochfrequenten Anteil (2. Term auf der r.h.s. von (4.4)). Der hochfrequente Anteil wird durch einen Tiefpaßfilter² eliminiert, so daß am Ausgang des Tiefpaßfilters das zu messende Signal $y_3(t)$

$$y_3(t) = \mu \sin[\Theta(t) - \Psi(t - \tau)] \quad (4.5)$$

vorliegt. Da es die Aufgabe des Regelkreises ist, den spannungskontrollierten Oszillator mit dem Referenzsignal zu synchronisieren, liegt es nahe, als ein Maß für diese Synchronisation den Phasenfehler ϕ einzuführen. Dieser wird folgendermaßen definiert

$$\phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Theta(t) - \Psi(t - \tau). \quad (4.6)$$

Ziel ist es, eine Evolutionsgleichung für den Phasenfehler ϕ abzuleiten. Differenziert

²Die Bandbreite des Tiefpaßfilters wird dabei als so hoch angenommen, daß sie die Ordnung des Phasenregelkreises nicht beeinflusst. Wie die experimentellen Untersuchungen zeigen, trifft diese Annahme jedoch erst für größere Verzögerungszeiten zu. Über die für kleine Verzögerungszeiten resultierenden Modifikationen des dynamischen Verhaltens siehe Anhang A.

man dazu ϕ bzgl. der Zeit t , so erhält man mit (4.2) und (4.5)

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = -K \sin[\phi(t - \tau)] + \omega_0 - \omega, \quad (4.7)$$

wobei $K = K_1 \mu$ [Hz] der sogenannte 'open loop gain' des Regelkreises ist.

Gleichung (4.7) stellt die gewünschte Evolutionsgleichung für das Phasenfehlersignal ϕ dar. Es handelt sich um eine nichtlineare Delay-Differentialgleichung für die skalare Variable ϕ . Sie beschreibt das dynamische Verhalten eines PLL 1. Ordnung exakt und bildet den Ausgangspunkt aller weiteren Überlegungen. Die von außen beeinflussbaren Größen, die sogenannten Kontrollparameter, sind durch K , τ und $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$ gegeben, wobei diese jedoch nicht alle voneinander unabhängig wählbar sind (vgl. Anhang B).

Im synchronisierten Zustand liefert der Phasendetektor ein reines Gleichspannungssignal. Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung, daß die Phasendifferenz ϕ gegen einen ihrer stationären Zustände

$$\phi_{\text{stat}} = \arcsin\left(\frac{\omega - \omega_0}{K}\right) \quad (\text{mod } 2\pi) \quad (4.8)$$

strebt. Wie aus Gleichung (4.8) ersichtlich ist, kann nur dann eine Synchronisation eintreten, wenn die Synchronisationsbedingung

$$|\omega - \omega_0| \leq K \quad (4.9)$$

erfüllt ist, die ursprünglich vorliegende Frequenzverschiebung $\Delta\omega$ zwischen den beiden Oszillatoren also den 'open loop gain' K nicht überschreitet. Wenn nicht anders erwähnt, soll im folgenden implizit davon ausgegangen werden, daß sich der PLL innerhalb seines Synchronisationsbereiches befindet.

Während die stationären Zustände bei einem PLL 1. Ordnung ohne zeitliche Verzögerung stabil sind, und somit eine Synchronisation mit dem Referenzsignal innerhalb des Synchronisationsbereiches immer eintritt³, kann die Stabilität der stationären Zustände bei Vorliegen einer zeitlichen Verzögerung von außen beeinflußt werden. Die daraus resultierenden Möglichkeiten Instabilitäten zu erzeugen, machen den zeitlich verzöger-

³Das Auftreten einer Instabilität ist nicht zwangsläufig mit einer Desynchronisation des PLL verbunden. So zeigen z.B. die experimentellen Untersuchungen (siehe Abschnitt 4.3), daß ein PLL im oszillatorischen oder chaotischen Zustand immer noch synchronisieren kann. Hingegen folgt aus der Nichtexistenz eines stationären Zustandes unmittelbar, daß der PLL desynchronisiert wird.

ten PLL 1. Ordnung zu einem lohnenswerten Untersuchungsobjekt mit reichhaltiger Dynamik.

4.2 Anwendung des Eliminationsverfahrens

In der Notation von Kapitel 3 lautet die Modellgleichung (4.7) des PLL 1. Ordnung mit zeitlicher Verzögerung unter der Annahme einer verschwindenden äußeren Frequenzverschiebung $\Delta\omega$

$$\frac{d}{dt}q(t) = -K \sin[q(t - \tau)]. \quad (4.10)$$

Eine Anwendung des Eliminationsverfahrens auf die nichtlineare skalare Delay-Differentialgleichung (4.10) erfordert eine Beschreibung des dynamischen Verhaltens des PLL in dem unendlich dimensionalen erweiterten Zustandsraum \mathcal{C} . Die entsprechende Evolutionsgleichung erhält man aus den Gleichungen (3.9) und (3.14-16) für den Fall, daß die Dichte $w^{(j)}$ die Form

$$w^{(2k-1)}(\Theta_1, \dots, \Theta_{2k-1}) = K \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} \delta(\Theta_1 + \tau) \cdot \dots \cdot \delta(\Theta_{2k-1} + \tau), \quad (4.11)$$

$$w^{(2k)}(\Theta_1, \dots, \Theta_{2k}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

annimmt.

4.2.1 Stabilitätsanalyse

Eine Stabilitätsanalyse der nichtlinearen skalaren Delay-Differentialgleichung läßt sich nicht nur im erweiterten Zustandsraum \mathcal{C} sondern schon in dem endlich dimensionalen Zustandsraum Γ durchführen. Der hier gewählte Zugang über den erweiterten Zustandsraum erweist sich aber als wesentlich allgemeiner und ist zur Herleitung der Ordnungsparametergleichungen zwingend notwendig. Wir möchten jedoch auch aufzeigen, daß mittels einer Stabilitätsanalyse in Γ ebenfalls wesentliche Aussagen über die sich an einer Instabilität neu herausbildende Lösung gewonnen werden können und verweisen für Details auf Anhang C.

Die stationären Lösungen q_{Stat} des zeitlich verzögerten nichtlinearen Systems werden durch die Gleichungen (3.19) in Γ bzw. C definiert. Es ergibt sich

$$q_{stat} = l\pi, \quad (4.13)$$

mit l einer beliebigen ganzen Zahl. In der Umgebung dieser stationären Lösungen wird das dynamische Verhalten durch die linearisierten Gleichungen (3.21-23) beschrieben. Die Dichteverteilung w erhält man mit der Funktionalableitung (3.24) zu

$$w(\Theta) = (-1)^{l+1} K \delta(\Theta + \tau). \quad (4.14)$$

Spezialisiert man Gleichung (3.28) auf das Beispiel

$$L(\lambda) = (-1)^{l+1} K e^{-\lambda\tau}, \quad (4.15)$$

dann wird man auf die transzendente charakteristische Gleichung

$$\lambda + (-1)^l K e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (4.16)$$

geführt, die eine unendliche Anzahl von Lösungen für die Eigenwerte λ in der komplexen Ebene besitzt.⁴ Aus (4.16) kann unmittelbar geschlossen werden, daß die stationären Lösungen $q_{Stat} = \pi \pmod{2\pi}$ für alle Werte von K und τ instabil sind, da genau ein positiver reeller Eigenwert existiert. Für die restlichen stationären Lösungen $q_{Stat} = 0 \pmod{2\pi}$ leiten wird im folgenden die Instabilitätsbedingung her.

Gesucht wird nach der Bedingung, für welche der Realteil eines Eigenwertes λ positive Werte annimmt, während alle anderen Realteile von λ negativ bleiben. Spaltet man den komplexen Eigenwert λ dazu in seinen Realteil γ und Imaginärteil Ω auf, so ist Gleichung (4.16) äquivalent zu

$$\gamma + K e^{-\gamma\tau} \cos(\Omega\tau) = 0, \quad (4.17)$$

$$\Omega - K e^{-\gamma\tau} \sin(\Omega\tau) = 0. \quad (4.18)$$

An der Schwelle einer Instabilität ($\gamma = 0$) können (4.17) und (4.18) umgeschrieben werden in

⁴Für den Fall eines PLL ohne zeitliche Retardierung besitzt (4.16) für geradzahliges l nur die Lösung $\lambda = -K$, also einen reellen negativen Eigenwert, was einer stabilen Lösung entspricht, deren Stabilität von außen her nicht beeinflussbar ist.

$$K \cos(\Omega\tau) = 0, \quad (4.19)$$

$$\Omega - K \sin(\Omega\tau) = 0. \quad (4.20)$$

Man erhält also für die Kreisfrequenz der einsetzenden Oszillation unmittelbar

$$\Omega_{\pm} = \pm K. \quad (4.21)$$

Gleichung (4.19) liefert außerdem

$$\Omega_{\pm}\tau = \pm \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.22)$$

was für die erste instabil werdende Mode ($n = 0$) zu

$$\Omega_{\pm} = \pm \frac{\pi}{2\tau} \quad (4.23)$$

führt. Die Frequenz der Schwingung ist also an der Schwelle einer Instabilität umgekehrt proportional zur zeitlichen Retardierung. Die Instabilitätsbedingung läßt sich mit (4.21) in der Form

$$K\tau \geq \frac{\pi}{2} \quad (4.24)$$

schreiben.⁵ In Übereinstimmung mit den Skalierungseigenschaften der Modellgleichung (siehe Anhang B) sieht man, daß die Instabilitätsbedingung nur noch von dem Produkt aus K und τ abhängt. Um die Art der Instabilität zu bestimmen, kann man sich daher im folgenden auf ein festes τ beschränken und die Eigenwerte $\lambda = \lambda(K)$ bis zur ersten Ordnung in den Abweichungen von dem kritischen Wert $K_c = \pi/2\tau$ gemäß dem Ansatz

$$\lambda(K) = a(K - K_c) + i\left(K_c + c(K - K_c)\right) + \mathcal{O}((K - K_c)^2) \quad (4.25)$$

entwickeln. Setzt man diesen Ansatz in die charakteristische Gleichung (4.16) (für geradzahliges l) ein und führt einen Koeffizientenvergleich bis zur ersten Ordnung in $K - K_c$ durch, dann ergibt sich die Lösung

$$\lambda(K) = \frac{K_c\tau}{1 + (K_c\tau)^2}(K - K_c) \pm i\left(K_c + \frac{1}{1 + (K_c\tau)^2}(K - K_c)\right) + \mathcal{O}((K - K_c)^2). \quad (4.26)$$

Es handelt sich bei der berechneten Instabilität also um eine Hopf-Bifurkation. An

⁵Um sicherzustellen, daß an der Schwelle nicht bereits Eigenwerte mit positivem Realteil vorliegen, kann man das verallgemeinerte Routh-Hurwitz-Kriterium aus Abschnitt 3.3.3 anwenden.

der Instabilitätsschwelle $K = K_c$ liegen nämlich zwei zueinander konjugiert komplexe Eigenwerte auf der imaginären Achse, die oszillierenden Lösungen mit der Kreisfrequenz

$$\Omega_{\pm} = \pm K_c. \quad (4.27)$$

entsprechen. Außerdem geht aus Gleichung (4.26) hervor, daß die Transversalitätsbedingung $\frac{d\lambda(K)}{dK}|_{K=K_c} \neq 0$ erfüllt ist. Abbildung 4.3 verdeutlicht die Verteilung der Eigenwerte in der komplexen Ebene knapp oberhalb der Schwelle (4.24).

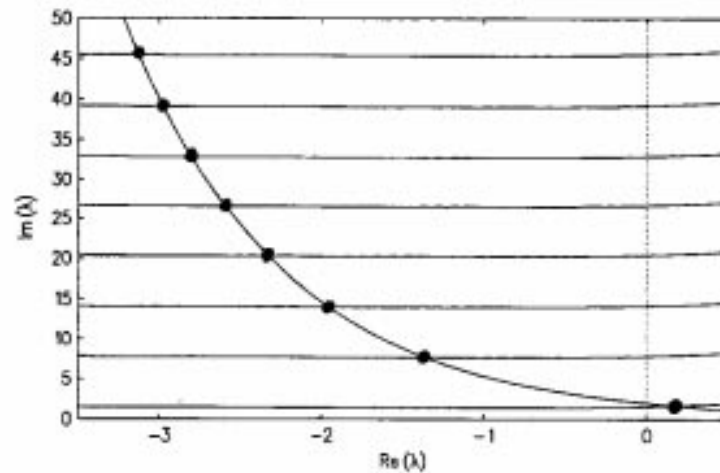


Abb. 4.3: Ausschnitt des Spektrums der Modellgleichung knapp oberhalb der Schwelle zu einer Hopf-Bifurkation.

Einen biorthonormalen Satz von links- und rechtsseitigen Eigenfunktionen erhält man, indem man die Gleichungen (3.27) und (3.45) entsprechend spezialisiert. Es ergibt sich

$$\phi^\lambda(\Theta) = N_\lambda e^{\lambda\Theta}, \quad \psi^\lambda(s) = N_\lambda e^{-\lambda s}. \quad (4.28)$$

Mit (4.14) und (4.16) bestimmen sich die Normierungskonstanten N_λ aus Gleichung (3.52) zu

$$N_\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda\tau}}. \quad (4.29)$$

4.2.2 Ordnungsgleichungen

Es sollen nun die Ordnungsgleichungen (3.80) für den Fall der vorliegenden Hopf-Bifurkation bis zur niedrigsten Ordnung in den Nichtlinearitäten hergeleitet werden. Wir bezeichnen die Eigenwerte (4.26) der beiden instabil werdenden Moden mit λ_u^\pm . Da diese zueinander konjugiert komplex sein müssen, gilt $\lambda_u^+ = (\lambda_u^-)^*$. Der unendlich dimensionale erweiterte Zustandsraum \mathcal{C} spaltet daher in der Umgebung der Instabilität auf in einen zweidimensionalen Unterraum \mathcal{U} und einen verbleibenden unendlich dimensionalen Unterraum \mathcal{S} . Gemäß (3.54) und (3.55) läßt sich eine biorthonormale Basis von \mathcal{U} durch die Matrizen

$$\Phi_u(\Theta) = \left(\frac{e^{\lambda_u^+ \Theta}}{\sqrt{1 + \lambda_u^+ \tau}}, \frac{e^{\lambda_u^- \Theta}}{\sqrt{1 + \lambda_u^- \tau}} \right) \quad \text{und} \quad \Psi_u^\dagger(s) = \begin{pmatrix} \frac{e^{-\lambda_u^+ s}}{\sqrt{1 + \lambda_u^+ \tau}} \\ \frac{e^{-\lambda_u^- s}}{\sqrt{1 + \lambda_u^- \tau}} \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

darstellen. Im folgenden bezeichnen wir die Komponenten der Ordnungsgleichungen \vec{u} durch $u(t)$ und $u^*(t)$ und fassen die entsprechenden Eigenwerte zu der Diagonalmatrix Λ_u zusammen

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u^*(t) \end{pmatrix}, \quad \Lambda_u = \begin{pmatrix} \lambda_u^+ & 0 \\ 0 & \lambda_u^- \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

Aus Gleichung (4.12) ist ersichtlich, daß die Nichtlinearität in niedrigster Ordnung mit kubischen Termen beginnen wird. Die zentrale Mannigfaltigkeit h wird wegen (3.84) ebenfalls mit Termen der Ordnung $r = 3$ starten. Zu deren Bestimmung reicht es also aus, die Nichtlinearität in den Ordnungsgleichungen (3.80) bis zu dieser Ordnung zu entwickeln

$$\tilde{\mathcal{N}}[\Phi_u(\cdot)\vec{u}(t) + \vec{h}(\cdot, \vec{u}(t))] \approx \tilde{\mathcal{N}}^{(3)}[\Phi_u(\cdot)\vec{u}(t)]. \quad (4.32)$$

Da die stabilen Moden in Gleichung (4.32) nicht mehr auftauchen, werden sie in niedrigster Ordnung keinen Einfluß auf das dynamische Verhalten ausüben. Es gilt nach Gleichung (3.82)

$$\tilde{\mathcal{N}}^{(3)}[\Phi_u(\cdot)\vec{u}(t)] = \tilde{N}_{111}^{(3)}u^3(t) + 3\tilde{N}_{112}^{(3)}u^2(t)u^*(t) + 3\tilde{N}_{122}^{(3)}u(t)u^{*2}(t) + \tilde{N}_{222}^{(3)}u^{*3}(t). \quad (4.33)$$

Die Koeffizienten ergeben sich aus (3.83), (4.12) und (4.30) zu

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_{111}^{(3)} &= -\frac{1}{6K^2} \frac{\lambda_u^{+3}}{(1 + \lambda_u^+ \tau)^{3/2}}, \\
\tilde{N}_{112}^{(3)} &= -\frac{1}{6K^2} \frac{\lambda_u^{+2} \lambda_u^-}{(1 + \lambda_u^+ \tau)(1 + \lambda_u^- \tau)^{1/2}}, \\
\tilde{N}_{222}^{(3)} &= \tilde{N}_{111}^{(3)*}, \\
\tilde{N}_{122}^{(3)} &= \tilde{N}_{112}^{(3)*}.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Mit diesen Überlegungen nimmt die Ordnungsgleichung (3.80) für $u(t)$ die Form

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}u(t) &= \lambda_u^+ u(t) + \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_u^+ \tau}} \{ \tilde{N}_{111}^{(3)} u^3(t) + 3\tilde{N}_{112}^{(3)} u^2(t)u^*(t) + \\
&\quad + 3\tilde{N}_{122}^{(3)} u(t)u^{*2}(t) + \tilde{N}_{222}^{(3)} u^{*3}(t) \}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

an. Für u^* erhält man die dazu konjugiert komplexe Gleichung. Gleichung (4.35) kann mit Hilfe der 'rotating wave approximation' auf Normalform transformiert werden. Beachtet man dazu, daß die Ordnungsgleichung in der Nähe einer Instabilität mit

$$u(t) \sim e^{iK_c t}, \quad u^*(t) \sim e^{-iK_c t} \tag{4.36}$$

oszillieren, dann können in Gleichung (4.35) nichtresonante Terme vernachlässigt werden. Die Normalform für die Hopf-Bifurkation lautet

$$\frac{d}{dt}u(t) = \lambda_u^+ u(t) - b|u(t)|^2 u(t), \tag{4.37}$$

wobei sich für den komplexwertigen Koeffizienten b nach (4.34) und (4.35)

$$b = \frac{K_c^2 \tau}{2(1 + (K_c \tau)^2)^{3/2}} + i \frac{K_c}{2(1 + (K_c \tau)^2)^{3/2}} + \mathcal{O}(K - K_c) \tag{4.38}$$

ergibt. Transformiert man Gleichung (4.37) durch den Ansatz

$$u(t) = r(t)e^{i\phi(t)} \tag{4.39}$$

auf Polarkoordinaten und berücksichtigt die Entwicklungen (4.26) sowie (4.38), dann wird der periodische Orbit bis zur Ordnung $\mathcal{O}(K - K_c)$ im stationären Fall durch

$$r_0^2 = \frac{\operatorname{Re}(\lambda_u^*)}{\operatorname{Re}(b)} = 2\sqrt{1 + (K_c\tau)^2} \frac{K - K_c}{K_c} + \mathcal{O}((K - K_c)^2), \quad (4.40)$$

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = \operatorname{Im}(\lambda_u^*) - r_0^2 \operatorname{Im}(b) = K_c \{1 + \mathcal{O}((K - K_c)^2)\} \quad (4.41)$$

charakterisiert. Auffallend an Gleichungen (4.40) und (4.41) ist, daß die durch die Nichtlinearität hervorgerufene amplitudenabhängige Frequenzverschiebung bis zur Ordnung $\mathcal{O}(K - K_c)$ durch die Frequenzabhängigkeit aus der linearen Stabilitätsanalyse exakt kompensiert wird.

4.2.3 Adiabatische Elimination

Obwohl die stabilen Moden in niedrigster Ordnung keine Auswirkungen auf die Ordnungsparametergleichungen haben, wollen wir der Vollständigkeit wegen die zentrale Mannigfaltigkeit h für die vorliegende skalare Delay-Differentialgleichung explizit bestimmen. Gleichung (3.84) spezialisiert sich im betrachteten Fall auf

$$\begin{aligned} h(\Theta, u(t), u^*(t)) &= H_{111}(\Theta)u^3(t) + 3H_{112}(\Theta)u^2(t)u^*(t) + \\ &+ 3H_{122}(\Theta)u(t)u^*(t)^2 + H_{222}(\Theta)u^*(t)^3. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Da h eine reelle Funktion ihrer Argumente darstellt, müssen die Koeffizienten den Eigenschaften $H_{122} = H_{112}^*$ und $H_{222} = H_{111}^*$ genügen. Daher ist es ausreichend H_{111} und H_{112} zu bestimmen. Für die Modellgleichung ergibt sich aus (3.85) die wesentliche Vereinfachung, daß die Koeffizienten $H_{j_1 j_2 j_3}$ proportional zu $\tilde{N}_{j_1 j_2 j_3}^{(3)}$ aus Gleichung (4.34) sind

$$H_{j_1 j_2 j_3}(\Theta) = \tilde{N}_{j_1 j_2 j_3}^{(3)} G_{j_1 j_2 j_3}(\Theta). \quad (4.43)$$

Der Wichtungstensor $G_{j_1 j_2 j_3}$ bestimmt sich aus der Gleichung

$$G_{j_1 j_2 j_3}(\Theta) = \left(\left[\mathcal{A}_L - (\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} + \lambda_{j_3})\mathcal{I} \right]^{-1} \left[\Phi_u(\cdot)\Psi_u^\dagger(0) - X_0(\cdot) \right] \right) (\Theta), \quad (4.44)$$

wobei die Eigenwerte λ_j mit den instabilen Eigenwerten λ_u^+ und λ_u^- für $j = 1, 2$ identifiziert werden müssen. Mit (3.34), (3.57) und (3.70) erhält man

$$G_{j_1 j_2 j_3}(\Theta) = \left[\Phi_u(\Theta) [\Lambda_u - \lambda I]^{-1} \Psi_u^\dagger(0) - [L(\lambda) - \lambda I]^{-1} e^{\lambda\Theta} \right]_{\lambda=\lambda_{j_1}+\lambda_{j_2}+\lambda_{j_3}}. \quad (4.45)$$

Wendet man schließlich (4.15), (4.28) sowie (4.30) an, dann ergibt sich das Resultat

$$G_{j_1 j_2 j_3}(\Theta) = \left[\frac{e^{\lambda_u^+ \Theta}}{(1 + \lambda_u^+ \tau)(\lambda_u^+ - \lambda)} + \frac{e^{\lambda_u^- \Theta}}{(1 + \lambda_u^- \tau)(\lambda_u^- - \lambda)} + \frac{e^{\lambda \Theta}}{\lambda + K e^{-\lambda \tau}} \right]_{\lambda = \lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} + \lambda_{j_3}} \quad (4.46)$$

Um den Wichtungstensor an der Instabilitätsschwelle, die durch $\lambda_u^\pm = \pm i K_c$ und $K = K_c$ charakterisiert ist, auswerten zu können, benützen wir die transzendente charakteristische Gleichung (4.16). Es ergibt sich für $j_1 = j_2 = j_3 = 1$ unmittelbar

$$G_{111}(\Theta) = \frac{i}{4K_c} \left[\frac{2e^{iK_c \Theta}}{1 + iK_c \tau} + \frac{e^{-iK_c \Theta}}{1 - iK_c \tau} - e^{3iK_c \Theta} \right]. \quad (4.47)$$

Da die Bestimmung des Koeffizienten $G_{j_1 j_2 j_3}$ wegen $\lambda = 2\lambda_1 + \lambda_2 = iK_c$ zu einer Singularität im Nenner von Gleichung (4.46) führt, hat man in diesem Fall einen Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ für $\lambda = iK_c + \epsilon$ durchzuführen

$$\begin{aligned} G_{112}(\Theta) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{e^{iK_c \Theta}}{\epsilon(1 + iK_c \tau)} + \frac{i}{2K_c} \frac{e^{-iK_c \Theta}}{1 - iK_c \tau} + \frac{-e^{iK_c \Theta}(1 + \epsilon \Theta)}{\epsilon(1 + iK_c \tau)} \right] \\ &= \frac{\Theta e^{iK_c \Theta}}{1 + iK_c \tau} + \frac{i}{2K_c} \frac{e^{-iK_c \Theta}}{1 - iK_c \tau}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Mit diesen Resultaten lassen sich die Koeffizienten H_{111} und H_{112} und damit die zentrale Mannigfaltigkeit h für alle Werte von $\Theta \in [-\tau, 0]$ bestimmen.

Damit ist die 1. oszillatorische Instabilität des Phasenregelkreises vollständig beschrieben. Es bleibt anzumerken, daß die Möglichkeit weiterer Instabilitäten stark von der Form der Nichtlinearität in (4.10) abhängt. So wurde z.B. in [1] gezeigt, daß für den Fall einer Nichtlinearität mit monotonem Verlauf, die soeben behandelte Instabilität die einzige mögliche sein kann. Im Falle einer Nichtlinearität vom 'gemischtem Typ'⁶, wie es bei einem PLL der Fall ist, können dagegen weitere Instabilitäten bei einer Variation der Kontrollparameter auftreten. Diese höheren Instabilitäten lassen sich bisher noch nicht analytisch untersuchen, da eine vollständige Floquettheorie für Delay-Differentialgleichungen nicht existiert.

⁶Man bezeichnet eine Funktion als von 'gemischtem Typ', wenn sie weder strikt monoton wächst noch strikt monoton abfällt.

4.3 Experimentelle Untersuchungen

In diesem Abschnitt werden experimentelle Untersuchungen des dynamischen Verhaltens eines zeitlich verzögerten PLL's 1. Ordnung vorgestellt. Der Versuchsaufbau wurde bereits in Abbildung 4.2 dargestellt. Die endlichen Signallaufzeiten wurden durch analoge und numerische Verzögerungsleitungen erzeugt, die in die Rückkopplungsschleife des Regelkreises eingesetzt wurden. Als Referenzoszillator stand ein Synthesizer vom Typ HP 8662A zur Verfügung, während für den lokalen spannungskontrollierten Oszillator (VCO), dessen Ausgangssignal mit dem Referenzsignal synchronisiert werden soll, ein Synthesizer vom Typ Racal Dana 90873 eingesetzt wurde. Weiterhin wurde ein Phasendetektor (HP 10514A Mixer) mit annähernd sinusoidaler Charakteristik und ein Tiefpaßfilter mit einer Bandbreite von 200 kHz verwendet. Das Ausgangssignal wurde mit einem Spektrumanalysator (HP 3562A) ausgewertet. Die Arbeitsfrequenz von 135 MHz war auf die analogen Verzögerungsleitungen (Thomson Sintra LR H807) abgestimmt. Im Unterschied zu den analogen Verzögerungsleitungen, konnte die verwendete numerische Verzögerungsleitung, wegen ihrer maximalen Abtastrate von einigen Kilohertz, nicht direkt an den hochfrequenten Ausgang des spannungskontrollierten Oszillators angeschlossen und mußte stattdessen hinter den Tiefpaßfilter implementiert werden. Durch die damit bedingte Abänderung des Versuchsaufbaus ist jedoch, wie in Anhang A gezeigt wird, keine Änderung des dynamischen Verhaltens des PLL verbunden.

Da das chaotische Verhalten analytisch bislang nicht zugänglich ist, wurde es notwendig, numerische Untersuchungen durchzuführen, die diese Lücke zum Teil schließen konnten. Verwendet wurde das Simulationsprogramm PSPICE (*Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis*)[82]. Dieses basiert auf einem Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung mit variabler Schrittweite. Um mögliche Simulationsfehler auszuschalten, die durch eine variable Schrittweite entstehen können, wurden die numerischen Resultate mit einem einfachen Kontrollalgorithmus verglichen, der auf einem Euler-Verfahren mit fester Schrittweite beruht. In beiden Fällen wurde als Anfangsbedingung eine konstante Funktion auf dem Intervall $[-\tau, 0]$ gewählt.

4.3.1 Verzögerungsleitungen

Die Erzeugung großer zeitlicher Verzögerungen in der Hochfrequenztechnik erfolgt zu-
meist durch eine Umwandlung des elektrischen Signals in ein mechanisches, welches
sich in Form einer akustischen Oberflächenwelle auf einem piezoelektrischen Substrat
ausbreitet, bevor es wieder in ein elektrisches Signal zurückverwandelt wird. Durch die
niedrige Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Oberflächenwellen, die in der Größenord-
nung von 3000 m/sec liegt, lassen sich schon auf kleinstem Raum Verzögerungen von
einigen Mikrosekunden erzielen. Die verwendete analoge Verzögerungsleitung besteht
aus einem piezoelektrischen Substrat (Quarz), auf welches kammförmig ineinander ver-
zahnte Elektroden aufgedampft wurden (vgl. Abbildung 4.4).

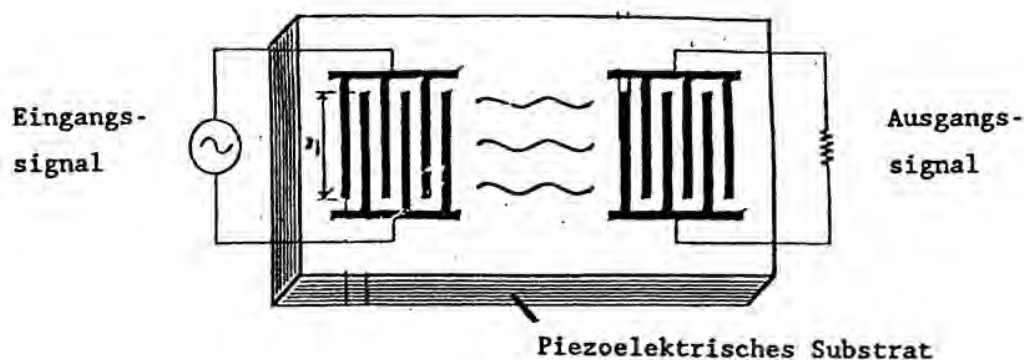


Abb. 4.4: Funktionsprinzip einer analogen Verzögerungsleitung

Das an den Elektrodenkämmen ankommende Hochfrequenzsignal führt an der
Oberfläche des Quarzes zu mechanischen Deformationen. Jeder Zinken des Kam-
mes kann dabei als eine Ultraschallquelle angesehen werden, die zur Erzeugung von
Oberflächenwellen (Rayleigh-Wellen) Anlaß gibt. Ist die eingestrahlte Frequenz auf die
Kammzinkendistanz abgestimmt, so kommt es zu einer konstruktiven Interferenz dieser
Wellen. In derselben Weise erhält man am anderen Ende der Verzögerungsleitung aus
den mechanischen Deformationen ein elektrisches Hochfrequenzsignal zurück. Die Cha-
rakteristik einer solchen analogen Verzögerungsleitung ist in Abbildung 4.5 dargestellt.

Aus den beiden Abbildungen ist ersichtlich, daß es sich in einem weiten Frequenzbereich
um eine nahezu dispersionsfreie Verzögerungsleitung handelt.

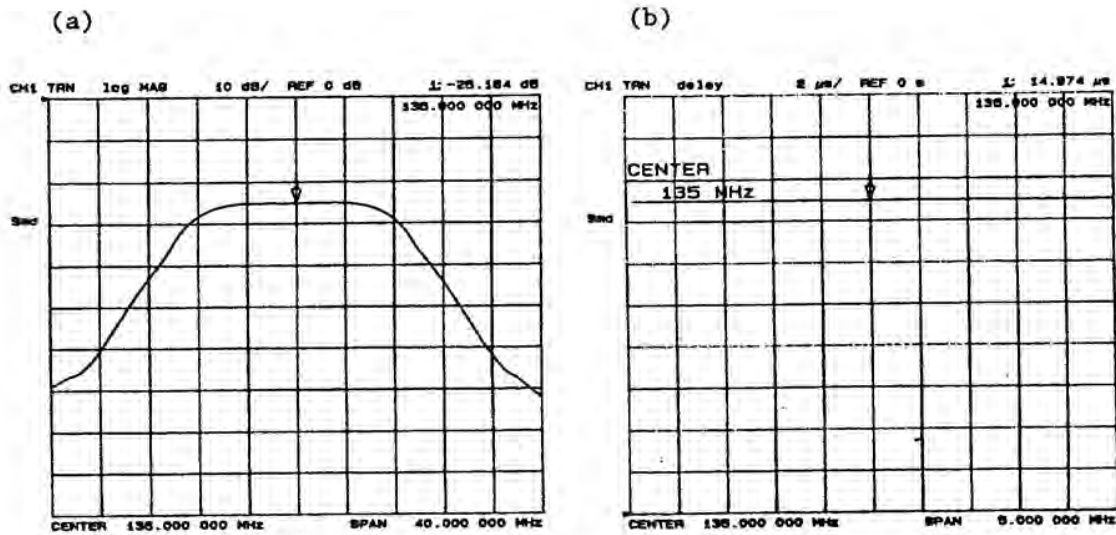


Abb. 4.5: Charakteristik der analogen Verzögerungsleitung. (a) Transmissionsverhalten, (b) Zeitliche Verzögerung als Funktion der eingestrahlten Frequenz.

Der Aufbau der numerischen Verzögerungsleitung geht aus Abbildung 4.6 hervor.

Die kleinste wählbare Verzögerung τ_{min} wird durch die Abtastrate der beiden Konverter sowie der Zeitdauer des Lese- und Schreibvorganges in und aus dem Speicher bestimmt. Die größtmögliche Verzögerung ergibt sich aus der maximalen Speicherkapazität. Die Position N , bei welcher Information aus dem Speicher herausgelesen wird, legt die gewählte zeitliche Verzögerung über die Beziehung $\tau = N\tau_{min}$ fest. Es standen uns Verzögerungszeiten von 70 - 5000 μsec für die numerische und 15 μsec sowie 30 μsec für die analoge Verzögerungsleitung zur Verfügung.

4.3.2 Oszillatorische Instabilität

In einem ersten Schritt waren wir daran interessiert, das dynamische Verhalten des Regelkreises in seinem eingerasteten Zustand zu untersuchen. Es sollte also eine Synchronisation mit dem Referenzsignal vorliegen. Sichtbar wurde dies dadurch, daß das Phasenfehlersignal aus einem reinen Gleichspannungsanteil bestand. Die Frequenzverschiebung mußte dazu kleiner als der eingestellte 'open loop gain' gewählt werden.

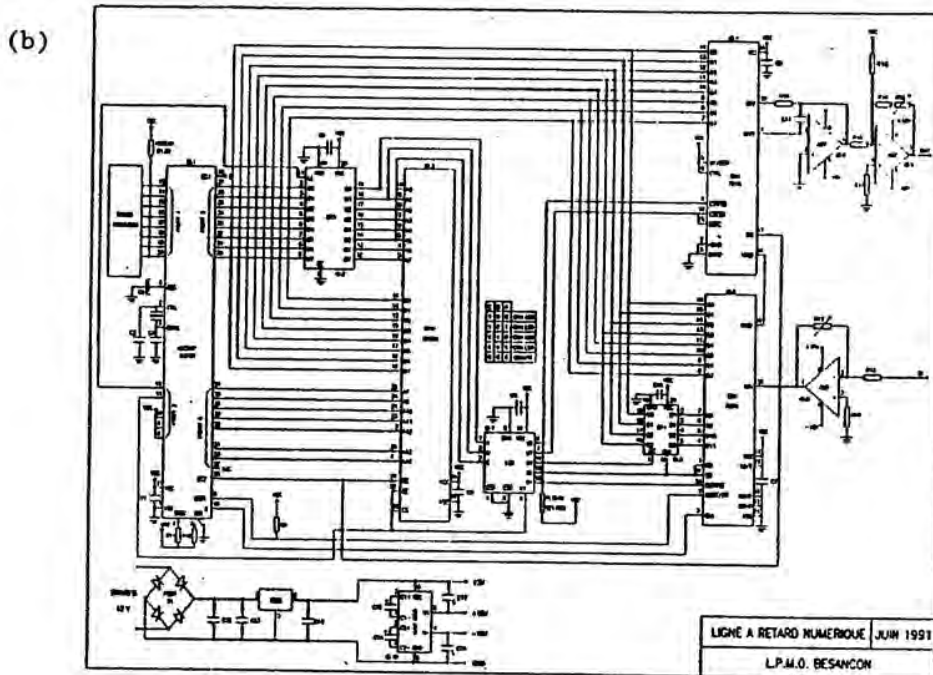
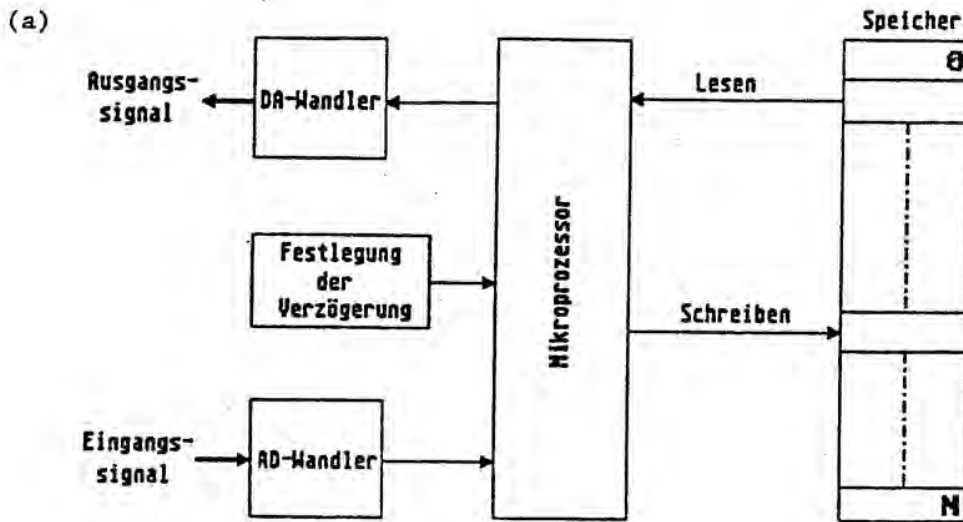


Abb. 4.6: Funktionsprinzip einer numerischen Verzögerungsleitung.
(a) Schematisches Funktionsprinzip, (b) Aufbau der Verzögerungsleitung.

Abbildung 4.7 zeigt, in Übereinstimmung mit (4.9), den Synchronisationsbereich eines PLL 1. Ordnung in Abhängigkeit von dem 'open loop gain'.

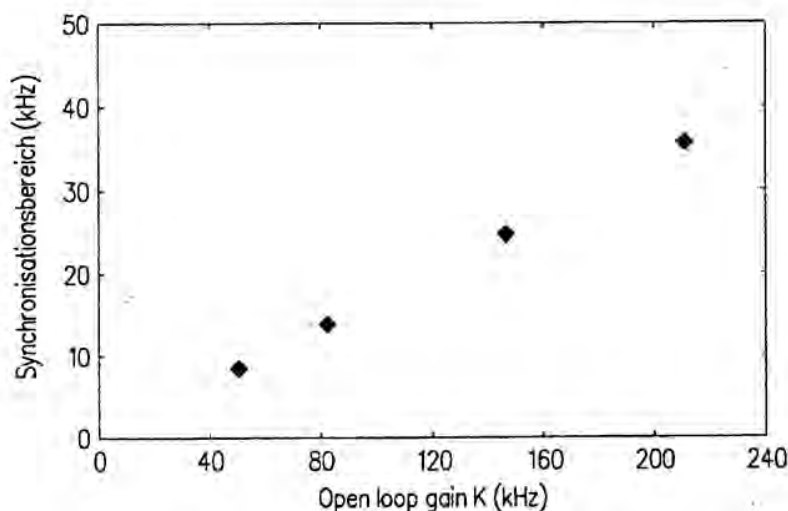


Abb. 4.7: Synchronisationsbereich eines PLL 1. Ordnung in Abhängigkeit von dem 'open loop gain'.

Als experimentell zugänglicher Kontrollparameter standen uns die zeitliche Verzögerung τ , der 'open loop gain' K und die äußere Frequenzverschiebung $\Delta\omega$ zur Verfügung. Für die folgenden Untersuchungen haben wir die zentrale Kreisfrequenzen der beiden Oszillatoren aufeinander abgestimmt, d.h. es lag keine äußere Frequenzverschiebung vor. Wie in Anhang B ausgeführt wird, hat dies zur Folge, daß nur noch ein effektiver Kontrollparameter, nämlich $K\tau$ auftritt. Daher konnten die Experimente bei einer festen Retardierung τ und dem 'open loop gain' K als Kontrollparameter durchgeführt werden. K konnte entweder über die Amplituden der beiden Oszillatoren oder aber über die Empfindlichkeit des VCO variiert werden.

Für kleine Kontrollparameterwerte ergab sich am Ausgang des Filters ein für einen im synchronisierten Bereich operierenden PLL typisches Gleichspannungssignal, welches einer stationären Lösung für das Phasenfehlersignal entspricht (vgl. Gleichung (4.8)). Dieses Gleichspannungssignal konnte durch Variation des Kontrollparameters bis zu einer kritischen Schwelle bei $K = 81$ kHz beobachtet werden, oberhalb der das Phasenfehlersignal zu oszillieren begann. Diese verzögerungsinduzierte Instabilität zeigte sich auch durch das Auftreten einer scharfen Linie im Frequenzspektrum. Um sicherzustellen, daß sich der PLL oberhalb dieser Instabilität immer noch in einem synchronisierten

Zustand befand, wurde die Frequenzabweichung zwischen dem Referenzsignal und dem VCO variiert. Dadurch mußte zu dem oszillatorischen Signal ein Gleichspannungsanteil hinzukommen. Abbildung 4.8 verdeutlicht das dynamische Verhalten eines PLL 1. Ordnung mit zeitlicher Verzögerung in der Umgebung der 1. oszillatorischen Instabilität.

In Abbildung 4.8(a) ist der Einrastvorgang des PLL zu sehen. Der Phasenregelkreis wurde bei $t = 25$ msec in Betrieb gesetzt, und nach einigen Einschaltspitzen relaxierte das Phasenfehlersignal gegen seinen stationären Fixpunkt. Dies stellt das einzig mögliche Verhalten eines PLL 1. Ordnung ohne zeitliche Verzögerung dar.

Wir wiederholten diese Messungen mit verschiedenen Retardierungszeiten der analogen und numerischen Verzögerungsleitungen um sicherzustellen, daß die beobachtete Instabilität ausschließlich von der endlichen Signallaufzeit des Regelkreises herrührt. In Abbildung 4.9 ist die experimentell beobachtete Oszillationsfrequenz des Phasenfehlersignals in Abhängigkeit von der eingestellten Retardierung aufgetragen. Um einen Vergleich mit den theoretischen Ergebnissen zu ermöglichen, ist außerdem die theoretisch berechnete Oszillationsfrequenz an der Schwelle (vgl. Gleichung (4.23)) eingezeichnet.

Man sieht aus der Abbildung die gute Übereinstimmung mit den theoretisch vorhergesagten Werten.

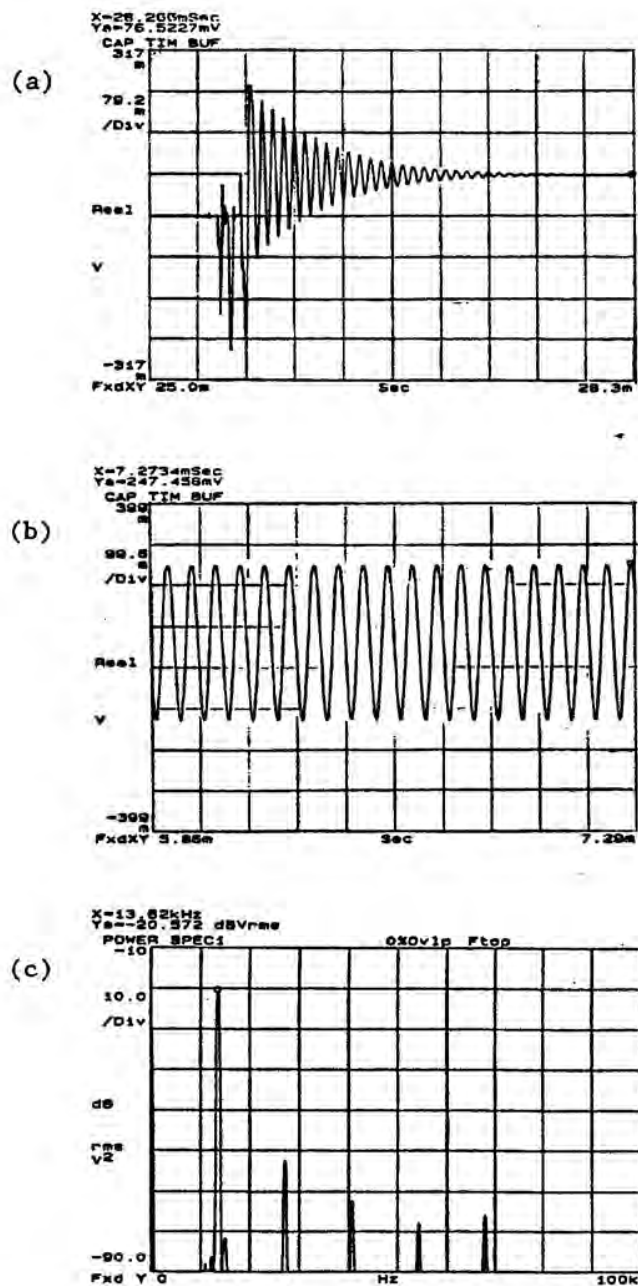


Abb. 4.8: Dynamisches Verhalten eines PLL 1. Ordnung mit zeitlicher Verzögerung. (a) Unterhalb der Schwelle; $\tau = 15\mu$ sec; $K = 40$ kHz, $\Delta\omega = 2,5 \cdot 10^4$ rad/sec; (b) 1. oszillatorische Instabilität; $\tau = 15\mu$ sec; $K = 81$ kHz, $\Delta\omega = 2,5 \cdot 10^4$ rad/sec; (c) Frequenzspektrum zu (b).

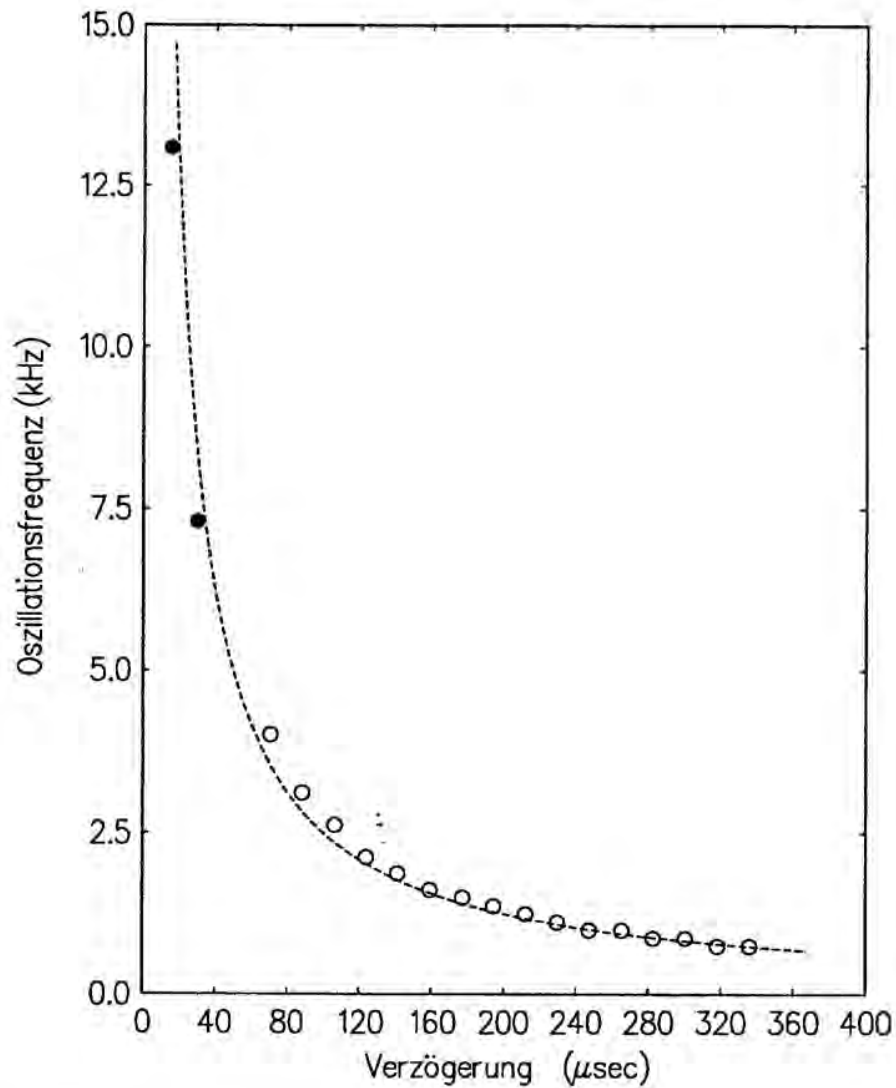


Abb. 4.9: Oszillationsfrequenz eines PLL 1. Ordnung in Abhängigkeit von der zeitlichen Verzögerung. • entspricht Messungen mit der analogen Verzögerungsleitung, ◦ experimentell bestimmte Werte mit der numerischen Verzögerungsleitung und - - - der theoretisch bestimmten Oszillationsfrequenz.

Nachfolgend sind einige numerische Simulationen des dynamischen Verhaltens des PLL oberhalb der 1. oszillatorischen Instabilität dargestellt. Aufgetragen ist die experimentell zugängliche Meßgröße y_3 , die sich aufgrund Gleichung (4.5) durch eine sinusförmige Modulation aus dem Phasenfehlersignal ergibt und im folgenden als 2π -periodisches Phasenfehlersignal bezeichnet werden soll.

Die in Abbildung 4.10(b) neben der fundamentalen Harmonischen bei $\nu_1 = 16.6$ kHz zusätzlich sichtbaren höheren ungeradzahigen Harmonischen bei $\nu_3 = 3\nu_1$ sowie $\nu_5 = 5\nu_1$ stellen keine weiteren instabil werdenden Moden dar, sondern rühren ausschließlich von dem über den Phasendetektor 2π -modulierten Phasenfehlersignal her. Dies läßt sich daraus erkennen, daß eine sinusförmig modulierte harmonische Schwingung mit der Amplitude a und der Frequenz ν aufgrund der Relation

$$\sin(a \sin(2\pi\nu)) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n+1}(a) \sin((2n-1)\nu) \quad (4.49)$$

zusätzliche Fourierkomponenten bei den Frequenzen $\nu = 3\nu, 5\nu, \dots$ aufweist. Die Einwölbungen, die in Abbildung 4.10(c) sichtbar sind, sind auf dieselbe Ursache zurückzuführen. Wächst nämlich die Phasendifferenz über $\pm \frac{\pi}{2}$ an, so kann der Phasendetektor diesem Signal nicht mehr folgen, es ergeben sich die beobachteten Einwölbungen.

Auffallend ist, daß die numerischen Simulationen keine geradzahigen Harmonische liefern. Dies steht im Widerspruch zu den experimentellen Untersuchungen (vgl. Abbildung 4.8(c)), wo eine Vielzahl höherer geradzahiger Harmonischer zu der Fundamentalen auftreten. Die Ursache liegt in dem nichtidealen Verhalten des Phasendetektors begründet. Dessen Ausgangssignal sollte bei verschwindender äußerer Frequenzverschiebung nach (4.5) keinen Gleichspannungsanteil enthalten. Die Experimente zeigen jedoch, daß eine Gleichspannung bis zu 70 mV grundsätzlich vorhanden ist. Formal gesehen entspricht diesem Gleichspannungsanteil eine 'fiktive' Frequenzverschiebung zwischen dem Referenzsignal und dem Ausgangssignal des spannungskontrollierten Oszillators. Da sich dieser Gleichspannungsanteil trotz unterschiedlicher Phasendetektoren experimentell nicht vermeiden ließ, muß diese 'fiktive' Frequenzverschiebung bei einer Modellierung des realen dynamischen Verhaltens des Phasenregelkreises konsequenterweise berücksichtigt werden. Entsprechende numerische Simulationen mit einer solchen 'fiktiven' äußeren Frequenzverschiebung, zeigen in der Tat geradzahige Fourierkomponenten. Dies steht auch im Einklang mit der Theorie, denn gemäß der Relation

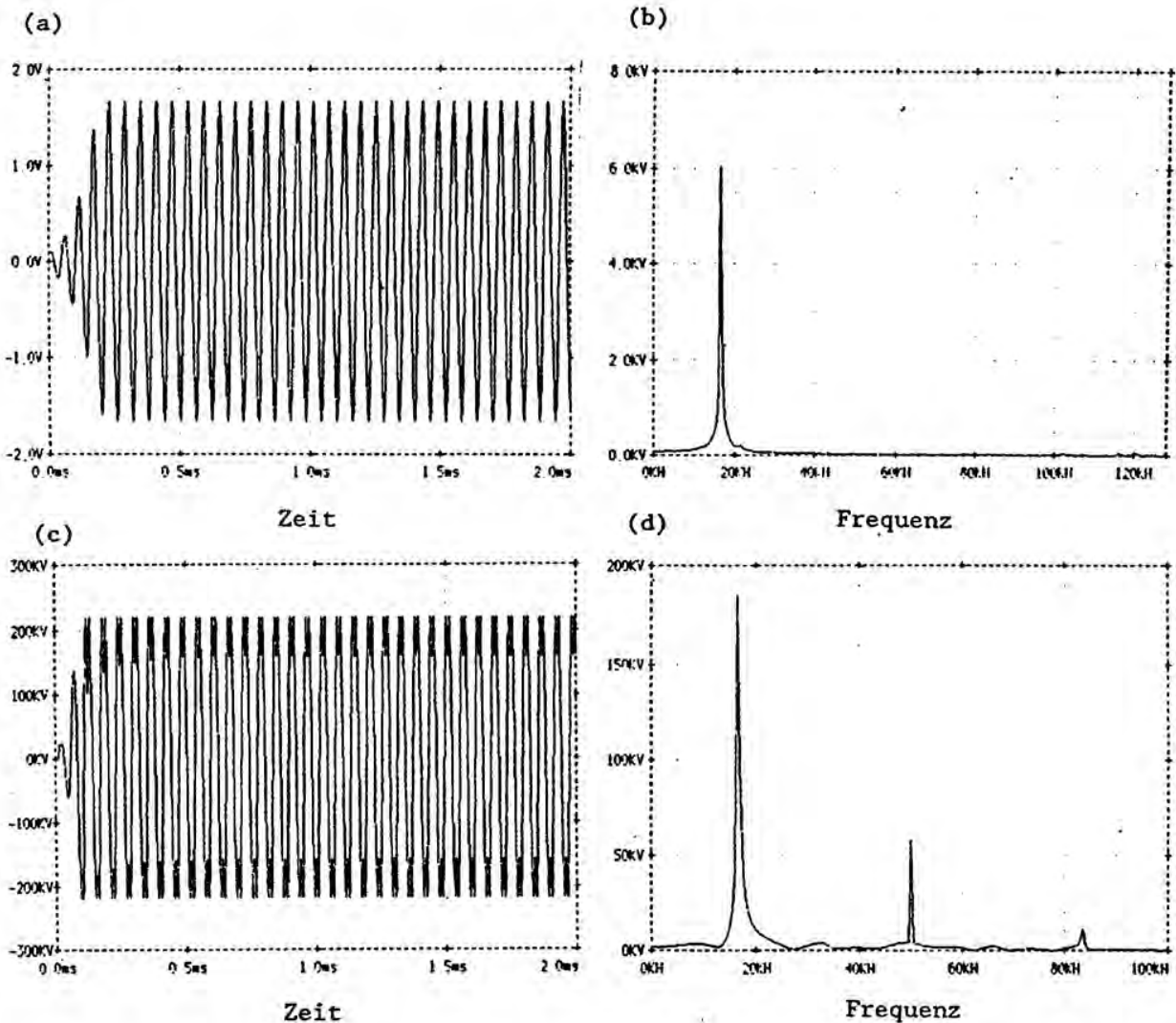


Abb. 4.10: Numerische Untersuchungen der 1. oszillatorischen Instabilität. (a) 2π -periodisches Phasenfehlersignal oberhalb der Schwelle; $\tau = 15\mu$ sec, $K = 150$ kHz, $\Delta\omega = 0$; (b) Zu a) gehöriges Fourierspektrum; (c) 2π -periodisches Phasenfehlersignal; $\tau = 15\mu$ sec, $K = 220$ kHz, $\Delta\omega = 0$; (d) zu (c) gehöriges Fourierspektrum.

$$\begin{aligned}
\sin(a \sin(2\pi\nu) + b) &= \sin(a \sin(2\pi\nu)) \cos(b) + \cos(a \sin(2\pi\nu)) \sin(b) \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n+1}(a) \sin((2n-1)\nu) \cos(b) \\
&\quad + \left(J_0(a) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(a) \cos(2n\pi\nu) \right) \sin(b), \quad (4.50)
\end{aligned}$$

liefert ein 2π -periodisches harmonisches Signal der Frequenz ν , der Amplitude a und dem Gleichspannungsanteil b auch geradzahlige harmonische Komponenten. Die Notwendigkeit, eine 'fiktive' Frequenzverschiebung zur korrekten Modellierung der Dynamik des PLL's einzuführen, zeigt sich insbesondere im folgenden Abschnitt, wo es um die Beschreibung des chaotischen Verhaltens des zeitlich verzögerten Regelkreises geht.

4.3.3 Chaotische Instabilitäten

Um den Regelkreis in seinem nichtlinearen Bereich zu betreiben, mußte der Kontrollparameter weiter erhöht werden. Da die Vielzahl an höheren Harmonischen den Einsatz der numerischen Verzögerungsleitung nicht mehr ermöglichte, wurden die experimentellen Untersuchungen zum chaotischen Verhalten des PLL ausschließlich mit der analogen Verzögerungsleitung bei der fest vorgegebenen zeitlichen Verzögerung von $\tau = 15\mu\text{sec}$ durchgeführt. Wieder wurde von aufeinander abgestimmten Synthesizern ausgegangen. Dies geschah deshalb, um mögliche Einflüsse des nichtsynchronisierten Zustandes des PLL auf das beobachtete dynamische Verhalten auszuschließen. So zeigen z. B. die in [20] durchgeführten experimentellen Untersuchungen zum dynamischen Verhalten eines PLL 2. Ordnung mit äußerer Anregung, daß ein chaotisches Verhalten in diesem System nur dann auftreten kann, wenn die äußere Frequenzverschiebung so groß gewählt wird, daß der PLL an der Grenze seines Synchronisationsbereiches betrieben wird. Das dadurch bedingte Zusammenspiel von 'in-lock' und 'out-of-lock', läßt sich in unserem Fall dagegen gänzlich vermeiden.

Durch Erhöhen des Kontrollparameters über den Schwellwert der oszillatorischen Instabilität hinaus, konnte die oszillatorische Dynamik des Phasenfehlersignals destabilisiert werden. Der Übergang in den chaotischen Bereich deutete sich ab $K > 180 \text{ kHz}$ durch das Auftreten einer Hierarchie von Periodenverdopplungen an [88]. Abbildung 4.11 zeigt den experimentell beobachteten Übergang in ein chaotisches Verhalten des Regelkreises.

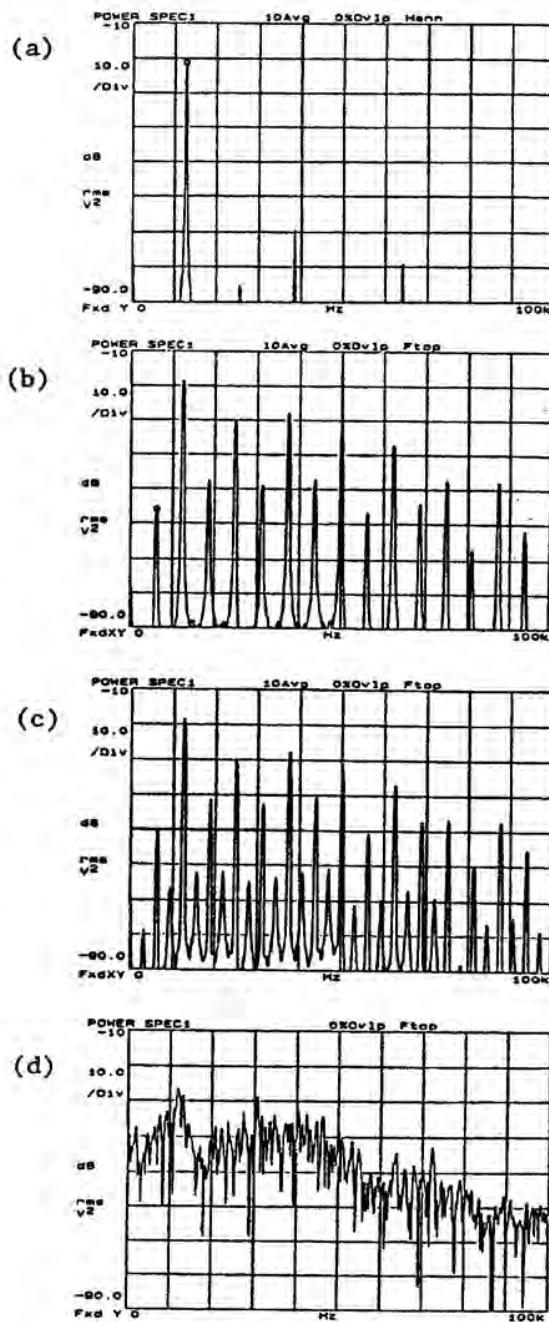


Abb. 4.11: Chaotisches Verhalten des zeitlich verzögerten PLL. (a) Frequenzspektrum der oszillatorischen Lösung, $\tau = 15\mu\text{sec}$, $K = 103\text{kHz}$, $\Delta\omega = 0$; (b) Periode-2-Lösung, $K = 180\text{kHz}$, sonst gleiche Bedingungen wie unter (a); $\Delta\omega = 0$. (c) Periode-4-Lösung; $K = 187\text{kHz}$, sonst gleiche Bedingungen wie unter (a). (d) Chaotisches Verhalten des PLL; $K = 226\text{kHz}$, sonst gleiche Bedingungen wie unter (a).

Den Periodenverdopplungen entsprechen in den Frequenzspektren die subharmonischen Linien. Außerdem sichtbar sind Kombinationslinien sowie Linien, die höhere Harmonische darstellen. Wir konnten die Periodenverdopplungen bis hin zu Periode-8-Lösungen nachweisen. Darüber hinaus dominierte das Untergrundrauschen. Der Übergang in den chaotischen Bereich wird in Abbildung 4.11(d) durch das Auftreten eines kontinuierlichen Spektrums angezeigt, welches das diskrete Linienspektrum ersetzt.

Das irreguläre Verhalten des Phasenfehlersignals im chaotischen Bereich entspricht, wie Messungen gezeigt haben, nicht unmittelbar einem desynchronisierten Zustand des PLL. Der Regelkreis kann sich auch im chaotischen Bereich in einem synchronisierten Zustand befinden. Die Desynchronisation des Referenzsignals mit dem Signal des spannungskontrollierten Oszillators erfolgt bei Kontrollparameterwerten $K > 211$ kHz. Oberhalb dieser Schwelle tritt ein neuartiges Phänomen des Regelkreises auf, welches mit sogenannten Phasensprüngen (cycle slippings) des Phasenfehlersignals verbunden ist. Wir verschieben die Diskussion dieses sehr interessanten Phänomens auf den nächsten Abschnitt, da dessen experimenteller Nachweis einen modifizierten Versuchsaufbau erforderlich macht. In Abbildung 4.12 sind die experimentell beobachteten Instabilitäten mitsamt den zugehörigen Kontrollparameterwerten noch einmal zusammenfassend eingetragen.

Open loop gain [kHz]	Instabilität	Synchronisation
$K < 81$	Stationärer Zustand	In-lock
$K = 81$	1. osz. Instabilität	
$K = 180$	P2-Bifurkation	
$K = 187$	P4-Bifurkation	
$K = 188$	P8-Bifurkation	
$K > 188$	Chaos	Out-of-lock
$K > 211$	Cycle slipping Bewegung	

Abb. 4.12: Experimentell beobachtete Instabilitäten des PLL für unterschiedliche Kontrollparameterwerte. $\tau = 15\mu\text{sec}$, $A = B = +5\text{dBm}$.

Da, wie bereits erwähnt wurde, eine theoretische Beschreibung der chaotischen Dynamik des PLL's bisher nicht möglich ist, haben wir das dynamische Verhalten numerisch simuliert. Dabei wurde wie bereits im vorigen Abschnitt, zwischen Simulationen

ohne und mit äußerer Frequenzverschiebung unterschieden. Im ersten Fall liefern die Simulationen (im untersuchten Kontrollparameterbereich) weder das Auftreten von Periodenverdopplungen noch ein chaotisches Verhalten. Stattdessen geht die oszillatorische Lösung oberhalb eines kritischen Kontrollparameterwertes direkt in die irreguläre cycle slipping Bewegung des Phasenfehlersignals über. Berücksichtigt man hingegen eine 'fiktive' äußere Frequenzverschiebung, so zeigen auch die numerischen Untersuchungen Periodenverdopplungen und chaotisches Verhalten des Phasenfehlersignals (vgl. Abbildung 4.13).

4.3.4 Das Auftreten von Phasensprüngen

Wie bereits erwähnt, desynchronisiert der Phasenregelkreis bei Kontrollparameterwerten $K > 211$ kHz. Das Phasenfehlersignal beginnt in irregulärer Weise um ganzzahlige Vielfache von $\pm 2\pi$ zu springen. Vom Standpunkt einer dynamischen Systemtheorie aus betrachtet bedeuten diese Phasensprünge, daß das Phasenfehlersignal sich nicht mehr innerhalb des Einzugsbereiches eines einzigen Attraktors bewegt, sondern zwischen verschiedenen Attraktoren hin und her springt. Solche Phasensprünge spielen in technischen Anwendungen eine bedeutende Rolle, da sie zu Frequenzinstabilitäten führen und damit die Güte eines Regelkreises beeinflussen. Das hier an einem Phasenregelkreis 1. Ordnung unter dem Einfluß einer zeitlichen Verzögerung zum ersten Mal beobachtete Phänomen bedarf schon deshalb einer eingehenden Untersuchung, weil diese Phasensprünge bisher erst für Phasenregelkreise höherer Ordnung nachgewiesen wurden [5].

Eine experimentelle Messung solcher Sprünge wird dadurch erschwert, daß das Meßsignal y_3 durch die sinusförmige Charakteristik des Phasendetektors bereits 2π -periodisch moduliert ist, und demzufolge Phasensprünge mit einer solchen Versuchsanordnung prinzipiell nicht nachgewiesen werden können. Es wurde deshalb an einer modifizierten Versuchsanordnung gearbeitet, die es ermöglichen sollte, Phasensprünge mit Sprungdifferenzen von weniger als $\pm 2\pi$ zu erzeugen. Diese könnten dann mit jeder herkömmlichen Methode detektiert werden. Zu diesem Zweck wurde jeweils hinter dem Referenzsignal und dem Ausgangssignal des VCO ein digitaler Frequenzteiler um den Faktor $N = 10$ eingefügt. Daraus resultierte nicht nur eine Frequenzverminderung des Ausgangssignals um eben diesen Faktor, sondern auch die erwünschte Reduktion der Phasensprünge von

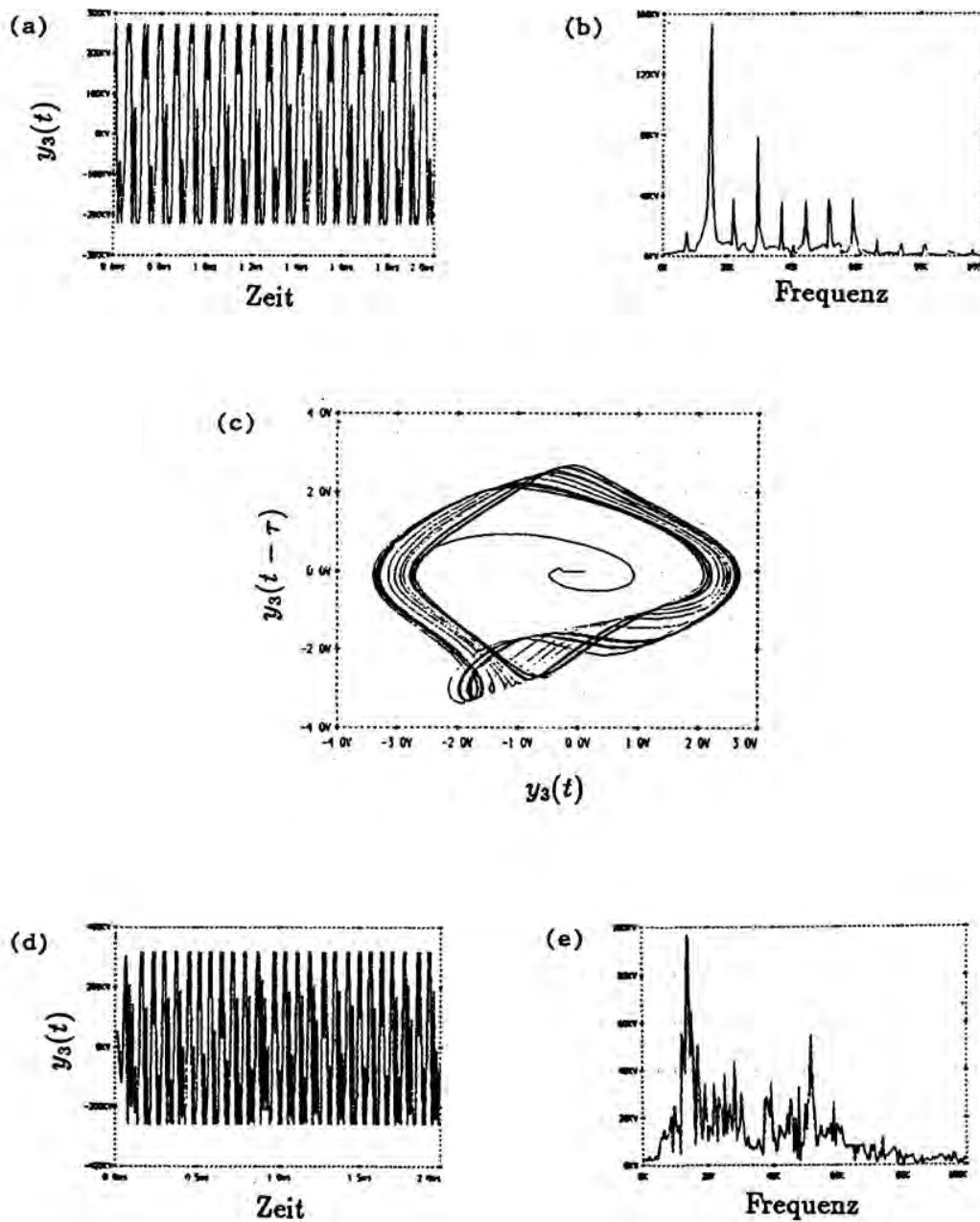


Abb. 4.13: Numerische Simulationen zum chaotischen Verhalten eines PLL. (a), (b), (c) Periode-2-Lösung mit dazugehörigem Fourierspektrum und Phasenportrait; $\tau = 15\mu\text{sec}$, $K = 250\text{ kHz}$, $\Delta\omega = 3 \cdot 10^4\text{ rad/sec}$. (d), (e) Chaotisches Verhalten des PLL; $K = 290\text{ kHz}$, ansonsten gleiche Bedingungen wie unter (a).

$\pm 2\pi$ auf $\pm \frac{2}{10}\pi$. Diese konnten daraufhin am Ausgang eines zusätzlichen Phasendetektors nachgewiesen werden [89]. Der modifizierte Versuchsaufbau ist in Abbildung 4.14 zu sehen.

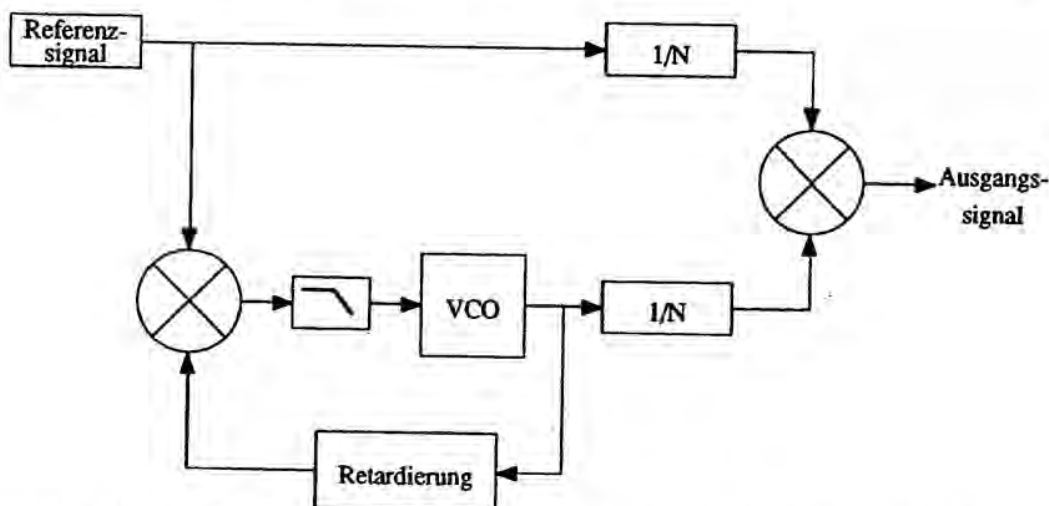


Abb. 4.14: Experimenteller Versuchsaufbau zum Nachweis von Phasensprüngen.

Die nachfolgenden Untersuchungen zeigen, daß es sich bei den Phasensprüngen um ein sehr allgemeines Phänomen handelt, welches sowohl bei Systemen mit, als auch bei solchen ohne zeitliche Verzögerung auftreten kann.

Phasensprünge in einem PLL 1. Ordnung ohne zeitliche Verzögerung

Ein Phasenregelkreis 1. Ordnung ohne zeitliche Verzögerung und ohne den Einfluß stochastischer Kräfte ist, wie bereits mehrfach erwähnt, immer stabil. Das bedeutet, daß in diesem System keine Phasensprünge auftreten können. Unabhängig von der gewählten Anfangsbedingung befindet sich ein solcher PLL für alle Zeiten in dem Einzugsbereich eines ganz bestimmten Attraktors. Im Unterschied dazu ist ein PLL 1. Ordnung unter dem Einfluß stochastischer Kräfte unter bestimmten Bedingungen zu Phasensprüngen fähig. Dazu muß sich der Regelkreis nahe der Grenze seines Synchronisationsbereiches befinden, die äußere Frequenzverschiebung also hinreichend groß sein. Von außen einwirkende Fluktuationen können in diesem Fall Übergänge zu den benachbarten Attraktoren induzieren. Abbildung 4.15 zeigt experimentelle Resultate zu diesen Phasensprüngen, die mit einem weißen gausschen Rauschprozeß gewonnen wurden.

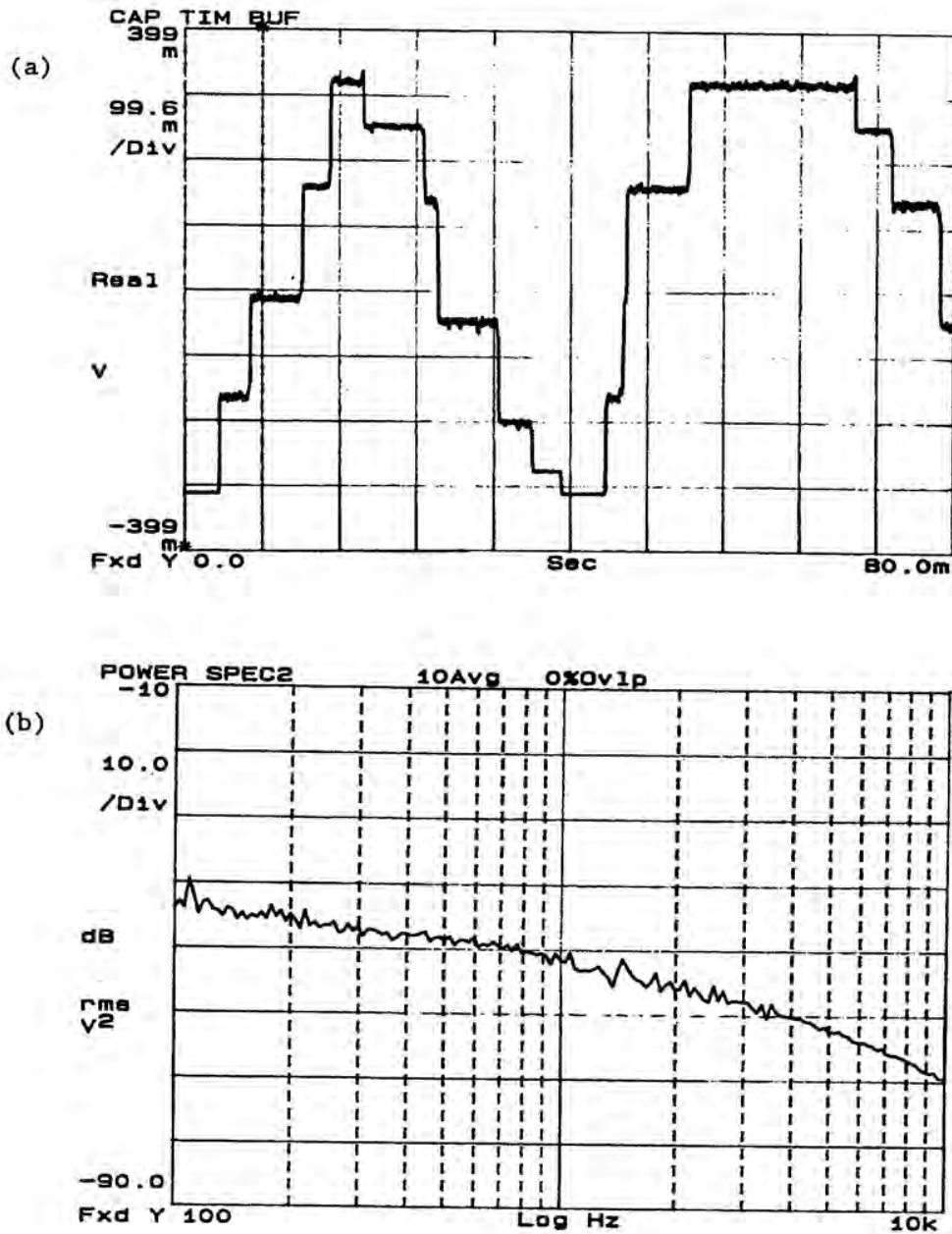


Abb. 4.15: Phasensprünge eines PLL 1. Ordnung ohne zeitliche Verzögerung unter dem Einfluß stochastischer Kräfte. (a) Phasenfehlersignal; $K = 59$ kHz, $\Delta\omega = 4 \cdot 10^4$ rad/sec, Modulationsindex = 0.5 kHz, weißes Rauschen mit einer Fluktuationsstärke von -15 dBV. (b) Zu (a) gehöriges Frequenzspektrum in doppellogarithmischer Auftragung.

Das Phasenfehlersignal in Abbildung 4.15(a) besteht aus einem verrauschten Gleichspannungssignal, welches in unregelmäßigen Abständen von Phasensprüngen um 2π unterbrochen ist. Die Sprünge erfolgen wegen der äußeren Frequenzverschiebung nur in eine Richtung. Die einhüllende Kurve stellt das 'out-of-lock' Signal dar, welches sich für eine äußere Frequenzverschiebung ergeben würde, die den 'open loop gain' überschreiten würde. Das dazugehörige Frequenzspektrum zeigt für niedrige Frequenzen ein $1/f^\alpha$ -Rauschen mit $\alpha \approx 0.8$.

Phasensprünge in einem PLL 1. Ordnung mit zeitlicher Verzögerung

Während einem PLL 1. Ordnung ohne zeitliche Verzögerung nur an der unmittelbaren Grenze seines Synchronisationsbereiches unter dem Einfluß genügend starker Fluktuationen Phasensprünge induziert werden können, zeigt der entsprechende Regelkreis mit zeitlicher Verzögerung bereits ohne jeglichen stochastischen Einfluß und mit beliebiger äußerer Frequenzverschiebung diesen Effekt. Durch die oszillatorische Instabilität kann das Phasenfehlersignal nämlich nun Oszillationen mit hoher Amplitude durchführen und damit in den Einzugsbereich eines benachbarten Attraktors gelangen. In Abbildung 4.16 sind experimentelle Messungen zu den Phasensprüngen dargestellt [89].

Man sieht deutlich den irregulären Charakter der Sprünge, welcher sich durch die unterschiedliche Länge der 'laminaren' Phasen ausdrückt. Die spektrale Verteilung zeigt auch hier ein $1/f$ -Spektrum. Diese Spektralverteilung rührt offensichtlich nicht von äußeren Fluktuationen her, da selbst das Einbringen von weißen oder $1/f^2$ Rauschquellen zu keiner qualitativen Änderung des Spektrum führt. Ein theoretisches Verständnis für das Auftreten gerade einer solchen Form der spektralen Verteilung steht, abgesehen von mehr oder weniger heuristischen Modellen [80], bislang noch aus. Sicher ist, daß es sich um einen intrinsischen deterministischen Effekt der nichtlinearen Dynamik des PLL's handeln muß. Dies steht auch im Einklang mit Untersuchungen der chaotischen Dynamik von Josephsonkontakten [96], die ebenfalls ein cycle slipping Verhalten des Phasendifferenzsignals mit derselben Spektralverteilung beobachtet haben und diesen Effekt auf ein intermittentes Verhalten des Kontaktes zurückführten.

Bei den numerischen Untersuchungen zu den Phasensprüngen mit verschwindender äußerer Frequenzverschiebung treten die Phasensprünge bereits im oszillatorischen Be-

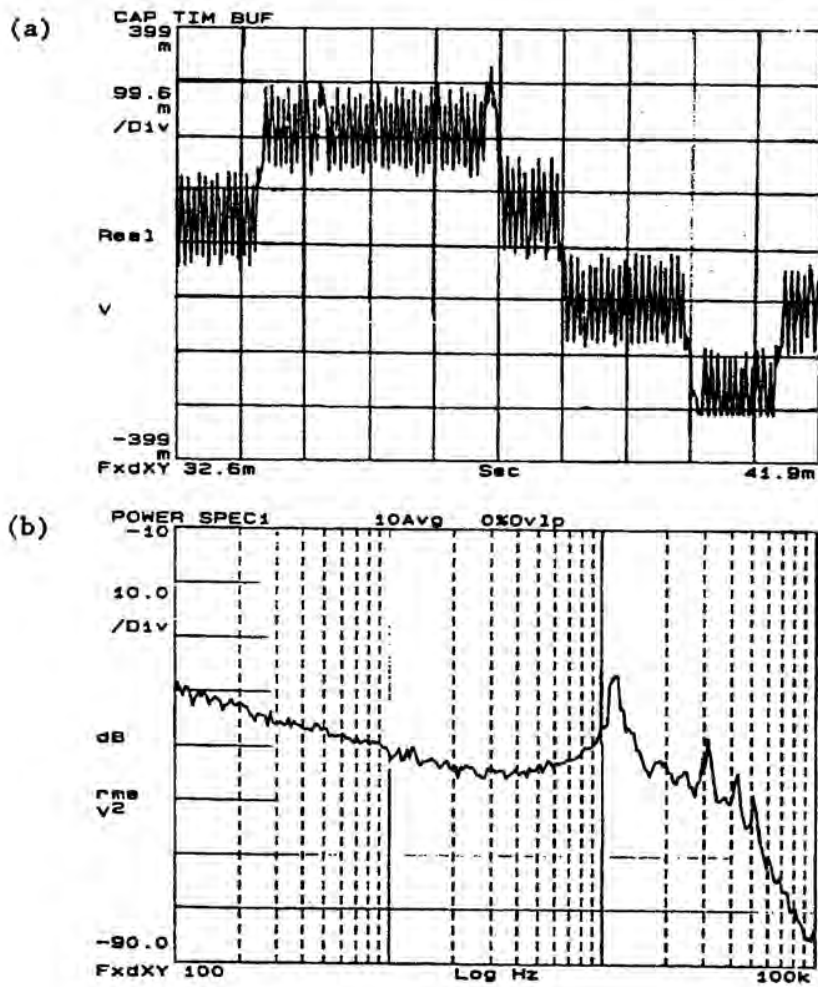


Abb. 4.16: Phasensprünge eines PLL 1. Ordnung mit zeitlicher Verzögerung.
 (a) Phasenfehlersignal; $\tau = 15\mu\text{sec}$, $K = 211\text{ kHz}$, $\Delta\omega = 0$. (b) Zu (a) gehörendes Frequenzspektrum in doppeltlogarithmischer Auftragung.

reich auf, so daß eine für höhere Kontrollparameterwerte mögliche chaotische Dynamik nicht mehr nachgewiesen werden kann, da deren Charakteristikum einer kontinuierlichen spektralen Verteilung durch das $1/f$ -Rauschen überdeckt werden würde. Hingegen stimmen die numerischen Simulationen unter Berücksichtigung einer 'fiktiven' äußeren Frequenzverschiebung mit den experimentellen Ergebnissen qualitativ überein (Abbildung 4.17).

Die Abbildungen 4.17(a), (b) zeigen die zeitliche Entwicklung des Phasenfehlersignals sowie die Dynamik im Phasenraum, welcher durch die unabhängigen Variablen $\phi(t)$ und $\phi(t - \tau)$ aufgespannt wird. Die Trajektorie bleibt für eine gewisse Zeit im Einzugsbereich eines Attraktors (Synchronisation) um dann in unregelmäßigen Abständen in den Einzugsbereich eines anderen Attraktors zu springen (out-of-lock). Dies bestätigt die Vermutung, daß die Phasensprünge durch eine hinreichend große Amplitude des Phasenfehlersignals induziert werden, liefert aber noch keinen Hinweis auf die Ursache der charakteristischen Spektralverteilung (vgl. Abbildung 4.17(c)). Es bleibt anzumerken, daß eine Messung des 2π -modulierten Phasenfehlersignals y_3 , welches keine Phasensprünge aufweist, zu einem annähernd kontinuierlichen weißen Spektrum führt (Abbildung 4.17(d)) und somit die $1/f$ Charakteristik wesentlich mit der cycle slipping Bewegung verbunden ist.

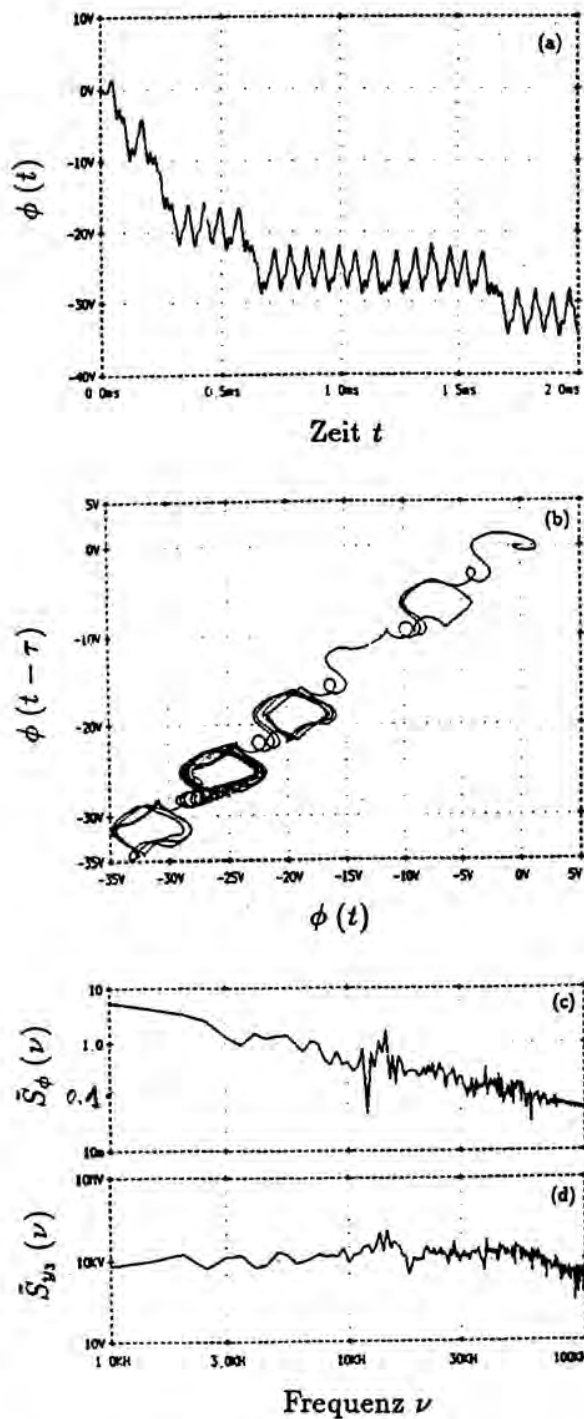


Abb. 4.17: Numerische Simulationen zu Phasensprüngen eines zeitlich verzögerten PLL 1. Ordnung. (a) Phasendynamik; $\tau = 15\mu\text{sec}$, $K = 300\text{ kHz}$, $\Delta\omega = 3 \cdot 10^4\text{ rad/sec}$; (b) Phasenportrait zu a); (c) Zu a) gehöriges Spektrum in doppeltlogarithmischer Auftragung; (d) Spektrum des 2π -modulierten Phasenfehlersignals.

Kapitel 5

Diskussion und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit haben wir versucht, auf die Bedeutung von Verzögerungseffekten bei Prozessen der Selbstorganisation aufmerksam zu machen. Ungeachtet der zahlreichen mathematischen Schwierigkeiten, die mit einer Behandlung zeitlich nicht-lokaler Vorgänge verbunden sind, haben wir aufzeigen können, wie sich die Konzepte der Synergetik auf eine allgemeine Klasse von zeitlich retardierten Systemen übertragen lassen. Der zentrale Punkt bestand darin, das dynamische Verhalten eines komplexen Systems in einem unendlich dimensional erweiterten Zustandsraum zu formulieren. Hierdurch erst wurde es möglich, die Spektraleigenschaften von Delay-Differentialgleichungen zur Aufspaltung in Ordnungsparameter und stabile Moden heranzuziehen. Es konnte gezeigt werden, daß das unendlich dimensionale System von Modenamplitudengleichungen in der Nähe einer Instabilität durch eine Zeitskalenhierarchie ausgezeichnet ist, so daß mittels einer verallgemeinerten Formulierung des Versklavungsprinzips der Synergetik das dynamische Verhalten des zeitlich retardierten Systems durch einen endlich dimensional Satz von Ordnungsparametergleichungen in der Form von gewöhnlichen Differentialgleichungen beschrieben werden kann. Die mit Hilfe des Eliminationsverfahren gewonnenen Ergebnisse widerlegen somit Vermutungen, nach der eine adiabatische Elimination für Delay-Differentialgleichungen nicht durchführbar wäre [4, 43, 58].

Eingeschränkt werden muß der Anwendungsbereich des Verfahrens jedoch bisher auf die Beschreibung von Strukturbildungsprozessen, die aus einem stationären Referenz-

zustand hervorgehen. Die Behandlung zeitabhängiger Referenzzustände würde nämlich schon im einfachsten Fall eine Floquettheorie erforderlich machen, die bislang nur für Systeme ohne Gedächtnisterme formuliert wurde. Ungenügend berücksichtigt wurden auch Wechselwirkungen zeitlicher Retardierungen mit äußeren Fluktuationen, obwohl Hinweise darauf bestehen, daß geeignet gewählte Retardierungen in nichtlinearen Termen zu einer drastischen Reduktion der Diffusionskonstante führen können [79]. Von grundlegender Bedeutung wäre es deshalb, das Eliminationsverfahren auf stochastische Systeme zu erweitern. Mittels eines geeigneten Projektorformalismus müßte es dann möglich sein, das Eliminationsverfahren, für notwendigerweise nichtmarkovsche Prozesse, so zu formulieren, daß die Ordnungsparameter näherungsweise einer Master-Gleichung genügen sollten.

Die experimentellen Untersuchungen haben aufgezeigt, daß die Berücksichtigung endlicher Signallaufzeiten zu einer reichhaltigen Dynamik selbst in elementaren Regelkreisen führen kann. Es ist durch die Untersuchungen nicht nur gelungen, die theoretisch gewonnenen Ergebnisse experimentell zu untermauern, sondern es konnten darüber hinaus bisher unbekannte Instabilitäten eines Phasenregelkreises 1. Ordnung aufgefunden werden. Einen besonderen Stellenwert nimmt dabei die durch eine hinreichend große Retardierung hervorgerufene Desynchronisation des Regelkreises ein. Das in diesem Parameterbereich durch eine neuartige Detektionsmethode aufgefundene cycle slipping Verhalten ist in Anwendungen von außerordentlicher Bedeutung. Insbesondere bei frequenz- und phasenstabil arbeitenden Systemen haben diese Phasensprünge großen Einfluß auf die Güte des Kontrollsystems. Nicht zuletzt bieten die bisher unverstandenen Spektraleigenschaften der irregulären Phasensprünge ($1/f$ -Rauschen) noch genügend Raum für weitergehende Studien.

Anhang A

Modellgleichung des PLL mit endlicher Bandbreite

In diesem Anhang soll eine Modellgleichung für den zeitlich verzögerten Phasenregelkreis mit numerischer Verzögerungsleitung unter Berücksichtigung der endlichen Bandbreite des Tiefpaßfilter abgeleitet werden.

Da die verwendete numerische Verzögerungsleitung nicht direkt an den hochfrequenten Ausgang des spannungskontrollierten Oszillators angeschlossen werden kann, bleibt nachzuweisen, daß sich durch den dadurch bedingten modifizierten Versuchsaufbau die Modellgleichung (4.7) nicht ändert. Gleichzeitig soll bei der Herleitung ein Tiefpaßfilter mit endlicher Bandbreite zugrunde gelegt werden. Der schematische Aufbau der modifizierten Anordnung ist in Abbildung A.1 gezeigt.

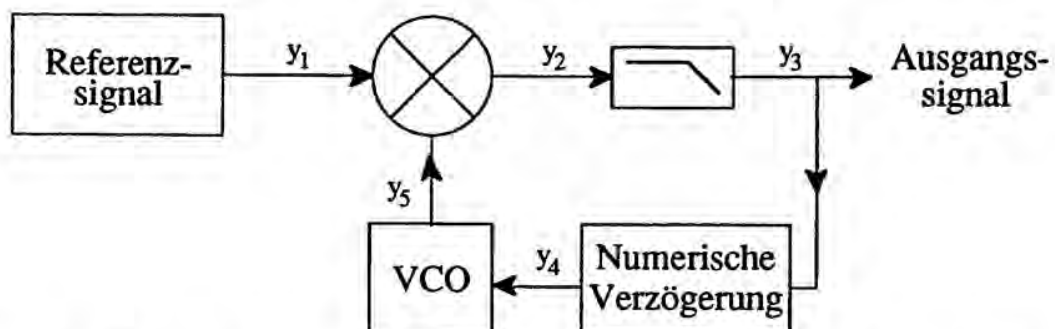


Abb. A.1: Phasenregelkreis 1. Ordnung mit numerischer Verzögerungsleitung.

Für das Ausgangssignal des Referenzoszillators y_1 sowie des spannungskontrollierten Oszillators y_5 gilt

$$y_1(t) = A \sin(\Theta(t)) \quad , \quad \frac{d}{dt} \Theta(t) = \omega_0 \quad , \quad (\text{A.1})$$

$$y_5(t) = B \cos(\Psi(t)) \quad , \quad \frac{d}{dt} \Psi(t) = \omega + K_1 y_4(t) \quad . \quad (\text{A.2})$$

Die numerische Verzögerungsleitung läßt das gefilterte Ausgangssignal des Phasendetektors zeitlich verzögert am Eingang des VCO ankommen

$$y_4(t) = y_3(t - \tau) \quad . \quad (\text{A.3})$$

Am Ausgang des Phasendetektors erhält man

$$y_2(t) = \beta \frac{AB}{2} \left[\sin[\Theta(t) - \Psi(t)] + \sin[\Theta(t) + \Psi(t)] \right] \quad . \quad (\text{A.4})$$

Der Tiefpaßfilter mit der endlichen Bandbreite $\Delta\nu$ eliminiert automatisch den hochfrequenten Term in (A.4), da dieser mit einer wesentlich höheren Frequenz als der Abschneidefrequenz des Filters oszilliert. Es verbleibt

$$\frac{1}{\Delta\nu} \frac{d}{dt} y_3(t) + y_3(t) = \beta \frac{AB}{2} \left[\sin[\Theta(t) - \Psi(t)] \right] \quad . \quad (\text{A.5})$$

Führt man als dynamische Variable den Phasenfehler ϕ über

$$\phi(t) = \Theta(t) - \Psi(t) \quad . \quad (\text{A.6})$$

ein, so ergibt sich durch eine zweimalige zeitliche Differentiation mit der Notation aus Kap. 4.1 die folgende Evolutionsgleichung für ϕ

$$\frac{1}{\Delta\nu} \frac{d^2}{dt^2} \phi(t) + \frac{d}{dt} \phi(t) + K \sin[\phi(t - \tau)] = \omega - \omega_0 \quad . \quad (\text{A.7})$$

Man sieht unmittelbar, daß im Grenzfall eines Tiefpaßfilters mit unendlicher Bandbreite ($\Delta\nu \rightarrow \infty$) (A.7) in die Modellgleichung (4.7) übergeht, und somit die unterschiedliche Implementierung der Verzögerungsleitung keinen Einfluß auf das dynamische Verhalten des PLL hat.

Eine lineare Stabilitätsanalyse von (A.7) um die stationäre Lösung ϕ_{Stat} führt auf die charakteristische Gleichung

$$\frac{1}{\Delta\nu} \lambda^2 + \lambda + K \cos(\phi_{Stat}) e^{-\lambda\tau} = 0 \quad . \quad (\text{A.8})$$

An der Schwelle einer Instabilität geht (A.8) in Verallgemeinerung von (4.19-20) über in

$$-\frac{1}{\Delta\nu}\Omega^2 + K \cos(\phi_{Stat}) \cos(\Omega\tau) = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$\Omega - K \cos(\phi_{Stat}) \sin(\Omega\tau) = 0. \quad (\text{A.10})$$

Durch Quadratur der Gleichungen (A.9) und (A.10) erhält man für das Quadrat der Kreisfrequenz der einsetzenden Oszillation

$$\Omega^2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\left(\frac{K \cos(\phi_{Stat})}{\Delta\nu}\right)^2}}{2/\Delta\nu^2}. \quad (\text{A.11})$$

Für sehr große Bandbreiten läßt sich die Wurzel entwickeln, was zu

$$\Omega^2 = \left(K \cos(\phi_{Stat})\right)^2 + O\left(\frac{K^4}{\Delta\nu^2}\right) \quad (\text{A.12})$$

führt. Im Grenzfall $\Delta\nu \rightarrow \infty$ geht (A.12) in das bekannte Resultat (4.21) über. In Abbildung A.2 ist der Einfluß der endlichen Bandbreite $\Delta\nu$ auf die Kreisfrequenz Ω der einsetzenden Oszillation noch einmal graphisch dargestellt.

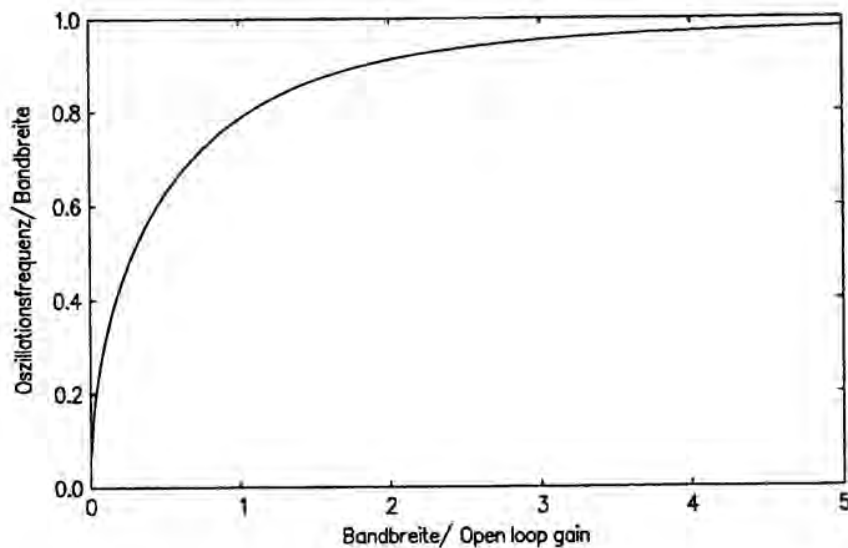


Abb. A.2: Kreisfrequenz der Oszillation in Abhängigkeit von der Bandbreite des Tiefpaßfilters.

Anhang B

Skalierungseigenschaften der Modellgleichung

In diesem Anhang sollen die Skalierungseigenschaften der Modellgleichung (4.7)

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = -K \sin[\phi(t - \tau)] + \Delta\omega \quad (\text{B.1})$$

für den zeitlich retardierten Phasenregelkreis 1. Ordnung aufgezeigt werden. Diese hängt über K , τ und $\Delta\omega$ von drei Kontrollparametern ab, die jedoch nicht unabhängig voneinander wählbar sind. Führt man nämlich in (B.1) eine Zeitskalierung der Form $t = \tau t'$ durch, so geht diese Gleichung über in

$$\frac{d}{dt'}\phi(\tau t') + K\tau \sin[\phi(\tau(t' - 1))] = \tau\Delta\omega. \quad (\text{B.2})$$

Mit der neuen unabhängigen Variablen $x(t') = \phi(\tau t')$ ergibt sich

$$\frac{d}{dt}x(t) = -K\tau \sin[x(t - 1)] + \tau\Delta\omega, \quad (\text{B.3})$$

wobei gestrichene Größen wieder durch ungestrichene ersetzt wurden. Man sieht, daß Gleichung (B.3) effektiv nur noch von zwei Kontrollparametern abhängt. Für den Fall einer verschwindenden äußeren Frequenzverschiebung $\Delta\omega = 0$ tritt in (B.3) sogar nur noch das Produkt $K\tau$ als einziger Kontrollparameter auf.

Anhang C

Nichtlineare Stabilitätsanalyse im Zustandsraum Γ

Wie in Kapitel 4 gezeigt wurde, erlaubt eine lineare Stabilitätsanalyse in dem erweiterten Zustandsraum \mathcal{C} die explizite Bestimmung der Schwelle sowie der Eigenfunktionen der linear instabilen Moden der Hopf-Bifurkation. Wir möchten aufzeigen, daß auch eine Stabilitätsanalyse in dem endlich dimensionalen Zustandsraum Γ zu einer Charakterisierung der oszillatorischen Instabilität führen kann. Dazu erweist es sich jedoch als notwendig, eine nichtlineare Stabilitätsanalyse durchzuführen [74].

Als Lösungsansatz der Modellgleichung (4.10) wählt man

$$q(t) = q_{Stat} + M \sin(\Omega t) + \epsilon R(t). \quad (\text{C.1})$$

Die in (C.1) auftretenden Größen haben dabei folgende Bedeutung: q_{Stat} stellt die stationäre Lösung der Delay-Differentialgleichung dar. M ist die noch zu bestimmende Amplitude der Oszillation mit der Kreisfrequenz Ω , $R(t)$ schließlich enthält alle höheren harmonischen Terme, die, ausgedrückt durch den Kleinheitsparameter ϵ , als kleine Störung der harmonischen Grundschwingung angesehen werden sollen. Setzt man (C.1) in (4.10) ein und berücksichtigt nur Terme in niedrigster Ordnung von ϵ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \Omega M \cos(\Omega t) + K \cos(q_{Stat}) \sin [M \sin (\Omega(t - \tau))] + \\ & K \sin(q_{Stat}) \cos [M \sin (\Omega(t - \tau))] + \mathcal{O}(\epsilon) = 0. \end{aligned} \quad (C.2)$$

Gleichung (C.2) läßt sich mithilfe der Besselfunktionen 1. Art $J_i(M)$ in übersichtlicherer Form schreiben als

$$\begin{aligned} & \Omega M \cos(\Omega t) + 2K \cos(q_{Stat}) [J_1(M) \sin (\Omega(t - \tau)) + J_3(M) \sin (3\Omega(t - \tau)) + \dots] \\ & + K \sin(q_{Stat}) [J_0(M) + 2J_2(M) \cos (2\Omega(t - \tau)) + \dots] + \mathcal{O}(\epsilon) = 0. \end{aligned} \quad (C.3)$$

Vernachlässigt man alle höheren harmonischen Terme und beschränkt sich auf die Untersuchung der einsetzenden Oszillation, wo noch näherungsweise eine sinusoidale Schwingung vorliegt, so geht (C.3) über in

$$\begin{aligned} & \Omega M \cos(\Omega t) + 2K \cos(q_{Stat}) J_1(M) [\sin(\Omega t) \cos(\Omega \tau) - \cos(\Omega t) \sin(\Omega \tau)] + \\ & K \sin(q_{Stat}) J_0(M) = 0. \end{aligned} \quad (C.4)$$

Da (C.4) für beliebige Zeiten erfüllt sein soll, muß diese Gleichung für ihre zeitabhängigen sowie zeitunabhängigen Summanden jeweils getrennt erfüllt sein. Dies führt zu

$$K J_0(M) \sin(q_{Stat}) = 0, \quad (C.5)$$

$$\Omega M \cos(\Omega t) + 2K \cos(q_{Stat}) J_1(M) [\sin(\Omega t) \cos(\Omega \tau) - \cos(\Omega t) \sin(\Omega \tau)] = 0. \quad (C.6)$$

Aus (C.5) erhält man in Übereinstimmung mit (4.13) für die stabilen stationären Lösungen das Resultat

$$q_{Stat} = 0 \pmod{2\pi}. \quad (C.7)$$

Gleichung (C.6) läßt sich durch eine Division durch $\cos(\Omega t)$ noch einmal in zeitunabhängige und zeitabhängige Terme aufspalten, die mit derselben Argumentation wie oben und unter Berücksichtigung von (C.7) zu den beiden Relationen

$$\cos(\Omega \tau) = 0, \quad (C.8)$$

$$\Omega M - 2K J_1(M) \sin(\Omega \tau) = 0 \quad (C.9)$$

führen. Gleichung (C.8) führt wieder auf die Oszillationsfrequenzen (vgl. (4.22))

$$\Omega_{\pm}\tau = \pm \left(2n + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{C.10})$$

Eine implizite Bestimmungsgleichung für die Amplitude der einsetzenden Oszillation ergibt sich damit zu

$$M = \frac{2K}{\Omega} J_1(M). \quad (\text{C.11})$$

Eine graphische Lösung der transzendenten Gleichung (C.11) zur Bestimmung der Amplitude M ist in Abbildung C.1 dargestellt.

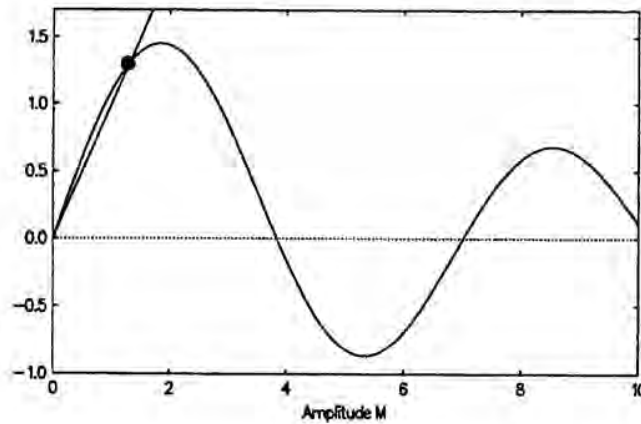


Abb. C.1: Graphische Lösung von Gleichung (C.11). Die Amplitude M ergibt sich aus dem Schnittpunkt der aufgetragenen Besselfunktion mit der ersten Winkelhalbierenden.

Die oszillatorische Instabilität (Hopf-Bifurkation) des PLL 1. Ordnung mit zeitlicher Verzögerung kann somit auch in dem endlich dimensional Zustandsraum Γ insoweit beschrieben werden, als es durch eine nichtlineare Stabilitätsanalyse möglich wird, Aussagen über Schwelle, Frequenz und Amplitude der einsetzenden Oszillation zu gewinnen. Die Notwendigkeit eine nichtlineare Stabilitätsanalyse durchzuführen ergibt sich aus der Tatsache, daß eine lineare Stabilitätsanalyse zu keiner Bestimmungsgleichung der Amplitude M führen würde.

Literaturverzeichnis

- [1] U. an der Heiden and M. C. Mackey: 'Mixed Feedback: A Paradigm for Regular and Irregular Oscillations', in *Temporal Disorder in Human Oscillatory Systems*, (Eds. L. Rensing, U. an der Heiden and M. C. Mackey), (Springer, New York 1987)
- [2] F. T. Arecchi, G. Giacomelli, A. Lapucci, and R. Meucci: 'Dynamics of a CO_2 Laser with delayed feedback: The short-delay regime', *Phys. Rev.* **A43**, 4997 (1991)
- [3] R. Bellman and K. L. Cooke: *Differential-Difference Equations*, (Academic Press, New York 1963)
- [4] P. Bergé: *Le Chaos*, Collection CEA, Série Synthèses, (Eyrolles, Paris 1988)
- [5] A. Blanchard: *Phase-Locked Loops*, (Wiley & Sons, New York 1976)
- [6] E. Boe and H. C. Chang: 'Transition to Chaos from a Two-Torus in a Delayed Feedback System', *Int. J. Bifurcation and Chaos* **1**, 67 (1991)
- [7] J. Carr: *Applications of Centre Manifold Theory*, (Springer, New York 1981)
- [8] F. Chapeau-Blondeau and G. Chauvet: 'Stable, Oscillatory, and Chaotic Regimes in the Dynamics of Small Neural Networks With Delay', *Neural Networks* **5**, 735 (1992)
- [9] P. Chen: 'Empirical and theoretical evidence of economic chaos', *System Dynamics Review* **4**, 81 (1988)
- [10] J. L. Chern, J. K. McIver, and J. T. Shy: 'Delay-induced effects on isola type of steady state pattern in a coupled optical bistable chain', *Phys. Lett.* **A158**, 209 (1991)

- [11] Y. Cho and T. Umeda: 'Observation of Chaos in a Semiconductor Laser with Delayed Feedback', *Opt. Comm.* **59**, 131 (1986)
- [12] S. N. Chow and J. Mallet-Paret: 'Integral Averaging and Bifurcation', *J. Differential Equations* **26**, 112 (1977)
- [13] S. N. Chow, J. K. Hale, and W. Huang: 'From sine waves to square waves in delay equations', *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **120A**, 223 (1992)
- [14] S. N. Chow: Vortrag Universität Stuttgart, Juli 1992
- [15] M. W. Derstine, H. M. Gibbs, F. A. Hopf, and D. L. Kaplan: 'Bifurcation gap in a hybrid optically bistable system', *Phys. Rev.* **A26**, 3720 (1982)
- [16] M. W. Derstine, H. M. Gibbs, F. A. Hopf, and D. L. Kaplan: 'Alternate paths to chaos in optical bistability', *Phys. Rev.* **A27**, 3200 (1983)
- [17] B. Dorizzi, B. Grammaticos, M. Le Berre, Y. Pomeau, E. Ressayre and A. Tallet: 'Statistics and dimension of chaos in differential delay systems', *Phys. Rev.* **A35**, 328 (1987)
- [18] B. Dorizzi and B. Grammaticos: 'Delay-induced desynchronization in neuronal oscillations', *Phys. Rev.* **A44**, 6958 (1991)
- [19] W. F. Egan: *Frequency Synthesis by Phase Lock*, (Wiley & Sons, New York 1981)
- [20] T. Endo and L. O. Chua: 'Chaos From Phase-Locked Loops I & II', *IEEE Trans. Circuits Syst.* **35**, 987 (1988) and 255 (1989)
- [21] T. Endo, M. Imai, and L. O. Chua: 'Phase-Locked Loops Can Be Chaotic', *Trans. of the IEICE* **E73**, 825 (1990)
- [22] T. Endo: 'Homoclinic Orbits, Fractal Basin Boundaries and Bifurcations of Phase-Locked Loop Circuits', *Trans. of the IEICE* **E73**, 828 (1990)
- [23] J. D. Farmer: 'Chaotic Attractors of an Infinite-Dimensional Dynamical System', *Physica* **4D**, 366 (1982)
- [24] J. Y. Gao, L. M. Narducci, L. S. Schulman, M. Squicciarini, and J. M. Yuan: 'Route to chaos in a hybrid bistable system with delay', *Phys. Rev.* **A28**, 2910 (1983)

- [25] J. Y. Gao, J. M. Yuan, and L. M. Narducci: 'Instabilities and chaotic Behavior in a Hybrid Bistable System with a Short Delay', *Opt. Comm.* **44**, 201 (1983)
- [26] J. Y. Gao, L. M. Narducci, H. Sadiky, M. Squicciarini, and J. M. Yuan: 'Higher-order bifurcations in a bistable system with delay', *Phys. Rev.* **A30**, 901 (1984)
- [27] G. Giacomelli, M. Calzavara, and F. T. Arecchi: 'Instabilities in a Semiconductor Laser with Delayed Optoelectronic Feedback', *Opt. Comm.* **74**, 97 (1989)
- ✓ [28] H. M. Gibbs, F. A. Hopf, D. L. Kaplan, and R. L. Shoemaker: 'Observation of Chaos in Optical Bistability', *Phys. Rev. Lett.* **46**, 474 (1981)
- [29] H. M. Gibbs: *Optical Bistability: Controlling Light with Light*, (Academic Press, Orlando 1985)
- [30] L. Glass, A. Beuter, and D. Larocque: 'Time Delays, Oscillations, and Chaos in Physiological Systems', in *Nonlinearity in Biology and Medicine* (Eds. A. S. Perelson, B. Goldstein, M. Dembo, and J. A. Jadquez), (Elsevier, New York 1988)
- [31] L. Glass and M. C. Mackey: *From Clocks to Chaos*, (Princeton, University Press 1988)
- [32] E. V. Grigorieva, S. A. Kashchenko, N. A. Loiko and A. M. Samson: 'Nonlinear Dynamics in a Laser with a Negative Delayed Feedback', *Physica D* **59**, 297 (1992)
- [33] H. Haken and A. Wunderlin: 'Slaving Principle for Stochastic Differential Equations with Additive and Multiplicative Noise and for Discrete Noisy Maps', *Z. Physik B* **47**, 179 (1982)
- [34] H. Haken: *Synergetik. Eine Einführung*, (Springer, Berlin 1983)
- [35] H. Haken: *Advanced Synergetics*, (Springer, Berlin 1983)
- [36] H. Haken: *Synergetic Computers and Cognition*, (Springer, Berlin 1991)
- [37] H. Haken, W. Wischert, A. Wunderlin, and O. G. Meijer: 'Introduction to Synergetics' in *Some Physico-chemical and Mathematical Tools for Living Systems Understanding*, (Eds. H. Greppin, M. Bonzon, and R. Degli Agosti), University of Geneva (1993)

- [38] J. K. Hale: *Theory of Functional Differential Equations*, (Springer, New York 1977)
- [39] J. K. Hale, L. T. Magalhães, W. M. Oliva: *An Introduction to Infinite Dimensional Dynamical Systems - Geometric Theory*, (Springer, New York 1984)
- [40] J. K. Hale: 'Dynamics and Delays', in *Functional Differential Equations*, (Ed. T. Yoshizawa), (World Scientific, Singapore 1991)
- [41] I. Hamilton: 'Intermittently chaotic oscillations for a differential-delay equation with Gaussian nonlinearity', *Phys. Rev. A* **45**, 1259 (1992)
- [42] B. J. Hawdon, J. O'Gorman, and D. M. Heffernan: 'Dynamical Studies of a Hybrid Optical Bistable System', *J. Phys.* **49**, C2-419 (1988)
- [43] B. J. Hawdon, J. O'Gorman, and D. M. Heffernan: 'Stability Properties of Nonlinear Delay Systems and the Breakdown of the Adiabatic Approximation', *Z. Naturforschung* **46a**, 686 (1991)
- [44] D. D'Humieres, M. R. Beasley, B. A. Huberman, and A. Libchaber, 'Chaotic states and routes to chaos in the forced pendulum', *Phys. Rev.* **A26**, 3483 (1982)
- [45] F. A. Hopf, D. L. Kaplan, H. M. Gibbs, and R. L. Shoemaker: 'Bifurcations to chaos in optical bistability', *Phys. Rev.* **A25**, 2172 (1982)
- [46] F. A. Hopf, D. L. Kaplan, M. H. Rose, L. Sanders, and M. W. Derstine: 'Characterization of Chaos in a Hybrid Optically Bistable Device', *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1394 (1986)
- [47] K. Ikeda: 'Multiple-valued Stationary State and its Instability of the Transmitted Light by a Ring Cavity System', *Opt. Comm.* **30**, 257 (1979)
- [48] K. Ikeda, H. Daido, and O. Akimoto: 'Optical Turbulence: Chaotic Behavior of Transmitted Light from a Ring Cavity', *Phys. Rev. Lett.* **45**, 709 (1980)
- [49] K. Ikeda, K. Kondo, and O. Akimoto: 'Successive Higher-Harmonic Bifurcations in Systems with Delayed Feedback', *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1467 (1982)
- [50] K. Ikeda and M. Mizuno: 'Frustrated Instabilities in Nonlinear Optical Resonators', *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1340 (1984)

- [51] K. Ikeda and O. Akimoto: 'Optical Turbulence' in *Chaos and Statistical Methods*, (Ed. Y. Kuramoto), (Springer, New York 1984)
- [52] K. Ikeda and K. Matsumoto: 'Study of High-Dimensional Chaotic Attractor', *J. Stat. Phys.*, **44**, 955 (1986)
- [53] K. Ikeda: 'Delay-Differential Equations Modeling Nonlinear Optical Resonators', in *Optical Instabilities*, (Eds. R. W. Boyd, M. G. Raymer, and L. M. Narducci), (Cambridge University, Cambridge 1986)
- [54] K. Kaiser and D. Merkle: 'Routes to Chaos in a Delay-Differential Equation System Modelling a Passive Optical Resonator', *Phys. Lett.* **A139**, 133 (1989)
- [55] J. A. S. Kelso: Persönliche Mitteilung, März 1993
- [56] V. Ya. Kislov, N. N. Zalogin, and YE. A. Myasin: 'Study of Stochastic Self-Oscillatory Processes in Self-Excited Oscillators with Delay', *Radio Engng. Electron. Physics* **24**, No. 6, 92 (1979)
- [57] V. B. Kolmanovskii and V. R. Nosov: *Stability of Functional Differential Equations*, (Academic Press, London 1985)
- [58] M. Le Berre, E. Ressayre, A. Tallet, and H. M. Gibbs: 'High-Dimension Chaotic Attractors of a Nonlinear Ring Cavity', *Phys. Rev. Lett.* **56**, 274 (1986)
- [59] M. Le Berre, E. Ressayre, A. Tallet, H. M. Gibbs, D. L. Kaplan, and M. H. Rose: 'Conjecture on the dimensions of chaotic attractors of delayed-feedback dynamical systems', *Phys. Rev.* **A35**, 4020 (1987)
- [60] M. Le Berre, Y. Pomeau, E. Ressayre, A. Tallet, H. M. Gibbs, D. L. Kaplan, and M. J. Rose: 'From Deterministic Chaos to Noise in Retarded Feedback Systems', in *Far from Equilibrium Phase Transitions*, (Ed. L. Garrido), Proceedings, Sitges, Barcelona (Springer 1988)
- [61] M. Le Berre, E. Ressayre, A. Tallet, and J. J. Zondy: 'Lyapunov Vectors Treatment for Bifurcations in Retarded Differential Systems', *J. Phys.* **49**, C2-389 (1988)
- [62] M. Le Berre, E. Ressayre, and A. Tallet: 'Type-I Intermittency route to chaos in a saturable ring-cavity-retarded differential difference system', *J. Opt. Soc. Am.* **B5**, 1051 (1988)

- [63] M. Le Berre, E. Ressayre, and A. Tallet: 'Lyapunov Analysis of the Ruelle-Takens Route to Chaos in an Optical Retarded Differential System', *Opt. Comm.* **72**, 123 (1989)
- [64] M. Le Berre, E. Ressayre, and A. Tallet: 'Dynamic system driven by a retarded force acting as colored noise', *Phys. Rev.* **A41**, 6635 (1990)
- [65] A. Longtin and J. G. Milton: 'Complex Oscillations in the Human Pupil Light Reflex with 'Mixed' and Delayed Feedback', in *Nonlinearity in Biology and Medicine*, (Eds. A. S. Perelson, B. Goldstein, M. Dembo, and J. A. Jacquez), (Elsevier, New York 1988)
- [66] A. Longtin, J. G. Milton, J. E. Bos, M. C. Mackey: 'Noise and critical behavior of the pupil light reflex at oscillation onset', *Phys. Rev.* **A41**, 6992 (1990)
- [67] A. Longtin: 'Noise-induced transitions at a Hopf bifurcation in a first-order delay-differential equation', *Phys. Rev.* **A44**, 4801 (1991)
- [68] P. Mandel: 'A Review of Instabilities in Optical Bistability', in *Frontiers in Quantum Optics*, (Eds. E. R. Pike and S. Sarkar), (Adam Hilger, Bristol 1986)
- [69] C. Marriott and C. Delisle: 'Entrainment effects in an acoustooptic bistable device with delayed feedback', *Phys. Rev.* **A38**, 2394 (1988)
- [70] C. Marriott, R. Vallée, and C. Delisle: 'Analysis of a first-order delay differential-delay equation containing two delays', *Phys. Rev.* **A40**, 3420 (1989)
- [71] D. Merkle: *Nichtlineare Dynamik optischer Ringresonatoren*, Dissertation (Technische Hochschule Darmstadt 1990)
- [72] J. Mørk, J. Mark, and B. Tromborg: 'Route to Chaos and Competition between Relaxation Oscillations for a Semiconductor Laser with Optical Feedback', *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1999 (1990)
- [73] H. Nakatsuka, S. Asaka, H. Itoh, K. Ikeda, and M. Matsuoka: 'Observation of Bifurcation to Chaos in an All-Optical Bistable System', *Phys. Rev. Lett.* **50**, 109 (1983)
- [74] P. Nardone, P. Mandel, and R. Kapral: 'Analysis of a delay-differential equation in optical bistability', *Phys. Rev.* **A33**, 2465 (1986)

- [75] E. Niebur, H. G. Schuster, and D. M. Kammen: 'Collective Frequencies and Metastability in Networks of Limit-Cycle Oscillators with Time Delay', *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1753 (1991)
- [76] M. Olivier and J. J. Gagnepain: 'Chaotic States and anomalous Noise in Resonators', in Proceedings of the 3rd International Conference on $1/f$ noise, Montpellier (1983)
- [77] K. Otsuka and K. Ikeda: 'Self-Induced Spatial Disorder in a Nonlinear Optical System', *Phys. Rev. Lett.* **59**, 194 (1987)
- [78] K. Otsuka: 'Chaotic itinerancy in a coupled-element multistable optical chain', *Phys. Rev.* **A43**, 618 (1991)
- [79] Y. Pomeau: 'Diffusion de phase d'un autooscillateur avec effet de retard', *C. R. Acad. Sci. Paris*, t **310**, 1025 (1990)
- [80] J. Rutman: *Bruits dans les oscillateurs. Application à la métrologie des fréquences et à la spectroscopie hertzienne*, Dissertation (Paris 1972)
- [81] B. Tromborg and J. Mørk: 'Nonlinear Injection Locking Dynamics and the Onset of Coherence collapse in External Cavity Lasers', *IEEE J. Quant. Electr.* **26**, 642 (1990)
- [82] P. W. Tuinenga: *A Guide to Circuit Simulation and Analysis Using PSpice*, (Prentice Hall, Englewood Cliffs 1988)
- [83] R. Vallée and C. Delisle: 'Route to chaos in an acousto-optic bistable device', *Phys. Rev.* **A31**, 2390 (1985)
- [84] R. Vallée and C. Delisle: 'Periodicity windows in a dynamical system with a delayed feedback', *Phys. Rev.* **A34**, 309 (1986)
- [85] R. Vallée, P. Dubois, M. Côté, and C. Delisle: 'Second-order differential-delay equation to describe a hybrid bistable device', *Phys. Rev.* **A36**, 1327 (1987)
- [86] R. Vallée, C. Marriott, P. Dubois, and C. Delisle: 'Period-Doubling and Chaos in an Nth Order Nonlinear Differential Equation', *J. Phys.* **49**, C2-423 (1988)
- [87] W. Weidlich: 'Physics and Social Sciences - The Approach of Synergetics', *Phys. Rep.* **204**, 1 (1991)

- [88] W. Wischert, M. Olivier, and J. Gros Lambert: 'Frequency Instabilities in Phase-Locked Synthesizers Induced by Time Delays', in Proceedings of the 1992 IEEE Frequency Control Symposium, Hershey (1992)
- [89] W. Wischert, M. Olivier, and J. Gros Lambert: '1/f Cycle Slipping Behaviour in Phase-Locked Loops with Time Delays', in Proceedings of the 12th International Conference on Noise in Physical Systems and 1/f Fluctuations, St. Louis (1993)
- [90] W. Wischert and A. Wunderlin: 'On the Application of Synergetics to Social Systems', in *Interdisciplinary Approaches to Nonlinear Complex Systems*, (Ed. H. Haken), (Springer, Berlin 1993)
- [91] W. Wischert, A. Wunderlin, A. Pelster, M. Olivier, and J. Gros Lambert: 'Delay-Induced Instabilities in Nonlinear Feedback Systems' (zur Veröffentlichung bei Phys. Rev. E eingereicht)
- [92] A. Wunderlin and H. Haken: 'Generalized Ginzburg-Landau Equations, Slaving Principle and Center Manifold Theorem', *Z. Physik* **B44**, 135 (1981)
- [93] A. Wunderlin and H. Haken: 'Some Applications of Basic Ideas and Models of Synergetics to Sociology', in *Synergetics. From Microscopic to Macroscopic Order* (Ed. E. Frehland), (Springer, Berlin 1984)
- [94] A. Wunderlin: *Mathematische Methoden der Synergetik und ihre Anwendungen auf den Laser*, Habilitationsschrift (Universität Stuttgart 1985)
- [95] G. Xu, J. Dai, S. Yang, F. Zhang, and H. Zhang: 'Dynamical behavior in a hybrid optical system with competing interactions', *Phys. Rev.* **A42**, 4269 (1990)
- [96] W. J. Yeh and Y. H. Kao: 'Intermittency in Josephson junctions', *Appl. Phys. Lett.* **42**, 299 (1983)

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Arne Wunderlin für die angenehme Zusammenarbeit und für seine bewundernswerte Bereitschaft, meine vielfach unkonventionellen Vorstellungen mit großem Engagement unterstützt zu haben.

Für die Aufnahme in sein Institut möchte ich Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Hermann Haken sehr herzlich danken.

Ebenso herzlich möchte ich Herrn Dr. Jean-Jacques Gagnepain für die Gastfreundschaft während meines Aufenthaltes an seinem Institut in Besançon und die mir gewährte großzügige Unterstützung danken.

Herrn Prof. Dr. Marcel Olivier danke ich für die freundschaftliche Zusammenarbeit und seinem großen Interesse am Fortgang dieser Arbeit.

Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. Wolfgang Weidlich danke ich für die Übernahme eines Mitberichts.

Für zahlreiche fachliche Gespräche möchte ich mich insbesondere bei Axel Pelster, Michel Planat, Michael Schanz und Thilo Will bedanken. Allen Institutsmitgliedern sei für die kollegiale Atmosphäre gedankt.

Bedanken möchte ich mich ferner bei Emmanuel Bigler und in besonderem Maße bei Thomas Held für ihre Hilfe und die dabei bewiesene unendliche Geduld bei der Beseitigung kontinuierlich auftretender numerischer Probleme.

Der Robert Bosch Stiftung danke ich für die finanzielle Unterstützung.

Nicht zuletzt möchte ich Béatrice Delassalle meinen Dank dafür aussprechen, daß sie mich während einer sehr schweren Zeit immer wieder aufmuntern konnte und mir zu einem erfolgreichen Abschluß verhalf.

Lebenslauf

Wolfgang Wischert, geboren am 11. März 1963 in Stuttgart

Vater: Rudi Wischert

Mutter: Anni Wischert, geb. Weidner

Familienstand: ledig

Sep. 69 - Aug. 73 Grundschule, Stuttgart

Sep. 73 - Mai 82 Königin-Charlotte-Gymnasium, Stuttgart

Mai 82 Allgemeine Hochschulreife

Juli 82 - Sep. 83 Grundwehrdienst

Okt. 83 - Jan. 90 Studium der Physik, Universität Stuttgart

Okt. 85 Vordiplom

Jan. 90 Abschluß des Physikstudiums mit einer Diplomarbeit bei Prof. Dr. A. Wunderlin zum Thema: *Die Behandlung von kritischen Fluktuationen in Nichtgleichgewichtsphasenübergängen mit der Fokker-Planck-Gleichung*

Jan. 90 - Mai 90 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik und Synergetik der Universität Stuttgart

Juni 90 - Sep. 92 Stipendiat der Robert Bosch Stiftung

Feb. 91 - Sep. 92 Forschungsaufenthalt am Laboratoire de Physique et Métrologie des Oscillateurs du CNRS, Besançon

seit Okt. 92 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik und Synergetik der Universität Stuttgart