

1. Streutheorie:

Die Streuung zwischen zwei Teilchen ist von grundlegender Bedeutung, um Informationen über den Aufbau der Materie von Elementarteilchen bis hin zu Festkörpern zu erhalten. Daher diskutieren wir in diesem Kapitel die quantenmechanische Behandlung der Streutheorie.

1.1 Schrödinger-Gleichung:

Wir beginnen mit der Beschreibung zweier unterschiedlicher quantenmechanischer Teilchen. Hierzu haben wir die zugrunde liegende zeitabhängige Schrödinger-Gleichung zu analysieren:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2; t)}{\partial t} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_1} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta_2 + V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \right\} \Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2; t) \quad (1.1)$$

Hierbei bezeichnet $V(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ das Wechselwirkungspotential. Aufgrund eines Newtonschen Axioms müssen die durch 2-Teilchen-Wechselwirkungen bestimmten Kräfte betragsmäßig gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sein. Das entsprechende Wechselwirkungspotential $V(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ muss daher von der Differenz der Koordinaten abhängen:

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2). \quad (1.2)$$

Beispiele für solch ein Wechselwirkungspotential sind

- die Coulomb-Wechselwirkung zwischen zwei geladenen Teilchen

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_0 |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \quad (1.3)$$

- die Dipol-Dipol-Wechselwirkung zwischen zwei magnetischen Dipolen

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3[\vec{m}_1 \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)]^2 - \vec{m}_1^2 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^5} \quad (1.4)$$

- das sphärische λ -Potential als Modell für eine kurzwellenlängige Welle:

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \begin{cases} -v_0 & ; |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| < a \\ 0 & ; |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| > a \end{cases} \quad (1.5)$$

Wir interessieren uns für stationäre Zustände und führen daher den Generationsansatz

$$\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2; t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \quad (1.6)$$

durch. Dadurch reduziert sich die zeitabhängige Schrödingers-Gleichung (1.1) unter Berücksichtigung von (1.2) auf die zeitunabhängige Schrödingers-Gleichung

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2M_1} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2M_2} \Delta_2 + V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \right\} \Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = E \Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \quad (1.7)$$

1.2 Schwerpunktssystem:

Wir transformieren nun das im Laborsystem aufgestellte Problem (1.7) in das Schwerpunktssystem. Dazu gehen wir von den individuellen Raumkoordinaten \vec{x}_1, \vec{x}_2 auf die Schwerpunktkoordinate

$$\vec{X} = \frac{M_1 \vec{x}_1 + M_2 \vec{x}_2}{M_1 + M_2} \quad (1.8)$$

und die Relativkoordinate

$$\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \quad (1.9)$$

Über. Die zweiten partiellen Ableitungen transformieren sich dadurch gemäß

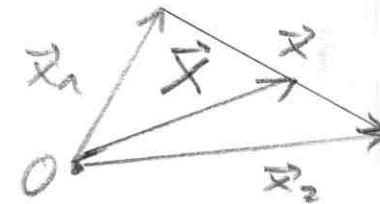
$$\vec{\nabla}_1 = \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{x}_1} \frac{\partial}{\partial \vec{X}} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{x}_1} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \xrightarrow{(1.8), (1.9)} \frac{M_1}{M_1 + M_2} \vec{\nabla}_{\vec{X}} + \vec{\nabla}_{\vec{r}} \quad (1.10)$$

$$\vec{\nabla}_2 = \frac{\partial}{\partial \vec{x}_2} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{x}_2} \frac{\partial}{\partial \vec{X}} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{x}_2} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \xrightarrow{(1.8), (1.9)} \frac{M_2}{M_1 + M_2} \vec{\nabla}_{\vec{X}} - \vec{\nabla}_{\vec{r}} \quad (1.11)$$

und die entsprechenden kinetischen Energien ergeben sich zu

$$-\frac{\hbar^2}{2M_1} \Delta_1 \xrightarrow{(1.10)} -\frac{\hbar^2}{2M_1} \left[\frac{M_1^2}{(M_1 + M_2)^2} \Delta_{\vec{X}} + \frac{2M_1}{M_1 + M_2} \vec{\nabla}_{\vec{X}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} + \Delta_{\vec{r}} \right] \quad (1.12)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2M_2} \Delta_2 \xrightarrow{(1.11)} -\frac{\hbar^2}{2M_2} \left[\frac{M_2^2}{(M_1 + M_2)^2} \Delta_{\vec{X}} - \frac{2M_2}{M_1 + M_2} \vec{\nabla}_{\vec{X}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} + \Delta_{\vec{r}} \right] \quad (1.13)$$



Demnach gilt die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung (1.7) über in

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2M_{\text{ges}}} \Delta \vec{x} - \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \vec{x} + V(\vec{x}) \right\} \Psi(\vec{x}, z) = E \Psi(\vec{x}, z) \quad (1.14)$$

Hierbei bezeichnen M_{ges} und μ die Gesamtmasse bzw. die reduzierte Masse

$$M_{\text{ges}} = M_1 + M_2, \quad \mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \quad (1.15)$$

Im Falle zweier identischer Teildaten $M_1 = M_2 = M$ erhalten wir $M_{\text{ges}} = 2M$ und $\mu = M/2$. In der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung (1.14) lässt sich die freie Schwerpunktbewegung abgrenzen

$$\Psi(\vec{x}, z) = \frac{e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}}}{(2\pi)^3} \psi(z), \quad E = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2M_{\text{ges}}} + \epsilon \quad (1.16)$$

und wir erhalten für die Relativbewegung im Schwerpunktssystem

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \vec{x} + V(\vec{x}) \right\} \psi(z) = \epsilon \psi(z) \quad (1.17)$$

Demnach lässt sich das Problem zweier wechselwirksender Teildaten auf ein effektives System mit der reduzierten Masse μ zurückführen, das sich im Wechselwirkungspotential $V(\vec{x})$ bewegt. Beispielsweise lässt sich mit Hilfe von (1.17) das Wasserstoffatom reduzieren, wobei $V(\vec{x})$ das Lennard-Jones-Potential und μ die effektive Masse von Proton und Elektron darstellen.

1.3 Streulösungen:

Im folgenden wollen wir Streulösungen von (1.17) untersuchen, so dass $\epsilon \geq 0$ vorausgesetzt werden kann. Dann führen wir einen Wellenvektor \vec{k} mit dem Betrag $k = \sqrt{\frac{\epsilon}{2\mu}}$ gemäß

$$\epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \quad (1.18)$$

ein und erhalten aus (1.17)

$$\left\{ \Delta \vec{x} + k^2 - \frac{2\mu}{\hbar^2} V(\vec{x}) \right\} \Psi(\vec{x}) = 0 \quad (1.19)$$

Außerdem wollen wir annehmen, daß das Wechselwirkungspotential rotationsymmetrisch ist:

$$V(\vec{r}) = V(r), \quad r = |\vec{r}| \quad (1.20)$$

Dann gilt in Zugekordinaten

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l^2}{r^2} + k^2 - \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) \right\} \Psi(r, \vartheta, \varphi) = 0 \quad (1.21)$$

wobei

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} = -\frac{1}{r^2} \left\{ \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} \quad (1.22)$$

das Betragquadrat des Anzugsoperators darstellt. Die Windabhängigkeit der Wellenfunktion ist durch die Zugekflächenfunktion $\gamma_{lm}(\vartheta, \varphi)$ mit $l = 0, 1, 2, \dots$ und $m = -l, \dots, +l$ gegeben, die dem Eigenwertproblem

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \gamma_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} l(l+1) \gamma_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (1.23)$$

geht. Die Wellenfunktion läßt sich dann erneut in einen Radial- und einen Winkelanteil separieren:

$$\Psi_{lm}(r, \vartheta, \varphi) = R_l(r) \gamma_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (1.24)$$

Die resultierende Schrödinger-Gleichung für die Radialkomponente der Wellenfunktion lautet:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 - \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) \right\} R_l(r) = 0 \quad (1.25)$$

1.4 Freie Zustände:

Liegt keine Wechselwirkung vor, ist also $V(r) = 0$, so vereinfacht sich (1.25) auf

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right\} R_l(r) = 0 \quad (1.26)$$

was sich mit der dimensionslosen Variablen $s = kr$ auf die Form

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2}{s} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{l(l+1)}{s^2} + 1 \right\} R_e(s) = 0 \quad (1.27)$$

bringen läßt. Wir betrachten zunächst $l=0$, d.h. sogenannte Wellenfunktionen, die gemäß (1.24) stationärsymmetrisch sind:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2}{s} \frac{\partial}{\partial s} + 1 \right\} R_0(s) = 0 \quad (1.28)$$

Die beiden Fundamentalslösungen von (1.28) lauten offenbar

$$R_0^{(1)}(s) = \frac{\sin s}{s}, \quad R_0^{(2)}(s) = -\frac{\cos s}{s} \quad (1.29)$$

Nun betrachten wir den Fall $l \neq 0$ und führen die Substitution

$$R_l(s) = s^l X_e(s) \quad (1.30)$$

durch. Dadurch geht die gewöhnliche Differentialgleichung (1.27) über in

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2(l+1)}{s} \frac{\partial}{\partial s} + 1 \right\} X_e(s) = 0 \quad (1.31)$$

Differentiation von (1.31) bezüglich s führt auf

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial s^2} s \left(\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \right) + 2(l+1) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \right) + s \left(\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \right)^2 \right\} X_e(s) = 0$$

$$\left\{ s \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2 \frac{\partial}{\partial s} + 2(l+1) \frac{\partial}{\partial s} + s \right\} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} X_e(s) = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2(l+2)}{s} \frac{\partial}{\partial s} + 1 \right\} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} X_e(s) = 0$$

Der Vergleich von (1.31) und (1.32) ergibt die Identifikation

$$X_{e+1}(s) = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} X_e(s) \quad (1.33)$$

so daß durch Iteration folgt

$$X_e(s) = \left(\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \right)^l X_0(s) \quad (1.34)$$

Damit liegt zwischen den Funktionen $\chi_e(\xi)$ dränglich der Anzahl der Radialimpulskoordinatenzahl l eine Rekursionsrelation vor, wobei $\chi_0(\xi)$ wegen (1.30) durch (1.29) gegeben ist. Wir fassen nun die resultierenden Lösungen von (1.27) durch folgende Definitionen zusammen. Wir definieren zum einen die sphärischen Bessel-Funktionen

$$j_e(\xi) = (-3)^e \left(\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^e \frac{\sin \xi}{\xi} \quad (1.35)$$

und zum anderen die sphärischen Neumann-Funktionen

$$n_e(\xi) = -(-3)^e \left(\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^e \frac{\cos \xi}{\xi} \quad (1.36)$$

wobei der Faktor $(-1)^e$ aus Konventiongründen hinzugefügt wurde. Die sphärischen Bessel- und Neumann-Funktionen lauten explizit

$$\begin{aligned} j_0(\xi) &= \frac{\sin \xi}{\xi}, & n_0(\xi) &= -\frac{\cos \xi}{\xi} \\ j_1(\xi) &= \frac{\sin \xi}{\xi^2} - \frac{\cos \xi}{\xi}, & n_1(\xi) &= -\frac{\cos \xi}{\xi^2} - \frac{\sin \xi}{\xi} \\ j_2(\xi) &= \left(\frac{3}{\xi^3} - \frac{1}{\xi} \right) \sin \xi - \frac{3}{\xi^2} \cos \xi, & n_2(\xi) &= \left(-\frac{3}{\xi^3} + \frac{1}{\xi} \right) \cos \xi - \frac{3}{\xi^2} \sin \xi \end{aligned} \quad (1.37)$$

Für kleine Argumente verhalten sich diese Funktionen wie

$$j_0(\xi) = 1 + \dots, \quad j_1(\xi) = \frac{1}{3} \xi + \dots, \quad j_2(\xi) = \frac{1}{15} \xi^2 + \dots \Rightarrow j_e(\xi) = \frac{\xi^e}{(2e+1)!!} + \dots \quad (1.40)$$

$$n_0(\xi) = -\frac{1}{\xi} + \dots, \quad n_1(\xi) = -\frac{1}{\xi^2} + \dots, \quad n_2(\xi) = -\frac{3}{\xi^3} + \dots \Rightarrow n_e(\xi) = -\frac{(2e-1)!!}{\xi^{e+1}} + \dots \quad (1.41)$$

d.h. $j_e(\xi)$ ist am Ursprung $\xi=0$ endlich, während $n_e(\xi)$ dort divergiert.

Für große Argumente erhalten wir dagegen

$$j_0(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi}, \quad j_1(\xi) \approx -\frac{\cos \xi}{\xi}, \quad j_2(\xi) \approx -\frac{\sin \xi}{\xi} \Rightarrow j_e(\xi) \approx \frac{\sin(\xi - e\pi/2)}{\xi} \quad (1.42)$$

$$n_0(\xi) = -\frac{\cos \xi}{\xi}, \quad n_1(\xi) \approx -\frac{\sin \xi}{\xi}, \quad n_2(\xi) \approx \frac{\cos \xi}{\xi} \Rightarrow n_e(\xi) \approx -\frac{\cos(\xi - e\pi/2)}{\xi} \quad (1.43)$$

somit können wir die allgemeine Lösung von (1.26) durch eine Linearkombination der beiden Fundamentallösungen (1.35) und (1.36) angeben:

$$R_e(r) = A e^{i\epsilon(kr)} + B e^{-i\epsilon(kr)} \quad (1.44)$$

Aus (1.42) und (1.43) folgt dann deren asymptotisches Verhalten:

$$R_e(r) \approx \frac{A e^{\sin(kr - \ell\pi/2)} - B e^{\cos(kr - \ell\pi/2)}}{kr}, \quad r \rightarrow \infty \quad (1.45)$$

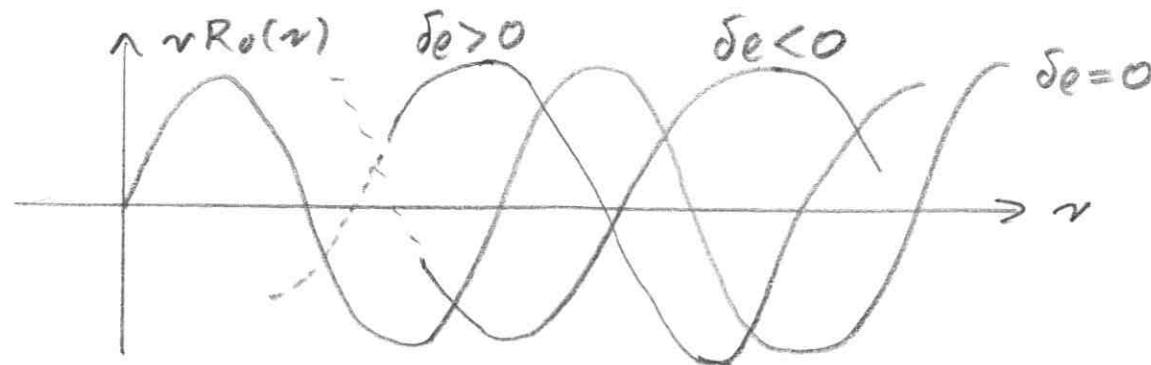
das sich auf folgende Form bringen lässt:

$$R_e(r) \approx \frac{(e \sin(kr - \ell\pi/2 + \delta\epsilon))}{kr}, \quad r \rightarrow \infty \quad (1.46)$$

Für große Abstände stellt $R_e(r)$ demnach eine Zugwelle dar, die eine Phasenverschiebung $\delta\epsilon$ aufweist. Hierbei sind Amplitude e und Max. $\delta\epsilon$ gegeben durch

$$\begin{aligned} Ce \cos \delta\epsilon &= Ae \\ Ce \sin \delta\epsilon &= -Be \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad Ce = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \delta\epsilon = -\arctan \frac{B}{A} \quad (1.47)$$

Ist das Wechselwirkungspotential $V(r)$ in (1.25) von Null verschieden, so wird die Radialkomponente der Wellenfunktion $R_e(r)$ im allgemeinen nicht mehr die Form (1.46) besitzen. Liegt aber eine kugelsymmetrische Wechselwirkung vor, so können wir erwarten, dass $R_e(r)$ für große Abstände von der Form (1.46) ist. Die Phasenverschiebung $\delta\epsilon$ ergibt sich dabei als Funktion vom Betrag k des Wellenvektors \mathbf{k} bzw. der Energie E und der Stärke der Wechselwirkung. Da das Vorzeichen der Phasenverschiebung können wir schon ohne Bedenken aus physikalischen Gründen vertauschen. Für ein anziehendes Potential wird die Wellenfunktion im Außengebiet breitengangen, d.h. $\delta\epsilon > 0$, für ein repulsives Potential dagegen wird die Wellenfunktion ins Außengebiet gedrückt und es ist $\delta\epsilon < 0$.



1.5 Harte Zugeln:

Als wichtiges Beispiel für eine Kurzwellenlängen Wechselwirkung betrachten wir das rotationsymmetrische Wechselwirkungspotential für harte Zugeln

$$V(r) = \begin{cases} 0 & ; r > a \\ \infty & ; 0 \leq r \leq a \end{cases} \quad (1.48)$$

wobei a den doppelten Zugelradius bestimmt. Die Lösung der Schrödinger-Gleichung (1.25) mit dem Wechselwirkungspotential (1.48) ist dann gegeben durch

$$R_0(r) = \begin{cases} A e^{i\delta_e(kr)} + B e^{-i\delta_e(kr)}, & r > a \\ 0 & ; 0 \leq r \leq a \end{cases} \quad (1.49)$$

wir fordern, daß die Wellenfunktion an der Stelle $r=a$ stetig sein soll, sodass gilt

$$A e = D e u_e(ka), \quad B e = -D e \delta_e(ka) \quad (1.50)$$

Ein großer Abstand ist die Radialkomponente der Wellenfunktion dann mit von der Form (1.46), wobei Amplitude C_e und Phasen δ_e gegeben sind durch

$$(C_e = D e \sqrt{\delta_e^2(ka) + u_e^2(ka)}), \quad \delta_e = \arctan \frac{\delta_e(ka)}{u_e(ka)} \quad (1.51)$$

Für kleine Zugradien a bzw. kleine Energien (1.18) vereinfacht sich die Ikonverteilung ρ mit Hilfe von (1.40) und (1.41):

$$\rho \approx -\frac{(2l+1)(ka)^{2l+1}}{[(2l+1)!!]^2} \quad (1.52)$$

Das Vorzeichen von ρ ist negativ, da das Potential für harte Zugeln (1.48) eine abstoßende Wechselwirkung darstellt. Außerdem stellen wir fest, daß im Limes kleiner Zugradien a bzw. kleiner Energien (1.18) die relevante Ikonverteilung bei der s -Wellenstreuung auftritt. Die Beiträge höherer Dreimomentenzahl $l > 0$ sind in diesem Limes vernachlässigbar.

1.6 Pseudopotentialmethode:

Wir diskutieren nun die Pseudopotentialmethode, die von Enrico Fermi begründet wurde, am Beispiel der s -Wellenstreuung. Sie basiert auf der Idee, die harte Randbedingung bei $r=a$ durch eine Quelle bei $r=0$ zu ersetzen, die das Verhalten der Wellenfunktion im Außengebiet $r>a$ genau reproduziert. Damit setzen wir die Radialkomponente $R_0(r)$ aus (1.49) zu

$$\tilde{R}_0(r) = A_0 j_0(kr) + B_0 n_0(kr) \quad (1.53)$$

so, daß im physikalischen Bereich $r>a$ gilt: $R_0(r) = \tilde{R}_0(r)$. Die beiden Wellenfunktionen $R_0(r)$ und $\tilde{R}_0(r)$ sind daher im unphysikalischen Bereich $0 \leq r \leq a$ voneinander verschieden. Wir suchen einen Pseudopotentialoperator $\tilde{V}(r)$, so daß die fortgesetzte Radialkomponente (1.53) die zu (1.25) analog ist und die Fortsetzung für $r>0$ erfüllt:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2 - \frac{2U}{h^2} \tilde{V}(r) \right\} \tilde{R}_0(r) = 0 \quad (1.54)$$

Zuzüglich stellen wir fest, daß (1.53) für $r>0$ schon die Differentialgleichung

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2 \right\} \tilde{R}_0(r) = 0 \quad (1.55)$$

erfüllt, denn nach erwartet wir, dass der Pseudodifferentialoperator $\tilde{V}(r)$ in (1.54) eine Distribution darstellt, die am Ursprung eine Singularität aufweist. Um dies näher zu untersuchen, betrachten wir eine Kugel $K(R)$ mit Radius R um den Ursprung und erhalten mit Hilfe des Gaußschen Satzes

$$\int_{K(R)} d^3x (\Delta_{\vec{x}} + k^2) \tilde{R}_0(r) = \oint_{\partial K(R)} d\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} \tilde{R}_0(r) + k^2 \int_{K(R)} d^3x \tilde{R}_0(r) \quad (1.56)$$

Wir werten die rechte Seite mit Zirkularkoordinaten aus und beachten dabei $d\vec{\gamma} = R^2 \sin \theta d\vartheta d\phi \hat{e}_r$ sowie $\vec{\nabla}_{\vec{x}} \tilde{R}_0(r) = \tilde{R}'_0(r) \hat{e}_r$:

$$\int_{K(R)} d^3x (\Delta_{\vec{x}} + k^2) \tilde{R}_0(r) = 4\pi R^2 \frac{\partial \tilde{R}_0(R)}{\partial R} + 4\pi k^2 \int_0^R dr r^2 \tilde{R}_0(r) \quad (1.57)$$

Verwenden wir die Differentialgleichung (1.55) für den Integranden auf der rechten Seite, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{K(R)} d^3x (\Delta_{\vec{x}} + k^2) \tilde{R}_0(r) &= 4\pi R^2 \frac{\partial \tilde{R}_0(R)}{\partial R} - 4\pi \int_0^R dr r^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \tilde{R}'_0(r) + \frac{2}{r} \tilde{R}'_0(r) \right\} \\ &= 4\pi R^2 \frac{\partial \tilde{R}_0(R)}{\partial R} - 4\pi \left[r^2 \tilde{R}'_0(r) \right]_0^R + 4\pi \int_0^R dr 2r \tilde{R}'_0(r) - 4\pi \int_0^R dr 2r \tilde{R}'_0(r) \\ \Rightarrow \int_{K(R)} d^3x (\Delta_{\vec{x}} + k^2) \tilde{R}_0(r) &= 4\pi \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ r^2 \frac{\partial \tilde{R}_0(r)}{\partial r} \right\} \end{aligned} \quad (1.58)$$

Dies reduziert sich mit Hilfe von (1.37) und (1.53) auf

$$\begin{aligned} \int_{K(R)} d^3x (\Delta_{\vec{x}} + k^2) \tilde{R}_0(r) &= 4\pi \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[A_0 \frac{\sin kr}{kr} - B_0 \frac{\cos kr}{kr} \right] \right\} \\ &= 4\pi \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ r^2 \left[A_0 k \left(\frac{\cos kr}{kr} - \frac{\sin kr}{(kr)^2} \right) - B_0 k \left(-\frac{\sin kr}{kr} - \frac{\cos kr}{(kr)^2} \right) \right] \right\} = \frac{4\pi B_0}{k} \end{aligned} \quad (1.59)$$

Aus dem Vergleich von (1.55) und (1.59) lesen wir ab

$$(\Delta_{\vec{x}} + k^2) \tilde{R}_0(r) = \frac{4\pi B_0}{k} \delta(\vec{x}) \quad (1.60)$$

Hierbei ist noch zu klären, wie die Konstante B_0 mit der Radialkomponente in (1.53) zusammenhängt - zunächst stellen wir fest, daß aus (1.47) folgt

$$B_0 = -R_0 \tan \delta_0 \quad (1.61)$$

und aus (1.51) lesen wir die Phasenverschiebung der s-Wellenstreuung ab

$$\delta_0 = \arctan \frac{\text{io}(ka)}{n(ka)} \quad (1.62)$$

Ferner erhalten wir aus (1.37) und (1.53)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial r} \{ r \tilde{R}_0(r) \} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ R_0 \frac{\sin kr}{k} - B_0 \frac{\cos kr}{k} \right\} = R_0 \quad (1.63)$$

so daß (1.60) schließlich übergeht in

$$(\Delta \vec{x} + k^2) \tilde{R}_0(r) = - \frac{4\pi \text{io}(ka)}{k n(ka)} \delta(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial r} \{ r \tilde{R}_0(r) \} \quad (1.64)$$

Aufgrund der Delta-Funktion auf der rechten Seite wurde der Hinweis auf die Auswertung an der Stelle $r=0$ weggelassen. Der Vergleich von (1.54) und (1.64) führt damit auf den Pseudopotentialoperator

$$\tilde{V}(r) \circ = - \frac{2\pi t^2 \text{io}(ka)}{m k n(ka)} \delta(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial r} \{ r \circ \} \quad (1.65)$$

Im Limes kleiner Kugelradien a bzw. kleiner Energien (1.18) folgt hieraus unter Berücksichtigung von (1.40) und (1.41)

$$\tilde{V}(r) \circ = g \delta(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial r} \{ r \circ \} \quad (1.66)$$

wobei die Stärke der Wechselwirkung

$$g = \frac{2\pi t^2 a}{m} \quad (1.67)$$

unabhängig von der Energie (1.18) ist. Wir bedachten, daß der Operator

$$\hat{O} \circ = \frac{\partial}{\partial r} \{ r \circ \} \Big|_{r=0} \quad (1.68)$$

für am Ursprung reguläre Funktionen $\delta(r)$ die Eigenschaft

$$\partial \delta(r) = \delta(0)$$

berstat. gilt dagegen $\delta(r) \rightarrow k/r$ für $r \rightarrow 0$, so folgt

(1.69)

$$\partial \delta(r) = 0$$

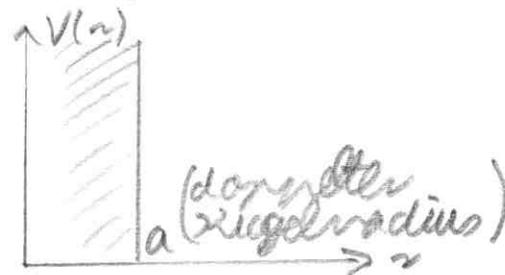
(1.70)

Dennach hat der Operator ∂ die Eigenschaft, etwaig $1/r$ -Singularitäten herauszufiltern. Ansonsten wirkt er wie eine Delta-Funktion.

Wendet man also den Pseudopotentialoperator (1.66) nur auf am Ursprung reguläre Wellenfunktionen an, so entspricht er der Kontaktweldewirkung

$$\tilde{V}(\vec{r}) = g \delta(\vec{r})$$

mit der Stärke (1.67). Dennach können wir feststellen, daß im Falle von S-Wellenstreuung das Modellpotential für harte Kugeln (1.48) für $r > a$ mit dem Pseudopotential (1.71) für $r \geq 0$ äquivalent ist:



Potential für 2 harte Kugeln

$\xrightleftharpoons{\text{Äquivalent}}$

$$\tilde{V}(\vec{r}) = g \delta(\vec{r})$$

$$g = \frac{2\pi \hbar^2 a}{\mu}$$

\xrightarrow{x}
kontaktweldewirkung

1.7 Streuamplitude:

Wir werden nun die allgemeine Struktur der Streulösung $\Psi(\vec{r})$ von (1.19) für eine beliebige 2-Teilchen-Wedelwirkung $V(\vec{r})$ bestimmen. Dazu stellen wir fest, daß die Schrödingergleichung (1.19) formal die Struktur einer inhomogenen Helmholtz-Gleichung besitzt

$$(\Delta \vec{r} + k^2) \Psi(\vec{r}) = F(\vec{r})$$

(1.72)

wobei aber die Inhomogenität $F(\vec{z})$ noch von der gesuchten Streulösung $\psi(\vec{z})$ abhängt:

$$F(\vec{z}) = \frac{2\mu}{k^2} V(\vec{z}) \psi(\vec{z}) \quad (1.73)$$

eine formale Lösung von (1.72) ist durch

$$\psi(\vec{z}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{z}} + \int d^3x' G(\vec{z}, \vec{x}') F(\vec{x}') \quad (1.74)$$

gegeben. Aus mathematischer Sicht bedeckt dabei der erste Term eine homogene Lösung der Helmholtz-Gleichung, während der zweite Term eine inhomogene Lösung darstellt. Aus physikalischer Sicht ist dagegen $\psi(\vec{z})$ eine Summe aus einer einlaufenden ebenen Welle und einer Streuwellen. Dabei tritt die Green'sche Funktion $G(\vec{z}, \vec{x}')$ der Helmholtz-Gleichung auf, die folgender Differentialgleichung genügt:

$$(\Delta \vec{z} + k^2) G(\vec{z}, \vec{x}') = \delta(\vec{z} - \vec{x}') \quad (1.75)$$

da die Inhomogenität von der Differenz der Koordinaten $\vec{z} - \vec{x}'$ abhängt, wird darüber für die Green'sche Funktion gelten:

$$G(\vec{z}, \vec{x}') = G(\vec{z} - \vec{x}') \quad (1.76)$$

setzen wir eine Fourier-Transformation an

$$G(\vec{z}, \vec{x}') = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} G(\vec{q}) e^{i\vec{q} \cdot (\vec{z} - \vec{x}')} \quad (1.77)$$

so folgt aus (1.75) eine algebraische Gleichung für die Fourier-transformierte

$$G(\vec{q}) = \frac{-1}{\vec{q}^2 - k^2} \quad (1.78)$$

die Green'sche Funktion $G(\vec{z}, \vec{x}')$ folgt dann durch Einsetzen von (1.78) in (1.77) und durch Ausführung des verbleibenden \vec{q} -Integrals:

$$G(\vec{z}, \vec{x}') = \frac{-1}{(2\pi)^3} \int d^3q \frac{e^{i\vec{q} \cdot (\vec{z} - \vec{x}')}}{\vec{q}^2 - k^2} \quad (1.79)$$

Dabei tritt beim Übergang zu Zirkelkoordinaten das Problem auf, dass bei

der Ausführung des radikalen \vec{q} -Integrals ein Pol auf dem Integrationsweg liegt und daher das \vec{q} -Integral (1.79) nicht eindeutig definiert ist. Um ein wohldefiniertes \vec{q} -Integral zu erhalten, müssen wir den Pol im Intervall von der reellen Achse wegschieben. Verdrückt man nach Formen den "Masseterm" um einen "+ $i\zeta$ -Term" bzw. "- $i\zeta$ -Term" und betrachtet man den Limes $\zeta \rightarrow 0$, so erhält man eine veränderte bzw. angepasste Grundeinfunktion:

$$G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{-1}{(2\pi)^3} \lim_{\zeta \downarrow 0} \int d^3 q \frac{e^{i\vec{q} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}}{\vec{q}^2 - k^2 \mp i\zeta} \quad (1.80)$$

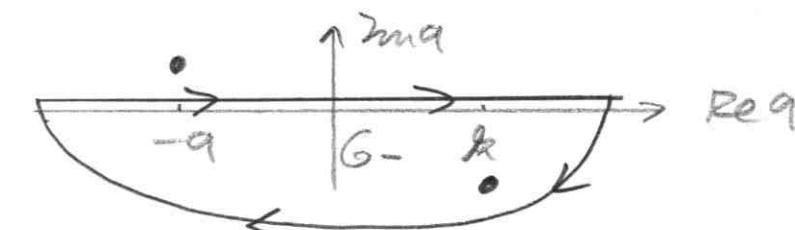
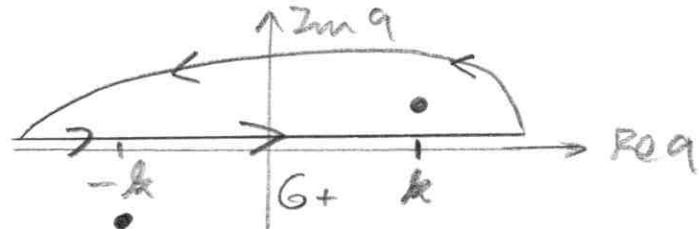
Beim Übergang zu Zylinderkoordinaten folgt zunächst

$$G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{-1}{4\pi^2} \lim_{\zeta \downarrow 0} \int_0^\infty dq \frac{q^2}{q^2 - k^2 \mp i\zeta} \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta e^{iq|\vec{x} - \vec{x}'| \cos\vartheta} \quad (1.81)$$

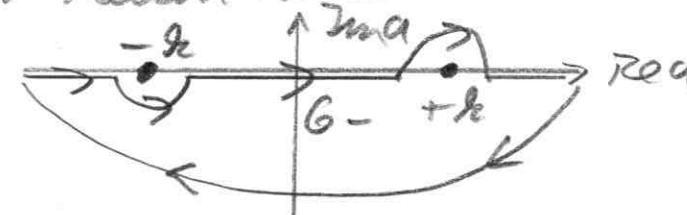
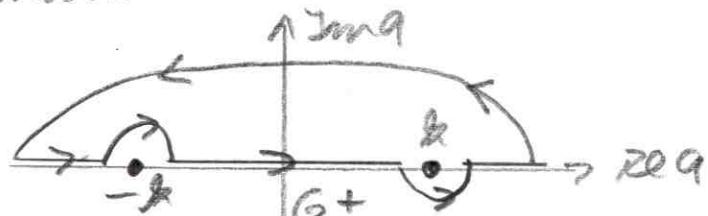
wobei die Ausführung des ϑ -Integrals ergibt

$$G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{i}{4\pi^2 |\vec{x} - \vec{x}'|} \lim_{\zeta \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{q}{q^2 - k^2 \mp i\zeta} e^{iq|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (1.82)$$

Im Integranden von G_+ sind die Pole an den Stellen $q = \pm(k + i\zeta/2k)$ und von G_- an den Stellen $q = \pm(k - i\zeta/2k)$:



Die Verdrückung der Pole von G_+ im Limes $\zeta \downarrow 0$ ist dabei äquivalent zu einer Deformation des Integrationsweges längs der reellen Achse:



Das reelle Integral muß aufgrund der Exponentialfunktion für $G+$ bzw. $G-$ in den oberen bzw. unteren komplexen Zahlenkreis geschlossen werden, so daß bei der Anwendung des Residuensatzes nur das Residuum an der Stelle $q_+ = k - i\gamma/2k$ bzw. $q_- = -k + i\gamma/2k$ beträgt:

$$G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{-1}{2\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \underset{q=\pm k}{\text{Res}} \left\{ \frac{q}{q^2 - k^2} e^{i q |\vec{x} - \vec{x}'|} \right\} \quad (1.83)$$

Damit stellt die retardierte bzw. avancierte brechende Funktion $G+$ bzw. $G-$ eine nach außen bzw. nach innen laufende Zugwelle dar:

$$G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') = - \frac{e^{\pm ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (1.84)$$

Beschränkt man sich wegen der Kausalität auf die retardierte brechende Funktion $G+$, so folgt aus (1.73), (1.74) und (1.84) die folgende Integraldarstellung für die Streulösung $\psi(\vec{x})$:

$$\psi(\vec{x}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} - \frac{\mu}{2\pi n^2} \int d^3x' \frac{e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} V(\vec{x}') \psi(\vec{x}') \quad (1.85)$$

Bei den typischen Streuproblemen sind die Detektoren weit vom Streuer entfernt, d.h. es gilt $|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$. Damit erhalten wir die Näherung

$$k|\vec{x} - \vec{x}'| = k\sqrt{\vec{x}^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}' + \vec{x}'^2} \approx k\vec{r} - \vec{k}' \cdot \vec{x}' + \dots \quad (1.86)$$

wobei $\vec{k}' = \vec{k}\vec{x}/\vec{r}$ mit $\vec{r} = |\vec{x}|$. Weit entfernt vom Streuer hat die statische Lösung $\psi(\vec{x})$ nach (1.85) und (1.86) die Gestalt

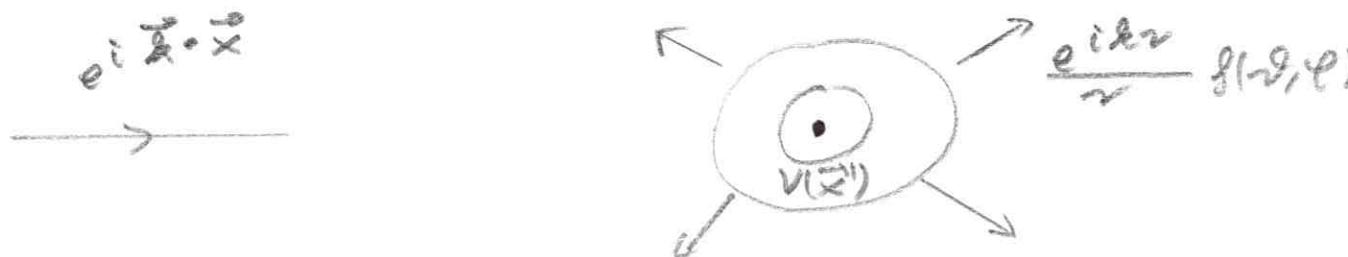
$$\psi(\vec{x}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \frac{e^{ik\vec{r}}}{\gamma} g(\vartheta, \varphi) \quad (1.87)$$

wobei als Streuamplitude

$$g(\vartheta, \varphi) = - \frac{\mu}{2\pi n^2} \int d^3x' e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x}'} V(\vec{x}') \psi(\vec{x}') \quad (1.88)$$

eingeführt wurde. Sie hängt nur von der Richtung \vec{x}/\vec{r} , nicht aber vom Ab-

stand r ab und hat die Dimension einer Länge. Mit (1.87) haben wir die allgemeine Gestalt der stationären Streulösungen gefunden:



1.8 Wirkungsquerschnitt:

Der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ gibt die Zahl der Teilchen $dN(\Omega)$ an, die pro Zeiteinheit dt und pro Winkellement d Ω in das Winkellement d Ω bei Ω gestreut werden bezogen auf die Stromdichte in den einfallenden Teilchen:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN(\Omega)}{\text{in ein } \Omega \text{ dt}} \quad (1.89)$$

Der gesamte Wirkungsquerschnitt entsteht dann durch Integration über Raumwinkel Ω mit $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$

$$\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) (\theta, \varphi) \quad (1.90)$$

und besitzt die Dimension einer Fläche. In der Kernphysik wird der Wirkungsquerschnitt in der Einheit von 1 barn = 10^{-24} cm^2 angegeben. Liegt eine Wellenfunktion $\psi(\vec{x})$ vor, so lautet deren Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{x}) = \frac{t_0}{2\mu c} \left\{ \psi^*(\vec{x}) \vec{\nabla}_x \psi(\vec{x}) - \psi(\vec{x}) \vec{\nabla}_x \psi^*(\vec{x}) \right\} \quad (1.91)$$

Wir betrachten zunächst die einlaufende ebene Welle $\psi_{\text{ein}}(\vec{x}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$ in (1.87), deren Stromdichte durch (1.91) gegeben ist:

$$\mathcal{S}_{\text{ein}}(\vec{x}) = \frac{tik}{\mu}$$

(1.92)

Der zweite Term in (1.87) beschreibt die radiale Streulösung

$$\psi_{\text{str}}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{e^{ikr}}{r} g(\vartheta, \varphi) \quad (1.93)$$

Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt (1.89) ist nur die auslaufende radiale Komponente der Stromdichte von Interesse:

$$j_{\text{str}}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{tik}{2\pi i} \left\{ \psi_{\text{str}}^*(r, \vartheta, \varphi) \frac{\partial}{\partial r} \psi_{\text{str}}(r, \vartheta, \varphi) - \psi_{\text{str}}(r, \vartheta, \varphi) \frac{\partial}{\partial r} \psi_{\text{str}}^*(r, \vartheta, \varphi) \right\} \quad (1.94)$$

für die wir erhalten

$$j_{\text{str}}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{tik}{\mu} \frac{|g(\vartheta, \varphi)|^2}{r^2} \quad (1.95)$$

Daraus ergibt sich die Zahl der gestreuten Teilchen gemäß

$$dN(\vartheta, \varphi) = j_{\text{str}}(r, \vartheta, \varphi) r^2 d\Omega d\varphi \quad (1.96)$$

Damit lautet der differentielle Wirkungsquerschnitt (1.89) mit Hilfe von (1.92), (1.95) und (1.96)

$$\left(\frac{dE}{d\Omega} \right)(\vartheta, \varphi) = |g(\vartheta, \varphi)|^2 \quad (1.97)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist demnach durch das Betragsquadrat der Streuamplitude gegeben.

1.9 Partialwellen:

Wir wollen nun die allgemeine Streulösung nach den entsprechenden Beiträgen der Anzahlpulsquantenzahl l zerlegen, die man auch als Partialwellen bezeichnet. Hierzu setzen wir nun wieder voraus, daß das Potentiel rotationsymmetrisch ist: $V(\vec{x}) = V(|\vec{x}|)$. Wir betrachten zunächst die in (1.87) einlaufende ebene Welle und zerlegen diese nach der durch (1.24) und (1.44) definierten sphärischen Basis:

$$e^{ik \cdot \vec{x}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{ A_{lm} j_l(kr) + B_{lm} n_l(kr) \} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (1.98)$$

Dabei fallen die sogenannten Neumann-Funktionen $n_l(kr)$ weg, da sie gemäß (1.37) am Ursprung divergieren:

$$e^{ik \cdot \vec{x}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{lm} j_l(kr) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (1.99)$$

Außerdem wollen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass die ebene Welle in \vec{z} -Richtung einfallen möge, das also $\vec{k} = k \hat{e}_z$ vorliegt. Da dann die linke Seite den Winkel ϑ nicht mehr enthält, muss das auch für die rechte Seite gelten, d.h. erstehen nur Zugflächenfunktionen $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ mit konstanter Magnetquantenzahl m auf:

$$Y_{l0}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \vartheta) \quad (1.100)$$

Die bilden die Legendre-Polynome

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dz^l} (z^2 - 1)^l \quad (1.101)$$

der Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^{+1} dz P_l(z) P_{l'}(z) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \quad (1.102)$$

Die ersten Legendre-Polynome lauten explizit

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = z, \quad P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1), \quad P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z), \dots \quad (1.103)$$

Die Entwicklung (1.99) der ebenen Welle nach Zugwellen reduziert sich damit auf

$$e^{ikr \cos \vartheta} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} j_l(kr) P_l(\cos \vartheta) \quad (1.104)$$

Zur Berechnung der Koeffizienten A_l multiplizieren wir (1.104) mit $P_l(\cos \vartheta)$ und integrieren über alle Winkel ϑ . Durch Anwendung der Orthogonalitätsre-

lation (1.102) erhalten wir

$$\int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta e^{ikr \cos \vartheta} P_l(\cos \vartheta) = \int_{-1}^{+1} dz e^{ikrz} P_l(z) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \frac{\sqrt{2l+1}}{4\pi} j_l(kr) \cdot \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta$$

$$A_l P_l(\cos \vartheta) P_l(\cos \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \frac{\sqrt{2l+1}}{4\pi} j_l(kr) \int_{-1}^{+1} dz P_l(z) P_l(z) = A_l \frac{1}{\sqrt{\pi(2l+1)}} j_l(kr)$$

$$\Rightarrow A_l j_l(kr) = \sqrt{\pi(2l+1)} \int_{-1}^{+1} dz e^{ikrz} P_l(z) \quad (1.105)$$

Da diese Beziehung für alle z -werten muss, reicht es zur Berechnung von A_l aus, den eingeschlossenen Winkel zu betrachten. Aufgrund von (1.40) gilt für $z \rightarrow 0$:

$$A_l \frac{(kr)^l}{(2l+1)!!} = \sqrt{\pi(2l+1)} \int_{-1}^{+1} dz P_l(z) \left\{ 1 + \dots + \frac{(krz)^{l-1}}{(l-1)!} + \frac{(krz)^l}{l!} + \frac{(krz)^{l+1}}{(l+1)!} + \dots \right\} \quad (1.106)$$

Die Terme auf der rechten Seite mit $(krz)^n$ mit $n \geq l+1$ tragen im Limes $z \rightarrow 0$ nicht bei. Andererseits lesen wir aus (1.101), (1.103) ab, daß sich die Potenzen z^n nach Taylor-Polynome entwickeln lässt:

$$z^n = \frac{z^n (n!)^2}{(2n)!} P_n(z) + \sum_{m=0}^{n-1} c_m P_m(z) \quad (1.107)$$

Deshalb folgt unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsrelation (1.102) aus (1.106) im Limes $z \rightarrow 0$:

$$A_l \frac{(kr)^l}{(2l+1)!!} = \sqrt{\pi(2l+1)} \int_{-1}^{+1} dz P_l(z) \frac{(kr)^l}{l!} \frac{2^l (l!)^2}{(2l)!} P_l(z) \quad (1.108)$$

woraus wir mit Hilfe von (1.102) und $(2l+1)! = (2l+1)!! 2^l l!$ ablesen

$$A_l = \sqrt{4\pi (2l+1)} i^l \quad (1.109)$$

Da aber (1.105) für alle z gültig sein muss, erhalten wir als Mittleresultat eine Integraldarstellung der sphärischen Bessel-Funktion

$$j_l(x) = \frac{(-i)^l}{2} \int_{-1}^{+1} dz e^{izx} P_l(z) \quad (1.110)$$

Unser Lauterresultat also bestätigt darin, daß wir aus (1.104) und (1.109) ableiten

können, wie sich eine in z-Richtung ausbreitende ebene Welle nach Kugelkoordinaten zerlegen lässt:

$$e^{ikr \cos \vartheta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \vartheta) \quad (1.111)$$

Anschließend wenden wir uns der Streuamplitude $f(\vartheta, \ell)$ in (1.87) zu. Aufgrund der angenommenen Zylindersymmetrie des Streuproblems ist zu erwarten, daß die Streuamplitude $f(\vartheta, \ell)$ nicht vom azimuthalen Winkel abhängt: $f(\vartheta, \ell) = f(\vartheta)$. Da über die Legendre-Polynome $P_l(\cos \vartheta)$ eine Basis bilden, lässt sich auch die Streuamplitude $f(\vartheta)$ nach diesen entwickeln

$$f(\vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_\ell (2\ell+1) P_l(\cos \vartheta) \quad (1.112)$$

wobei die Entwicklungskoeffizienten f_ℓ als Partialwellenamplituden bezeichnet werden. Für die Streulösung (1.87) gilt aufgrund von (1.111) und (1.112):

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) P_l(\cos \vartheta) \left\{ i^l j_l(kr) + f_\ell \frac{e^{ikr}}{r} \right\} \quad (1.113)$$

Das asymptotische Verhalten für große Distanz ist wegen (1.42) gegeben durch

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) P_l(\cos \vartheta) \left\{ i^{\ell} \frac{1}{2ikr} [e^{ikr} e^{-il\frac{\pi}{2}} - e^{-ikr} e^{il\frac{\pi}{2}}] + f_\ell \frac{e^{ikr}}{r} \right\} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2\ell+1) P_l(\cos \vartheta)}{2ikr} \left\{ e^{ikr} i^{\ell} (-i)^{\ell} - e^{-ikr} i^{\ell} + f_\ell 2ik e^{ikr} \right\} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2\ell+1) P_l(\cos \vartheta)}{2ikr} \left\{ e^{ikr} [1 + 2ik f_\ell] - (-1)^\ell e^{-ikr} \right\}, \quad r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1.114)$$

Der zweite Term beschreibt dabei eine einlaufende Zugelwelle, die vom Streuergebnis beeinflußt wird. Demgegenüber stellt der erste Term eine ausvorgang nicht beeinflußt dar, die durch die Beeilung am Potential mit der Einlaufende Zugelwelle dar, die durch die Beeilung am Potential mit der allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung (1.24) vor der Form

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (2m) R_m(r) Y_m(\vartheta, \ell) \quad (1.115)$$

ist. Wegen der Zylindersymmetrie reduziert sich dann (1.115) unter Beachtung von (1.100) auf

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l R_l(r) P_l(\cos\theta) \quad (1.116)$$

In Abschnitt 1.4 hatten wir diskutiert, dass das asymptotische Verhalten der Radialkomponente $R_l(r)$ gemäß (1.46) durch die Phasenverschiebung δ_l bestimmt wird. Für große Abstände erhalten wir daher

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c_l P_l(\cos\theta)}{2ik} \left\{ e^{irk} (-i)^l e^{i\delta_l} - i^l e^{-i\delta_l} e^{-irk} \right\}, \quad r \rightarrow \infty \quad (1.117)$$

Vergleichen wir zunächst die einlaufende Zugwelle in (1.114) und (1.117), so wird die Amplitude c_l festgelegt durch

$$c_l = (2l+1) i^l e^{i\delta_l} \quad (1.118)$$

Vergleichen wir dann noch die anlaufende Zugwelle in (1.114) und (1.117), so ergibt hieraus eine Beziehung zwischen der Partialwellenamplitude s_l und der Phasenverschiebung δ_l :

$$1 + 2ik s_l = \frac{c_l}{2l+1} (-i)^l e^{i\delta_l} = \frac{(2l+1)i^l e^{i\delta_l}}{2l+1} (-i)^l e^{i\delta_l} = e^{2i\delta_l} \Rightarrow s_l = \frac{e^{i\delta_l}}{k} \quad (1.119)$$

Einsetzen von (1.119) in (1.112) führt auf die Streuamplitude

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} s_l P_l(\cos\theta) \quad (1.120)$$

und der differentielle Wirkungsquerschnitt (1.97) ergibt sich zu

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)(\theta) = \frac{1}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} (2l+1)(2l'+1) e^{i(\delta_l - \delta_{l'})} s_l s_{l'} P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) \quad (1.121)$$

Während beim differentiellen Wirkungsquerschnitt (1.121) zwischen den verschiedenen differentiellen Wirkungsquerschnitten addiert werden, sind die Partialwellen unterschiedlichen Partialwellen Interferenzterme aufzuteilen, sind die Partialwellen im totalen Wirkungsquerschnitt (1.90) aufgrund der Orthogonalitätsrelation (1.102) additiv:

$$G = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (1.122)$$

Wir kehren nochmals zum Modell harten Kugeln von Abschnitt 1.5 zurück. Aufgrund von (1.52) dominiert für kleine Kugelradien bzw. kleine Energien (1.18) die s-Wellenstreuung. In diesem Limit reduziert sich (1.21) auf den Beitrag mit $l=0$ und wir erhalten mit $\delta_0 = -ka$

$$G = 4\pi a^2 \quad (1.123)$$

unabhängig von k . Deshalb bezeichnet man den Parameter a auch als s-Wellenlänge. Er charakterisiert aufgrund von (1.67) für kleine Energien vollständig die Stärke der Wechselwirkung.

Betrachten wir einmal einen typischen Zahlenwert, wie er z.B. im Experiment bei einem verdünnten Gas von ^{87}Rb -Atomen vorliegt. Dort ist die Wechselwirkung repulsiv mit einer s-Wellenlänge von $a \approx 100 \text{ aB}$ geprägt und es handelt sich um eine Abstoßung. Wir wollen nun zeigen, ob die angenommene Näherung $ka \ll 1$ tatsächlich gerechtfertigt ist. Dazu müssen wir die Größe ka bestimmen. Hierzu müssen wir die Erfordernisse des Betrags des Betrags des Vektors k abstimmen, indem wir die kinetische Energie (1.18) eines Konvektors k abstimmen, indem wir die thermische Energie $k_B T$ mit der thermischen Energie $\frac{1}{2} M k_B T$ vergleichen:

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2M} \approx k_B T \Rightarrow k \approx \frac{\sqrt{2M k_B T}}{\hbar} \quad (1.124)$$

Bei einer Temperatur von $T \approx 300 \text{ mK}$ erhalten wir dann

$$a k \approx \frac{\sqrt{2M k_B T}}{\hbar} a \approx 0.056 \ll 1 \quad (1.125)$$

Zusammenfassend erhalten wir, dass es tatsächlich gerechtfertigt ist, die kleinen Partikelwellen zu vernachlässigen und sich auf die s-Wellenstreuung zu konzentrieren.

1.10 Ununterscheidbare Teileien:

Bisher haben wir uns darauf verständigt, die Streuung zweier unterschiedbarer Teileien zu diskutieren. Nun wollen wir untersuchen, wie sich die einzelnen Größen verändern, wenn wir die Streuung zweier ununterscheidbarer Teileien betrachten. Wir stellen zunächst fest, daß bei identischen Teileien ihre Massen übereinstimmen, d.h. $m_1 = m_2 = m$, so daß die reduzierte Masse (1.15) durch $\mu = m/2$ und die Stärke der Wechselwirkung (1.66), (1.67) durch

$$g = \frac{4\pi \hbar^2 a}{m} \quad (1.126)$$

ergeben ist. Außerdem ist zu berücksichtigen, daß die Streulösung bei Bosonen symmetrisch bzw. Fermionen unter dem Vertausch beider Teileien antisymmetrisch ist. Da die bisher verwendete Koordinate x die Paritätssymmetrie einmaß, da die später (1.9) dargestellt, führt ein Vertausch beider Teileien zur Paritätskoordinate $-x$ nach $-x$. Eine Symmetrisierung bzw. Antisymmetrisierung der Streulösung $\psi(x)$ führt dann auf

$$\psi^\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi(x) + \epsilon \psi(-x) \}, \quad (1.127)$$

wobei $\epsilon = +1$ für Bosonen und $\epsilon = -1$ für Fermionen vorliegt. Verwenden wir nun die Streulösung (1.87) mit der Eigenschaft $\delta(\vartheta, \epsilon) = \delta(-\vartheta)$ wogegen der angenommenen Zylindersymmetrie, so geht (1.127) über in

$$\psi^\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ e^{ikx} + \epsilon e^{-ikx} \} + \frac{e^{ikx}}{\sqrt{\nu}} g^\epsilon(\vartheta), \quad (1.128)$$

wobei die Streuamplitude ununterscheidbarer Teileien lautet

$$g^\epsilon(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \delta(\vartheta) + \epsilon \delta(\pi - \vartheta) \} \quad (1.129)$$

seinen Betrag quadrat führt dann analog zu (1.97) auf den differentiellen

Wirkungsquerschnitt ununterscheidbarer Teilchen

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^E(\vartheta) = \frac{1}{2} |f(\vartheta) + E f(\pi - \vartheta)|^2 \quad (1.130)$$

Setzen wir hierin die Partialwellenzerlegung (1.120) der Streuamplitude ein, so müssen wir nach (1.101) beachten, dass für die Legendre-Polynome

$$P_l(\cos(\pi - \vartheta)) = P_l(-\cos \vartheta) = (-1)^l P_l(\cos \vartheta) \quad (1.131)$$

gilt und erhalten

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^E(\vartheta) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(2l'+1) e^{i(l\vartheta - l'\vartheta)} \sin \vartheta \sin l\vartheta [1 + E(-1)^l] [1 + E(-1)^{l'}] P_l(\cos \vartheta) P_{l'}(\cos \vartheta) \quad (1.132)$$

Für den totalen Wirkungsquerschnitt (1.90) ununterscheidbarer Teilchen erhalten wir dann mit der Orthonormalitätsrelation (1.102):

$$\sigma^E = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 l\vartheta \cdot [1 + E(-1)^l]^2 \quad (1.133)$$

Bei Modell kugel-symmetrischer Kugeln erhalten wir mit (1.52) für kleine Kugelradien den kleinen Erregungen (1.18) einen totalen Wirkungsquerschnitt, der nur von der S-Wellenstreuung dominiert wird:

$$\sigma^E = 2\pi a^2 (1+E)^2 \quad (1.134)$$

Im Falle von Bosonen ($E=+1$) erhalten wir demnach einen totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma^{+1} = 8\pi a^2 \quad (1.135)$$

der gegenüber dem totalen Wirkungsquerschnitt (1.123) zu vier unterschiedlichen Teilchen um einen Faktor 2 vergrößert ist. Im Falle von Fermionen ($E=-1$) erhalten wir dagegen aus (1.134) einen verschwindenden totalen Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma^{-1} = 0 \quad (1.136)$$

Wir berücksichtigen, dass bei Fermionen aufgrund der Antisymmetrisierung die S-

Wellenstreuung keinen Beitrag zur Streuung leistet. Die Beiträge höherer Partikellwellen $l > 0$ sind aber gemäß (1.52) mit $(ka)^{2l+1}$ unterdrückt und daher im Limes kleiner Kugelradien bzw. kleiner Energien (1.18) vernachlässigbar. Demnach kann man also die Streuung von Elektronen beim modellhaften Kugeln vernachlässigen.

1.11 Optisches Theorem:

Nach diesem Exkurs über ununterscheidbare Teildichten kehnen wir wieder zu unterscheidbaren Teildichten zurück. Für den Imaginärteil der Streuamplitude (1.120) erhalten wir:

$$\operatorname{Im} f(\vartheta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l P_l(\cos \vartheta) \quad (1.137)$$

Wertet man diesen Ausdruck für $\vartheta = 0$ aus, so folgt mit der Eigenschaft $P_l(1) = 1$, die in (1.103) abgeleitet werden kann;

$$\operatorname{Im} f(0) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (1.138)$$

Der Vergleich von (1.122) und (1.138) zeigt, daß es einen tiefliegenden Zusammenhang zwischen dem totalen Streuquerschnitt σ und der Streuamplitude $f(\vartheta)$ gibt, der in der Literatur als optisches Theorem bekannt ist:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(0) \quad (1.139)$$

In folgenden zeigen wir, daß dieses optische Theorem eine direkte Folge der Wahrscheinlichkeitsverhältnisse ist. Hierzu betrachten wir den radialen Anteil der Stromdichte (1.91)

$$j_r(\vec{x}) = \frac{t_0}{2\mu i} \left\{ \psi^*(\vec{x}) \frac{\partial \psi(\vec{x})}{\partial r} - \psi(\vec{x}) \frac{\partial \psi^*(\vec{x})}{\partial r} \right\} \quad (1.140)$$

und werten ihm für die Storulösung (1.87) aus:

$$j_r(\vec{x}) = \frac{t_0}{2\mu i} \left\{ \left[e^{-ik\cdot\vec{x}} + \frac{e^{-ikr}}{r} g^* \right] \left[i \frac{\vec{x} \cdot \vec{k}}{r} e^{ik\cdot\vec{x}} + \left(ik \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \right) g \right] - c.c. \right\} \quad (1.141)$$

Im Limes großer Abstände $r \rightarrow \infty$ läßt sich der $1/r^2$ -Term gegenüber dem $1/r$ -Term vernachlässigen und wir erhalten

$$\hat{s}_r(\vec{r}) = \hat{s}_{r,0}(\vec{r}) + \hat{s}_{r,\text{str}}(\vec{r}) + \hat{s}_{r,\text{int}}^{(1)}(\vec{r}) + \hat{s}_{r,\text{int}}^{(2)}(\vec{r}) \quad (1.142)$$

mit der durchlaufenden radialen Stromdichte

$$\hat{s}_{r,0}(\vec{r}) = \frac{tk}{\mu r} \vec{k} \cdot \vec{x} \quad (1.143)$$

mit der gestreuten radialen Stromdichte

$$\hat{s}_{r,\text{str}}(\vec{r}) = \frac{tk}{\mu r^2} |\vec{s}|^2 \quad (1.144)$$

und den beiden Beiträgen zur interferierenden radialen Stromdichte

$$\hat{s}_{r,\text{int}}^{(1)}(\vec{r}) = \frac{tk}{2\mu r} e^{ikr} f e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \left(1 + \frac{\vec{x} \cdot \vec{k}}{r k} \right), \quad \hat{s}_{r,\text{int}}^{(2)}(\vec{r}) = \hat{s}_{r,\text{int}}^{(1)}(\vec{r})^* \quad (1.145)$$

Nun berechnen wir für diese radialen Stromdichten separat den totalen Strom. Für (1.143) folgt zunächst

$$I_0 = \int d\Omega \hat{s}_{r,0}(\vec{r}) = \frac{tk}{\mu r} \int_0^\pi d\vartheta \int_0^\pi d\varphi \sin\vartheta \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix} = 0 \quad (1.146)$$

Demnach trägt die durchlaufende radiale Stromdichte (1.143) nicht zum totalen Strom bei. Als nächstes betrachten wir den Beitrag von (1.144):

$$I_{\text{str}} = \int d\Omega \hat{s}_{r,\text{str}}(\vec{r}) = \frac{2\pi tk}{\mu r^2} \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta |\vec{s}(\vartheta)|^2 \quad (1.147)$$

Aus dem Vergleich von (1.90), (1.97) und (1.147) lesen wir ab, daß der gestreute Strom durch den totalen Winkelvergrößerungsfaktor G gegeben ist:

$$I_{\text{str}} = \frac{tk}{\mu r^2} G \quad (1.148)$$

Schließlich untersuchen wir den ersten Beitrag in (1.145):

$$I_{\text{int}}^{(1)} = \int d\Omega \hat{s}_{r,\text{int}}^{(1)}(\vec{r}) = \frac{tk}{2\mu r} e^{ikr} 2\pi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta |\vec{s}(\vartheta)| (1 + \cos\vartheta) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} (\cos\vartheta - 1)} \quad (1.149)$$

Für die weitere Reduktion ist es eine entscheidende Vereinfachung, den $\cos\vartheta - 1$ -

Faktor durch eine partielle Ableitung nach r zu erhalten:

$$I^{(1)}_{\text{int}} = \frac{\pi t k}{\mu r} e^{ikr} \left(1 + \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial r}\right) \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta f(\vartheta) e^{-ikr} \cos^2 \vartheta \quad (1.150)$$

Setzt man hierin die Partialwellenzerlegungen der ebenen Welle (1.111) und der Streuamplitude (1.120) ein, so erhalten wir zunächst

$$I^{(1)}_{\text{int}} = \frac{\pi t h}{\mu r} e^{ikr} \left(1 + \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial r}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{e=0}^{\infty} (-i)^l (2e+1) j_e(kr) (2e+1) e^{ide} \sin \vartheta \int_0^{\pi} d\vartheta \cos^2 \vartheta P_l(\cos \vartheta) P_l(\cos \vartheta) \quad (1.151)$$

Wit Hilfe der Orthogonalitätsrelation (1.102) reduziert sich dies auf

$$I^{(1)}_{\text{int}} = \frac{2\pi t h}{\mu r} e^{ikr} \left(1 + \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial r}\right) \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l (2l+1) j_e(kr) e^{ide} \sin \vartheta \quad (1.152)$$

Im ländesgrößen Abstände $r \rightarrow \infty$ lassen sich die sphärischen Bessel-Funktionswerte durch die asymptotischen Formeln (1.42) ersetzen:

$$\begin{aligned} I^{(1)}_{\text{int}} &= \frac{2\pi t h}{\mu r} e^{ikr} \left(1 + \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial r}\right) \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{ide} \sin \vartheta \frac{(-i)^l}{2ikr} \{ e^{ikr} (-i)^l - e^{-ikr} i^l \} \\ &= \frac{\pi t h}{\mu r k} e^{ikr} \left(1 + \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial r}\right) \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{ide} \sin \vartheta (-i) \frac{1}{r} \{ e^{ikr} (-i)^l - e^{-ikr} i^l \} \end{aligned} \quad (1.153)$$

Bei der Auswertung der partiellen Ableitung werden wir nur die im ländesgrößen Abständen $r \rightarrow \infty$ dominierenden Terme berücksichtigen:

$$\begin{aligned} I^{(1)}_{\text{int}} &= \frac{\pi t h}{\mu r k} e^{ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{ide} \sin \vartheta (-i) \frac{1}{r} \{ (-i)^l [1 + \frac{i}{k} ik] e^{ikr} - [1 + \frac{i}{k} (-i) k] e^{-ikr} \} \\ &\Rightarrow I^{(1)}_{\text{int}} = \frac{2\pi t h}{\mu r^2 k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin \vartheta i e^{ide} \end{aligned} \quad (1.154)$$

Der zweite Beitrag in (1.145) führt gerade zu dem in (1.154) konjugiert komplexen:

$$I^{(2)}_{\text{int}} = \int d\vartheta J^{(2)}_{\text{int}}(r, \vartheta) \xrightarrow{(1.145)} \int d\vartheta J^{(1)}_{\text{int}}(r, \vartheta) \xrightarrow{(1.149), (1.154)} \frac{2\pi t h}{\mu r^2 k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin \vartheta (-i) e^{-ide} \quad (1.155)$$

Eine Addition von (1.154) und (1.155) ergibt den interferierenden Strom

$$I_{\text{int}} = I^{(1)}_{\text{int}} + I^{(2)}_{\text{int}} = -\frac{4\pi t h}{\mu r^2 k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \vartheta \quad (1.156)$$

Zu die Summe aller Ströme (1.146), (1.148), (1.156) aufgrend der Wahrscheinlichkeit

Wirklichkeitsverhältnisse verhindern muss, folgt das optische Theorem:

$$I_0 + I_{\text{str}} + I_{\text{int}} = \frac{t k}{\mu n^2} \left\{ G - \frac{4\pi}{k^2} \sum_{e=0}^{\infty} (2e+1) \sin^2 \theta_e \right\} \stackrel{!}{=} 0 \quad (1.138) \xrightarrow{(1.139)} (1.139) \checkmark$$

1.12 Bornsche Näherung:

Wir kehren nun wieder zur stationären Lösung (1.87) der Schrödinger-Gleichung (1.19) zurück, wobei die Streuamplitude $f(\vec{k}, \vartheta)$ durch (1.88) gegeben ist. Falls das Wechselwirkungspotential $V(\vec{x})$ klein ist, kann man $\psi(\vec{x}')$ in (1.88) durch die nullte Ordnung $\psi(\vec{x}') \approx e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}'}$ von (1.87) ersetzen und erhält somit die Streuamplitude in erster Ordnung Störungstheorie, die man auch als Bornsche Näherung bezeichnet:

$$f(\vec{k}, \vartheta) = -\frac{1}{2\pi\hbar^2} \int d^3x' e^{-i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{x}'} V(\vec{x}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \tilde{V}(\vec{k}' - \vec{k}) \quad (1.157)$$

Zunächst ist die Streuamplitude dann proportional zur Fourier-Wandstruktur des Wechselwirkungspotentials. Es lassen sich zwei wichtige Grenzfälle diskutieren:

- Bei kleinen Energien (1.18) ist $|\vec{k}'| = |\vec{k}| = k$ so klein, daß die Exponentialfunktion in (1.157) approximiert werden kann durch $e^{-i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{x}'} \approx 1$ und wir erhalten

$$f(\vec{k}, \vartheta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3x' V(\vec{x}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \tilde{V}(\vec{0}) \quad (1.158)$$

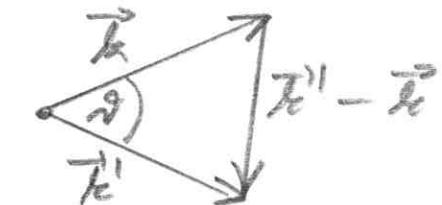
Das bedeutet, daß eine zentralsymmetrische Wellen-Streuung vorliegt, da die Streuamplitude (1.158) unabhängig von den Winkeln ϑ und φ ist.

- Bei großen Energien (1.18) ist $|\vec{k}'| = |\vec{k}| = k$ so groß, daß die Exponentialfunktion in (1.157)

$$e^{-i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{x}'} = e^{-i|\vec{k}' - \vec{k}| r' \cos \vartheta'} \quad (1.159)$$

aufgrund der Identität

$$|\vec{k} - \vec{k}'|^2 = \vec{k}^2 - 2\vec{k} \cdot \vec{k}' + \vec{k}'^2 = 2k^2(1 - \cos \vartheta) = 4k^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \quad (1.160)$$



Für $\vartheta \neq 0$ stinkt oszilliert und die Streuamplitude (1.157) sehr klein wird. Nur wenn $\vartheta = 0$ ist, kann die Streuamplitude (1.157) von Null verschieden sein. Das bedeutet also, daß bei großen Energien im wesentlichen nur eine vorwärtstreueung mit $\vartheta \neq 0$ stattfindet.

In Falle eines zentrale symmetrischen Wechselwirkungspotentials $V(\vec{r}) = V(r)$ mit $r = |\vec{r}|$ läßt sich die Bornsche Näherung (1.157) für $f(\vartheta) = f(\vartheta, \ell)$ weiter ausweiten. Für die Fourier-Transformierte des Wechselwirkungspotentials erhalten wir nämlich:

$$\tilde{V}(\vec{k}) = \int d^3x e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} V(\vec{x}) = 2\pi \int_0^\infty dr r \sin \vartheta \int_0^\infty dr r^2 e^{-irr \cos \vartheta} V(r) = 2\pi \int_0^\infty dr r^2 V(r) \cdot$$

$$\text{Im } \vartheta \text{ sin } \vartheta e^{-irr \cos \vartheta} \underline{U(\vartheta)} = \underline{\cos \vartheta} 2\pi \int_0^\infty dr r^2 V(r) \int_{-\pi}^{+\pi} du e^{-iru} = 2\pi \int_0^\infty dr r^2 V(r) \cdot$$

$$\frac{e^{-irr} - e^{+irr}}{-i\hbar r} = 2\pi \int_0^\infty dr r^2 \frac{-2i \sin \vartheta r}{-i\hbar r} V(r) = \frac{4\pi}{\hbar} \int_0^\infty dr r \sin \vartheta V(r) \quad (1.161)$$

Als Beispiel betrachten wir das Yukawa-Potential:

$$V(r) = a \frac{e^{-2r}}{r} \quad (1.162)$$

dessen Fourier-Transformierte aus (1.161) und (1.162) folgt:

$$\tilde{V}(\vec{k}) = \frac{4\pi a}{\hbar} \int_0^\infty dr r \sin \vartheta e^{-2r} = \frac{4\pi a}{\hbar} \int_0^\infty dr \frac{1}{2i} (e^{-2r + i\hbar r} - e^{-2r - i\hbar r})$$

$$= \frac{4\pi a}{\hbar} \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{2-i\hbar} - \frac{1}{2+i\hbar} \right\} = \frac{4\pi a}{\hbar} \frac{1}{2i} \frac{(2+i\hbar) - (2-i\hbar)}{4\hbar^2 + 4r^2} = \frac{4\pi a}{\hbar^2 + \hbar^2} \quad (1.163)$$

Einsetzen von (1.163) in (1.157) führt mit Hilfe von (1.160) auf die Streuamplitude

$$f(\vartheta) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \frac{4\pi a}{\hbar^2 + 4\hbar^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \quad (1.164)$$

Mit Hilfe der Energie (1.18) reduziert sich (1.164) auf

$$f(\vartheta) = -\frac{a}{\frac{\hbar^2 \vartheta^2}{2m} + 4E \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \quad (1.165)$$

so daß sich der differentielle Wirkungsquerschnitt (1.97) ergibt zu

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)(\vartheta) = \frac{a^2}{\left[\frac{b^2 \lambda^2}{2\mu} + 4e \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right]^2} \quad (1.166)$$

Im Grenzfall 1 → 0 gilt das Yukawa-Potential (1.162) gegen das Coulomb-Potential

$$V(r) = \frac{a}{r} \quad a = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_0} \quad (1.167)$$

In diesem Grenzfall 2 → 0 erhalten wir aus (1.166) und (1.167) die Rutherford-Streuung:

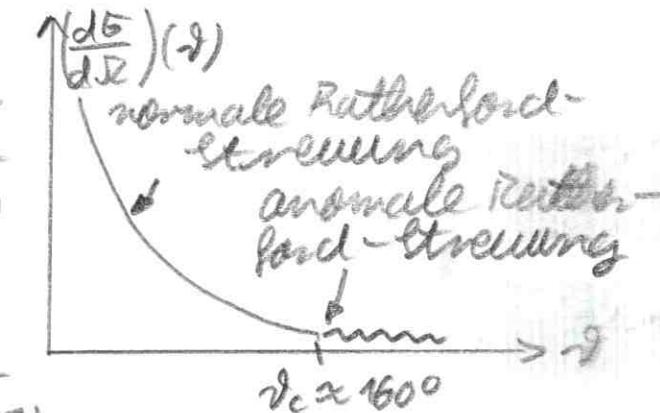
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)(\vartheta) = \left(\frac{Q_1 Q_2}{16\pi \epsilon_0 e}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \quad (1.168)$$

Es ist bemerkenswert, daß die Bornsche Näherung auf den exakten klassischen differentiellen Wirkungsquerschnitt führt, der durch Rutherford im Jahre 1911 berechnet wurde. Der experimentelle Nachweis von (1.168) erfolgte 1913 und stellte eine Bestätigung des Rutherford-Sommerfeldschen Modells dar. Bei etwa $\vartheta_c \approx 160^\circ$ beobachtet man deutliche Abweichungen des differentiellen Wirkungsquerschnittes vom Rutherford-Effekt (1.168) aufgrund der kinetisch schwierigen Kernkräfte. Im Rahmen der klassischen Rutherford-Rechnung läßt sich aus $\vartheta_c \approx 160^\circ$ die Größe des Kernradius zu $10^{-15} \text{ m} = 1 \text{ fm}$ (Femtometer) ableiten.

Zum Schluß diskutieren wir noch den Gültigkeitsbereich der Bornschen Näherung. Dazu stellen wir zunächst fest, daß die Bornsche Näherung eine Entwicklung der Störung einbeinhaltet:

$$\Psi(\vec{x}) = \Psi_0(\vec{x}) + \Psi_1(\vec{x}) + \dots \quad (1.169)$$

Dabei sind nullte und erste Ordnung gemäß (1.87) und (1.157) gegeben durch



$$\psi_0(\vec{x}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad \psi_1(\vec{x}) = -\frac{\mu e^{ikz}}{2\pi\hbar^2} \int d^3x' e^{-i(\vec{k}'-\vec{k}) \cdot \vec{x}'} V(\vec{x}') \quad (1.170)$$

eine solche Entwicklung ist nur gerechtfertigt, wenn die erste Ordnung betragsmäßig klein gegenüber der nullten Ordnung ist:

$$1 = |\psi_0(\vec{x})| \gg |\psi_1(\vec{x})| = \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \left| \int d^3x' e^{-i(\vec{k}'-\vec{k}) \cdot \vec{x}'} V(\vec{x}') \right| \quad (1.171)$$

Bei kleinen Energien gilt analog zu (1.158)

$$1 \gg \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \left| \int d^3x' V(\vec{x}') \right| \quad (1.172)$$

unabhängig vom Betrag des Wellenvektors \vec{k} . Läßt sich das Streupotential $V(\vec{x}')$ durch einen mittleren Wert V abschätzen, so reduziert sich (1.172) auf

$$1 \gg \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \frac{4\pi}{3} r^3 |V| \sim \frac{\mu r^2 |V|}{\hbar^2} \Rightarrow |V| \ll \frac{\hbar^2}{\mu r^2} \quad (1.173)$$

In (1.157) angenommen wurde, daß r groß ist, bedeutet (1.173), daß $|V|$ in einigen Fällen kleiner als die Bornsche Näherung dann gerechtfertigt ist und das Streupotential $V(\vec{x})$ schwach ist. Bei großen Energien verwenden (1.159), (1.160) und erhalten aus (1.171) mit einem mittleren Potentialwert

$$1 \gg \frac{\mu |V|}{2\pi\hbar^2} 2\pi \left| \int_0^\pi d\vartheta \sin^2 \int_0^\pi d\varphi \sin\varphi e^{-2ikr \sin\frac{\theta}{2} \cos\varphi} \right| \quad (1.174)$$

Die Ausführung dieser Integrale ergibt

$$1 \gg \frac{\mu |V|}{2\pi\hbar^2 (kr \sin\frac{\theta}{2})^3} \left| \sin(2kr \sin\frac{\theta}{2}) - 2kr \sin\frac{\theta}{2} \cos(2kr \sin\frac{\theta}{2}) \right| \quad (1.175)$$

Bei festem Stewinkel heißt das, daß die Bornsche Näherung für genügend große Energien immer gültig ist.