

2. Zweite Quantisierung:

In diesem Kapitel behandeln wir den Formalismus der Zweiten Quantisierung, der die Grundlage der nichtrelativistischen Weltfeldtheorie darstellt. Durch die Einführung von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für identische Teilchen werden wir wiedervereinigte Bosz- und Fermi-Systeme beschreiben können. Als Anwendungen werden wir dabei die Bogoliubov-Theorie der Superfluidität in den Übungen und die Barden-Cooper-Schrieffer-Theorie der Supraleitung in der Vorlesung behandeln.

2.1 Unterscheidbare Teilchen:

ein Weltfeldsystem nichtrelativistischer, spinloser Teilchen der Masse M wird durch die folgende Hamilton-Funktion bestimmt:

$$H(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n; \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; t) = \sum_{r=1}^n \frac{\vec{p}_r^2}{2M} + \sum_{r=1}^n V_1(\vec{x}_r; t) + \frac{1}{2} \sum_{r=n+1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^n V_2(\vec{x}_r, \vec{x}_{\mu}; t) \quad (2.1)$$

Bei Bezeichnung $V_1(\vec{x}_r; t)$ ein auflösbar-Teilchen-Potential und die Wiedervereinigung zweier Teilchen wird durch das λ -Teilchen-Potential $V_2(\vec{x}_r, \vec{x}_{\mu}; t)$ dargestellt, das aufgrund des kontinuierlichen Axioms "actio = -ratio" der Einschränkung

$$V_2(\vec{x}_r, \vec{x}_{\mu}; t) = V_2(\vec{x}_r - \vec{x}_{\mu}; t) \quad (2.2)$$

genügt. Aufgrund der Regelsumme in (2.1) können wir dabei ohne Berücksichtigung der Allgemeinheit voraussetzen

$$V_2(\vec{x}_r - \vec{x}_{\mu}; t) = V_2(\vec{x}_p - \vec{x}_r; t) \quad (2.3)$$

Von der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik gelangt man im Rahmen der Ersten Quantisierung dadurch, daß den Operatoren zugordnet werden:

$$\vec{x}_r \rightarrow \hat{\vec{x}}_r, \vec{p}_r \rightarrow \hat{\vec{p}}_r, H(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n; \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; t) \rightarrow \hat{H} = H(\hat{\vec{p}}_1, \dots, \hat{\vec{p}}_n; \hat{\vec{x}}_1, \dots, \hat{\vec{x}}_n; t) \quad (2.4)$$

zwei werden die folgenden kanonischen Vertauschungsrelationen gefordert:

$$[\hat{x}_{jv}, \hat{x}_{kv}]_- = [\hat{p}_{jv}, \hat{p}_{kv}]_- = 0, \quad [\hat{p}_{jv}, \hat{x}_{kv}]_- = \frac{\hbar}{i} \delta_{jk} \delta_{rv} \quad (2.5)$$

um die Heisenberg'sche Unabhängigkeitsrelationen zu erfüllen. Die zeitliche Entwicklung eines quantenmechanischen Zustandsvektors $|\psi(t)\rangle$ wird durch die Schrödinger-Gleichung beschrieben:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (2.6)$$

Um von dieser Darstellungsweise Formulierung zur Ortsdarstellung zu gelangen, wählt man als Basis die Eigenwerte $|\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle$ der Ortsoperator \vec{x}_n :

$$\text{Eigenwertproblem: } \hat{x}_n |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle = \vec{x}_n |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle \quad (2.7)$$

$$\text{Orthonormalität: } \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n | \vec{x}_1^*, \dots, \vec{x}_n^* \rangle = \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_1^*) \cdots \delta(\vec{x}_n - \vec{x}_n^*) \quad (2.8)$$

$$\text{Vollständigkeit: } \int d^3x_1 \cdots d^3x_n |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n| = 1 \quad (2.9)$$

Entwickelt man den quantenmechanischen Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle$ nach dieser Basis

$$|\psi(t)\rangle \stackrel{(2.9)}{=} \int d^3x_1 \cdots d^3x_n |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n | \psi(t) \rangle \quad (2.10)$$

so treten als Entwicklungshilfssymbole die n -Teildien-Wellenfunktionen auf:

$$\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; t) = \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n | \psi(t) \rangle \quad (2.11)$$

die Ortsdarstellung der Impulsoperatoren \hat{p}_n ist durch die Jordan-Regel gegeben:

$$\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n | \hat{p}_n = \frac{\hbar}{i} \vec{p}_n \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n | \quad (2.12)$$

Multipliziert man die Darstellungsreihe Schrödinger-Gleichung (2.6) von links mit dem bra-Vektor $\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n |$, erhält man für die n -Teildien-

Wellenfunktionen (2.11) die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; t) = \hat{H} \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; t) \quad (2.13)$$

wobei die Ortsdarstellung des Hamilton-Operators aus (2.4), (2.7) und (2.12) folgt: $\hat{H} = H\left(\frac{i}{\hbar} \vec{p}_1, \dots, \frac{i}{\hbar} \vec{p}_n; \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; t\right)$ (2.14)

Im Falle der Hamilton-Funktion (2.1) ergibt sich mit (2.2) insbesondere

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{n=1}^N \Delta_n + \sum_{n=1}^N V_1(\vec{x}_n; t) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{\mu=1}^N V_2(\vec{x}_n - \vec{x}_\mu; t) \quad (2.15)$$

sind die 1-Teildaten- und die 2-Teildaten-Potentiale nicht explizit zeitabhängig

$$V_1(\vec{x}_n; t) = V_1(\vec{x}_n), \quad V_2(\vec{x}_n - \vec{x}_\mu; t) = V_2(\vec{x}_n - \vec{x}_\mu) \quad (2.16)$$

Es stellt sich für die n -Teildaten-Wellenfunktion der Separationsansatz

$$\Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; t) = \Psi_E(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \quad (2.17)$$

zu nehmen, der die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung (2.13) auf die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung

$$\hat{H} \Psi_E(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = E \Psi_E(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \quad (2.18)$$

reduziert.

2.2 Identische Teildaten - Bosonen und Fermionen

Die bisher dargestellten quantenmechanischen Gesetze gelten nur unter der Annahme, daß identische Teildaten unterschieden sind. Experimentell stellt sich nun aber heraus, daß zwei identische Teildaten immer gleich verhalten und durch keine objektive Messung voneinander unterscheiden werden können. Im Gültigkeitsbereich der Quantenmechanik gilt daher das fundamentale Prinzip der Ununterscheidbarkeit

Physikalisch relevant sind die Erwartungswerte von Observablen. Das Prinzip der Ununterscheidbarkeit identischer Teilchen besagt dann, dass sich diese Erwartungswerte nicht ändern dürfen, wenn man in der n -Teilchen-Wellenfunktion die Nummerierung zweier Teilchen mit einander vertauscht:

$$\int d^3x_1 \dots \int d^3x_n \Psi^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_n) \hat{A} \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_n) = \int d^3x_1 \dots \int d^3x_n \Psi^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_n) \hat{A} \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_n) \quad (2.19)$$

Zur dieser Definitionsgleichung für ununterscheidbare identische Teilchen werden im Folgenden charakteristische Eigenschaften für die Operatoren \hat{A} und für die n -Teilchen Wellenfunktionen $\Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ abgeleitet. Daß man in (2.19) die Gleichheit der Erwartungswerte nur für die Vertauschung von zwei Teilchen fordert bedeutet keine prinzipielle Einschränkung, da jede beliebige Permutation Produkt von Transpositionen \hat{P}_{ik} darstellbar ist:

$$P = \prod \hat{P}_{ik} \quad (2.20)$$

Die Wirkung von \hat{P}_{ik} definiert ist durch

$$\hat{P}_{ik} \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_n) = \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n) \quad (2.21)$$

Die Transposition \hat{P}_{ik} ist offenbar involutorisch, d.h. die zweimalige Anwendung der Transposition \hat{P}_{ik} führt wieder zur ursprünglichen Wellenfunktion zurück:

$$\hat{P}_{ik} \hat{P}_{ik} = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{P}_{ik}^{-1} = \hat{P}_{ik} \quad (2.22)$$

Mit Hilfe des Transpositionsoperators \hat{P}_{ik} läßt sich die Definitionsgleichung (2.19) für identische Teilchen von der Ortsdarstellung in die Darstellungsreihe Formulierung umschreiben:

$$\langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = \langle \hat{P}_{ik} \hat{A} | \hat{A} | \hat{P}_{ik} \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{P}_{ik}^+ \hat{A} \hat{P}_{ik} | \Psi \rangle \quad (2.23)$$

Aus der trivialen Zerlegung

$$\langle \Psi | \hat{A} | \psi \rangle = \frac{1}{4} \{ \langle \Psi + \Psi' | \Psi | \Psi + \psi \rangle - \langle \Psi - \Psi' | \Psi | \Psi - \psi \rangle + i \langle \Psi + i\psi | \Psi | \Psi + i\psi \rangle - i \langle \Psi - i\psi | \Psi | \Psi - i\psi \rangle \} \quad (2.24)$$

folgt dann mit (2.23) eine Identität für beliebig Matrizelemente

$$\langle \Psi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \Psi | \hat{P}_{jk}^+ \hat{A} \hat{P}_{jk}^- | \psi \rangle \quad (2.25)$$

und damit eine Identität für Operatoren

$$\hat{A} = \hat{P}_{jk}^+ \hat{A} \hat{P}_{jk}^- \quad (2.26)$$

setzt man hierin speziell $\hat{A} = \hat{P}_{jk}$ ein, so folgt mit (2.22) die Hermitizität

$$\hat{P}_{jk} = \hat{P}_{jk}^+ \quad (2.27)$$

und die Unitarität

$$\hat{P}_{jk}^{-1} = \hat{P}_{jk}^+ \quad (2.28)$$

des Transpositionsoperators \hat{P}_{jk} . Ferner folgt aus (2.26) und (2.28), daß jeder Operator \hat{A} mit dem Transpositionsoperator \hat{P}_{jk} kommutiert:

$$[\hat{P}_{jk}, \hat{A}]_- = \hat{P}_{jk} \hat{A} - \hat{A} \hat{P}_{jk} = 0 \quad (2.29)$$

da dies insbesondere auch für den Hamilton-Operator $\hat{H} = \hat{H}$ gilt, gilt es zu Teilketten-Wellenfunktionen, die gleichzeitig Eigenfunktionen zum Hamilton-Operator \hat{H} und zu allen Transpositionsoperatoren \hat{P}_{jk} sind:

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad \hat{P}_{jk}|\psi\rangle = P_{jk}|\psi\rangle \quad (2.30)$$

Aufgrund der Hermitizität (2.27) des Transpositionsoperators \hat{P}_{jk} sind dessen Eigenwerte reell. Aus der involutorischen Eigenschaft (2.22) folgt ferner $P_{jk}^2 = 1$. Danach sind die Eigenwerte des Transpositionsoperators \hat{P}_{jk} entweder $P_{jk} = +1$ oder $P_{jk} = -1$.

Es ist einrichtig, daß eine n -Teilketten-Wellenfunktion $\psi(x_1, \dots, x_n)$, die Eigenfunktion zu allen Transpositionsoperatoren \hat{P}_{jk} ist, immer denselben Eigenwert

besitzt. Aus der Operatorzerlegung

$$\begin{aligned} \hat{P}_{1j} \hat{P}_{2k} \hat{P}_{12} \hat{P}_{22} \hat{P}_{1j} |\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_m)| &= \hat{P}_{1j} \hat{P}_{2k} \hat{P}_{12} \Psi(\vec{x}_j, \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m) \\ &= \hat{P}_{1j} \hat{P}_{2k} \Psi(\vec{x}_k, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m) = \Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_m) = \hat{P}_{jk} \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) \\ \Rightarrow \hat{P}_{1j} \hat{P}_{2k} \hat{P}_{12} \hat{P}_{22} \hat{P}_{1j} &= \hat{P}_{jk} \end{aligned} \quad (2.31)$$

folgt für die Eigenwerte unmittelbar die Behauptung

$$\hat{P}_{jk} = (\hat{P}_{1j})^2 (\hat{P}_{2k})^2 \hat{P}_{12} \Rightarrow \hat{P}_{jk} = \hat{P}_{12} \quad (2.32)$$

Identische Teilchen besitzen demnach entweder eine symmetrische ($\epsilon = +1$) oder eine antisymmetrische ($\epsilon = -1$) Wellenfunktion:

$$\hat{P}_{jk} |\Psi^\epsilon\rangle = \epsilon |\Psi^\epsilon\rangle \quad (2.33)$$

Symmetrische und antisymmetrische Wellenfunktionen sind zueinander stets orthogonal:

$$\langle \Psi^- | \Psi^+ \rangle \stackrel{(2.33)}{=} \langle \Psi^- | \hat{P}_{jk} \Psi^+ \rangle \stackrel{(2.27)}{=} \langle \Psi^- | \hat{P}_{jk}^+ \Psi^+ \rangle = \langle \hat{P}_{jk} \Psi^- | \Psi^+ \rangle \stackrel{(2.33)}{=} -\langle \Psi^- | \Psi^+ \rangle \quad (2.34)$$

$$\Rightarrow \langle \Psi^- | \Psi^+ \rangle = 0$$

Außerdem behalten identische Teilchen ihren Symmetriekarakter für alle Zeiten bei. Da der Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t_2, t_1)$ einen Anfangszustand $|\Psi^{e_1}(t_1)\rangle$ mit einer definierten Symmetrie in einen Endzustand $|\Psi^{e_2}(t_2)\rangle = \hat{U}(t_2, t_1) |\Psi^{e_1}(t_1)\rangle$ mit einer definierten Symmetrie abbildet, folgt:

$$E_2 |\Psi^{e_2}(t_2)\rangle \stackrel{(2.33)}{=} \hat{P}_{jk} |\Psi^{e_2}(t_2)\rangle = \hat{P}_{jk} \hat{U}(t_2, t_1) |\Psi^{e_1}(t_1)\rangle \stackrel{(2.29)}{=} \hat{U}(t_2, t_1) \hat{P}_{jk} |\Psi^{e_1}(t_1)\rangle \stackrel{(2.33)}{=} E_1 |\Psi^{e_2}(t_2)\rangle \quad (2.35)$$

$$\Rightarrow e_2 = e_1$$

Als Ergebnis können wir daher festhalten, daß der Zustandsraum identischer Teilchen entweder nur symmetrische oder nur antisymmetrische Wellenfunktionen beinhaltet. In der relativistischen Quantenfeldtheorie wird gezeigt, welcher Teil-

bett-Raum für welchen Teilchentyp in Frage kommt. Nach dem Spin-Statistik-Theorem von Pauli besitzen identische Teilchen mit ganzzahligen Spin die Bosonen, die symmetrischen Wellenfunktionen und identische Teilchen mit halbzähligen Spin, die Fermionen, die antisymmetrischen Wellenfunktionen.

2.3 Nichtwechselwirkende identische Teilchen:

Im allgemeinen ist es sehr aufwendig, n -Teilchen-Wellenfunktionen unter Bedingung der Symmetrieeigenschaften zu berechnen. Das soll am Beispiel nicht-wechselwirkender identischer Teilchen illustriert werden. Nach (2.13), (2.15), (2.16) und einem verdundenden 2 -Teilchen-Potential $V_2(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = 0$ ist die folgende zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung zu lösen:

$$\sum_{r=1}^n \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_r + V_r(\vec{x}_r) \right\} \Psi_E(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = E \Psi_E(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \quad (2.36)$$

von ausgegangen, dass die 1 -Teilchen-Wellenfunktionen $\Psi_{E\alpha}(\vec{x})$ von der zeitunabhängigen 1 -Teilchen-Schrödinger-Gleichung

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x}) \right\} \Psi_{E\alpha}(\vec{x}) = E_\alpha \Psi_{E\alpha}(\vec{x}) \quad (2.37)$$

mit den diskreten Quantenzahlen α bekannt sind und dass diese eine orthonormierte Basis darstellen:

$$\int d^3x \Psi_{E\alpha}^*(\vec{x}) \Psi_{E\alpha'}(\vec{x}) = \delta_{\alpha\alpha'} \quad (2.38)$$

$$\sum_{\alpha} \Psi_{E\alpha}^*(\vec{x}) \Psi_{E\alpha}(\vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.39)$$

Wären die Teilchen unterscheidbar, dann würden die Lösungen der zeitunabhängigen n -Teilchen-Schrödinger-Gleichung (2.36) in die 1 -Teilchen-Wellenfunktionen faktorisierten:

$$\Psi_E(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \Psi_{E\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \prod_{r=1}^n \Psi_{E\alpha_r}(\vec{x}_r) \quad (2.40)$$

und die Gesamtenergie wäre die Summe der 1-Teildien-Energien

$$E = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^n E_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \quad (2.41)$$

Aus der Orthonormalitäts- und der Vollständigkeitsrelationen der 1-Teildien-Wellenfunktionen (2.38) und (2.39) würden dann unmittelbar entsprechende Relationen für die n -Teildien-Wellenfunktionen (2.40) folgen:

$$\int d^3x_1 \dots \int d^3x_n \Psi_{E_{\alpha_1}, \dots, E_{\alpha_n}}^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \Psi_{E_{\alpha_1}, \dots, E_{\alpha_n}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \delta_{\alpha_1, \alpha_1} \dots \delta_{\alpha_n, \alpha_n} \quad (2.42)$$

$$\sum_{\alpha_1} \dots \sum_{\alpha_n} \Psi_{E_{\alpha_1}, \dots, E_{\alpha_n}}^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \Psi_{E_{\alpha_1}, \dots, E_{\alpha_n}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_1) \dots \delta(\vec{x}_n - \vec{x}_n) \quad (2.43)$$

Da identische Teildien aber ununterscheidbar sind, muss die n -Teildien-Wellenfunktion symmetrisch bzw. antisymmetrisch sein. Daraus wird der (Anti-)Symmetrisierungsoperator

$$\hat{S}^\epsilon = \sum_{\hat{P}} \epsilon^P \hat{P} \quad (2.44)$$

eingeführt, bei dem sich die Summation über alle Permutationsoperatoren P erstreckt und P die Anzahl der Transpositionen einer Permutation gemäß der Zerlegung (2.20) bezeichnet. Multipliziert man eine Permutation P in der Form (2.44) mit einer einzelnen Transposition \hat{P}_{ik} , so ergibt sich eine andere Permutation $\hat{P}' = \hat{P}_{ik} P$. Dies hat folgende Konsequenz:

$$\hat{P}_{ik} \hat{S}^\epsilon \underset{(2.44)}{=} \sum_P \epsilon^P \hat{P}_{ik} \hat{P} = \sum_{\hat{P}'} \epsilon^{P' + i} \hat{P}' \underset{\epsilon = \pm 1}{=} \epsilon \sum_{\hat{P}'} \epsilon^{P' \hat{P}'} \underset{(2.44)}{=} \epsilon \hat{S}^\epsilon \quad (2.45)$$

Durch die Vorschrift

$$\Psi_{\{E_{\alpha}\}}^{\epsilon}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = N_{\{E_{\alpha}\}} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^n \hat{S}^\epsilon \prod_{\alpha} \Psi_{E_{\alpha}}(\vec{x}_\alpha) \quad (2.46)$$

werden demnach wegen (2.45) aus den n -Teildien-Wellenfunktionen (2.40) symmetrische ($\epsilon = +1$) bzw. antisymmetrische ($\epsilon = -1$) n -Teildien-Wellenfunktionen (2.33) konstruiert. Aufgrund des Prinzips der Ununterscheidbarkeit sind dabei die (anti-)symmetrischen n -Teildien-Wellenfunktionen (2.46) von den konkret

Reihenfolge der Energien $E_{\alpha_1}, \dots, E_{\alpha_n}$ unabhängig - dies wird in (2.46) durch den Index $\{\alpha_i\}$ zum Ausdruck gebracht.

Zunächst ist festzuhalten, daß die (anti-)symmetrischen-Teildreh-Wellenfunktionen (2.46) auch der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung (2.36) mit dem Energieoperator (2.41) genügen. Dies folgt aus (2.29) und dem Umstand (2.20), daß \hat{P} der Permutationsoperator \hat{P} in der Summe (2.44) als Produkt von Transpositionsoperatoren darstellbar ist:

$$\hat{H}|\Psi_E\rangle = E|\Psi_E\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{A} \hat{S}^E |\Psi_E\rangle \stackrel{(2.20), (2.29), (2.44)}{=} E \hat{S}^E |\Psi_E\rangle \quad (2.47)$$

Ferner ergibt sich aus (2.44) und (2.46) eine wichtige Beziehung für die antisymmetrische n -Teildreh-Wellenfunktionen mit $E = -1$:

$$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = N_{\{\alpha_i\}}^{-} \sum_{\hat{P}} (-1)^{\hat{P}} \{ \Psi_{E_{\alpha_1}}(\vec{x}_1) \dots \Psi_{E_{\alpha_n}}(\vec{x}_n) \} = N_{\{\alpha_i\}}^{-} \sum_{\hat{P}} (-1)^{\hat{P}} \Psi_{E_{\alpha_1}}(\vec{x}_{\hat{P}(1)}) \dots \Psi_{E_{\alpha_n}}(\vec{x}_{\hat{P}(n)}) \quad (2.48)$$

Somit läßt sich die antisymmetrische n -Teildreh-Wellenfunktion in Form einer Slater-Determinante darstellen:

$$\Psi_{\{\alpha_i\}}^{-} (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = N_{\{\alpha_i\}}^{-} \begin{vmatrix} \Psi_{E_{\alpha_1}}(\vec{x}_1) & \Psi_{E_{\alpha_2}}(\vec{x}_2) & \dots & \Psi_{E_{\alpha_n}}(\vec{x}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Psi_{E_{\alpha_1}}(\vec{x}_n) & \Psi_{E_{\alpha_2}}(\vec{x}_2) & \dots & \Psi_{E_{\alpha_n}}(\vec{x}_n) \end{vmatrix} \quad (2.49)$$

Sind zwei Zeilen $i = d, k$ oder zwei Spalten $j = \vec{x}_d = \vec{x}_k$ gleich, so verschwindet offenbar die antisymmetrische n -Teildreh-Wellenfunktion und damit die Wahrscheinlichkeit, einen solchen Zustand zu finden. Dies ist gerade die Aussage des fundamentalen Pauli-Prinzips, wonach zwei Fermionen weder ein- und denselben Zustand besetzen noch sich an ein- und demselben Ort aufhalten können. Entsprechende Einschränkungen gilt es nicht für Bosonen.

Es soll nun die Normierungskonstante $N_{\{E_{\alpha}\}}^{\varepsilon}$ in (2.46) berechnet werden. Bei Fermionen ($\varepsilon = -1$) ist aufgrund des Pauli-Prinzips gewährleistet, daß die 1-Zeilchen-Zustände $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ voneinander verschieden sind. Um die folgende Herleitung zu vereinfachen, nehmen wir auch für Bosonen an, daß die 1-Zeilchen-Zustände $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ voneinander verschieden sind. Baut man gemäß (2.20) eine Permutation \hat{P} aus ihren Transpositionen P_i auf, so folgt durch Iteration von (2.45)

$$\hat{P} \hat{S}^{\varepsilon} = \varepsilon^P \hat{S}^{\varepsilon} \quad (2.50)$$

Damit läßt sich das Skalarprodukt zwischen zwei (anti-)symmetrischen 1-Zeilchen-Wellenfunktionen (2.46) berechnen:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\{E_{\alpha}\}}^{\varepsilon} | \psi_{\{E_{\alpha'}\}}^{\varepsilon} \rangle &\xrightarrow{(2.44), (2.46)} N_{\{E_{\alpha}\}}^{\varepsilon} \sum_{\hat{P}} \varepsilon^P \langle \hat{P} \psi_{E_{\alpha_1}} \dots \psi_{E_{\alpha_n}} | \psi_{\{E_{\alpha'}\}}^{\varepsilon} \rangle = N_{\{E_{\alpha}\}}^{\varepsilon} \sum_{\hat{P}} \varepsilon^P \langle \psi_{E_{\alpha_1}} \dots \psi_{E_{\alpha_n}} | \hat{P} \psi_{\{E_{\alpha'}\}}^{\varepsilon} \rangle \\ &\xrightarrow{(2.20), (2.27)} N_{\{E_{\alpha}\}}^{\varepsilon} \sum_{\hat{P}} \varepsilon^P \langle \psi_{E_{\alpha_1}} \dots \psi_{E_{\alpha_n}} | \hat{P} \psi_{\{E_{\alpha'}\}}^{\varepsilon} \rangle \xrightarrow{(2.46), (2.50)} N_{\{E_{\alpha}\}}^{\varepsilon} \sum_{\hat{P}} \varepsilon^P \langle \psi_{E_{\alpha_1}} \dots \psi_{E_{\alpha_n}} | \psi_{\{E_{\alpha'}\}}^{\varepsilon} \rangle \\ &\xrightarrow{\varepsilon = \pm 1} N_{\{E_{\alpha}\}}^{\varepsilon} \sum_{\hat{P}} \langle \psi_{E_{\alpha_1}} \dots \psi_{E_{\alpha_n}} | \psi_{\{E_{\alpha'}\}}^{\varepsilon} \rangle = N_{\{E_{\alpha}\}}^{\varepsilon} n! \langle \psi_{E_{\alpha_1}} \dots \psi_{E_{\alpha_n}} | \psi_{\{E_{\alpha'}\}}^{\varepsilon} \rangle \\ &\xrightarrow{(2.44), (2.46)} N_{\{E_{\alpha}\}}^{\varepsilon} N_{\{E_{\alpha'}\}}^{\varepsilon} n! \sum_{\hat{P}} \varepsilon^P \hat{P}^1 \langle \psi_{E_{\alpha_1}} \dots \psi_{E_{\alpha_n}} | \psi_{E_{\alpha'_1}} \dots \psi_{E_{\alpha'_n}} \rangle \\ &\xrightarrow{(2.42)} \langle \psi_{\{E_{\alpha}\}}^{\varepsilon} | \psi_{\{E_{\alpha'}\}}^{\varepsilon} \rangle = N_{\{E_{\alpha}\}}^{\varepsilon} N_{\{E_{\alpha'}\}}^{\varepsilon} n! \sum_{\hat{P}} \varepsilon^P \delta_{\alpha_1, \alpha'_{P(1)}} \dots \delta_{\alpha_n, \alpha'_{P(n)}} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Erfordert man die Orthonormalitätsrelation

$$\langle \psi_{\{E_{\alpha}\}}^{\varepsilon} | \psi_{\{E_{\alpha'}\}}^{\varepsilon} \rangle = \delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; \alpha'_1, \dots, \alpha'_n}^{\varepsilon} \quad (2.52)$$

mit dem (anti-)symmetrischen Kronecker-Symbol

$$\delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; \alpha'_1, \dots, \alpha'_n}^{\varepsilon} = \sum_{\hat{P}} \varepsilon^P \delta_{\alpha_1, \alpha'_{P(1)}} \dots \delta_{\alpha_n, \alpha'_{P(n)}} \quad (2.53)$$

so folgt aus (2.51) für die Normierungskonstante

$$N_{\{E_a\}}^{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{n!}} \quad (2.54)$$

Wir bemerken noch, daß diese Normierungskonstante für Bosonen ($\epsilon = +1$) für den Fall modifiziert werden muß, daß einig 1-Zülden-Zustände mehrfach besetzt sind.

Nun wird noch gezeigt, daß man mit Hilfe von (2.46) den gesamten Zülden-Raum der (anti-)symmetrischen n -Zülden-Wellenfunktionen annehmen kann. Dazu geht man von der Vollständigkeitsrelation (2.43) der n -Zülden-Wellenfunktion (2.40) aus und wendet zweimal den (anti-)Symmetrisierungsoperator (2.44) an, einmal auf die Ortskoordinaten $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ und einmal auf die Ortskoordinaten $\vec{x}'_1, \dots, \vec{x}'_n$:

$$\begin{aligned} & \sum_p \sum_{p'} \epsilon^{p+p'} \sum_{d_n} \dots \sum_{d_m} \psi_{E_{d_n}}^*(\vec{x}_{p(n)}) \dots \psi_{E_{d_m}}^*(\vec{x}_{p(m)}) \psi_{E_{d'_1}}(\vec{x}'_{p'(1)}) \dots \psi_{E_{d'_n}}(\vec{x}'_{p'(n)}) \\ &= \sum_p \sum_{p'} \epsilon^{p+p'} \delta(\vec{x}_{p(1)} - \vec{x}'_{p'(1)}) \dots \delta(\vec{x}_{p(n)} - \vec{x}'_{p'(n)}) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Auf der linken Seite werden die Ortskoordinaten $\vec{x}_{p(1)}, \dots, \vec{x}_{p(n)}$ bzw. $\vec{x}'_{p'(1)}, \dots, \vec{x}'_{p'(n)}$ umgestellt. In Folgedessen in die Standardordnung $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ bzw. $\vec{x}'_1, \dots, \vec{x}'_n$ umgestellt. In Folgedessen werden die Quantenzahlen d_1, \dots, d_n zu $d_{p(1)}, \dots, d_{p(n)}$ bzw. $d_{p'(1)}, \dots, d_{p'(n)}$ umgestellt. Eine entsprechende Umsortierung auf der rechten Seite von $\vec{x}'_{p(n)}$, führt $\vec{x}'_{p'(1)}, \dots, \vec{x}'_{p'(n)}$ in $\vec{x}'_{p'(p(1))}, \dots, \vec{x}'_{p'(p(n))}$ über:

$$\begin{aligned} & \sum_{d_n} \dots \sum_{d_m} \left\{ \sum_p \epsilon^p \psi_{E_{d(p)}}^*(\vec{x}_1) \dots \psi_{E_{d(p)}}^*(\vec{x}_m) \right\} \left\{ \sum_{p'} \epsilon^{p'} \psi_{E_{d(p')}}(\vec{x}'_1) \dots \psi_{E_{d(p')}}(\vec{x}'_n) \right\} \\ &= \sum_p \sum_{p'} \epsilon^{p+p'} \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}'_{p'(p(1))}) \dots \delta(\vec{x}_n - \vec{x}'_{p'(p(n))}) \end{aligned} \quad (2.56)$$

Auf der linken Seite kann man nun (2.44), (2.46), (2.54) verwenden, während auf der rechten Seite die Summe über die Permutationen \hat{P} durch eine Summe über die Permutationen $\hat{Q} = \hat{P}'\hat{P}$ mit $q = p' + p$ ersetzt wird und die Summe über die Permutationen \hat{P} trivial ausgeführt wird, was zu einem Faktor $n!$ führt. Man erhält dann insgesamt die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{x_1, \dots, x_n} \psi^{\epsilon^*}_{\{E_a\}}(x_1, \dots, x_n) \psi^{\epsilon}_{\{E_a\}}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = \delta^{\epsilon}(x_1, \dots, x_n; \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \quad (2.57)$$

wobei analog zu (2.53) die (anti-)symmetrische Delta-Funktion durch

$$\delta^{\epsilon}(x_1, \dots, x_n; \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = \sum_Q \epsilon^q \delta(x_1 - \tilde{x}_{Q(1)}) \cdots \delta(x_n - \tilde{x}_{Q(n)}) \quad (2.58)$$

definiert ist.

Die überlegungsgemäß vorliegenden Abschnitte dienen dazu, eine Basis des Hilbert-Raumes von ununterscheidbaren identischen Teilchen durch (Anti-)Symmetrisierung einer bekannten Basis des Hilbert-Raumes untertrennbarer identischen Teilchen zu erzeugen. Bisher sind wir dabei vom Eigenwertproblem (2.36) des Hamilton-Operators ausgegangen. Andere Basen ergeben sich, wenn man stattdessen das Eigenwertproblem (2.7) der Antooperatoren als Ausgangspunkt wählt. Die Eigenfunktionen $|x_1, \dots, x_n\rangle$ mit den kontinuierlichen Eigenwerten x_1, \dots, x_n spannen dann den Hilbert-Raum von unterschiedbaren ununterscheidbaren identischen Teilchen auf. Die anschließende (Anti-)Symmetrisierung analog zu (2.44), (2.46), (2.54) führt auf die Basis

$$|x_1, \dots, x_n\rangle^{\epsilon} = \frac{1}{n!} \sum_{\hat{P}} \epsilon^{\hat{P}} |\tilde{x}_{P(1)}, \dots, \tilde{x}_{P(n)}\rangle \quad (2.59)$$

im Hilbert-Raum ununterscheidbarer identischer Teilchen. Orthonormalitätsrelation (2.52) und Vollständigkeitsrelation (2.57) lauten dabei

$$\epsilon \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n | \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \rangle^\epsilon = \delta^\epsilon(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \quad (2.60)$$

$$\int d^3x_1 \dots \int d^3x_n |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle^\epsilon \epsilon \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n | = 1 \quad (2.61)$$

zur Illustration betrachten wir die Ortsdarstellung für zwei Teildaten. Die Basis für zwei unterschiedbare identische Teildaten lautet dann in Ortsdarstellung

$$\psi_{\vec{x}_1, \vec{x}_2}(\vec{z}_1, \vec{z}_2) \stackrel{(2.11)}{=} \langle \vec{z}_1, \vec{z}_2 | \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle \stackrel{(2.8)}{=} \delta(\vec{z}_1 - \vec{x}_1) \delta(\vec{z}_2 - \vec{x}_2) \quad (2.62)$$

die (Anti-)Symmetrisierung (2.59) führt dann auf die Basis für unterscheidbare identische Teildaten:

$$\psi_{\vec{x}_1, \vec{x}_2}^\epsilon(\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \delta(\vec{z}_1 - \vec{x}_1) \delta(\vec{z}_2 - \vec{x}_2) + \delta(\vec{z}_1 - \vec{x}_2) \delta(\vec{z}_2 - \vec{x}_1) \right\} \quad (2.63)$$

Damit erhält man für die Orthonormalitätsrelation (2.60) mit (2.58)

$$\int d^3x_1 \int d^3x_2 \psi_{\vec{x}_1, \vec{x}_2}^{*\epsilon}(\vec{z}_1, \vec{z}_2) \psi_{\vec{x}_1, \vec{x}_2}^\epsilon(\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \delta^\epsilon(\vec{x}_1, \vec{x}_2; \vec{x}_1, \vec{x}_2) \quad (2.64)$$

und für die Vollständigkeitsrelation (2.61) mit (2.60) und (2.62)

$$\int d^3x_1 \int d^3x_2 \psi_{\vec{x}_1, \vec{x}_2}^{*\epsilon}(\vec{z}_1, \vec{z}_2) \psi_{\vec{x}_1, \vec{x}_2}^\epsilon(\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \delta^\epsilon(\vec{z}_1, \vec{z}_2; \vec{z}_1, \vec{z}_2) \quad (2.65)$$

2.4 Erzeugungs- und Vernichtungsoperationen für Bosonen:

Die bisher vorgestellte Formulierung von Vielteilchensystemen erfordert immer eine nachträgliche (Anti-)Symmetrisierung von Wellenfunktionen. Da dies in der Regel sehr aufwendig ist, wurde eine alternative Formulierung von Vielteilchensystemen entwickelt, bei der die (Anti-)Symmetrisierung der Wellenfunktionen automatisch berücksichtigt ist. Dazu bedient man sich des Leiteroperator-Formalismus, der die algebraische Behandlung eines einzelnen harmonischen Oszillators ermöglicht.

Der harmonische Oszillator stellt ein quantenmechanisches Standardmodell dar, mit dem sich beispielsweise Schwingungen in Hohlkugeln oder in Festkörpern beschreiben lassen. Der Hamilton-Operator des eindimensionalen harmonischen Oszillators lautet:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 \hat{q}^2 \quad (2.66)$$

wobei der Ortsoperator \hat{q} und Impulsoperator \hat{p} nichttriviale Kommutatorenrelationen gefordert werden:

$$[\hat{q}, \hat{q}] = [\hat{p}, \hat{p}]_- = 0, \quad [\hat{p}, \hat{q}] = \frac{i\hbar}{m} \quad (2.67)$$

Die Aufgabe besteht darin, zum Eigenwertproblem des Hamilton-Operators

$$\hat{H} |\alpha\rangle = E_\alpha |\alpha\rangle \quad (2.68)$$

die Eigenwerte E_α und die Eigenfunktionen $|\alpha\rangle$ zu berechnen. Üblicherweise wird hierzu die darstellungsfreie Formulierung des Eigenwertproblems (2.68) in die Ortsdarstellung überführt und die entstehende Schrödinger-Gleichung gelöst. Im folgenden wird ein anderer Weg beschritten, bei dem das Eigenwertproblem (2.68) in der darstellungsfreien Formulierung einzig und allein unter Zuhilfenahme der Kommutatorrelationen (2.67) gelöst wird.

Zunächst geht man von den herkömmlichen Operatoren \hat{q} und \hat{p} zu zueinander adjungierten Operatoren \hat{a} und \hat{a}^\dagger über:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad (2.69)$$

$$\hat{p} = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} i(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$$

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (\hat{q} + \frac{i}{m\omega} \hat{p}) \\ \hat{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (\hat{q} - \frac{i}{m\omega} \hat{p}) \end{aligned} \quad (2.70)$$

Setzt man die Zerlegung (2.69) in (2.66) ein, so lässt sich der Hamilton-Operator durch die neuen Operatoren \hat{a} und \hat{a}^\dagger ausdrücken:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \frac{\hbar^2 w^2}{2} (-1)(\hat{a}^+ - \hat{a})^2 + \frac{m}{2} w^2 \frac{\hbar}{2m w} (\hat{a}^+ + \hat{a})^2 = \frac{\hbar w}{4} (-\hat{a}^{+2} + \hat{a}^+ \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^+ + \hat{a}^{+2} + \hat{a}^{+2} \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^+ + \hat{a}^2)$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{\hbar w}{2} (\hat{a}^+ \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^+) \quad (2.71)$$

Die Zerlegung (2.70) liefert dann die Verwandlungsrelationen zwischen den neuen Operatoren \hat{a} und \hat{a}^+ :

$$[\hat{a}, \hat{a}]_- = \frac{mw}{2\hbar} \left[\hat{q} + \frac{i}{mw} \hat{p}, \hat{q} + \frac{i}{mw} \hat{p} \right]_- = \frac{mw}{2\hbar} \frac{i}{mw} \{ [\hat{p}, \hat{q}]_- + [\hat{q}, \hat{p}]_- \} = 0, \quad (2.72)$$

$$[\hat{a}^+, \hat{a}^+]_- = \frac{mw}{2\hbar} \left[\hat{a} - \frac{i}{mw} \hat{p}, \hat{a} - \frac{i}{mw} \hat{p} \right]_- = \frac{mw}{2\hbar} \frac{-i}{mw} \{ [\hat{p}, \hat{q}]_- + [\hat{q}, \hat{p}]_- \} = 0, \quad (2.73)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^+]_- = \frac{mw}{2\hbar} \left[\hat{q} + \frac{i}{mw} \hat{p}, \hat{a} - \frac{i}{mw} \hat{p} \right]_- = \frac{mw}{2\hbar} \frac{i}{mw} \{ [\hat{p}, \hat{q}]_- - [\hat{q}, \hat{p}]_- \} = 1 \quad (2.74)$$

Unter Verwendung von (2.74) läßt sich der Hamilton-Operator (2.71) auch schreiben als

$$\hat{H} = \hbar w (\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2}) \quad (2.75)$$

wobei der Operator

$$\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a} \quad (2.76)$$

auftritt. Beachtet man die Reduzurregel

$$[\hat{A} \hat{B}, \hat{C}]_- = \hat{A} \hat{B} \hat{C} - \hat{C} \hat{A} \hat{B} = (\hat{A} \hat{B} \hat{C} - \hat{A} \hat{C} \hat{B}) + (\hat{A} \hat{C} \hat{B} - \hat{C} \hat{A} \hat{B}) = \hat{A} [\hat{B}, \hat{C}]_- + [\hat{A}, \hat{C}]_- \hat{B} \quad (2.77)$$

dann erhält man die Kommutatorrelationen

$$[\hat{N}, \hat{a}^+]_- \stackrel{(2.76)}{=} [\hat{a}^+ \hat{a}, \hat{a}^+]_- \stackrel{(2.77)}{=} \hat{a}^+ [\hat{a}, \hat{a}^+]_- + [\hat{a}^+, \hat{a}^+] \hat{a} \stackrel{(2.73), (2.74)}{=} \hat{a}^+ \quad (2.78)$$

$$[\hat{N}, \hat{a}]_- \stackrel{(2.76)}{=} [\hat{a}^+ \hat{a}, \hat{a}]_- \stackrel{(2.77)}{=} \hat{a}^+ [\hat{a}, \hat{a}]_- + [\hat{a}^+, \hat{a}] \hat{a} \stackrel{(2.72), (2.74)}{=} -\hat{a} \quad (2.79)$$

Wir betrachten nun das Eigenwertproblem dieses Operators (2.76):

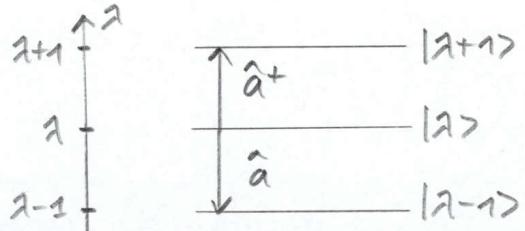
$$\hat{N} |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle \quad (2.80)$$

Mit den Kommutatorrelationen (2.78) und (2.79) kann man untersuchen, welche Wirkung \hat{a}^+ und \hat{a} auf die Eigenfunktionen $|\lambda\rangle$ haben:

$$\hat{N}\hat{a}^+|2\rangle \xrightarrow{(2.78)} (\hat{a} + \hat{N} + \hat{a}^+)|2\rangle \xrightarrow{(2.80)} (2+1)\hat{a}^+|1\rangle \Rightarrow \hat{a}^+|2\rangle \sim |2+1\rangle \quad (2.81)$$

$$\hat{N}\hat{a}|2\rangle \xrightarrow{(2.79)} (\hat{a}\hat{N} - \hat{a})|2\rangle \xrightarrow{(2.80)} (2-1)\hat{a}|1\rangle \Rightarrow \hat{a}|2\rangle \sim |2-1\rangle \quad (2.82)$$

Dennach kann man \hat{a}^+ und \hat{a} als Leiteroperatoren auffassen, die in der Leiter der Eigenfunktionen $|2\rangle$ auf- und absteigen. Der Aufsteigeroperator \hat{a}^+ bzw. der Absteigeroperator \hat{a} führen zu einer Eigenfunktion mit einem um 1 erhöhten bzw. erniedrigten Eigenwert.



Andererseits lässt sich zeigen, dass die Eigenwerte λ des Operators \hat{N} immer positiv sind:

$$0 \leq \langle \hat{a} \lambda | \hat{a} \lambda \rangle = \langle \lambda | \hat{a}^+ \hat{a} | \lambda \rangle \xrightarrow{(2.76)} \langle \lambda | \hat{N} | \lambda \rangle \xrightarrow{(2.80)} \lambda \langle \lambda | \lambda \rangle = \lambda \quad (2.83)$$

Aus (2.82) und (2.83) folgt nun, dass die Eigenwerte λ durch

$$\lambda = n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.84)$$

gegeben sind. Gäbe es einen Eigenwert, der nicht eine positive ganze Zahl ist, so könnte man durch iterative Anwendung des Absteigeroperators \hat{a} gemäß (2.82) den Eigenwert so lange erniedrigen, bis er negativ wird. Dies würde dann aller im Widerspruch zu (2.83) stehen. Es gilt demnach einen Grundzustand $|0\rangle$ mit der Eigenschaft

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle 0 | \hat{a}^+ = 0 \quad (2.85)$$

Die Eigenfunktionen $|n\rangle$ lassen sich demnach wie folgt konstruieren. Zunächst bedient man

$$\langle \hat{a}^+ n | \hat{a}^+ n \rangle = \langle n | \hat{a} \hat{a}^+ | n \rangle \xrightarrow{(2.74)} \langle n | \hat{a}^+ \hat{a} + 1 | n \rangle \xrightarrow{(2.76)} \langle n | \hat{N} + 1 | n \rangle \xrightarrow{(2.80), (2.84)} n+1 \quad (2.86)$$

Aus (2.81), (2.84) und (2.86) ergibt sich dann eine Regel, wie man unter Erhaltung der Normierung mit dem Aufsteigeroperator \hat{a}^+ von $|n\rangle$ nach $|n+1\rangle$ gelangt:

$$\hat{a}^+|n\rangle = c_m |n+1\rangle \Rightarrow c_m^2 \langle n+1|n+1\rangle = n+1 \Rightarrow \hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (2.87)$$

Abschließend gewinnt man durch Iteration von (2.87) eine Voraussetzung, wie man die Eigenfunktionen $|n\rangle$ ausgehend vom Grundzustand $|0\rangle$ konstruieren kann:
 $|n\rangle \xrightarrow{(2.87)} \frac{1}{\sqrt{m}} \hat{a}^+ |n-1\rangle \xrightarrow{(2.87)} \frac{1}{\sqrt{m(n-1)}} (\hat{a}^+)^2 |n-2\rangle \xrightarrow{(2.87)} \dots \Rightarrow |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^+)^n |0\rangle \quad (2.88)$

Zur Vollständigkeit halber geben wir noch die Wirkung des Aufsteigoperators \hat{a} auf die Eigenfunktionen $|n\rangle$ an:

$$\langle \hat{a}^+ n | \hat{a}^+ n \rangle = \langle n | \hat{a}^+ \hat{a} | n \rangle \xrightarrow{(2.76)} \langle n | \hat{N} | n \rangle \xrightarrow{(2.80), (2.84)} \quad (2.89)$$

$$\hat{a} |n\rangle = D_n |n-1\rangle \xrightarrow{(2.89)} D_n^2 \langle n-1|n-1\rangle = n \Rightarrow \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (2.90)$$

Aus (2.75), (2.76), (2.80) und (2.84) liest man ferner die Energieniveaus des harmonischen Oszillators ab:

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.91)$$

Zur Leiteroperatorformalismus beider algebraischen Behandlung des harmonischen Oszillators wird nun zur Beschreibung ununterscheidbarer Identität der Bosonen Bezug genommen. Dazu dient die folgende Übersetzungs-tabelle:

Harmonischer Oszillator	Identische Bosonen
n : Quantenzahl eines 1-Teilchen-Systems	$n\vec{x}$: Zähle von Bosonen am Ort \vec{x}
\hat{a}^+ : Aufsteigoperator	$\hat{a}_{\vec{x}}^+$: Erzeugung eines Teilchens am Ort \vec{x}
\hat{a} : Absteigoperator	$\hat{a}_{\vec{x}}$: Vernichtung eines Teilchens am Ort \vec{x}
$[\hat{a}, \hat{a}]_- = [\hat{a}^+, \hat{a}^+]_- = 0, [\hat{a}, \hat{a}^+]_- = 1$	$[\hat{a}_{\vec{x}}, \hat{a}_{\vec{x}}^+]_- = [\hat{a}_{\vec{x}}^+, \hat{a}_{\vec{x}}^+]_- = 0, [\hat{a}_{\vec{x}}, \hat{a}_{\vec{x}}^+]_- = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$ (2.92)
$\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a}$	$\hat{N} = \int d^3x \hat{a}_{\vec{x}}^+ \hat{a}_{\vec{x}}^-$ (2.93)

$[\hat{N}, \hat{a}^+]_- = \hat{a}^+$	$[\hat{N}, \hat{a}_{\vec{x}}^+]_- \xrightarrow{(2.77), (2.92), (2.93)} \hat{a}_{\vec{x}}^+ \quad (2.94)$
$[\hat{N}, \hat{a}]_- = -\hat{a}$	$[\hat{N}, \hat{a}_{\vec{x}}]_- \xrightarrow{(2.77), (2.92), (2.93)} -\hat{a}_{\vec{x}} \quad (2.95)$
grundzustand: $\hat{a} 0\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle 0 \hat{a}^+ = 0$	Vakuumzustand: $\hat{a}_{\vec{x}} 0\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle 0 \hat{a}_{\vec{x}}^+ = 0 \quad (2.96)$
$ n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^+)^n 0\rangle$	$ \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle^{+1} = \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \cdots \hat{a}_{\vec{x}_n}^+ 0\rangle \quad (2.97)$ beizuarweise veränderten Orten

dabei wurde bei den Kommutatorrelationen (2.92) eine Delta-Funktion eingeführt, um für den Teildrahtoperator N in (2.93) zu (2.78) und (2.79) analoge Kommutatorrelationen (2.94) und (2.95) zu erhalten. Letztendlich garantieren diese, dass man die Operatoren $\hat{a}_{\vec{x}}$ und $\hat{a}_{\vec{x}}^+$ dalmüglich integrieren kann, dass sie ein Teildraht am Ort \vec{x} erzeugen und verhindern. Dies führt dann unmittelbar auf die Definitionen (2.96) des Vakuumzustandes $|0\rangle$ und (2.97) der Basiszustände $|\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle^{+1}$. Letzteres kann man sich dadurch plausibel machen, dass man die Orthonormalitätsrelationen (2.60) für $n=1$ und $n=2$ Teildrahten nachweist:

$$+1 \langle \vec{x}_1 | \vec{x}_1 \rangle^{+1} \xrightarrow{(2.97)} \langle \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ | \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ | 0 \rangle \xrightarrow{(2.92)} \langle 0 | \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ + \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_1) | 0 \rangle \quad (2.98)$$

$$\xrightarrow{(2.58)} +1 \langle \vec{x}_1 | \vec{x}_1 \rangle = \delta^{+1}(\vec{x}_1; \vec{x}_1) \stackrel{!}{=} (2.60)$$

$$+1 \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 | \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle^{+1} \xrightarrow{(2.97)} \langle \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ | 0 \rangle \langle \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ | 0 \rangle$$

$$\xrightarrow{(2.92)} \langle 0 | \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ \{ \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ + \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \} \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ | 0 \rangle \xrightarrow{(2.92)} \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \langle 0 | \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ + \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) | 0 \rangle$$

$$+ \langle 0 | \{ \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ + \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \} \{ \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ + \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \} | 0 \rangle$$

$$\xrightarrow{(2.92)} +1 \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 | \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle^{+1} = \delta^{+1}(\vec{x}_1, \vec{x}_2; \vec{x}_1, \vec{x}_2) \stackrel{!}{=} (2.58) \quad (2.99)$$

2.5 Schrödinger-Gleichung zweidrehwirkender Bosonen:

Die Einführung der lokalen Teildrehenzugangs- und vernichtungsoperatoren \hat{a}_z^+ und \hat{a}_z hat nicht nur den Vorteil, daß sich Vielteildenaustände kontrahieren lassen, die automatisch die gewünschte Symmetrie aufweisen. Es läßt sich außerdem eine universelle Form der Schrödinger-Gleichung erzielen, die von der Teilchenzahl n unabhängig ist.

In zweiter Quantisierung lautet die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle \quad (2.100)$$

Hierbei bezeichnet der Zustand $|\Psi(t)\rangle$ irgend einen Vielteildenaustand aus dem zweitquantisierten Hilbert-Raum, der von den Basisvektoren $|\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle^{+}$ aufgespannt wird. Der zweitquantisierte Hamilton-Operator $\hat{H}(t)$ setzt sich additiv aus zwei Teilen zusammen:

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_1(t) + \hat{H}_2(t) \quad (2.101)$$

Der lokale Hamilton-Operator $\hat{H}_1(t)$ ist dadurch gegeben, daß der 1-Teildrehen-Hamilton-Operator mit zweidrehwirkenden Bosonen

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_1(\vec{x}; t) \quad (2.102)$$

mit den lokalen Teildrehenzugangs- und vernichtungsoperatoren \hat{a}_z^+ und \hat{a}_z multipliziert wird und dann die Ortskoordinate \vec{x} ausintegriert wird:

$$\hat{H}_1(t) = \int d^3x \hat{a}_z^+ \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_1(\vec{x}; t) \right\} \hat{a}_z \quad (2.103)$$

Entsprechend wird der lokale Hamilton-Operator $\hat{H}_2(t)$ mit Hilfe der 2-Teildrehen-Weddwirkung $V_2(\vec{x} - \vec{x}'; t)$ konstruiert:

$$\hat{H}_2(t) = \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \hat{a}_z^+ \hat{a}_{z'}^+ V_2(\vec{x} - \vec{x}'; t) \hat{a}_{z'} \hat{a}_z \quad (2.104)$$

Der Operatordcharakter von \hat{a}_z^+ und \hat{a}_z ist dafür verantwortlich, daß die

Schrödinger-Gleichung (2.100) ein Vierteildchenproblem bedient. Dies zeigt wir dadurch, daß die Schrödinger-Gleichung (2.100) von links mit dem zum Basiszustand (2.97) adjungierten Basiszustand

$$+^1 \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n | = \langle 0 | \hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_1 \quad (2.105)$$

multipliziert wird:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle 0 | \hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_1 | \psi(t) \rangle = \langle 0 | \hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_1 \hat{H}(t) | \psi(t) \rangle \quad (2.106)$$

Nun folgen wir aus der Definition (2.96) des Vakuumzustandes $|0\rangle$ und der Definition des Hamilton-Operators $\hat{H}(t)$ in (2.101), (2.103), (2.104), daß der Vakuumzustand $|0\rangle$ keine Energie besitzt:

$$\hat{H}(t)|0\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle 0 | \hat{H}(t) = 0 \quad (2.107)$$

Dann läßt sich die rechte Seite von (2.106) durch zwei Kommutatoren ausdrücken:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle 0 | \hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_1 | \psi(t) \rangle &= \langle 0 | [\hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_1, \hat{H}(t)]_- | \psi(t) \rangle \\ &= \int d^3y_1 \int d^3y_2 \delta(\vec{y}_1 - \vec{y}_2) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \vec{y}_2 + V_1(\vec{y}_2; t) \right\} \langle 0 | [\hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_1, \hat{a}^\dagger \vec{y}_2]_- | \psi(t) \rangle \quad (2.108) \\ &+ \frac{1}{\hbar} \int d^3y_1 \int d^3y_2 \int d^3y_3 \delta(\vec{y}_1 - \vec{y}_2) \delta(\vec{y}_2 - \vec{y}_3) V_1(\vec{y}_3; t) \langle 0 | [\hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_1, \hat{a}^\dagger \vec{y}_2, \hat{a}^\dagger \vec{y}_3, \hat{a} \vec{x}_2]_- | \psi(t) \rangle \end{aligned}$$

Der erste Kommutator in (2.108) läßt sich zunächst mithilfe der Rechenregel
 $[\hat{A}, \hat{B} \hat{C}]_- = \hat{A} \hat{B} \hat{C} - \hat{B} \hat{C} \hat{A} = (\hat{A} \hat{B} \hat{C} - \hat{B} \hat{A} \hat{C}) + (\hat{B} \hat{A} \hat{C} - \hat{B} \hat{C} \hat{A}) = [\hat{A}, \hat{B}]_- \hat{C} + \hat{B} [\hat{A}, \hat{C}]_-$ vereinfachen:

$$[\hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_1, \hat{a}^\dagger \vec{y}_2]_- = [\hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_1, \hat{a}^\dagger]_- \hat{a} \vec{y}_2 + \hat{a}^\dagger [\hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_1, \hat{a}^\dagger]_- \quad (2.110)$$

und anschließend rekursiv mit Hilfe der Rechenregel (2.77) vereinfachen:

$$\begin{aligned} [\hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_1, \hat{a}^\dagger]_- &\xrightarrow{(2.77)} \hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_2 [\hat{a} \vec{x}_1, \hat{a}^\dagger]_- + [\hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_2, \hat{a}^\dagger]_- \hat{a} \vec{x}_1 \\ &\xrightarrow{(2.77)} \hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_2 [\hat{a} \vec{x}_1, \hat{a}^\dagger]_- + \hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_3 [\hat{a} \vec{x}_2, \hat{a}^\dagger]_- \hat{a} \vec{x}_1 + [\hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_3, \hat{a}^\dagger]_- \hat{a} \vec{x}_2 \hat{a} \vec{x}_1 \end{aligned}$$

$$(2.77) \dots (2.77) \sum_{r=1}^m \hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_{r+1}} [\hat{a}_{\vec{x}_r}, \hat{a}_{\vec{y}}^+] - \hat{a}_{\vec{x}_{r+1}} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1}$$

$$\xrightarrow{(2.92)} [\hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1}, \hat{a}_{\vec{y}}^+] = \sum_{r=1}^n \delta(\vec{x}_r - \vec{y}) \hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_{r+1}} \hat{a}_{\vec{x}_{r+1}} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1} \quad (2.111)$$

Dann erhält man für den ersten Erwartungswert in (2.108):

$$\langle 0 | [\hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1}, \hat{a}_{\vec{y}}^+ \hat{a}_{\vec{z}}]_- | \psi(t) \rangle \xrightarrow{(2.110)} \langle 0 | [\hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1}, \hat{a}_{\vec{y}}^+] \hat{a}_{\vec{z}} | \psi(t) \rangle \quad (2.112)$$

$$(2.111) \sum_{r=1}^m \delta(\vec{x}_r - \vec{y}) \langle 0 | \hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_{r+1}} \hat{a}_{\vec{z}} \hat{a}_{\vec{x}_r} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1} | \psi(t) \rangle$$

Der zweite Kommutator in (2.108) lässt sich durch zweimalige Anwendung der Rechenregel (2.109) auf den ersten Kommutator (2.111) zurückführen:

$$[\hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1}, (\hat{a}_{\vec{y}_1}^+ \hat{a}_{\vec{y}_2}^+) (\hat{a}_{\vec{z}_2} \hat{a}_{\vec{z}_1})] \xrightarrow{(2.109)} [\hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1}, \hat{a}_{\vec{y}_1}^+ \hat{a}_{\vec{y}_2}^+] \hat{a}_{\vec{z}_2} \hat{a}_{\vec{z}_1} + \hat{a}_{\vec{y}_2}^+ \hat{a}_{\vec{y}_1}^+ [\hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1}, \hat{a}_{\vec{z}_2} \hat{a}_{\vec{z}_1}]$$

$$\xrightarrow{(2.109)} [\hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1}, \hat{a}_{\vec{y}_1}^+] \hat{a}_{\vec{z}_2} \hat{a}_{\vec{z}_1} + \hat{a}_{\vec{y}_1}^+ [\hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1}, \hat{a}_{\vec{y}_2}^+] \hat{a}_{\vec{z}_2} \hat{a}_{\vec{z}_1} \quad (2.113)$$

$$(2.111) \sum_{r=1}^m \delta(\vec{x}_r - \vec{y}_1) \hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_{r+1}} \hat{a}_{\vec{x}_r} \hat{a}_{\vec{y}_2}^+ \hat{a}_{\vec{z}_1} + \sum_{r=1}^m \delta(\vec{x}_r - \vec{y}_2) \hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_{r+1}} \hat{a}_{\vec{x}_r} \hat{a}_{\vec{y}_1}^+ \hat{a}_{\vec{z}_1}$$

und ergibt sich der zweite Erwartungswert in (2.108) zu

$$\langle 0 | [\hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1}, \hat{a}_{\vec{y}_1}^+ \hat{a}_{\vec{y}_2}^+ \hat{a}_{\vec{z}_2} \hat{a}_{\vec{z}_1}] | \psi(t) \rangle \xrightarrow{(2.113)} \sum_{r=1}^m \delta(\vec{x}_r - \vec{y}_1) \langle 0 | \hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_{r+1}} \hat{a}_{\vec{x}_r} \hat{a}_{\vec{y}_2}^+ \hat{a}_{\vec{z}_2} \hat{a}_{\vec{z}_1} | \psi(t) \rangle$$

$$+ \sum_{r=1}^m \delta(\vec{x}_r - \vec{y}_2) \langle 0 | \hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_{r+1}} \hat{a}_{\vec{x}_r} \hat{a}_{\vec{y}_1}^+ \hat{a}_{\vec{z}_2} \hat{a}_{\vec{z}_1} | \psi(t) \rangle \quad (2.114)$$

$$(2.96) \sum_{r=1}^m \delta(\vec{x}_r - \vec{y}_1) \langle 0 | [\hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_{r+1}} \hat{a}_{\vec{x}_r}, \hat{a}_{\vec{y}_2}^+] \hat{a}_{\vec{z}_2} \hat{a}_{\vec{z}_1} | \psi(t) \rangle \quad (2.114)$$

$$(2.111) \sum_{r=1}^m \sum_{r' \neq r} \delta(\vec{x}_r - \vec{y}_1) \delta(\vec{x}_{r'} - \vec{y}_2) \langle 0 | \hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_{r+1}} \hat{a}_{\vec{x}_{r-1}} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_{r'+1}} \hat{a}_{\vec{x}_{r'+1}} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1} \hat{a}_{\vec{z}_2} \hat{a}_{\vec{z}_1} | \psi(t) \rangle$$

$$= \sum_{r=1}^m \sum_{r' \neq r} \delta(\vec{x}_r - \vec{y}_1) \delta(\vec{x}_{r'} - \vec{y}_2) \langle 0 | \hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_{r+1}} \hat{a}_{\vec{x}_{r-1}} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_{r'+1}} \hat{a}_{\vec{x}_{r'+1}} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1} | \psi(t) \rangle$$

Setzt man schließlich (2.112) und (2.114) in (2.108) ein, so führt man die Zwischenintegrierten über die Delta-Funktionen aus und erhält gerade die Teilchen-Schrödinger-Gleichung (2.13), (2.15):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle 0 | \hat{a}_{x_1} \cdots \hat{a}_{x_n} | \Psi(t) \rangle = \sum_{n=1}^m \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{x_n} + V_1(x_n; t) \right\} \langle 0 | \hat{a}_{x_1} \cdots \hat{a}_{x_n} | \Psi(t) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m \sum_{\mu=1}^m V_2(x_n - x_\mu; t) \langle 0 | \hat{x}_n \cdots \hat{a}_{x_n} | \Psi(t) \rangle \quad (2.115)$$

Ziehen wir die n -Teilchen Schrödinger-Wellenfunktion $\Psi(x_1, \dots, x_n; t)$ durch die Projektion des Zustandes $|\Psi(t)\rangle$ auf den Basiszustand (2.97) gegeben:

$$\Psi(x_1, \dots, x_n; t) = {}^{+1}\langle x_1, \dots, x_n | \Psi(t) \rangle \quad (2.116)$$

2.6 Feldoperatoren im Heisenberg-Bild:

Die nichtrelativistische Vierteildentheorie wurde bisher im Schrödinger-Bild formuliert, da die lokalen Teilchenerzeugungs- und vernichtungsoperatoren \hat{a}_x^\pm und \hat{a}_x zeitunabhängig sind, während der Vierteildenzustand $|\Psi(t)\rangle$ aus dem zweitquantisierten Hilbert-Raum zeitabhängig ist. Nun soll der Übergang ins Heisenberg-Bild vollzogen werden, bei dem der Vierteildenzustand zeitunabhängig wird und die gesamte Zeitabhängigkeit von Feldoperatoren getragen wird.

Zur Wiederholung: Wir zerlegen zunächst das entsprechende Vorzeichen bei der Erstquantisierung. Wir gehen vom Schrödinger-Bild aus und bedenken uns der Einheitlichkeit halber darauf, daß der Hamilton-Operator \hat{H}_S nicht explizit zeitabhängig ist. Die Bewegungsgleichungen für den zeitabhängigen Zustand $|\Psi_S(t)\rangle$ und den zeitunabhängigen Operator \hat{O}_S lauten dann:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_S(t)\rangle = \hat{H}_S |\Psi_S(t)\rangle \quad (2.117)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{O}_S = 0 \quad (2.118)$$

Die formale Lösung der Schrödinger-Gleichung (2.117) ist gegeben durch

$$|\Psi_S(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} |\Psi_S(0)\rangle \quad (2.119)$$

Dabei identifizieren wir den Anfangszustand $|\Psi_S(0)\rangle$ mit dem Zustand $|\Psi_A\rangle$ im

Heisenberg-Bild

$$|\psi_s(0)\rangle = |\psi_H\rangle \quad (2.120)$$

so dass der Übergang vom Schrödinger-Bild zum Heisenberg-Bild durch die Beziehungen

$$|\psi_s(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} |\psi_H\rangle \Leftrightarrow |\psi_H\rangle = e^{+\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} |\psi_s(t)\rangle \quad (2.121)$$

definiert wird. Offensichtlich ist der Zustand $|\psi_H\rangle$ im Heisenberg-Bild zeit-abhängig:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_H\rangle \xrightarrow{(2.121)} i\hbar \frac{i}{\hbar} \hat{H}_S e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} |\psi_s(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_s(t)\rangle \xrightarrow{(2.117)} 0 \quad (2.122)$$

Um nun den Operator $\hat{O}_H(t)$ im Heisenberg-Bild zu bestimmen, fordern wir, dass sich die Erwartungswerte beim Übergang vom Schrödinger-Bild zum Heisenberg-Bild nicht ändern:

$$\langle \psi_s(t) | \hat{O}_S | \psi_s(t) \rangle = \langle \psi_H | \hat{O}_H(t) | \psi_H \rangle \quad (2.123)$$

Einsetzen von (2.121) in (2.123) führt dann tatsächlich auf den Operator $\hat{O}_H(t)$ im Heisenberg-Bild:

$$\langle e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} \psi_H | \hat{O}_S | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} \psi_H \rangle = \langle \psi_H | e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} \hat{O}_S e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} | \psi_H \rangle = \langle \psi_H | \hat{O}_H(t) | \psi_H \rangle$$

$$\Rightarrow \hat{O}_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} \hat{O}_S e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} \quad (2.124)$$

Beispielweise ergibt sich für den Hamilton-Operator $\hat{O}_S = \hat{H}_S$, dass dieser seine Form beim Übergang vom Schrödinger-Bild zum Heisenberg-Bild nicht ändert:

$$\hat{A}_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} \hat{H}_S e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} = \hat{H}_S \quad (2.125)$$

Zusätzlich erhalten wir für den Operator $\hat{O}_H(t)$ im Heisenberg-Bild die Heisenberg'sche Bewegungsgleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{O}_H(t) \xrightarrow{(2.124)} e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} \left\{ i\hbar \frac{i}{\hbar} \hat{H}_S \hat{O}_S + \hat{O}_S i\hbar \frac{i}{\hbar} \hat{H}_S \right\} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} + e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} i\hbar \frac{\partial \hat{O}_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t}$$

$$\xrightarrow{(2.118)} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{O}_H(t) = [\hat{O}_H(t), \hat{H}_S] - \xrightarrow{(2.125)} [\hat{O}_H(t), \hat{H}_H(t)] \quad (2.126)$$

Nun übertragen wir dieses Vorgehen auf die zweite Quantisierung. Dabei ordnen wir analog zu (2.124) den zeitabhlängigen lokalen Teildichtenproduktions- und Vernichtungsoperatoren \hat{a}_x^+ und \hat{a}_x^- im Schrödinger-Bild zeitabhängige Feldoperatoren im Heisenberg-Bild zu:

$$\hat{\psi}(\vec{x}, t) = \hat{a}_x^+ e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \quad \hat{\psi}^+(\vec{x}, t) = \hat{a}_x^+ e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \quad (2.127)$$

Zunächst berechnen wir die gleichartigen Kommutatorrelationen dieser Feldoperatoren:

$$[\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}(\vec{x}', t)]_- = \hat{\psi}(\vec{x}, t) \hat{\psi}(\vec{x}', t) - \hat{\psi}(\vec{x}', t) \hat{\psi}(\vec{x}, t) \stackrel{(2.127)}{=} e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \hat{a}_x^- e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \hat{a}_x^+ e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t}$$

$$- e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \hat{a}_x^+ e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \hat{a}_x^- e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} = e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} [\hat{a}_x^+, \hat{a}_x^-]_- e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \stackrel{(2.92)}{=} 0 \quad (2.128)$$

$$[\hat{\psi}^+(\vec{x}, t), \hat{\psi}^+(\vec{x}', t)]_- = e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} [\hat{a}_x^+, \hat{a}_x^+]_- e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \stackrel{(2.92)}{=} 0 \quad (2.129)$$

$$[\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}^+(\vec{x}', t)]_- = e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} [\hat{a}_x^+, \hat{a}_x^-]_- e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \stackrel{(2.92)}{=} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.130)$$

Dannach erfüllen die Feldoperatoren $\hat{\psi}^+(\vec{x}, t)$ und $\hat{\psi}(\vec{x}, t)$ im Heisenberg-Bild zu jedem Zeitpunkt t dieselben Kommutatorrelationen wie die lokalen Teildichtenproduktions- und Vernichtungsoperatoren \hat{a}_x^+ und \hat{a}_x^- im Schrödinger-Bild in (2.92).

Nun überführen wir den Hamilton-Operator (2.101), (2.103), (2.104) vom Schrödinger- ins Heisenberg-Bild. Dafür bedürfen wir uns darauf, daß das 1-Teilchen-Zeitpotential $V_1(\vec{x}; t)$ und das 2-Teilchen-Zeitpotential $V_2(\vec{x} - \vec{x}'; t)$ nicht explizit zeitabhängig sind. Analog zu (2.124) multiplizieren wir hierzu den Hamilton-Operator

$$H = \int d^3x \hat{a}_x^+ \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_1(\vec{x}) \right\} \hat{a}_x^- + \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \hat{a}_x^+ \hat{a}_x^- V_2(\vec{x} - \vec{x}') \hat{a}_{x'}^- \hat{a}_{x'}^+ \quad (2.131)$$

von links mit $e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t}$ und von rechts mit $e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t}$:

$$\hat{H}_H(t) = \hat{H} = e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} H e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} = \int d^3x e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \hat{a}_x^+ e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_1(\vec{x}) \right\} e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \hat{a}_x^- e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t}$$

$$+\frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' e^{\frac{i}{\hbar} \hat{p}_z} \hat{a}_z^+ e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{p}_z} e^{\frac{i}{\hbar} \hat{p}_z} \hat{a}_z^+ e^{\frac{i}{\hbar} \hat{p}_z} V_2(x-x') e^{\frac{i}{\hbar} \hat{p}_z} \hat{a}_z^+ e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{p}_z} e^{\frac{i}{\hbar} \hat{p}_z} \hat{a}_z^+ e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{p}_z} \quad (2.132)$$

verwendet man die Feldoperatoren (2.127), so lautet der Hamilton-Operator im Zeisenberg-Bild:

$$\hat{H}_H(t) = \int d^3x \hat{\psi}^+(x,t) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_1(x,t) \right\} \hat{\psi}(x,t) + \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \hat{\psi}^+(x',t) V_2(x-x') \hat{\psi}(x',t) \hat{\psi}(x,t) \quad (2.133)$$

Mit diesem Hamilton-Operator im Zeisenberg-Bild lassen sich analog zu (2.126) die Zeisenberg'schen Bewegungsgleichungen der Feldoperatoren herleiten:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}(x,t)}{\partial t} \stackrel{(2.126)}{=} [\hat{\psi}(x,t), \hat{H}_H(t)] - \stackrel{(2.133)}{=} \int d^3x' \int d^3x'' \delta(x'-x'') \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta x'' + V_1(x'') \right\} [\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}^+(x',t) \hat{\psi}(x'',t)] - + \frac{1}{2} \int d^3x' \int d^3x'' V_2(x'-x'') [\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}^+(x',t) \hat{\psi}^+(x'',t) \hat{\psi}(x'',t) \hat{\psi}(x',t)] - \quad (2.134)$$

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}^+(x,t)}{\partial t} \stackrel{(2.126)}{=} [\hat{\psi}^+(x,t), \hat{H}_H(t)] - \stackrel{(2.133)}{=} \int d^3x' \int d^3x'' \delta(x'-x'') \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta x'' + V_1(x'') \right\} [\hat{\psi}^+(x,t), \hat{\psi}^+(x',t) \hat{\psi}(x'',t)] - \quad (2.135)$$

Die dabei auftretenden Kommutatoren werden mit Hilfe der Reduktionsregel (2.109) ausgewertet:

$$[\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}^+(x',t) \hat{\psi}(x'',t)] \stackrel{(2.109)}{=} [\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}^+(x',t)] \hat{\psi}(x'',t) + \hat{\psi}^+(x',t) [\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}(x'',t)] - \stackrel{(2.128), (2.130)}{=} [\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}^+(x',t) \hat{\psi}(x'',t)]_- = \delta(x-x') \hat{\psi}(x'',t) \quad (2.136)$$

$$[\hat{\psi}^+(x,t), \hat{\psi}^+(x',t) \hat{\psi}(x'',t)] \stackrel{(2.109)}{=} [\hat{\psi}^+(x,t), \hat{\psi}^+(x',t)]_- \hat{\psi}(x'',t) + \hat{\psi}^+(x',t) [\hat{\psi}^+(x,t), \hat{\psi}(x'',t)] - \stackrel{(2.129), (2.130)}{=} [\hat{\psi}^+(x,t), \hat{\psi}^+(x',t) \hat{\psi}(x'',t)]_- = -\delta(x-x'') \hat{\psi}^+(x',t) \quad (2.137)$$

$$[\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}^+(x',t) \hat{\psi}^+(x'',t) \hat{\psi}(x'',t) \hat{\psi}(x',t)] \stackrel{(2.109)}{=} [\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}^+(x',t) \hat{\psi}^+(x'',t)]_- \hat{\psi}(x'',t) \hat{\psi}(x',t) + \hat{\psi}^+(x',t) \hat{\psi}^+(x'',t) [\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}(x'',t)]_- \hat{\psi}(x',t) \hat{\psi}(x'',t) - \stackrel{(2.109), (2.128)}{=} \{ [\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}^+(x',t)]_- \hat{\psi}^+(x'',t) + \hat{\psi}^+(x'',t) [\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}^+(x',t)]_- \} \hat{\psi}(x',t) \hat{\psi}(x'',t) + \hat{\psi}^+(x',t) [\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}^+(x',t)]_- \hat{\psi}(x',t) \hat{\psi}(x'',t) \stackrel{(2.130)}{=} \{ \delta(x-x') \hat{\psi}^+(x'',t) + \delta(x-x'') \hat{\psi}^+(x',t) \} \hat{\psi}(x',t) \hat{\psi}(x'',t) \quad (2.138)$$

$$\begin{aligned} & [\hat{\psi}^+(\vec{x}, t), \hat{\psi}^+(\vec{x}', t)] \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) \hat{\psi}^+(\vec{x}'''', t) - [\hat{\psi}^+(\vec{x}, t), \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t)] \hat{\psi}^+(\vec{x}'''', t) \\ & + \hat{\psi}^+(\vec{x}, t) \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) [\hat{\psi}^+(\vec{x}', t), \hat{\psi}^+(\vec{x}'''', t)] - [\hat{\psi}^+(\vec{x}, t), \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t)] \hat{\psi}^+(\vec{x}'''', t) \{ [\hat{\psi}^+(\vec{x}, t), \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t)] - \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \\ & + \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) [\hat{\psi}^+(\vec{x}, t), \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t)] - \} = - \hat{\psi}^+(\vec{x}, t) \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) \{ \delta(\vec{x} - \vec{x}'') \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) + \delta(\vec{x} - \vec{x}') \hat{\psi}^+(\vec{x}'''', t) \} \quad (2.139) \end{aligned}$$

Einsetzen von (2.136) und (2.138) in (2.134) führt auf die Zeisenberg'sche Bewegungsgleichung von $\hat{\psi}(\vec{x}, t)$:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}(\vec{x}, t)}{\partial t} &= \int d^3x' \int d^3x'' \delta(\vec{x}' - \vec{x}'') \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \vec{x}'' + V_1(\vec{x}'') \right\} \delta(\vec{x} - \vec{x}'') \hat{\psi}(\vec{x}'', t) + \frac{1}{2} \int d^3x' \int d^3x'' V_2(\vec{x}' - \vec{x}'') \cdot \\ & \cdot \{ \delta(\vec{x} - \vec{x}') \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) \hat{\psi}(\vec{x}'', t) \hat{\psi}(\vec{x}', t) + \delta(\vec{x} - \vec{x}'') \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \hat{\psi}(\vec{x}'', t) \hat{\psi}(\vec{x}', t) \} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_2(\vec{x}, t) \right\} \hat{\psi}(\vec{x}, t) \\ & + \frac{1}{2} \int d^3x' V_2(\vec{x} - \vec{x}'') \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \hat{\psi}(\vec{x}'', t) \hat{\psi}(\vec{x}, t) + \frac{1}{2} \int d^3x' V_2(\vec{x}' - \vec{x}) \hat{\psi}^+(\vec{x}, t) \hat{\psi}(\vec{x}', t) \hat{\psi}(\vec{x}'', t) \\ (2.3), (2.128) \rightarrow i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}(\vec{x}, t)}{\partial t} &= \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_1(\vec{x}) \right\} \hat{\psi}(\vec{x}, t) + \int d^3x' V_2(\vec{x} - \vec{x}') \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \hat{\psi}(\vec{x}, t) \hat{\psi}(\vec{x}'', t) \quad (2.140) \end{aligned}$$

Entsprechend führt das Einsetzen von (2.137) und (2.139) in (2.135) auf die Zeisenberg'sche Bewegungsgleichung von $\hat{\psi}^+(\vec{x}, t)$:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}^+(\vec{x}, t)}{\partial t} = \int d^3x' \int d^3x'' \delta(\vec{x}' - \vec{x}'') \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \vec{x}'' + V_2(\vec{x}'') \right\} (-1) \delta(\vec{x} - \vec{x}'') \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) \quad (2.141)$$

$$+ \frac{1}{2} \int d^3x' \int d^3x'' V_2(\vec{x}' - \vec{x}'') \{ -\delta(\vec{x} - \vec{x}') \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) + \delta(\vec{x} - \vec{x}'') \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \}$$

Verwendet man die Hermitizität des 1-teiligen Hamilton-Operators (2.102), so folgt:

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}^+(\vec{x}, t)}{\partial t} &= \int d^3x' \int d^3x'' \delta(\vec{x}' - \vec{x}'') \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \vec{x}'' + V_2(\vec{x}'') \right\} \delta(\vec{x}' - \vec{x}'') \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) \\ & + \frac{1}{2} \int d^3x' V_2(\vec{x}' - \vec{x}) \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) \hat{\psi}(\vec{x}', t) + \frac{1}{2} \int d^3x' V_2(\vec{x} - \vec{x}'') \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) \hat{\psi}(\vec{x}'', t) \quad (2.142) \end{aligned}$$

(2.3), (2.128) $-i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}^+(\vec{x}, t)}{\partial t} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_1(\vec{x}) \right\} \hat{\psi}^+(\vec{x}, t) + \hat{\psi}^+(\vec{x}, t) \int d^3x' V_2(\vec{x} - \vec{x}') \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \hat{\psi}(\vec{x}'', t)$

die Zeisenberg'schen Bewegungsgleichungen der Feldoperatoren (2.140) und (2.142) sind nichts weiter als Integrodifferentialgleichungen dar. Wegen ihrer komplizierten Struktur kann man nicht großen, exakten Lösungen zu finden und ist deshalb darauf angewiesen, Näherungsverfahren zu entwickeln.

2.7 Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Fermionen:

Wir hatten bisher gelernt, daß sich die symmetrischen Vielteildenaustände der Bosonen sehr erfolgreich mit Hilfe von lokalen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren im Schrödinger-Bild verdrücken lassen. Dies wirft die Frage auf, ob es auch einen entsprechenden Formalismus für die antisymmetrischen Vielteildenaustände der Fermionen gibt. Dazu erinnern wir uns daran, daß die Symmetrie des Vielteildenaustandes der Bosonen eine unmittelbare Konsequenz der Kommutatorrelationen (2.92) der lokalen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren \hat{a}_z^+ und \hat{a}_z^- war. Um zahlenalog zu (2.97) auch für Fermionen einen antisymmetrischen Vielteildenaustand gemäß

$$|\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle^{-1} = \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \cdots \hat{a}_{\vec{x}_n}^+ |0\rangle \quad (2.143)$$

zu konstruieren, muß man fordern, daß die lokalen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren \hat{a}_z^+ und \hat{a}_z^- analog zu den Kommutatorrelationen (2.92) den folgenden Antikommutatorrelationen genügen:

$$[\hat{a}_z, \hat{a}_{z'}]_+ = [\hat{a}_{z_1}^+, \hat{a}_{z_2}^+]_+ = 0, \quad [\hat{a}_z, \hat{a}_{z'}^\pm]_+ = \delta(z - z') \quad (2.144)$$

Wie im bosonischen Fall definieren wir außerdem den Vakuumzustand $|0\rangle$ durch die Bedingung, daß er keine Teileilern enthält:

$$\hat{a}_z |0\rangle = 0 \quad (\Rightarrow \langle 0 | \hat{a}_z^\pm = 0) \quad (2.145)$$

Ist tatsächlich gewährleisten (2.144) und (2.145) für die antisymmetrischen Vielteildenaustände (2.143) die Orthonormalitätsrelationen (2.60). Bei spielsweise erhalten wir für $n=1$ und $n=2$ Teilchen analog zu (2.98) und (2.99):

$$\begin{aligned} -1 \langle \vec{x}_1 | \vec{x}_2 \rangle^{-1} &\stackrel{(2.143)}{=} \langle \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ | \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ | 0 \rangle \stackrel{(2.144)}{=} \langle 0 | -\hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ + \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) | 0 \rangle \\ &\stackrel{(2.58)}{=} -1 \langle \vec{x}_1 | \vec{x}_2 \rangle^{-1} = \delta^{-1}(\vec{x}_1; \vec{x}_2) \stackrel{\cong}{=} (2.60) \end{aligned} \quad (2.146)$$

$$-1 \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 | \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle^{-1} \quad (2.143) \quad \langle \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ 0 | \hat{a}_{\vec{x}_1}^- \hat{a}_{\vec{x}_2}^- 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{\vec{x}_2}^- \hat{a}_{\vec{x}_1}^- \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ | 0 \rangle$$

$$(2.144) \quad \langle 0 | \hat{a}_{\vec{x}_2}^- (-\hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_1}^- + \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)) \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ | 0 \rangle \quad (2.144), (2.145) \quad \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \cdot$$

$$\cdot \langle 0 | (-\hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_2}^- + \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)) | 0 \rangle - \langle 0 | (-\hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_2}^- + \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)) (-\hat{a}_{\vec{x}_2}^+ \hat{a}_{\vec{x}_1}^- + \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)) | 0 \rangle$$

$$(2.145) \quad \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) - \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = \delta^{-1}(\vec{x}_1, \vec{x}_2; \vec{x}_3, \vec{x}_4) \quad (2.147)$$

da zwei lokale Erzeugungsoperatoren $\hat{a}_{\vec{x}}^+$ und $\hat{a}_{\vec{x}}^-$ nach (2.144) antikommutieren, verdrängt insbesondere das Quadrat des lokalen Erzeugungsoperators $\hat{a}_{\vec{x}}^{\pm}$: $(\hat{a}_{\vec{x}}^{\pm})^2 = 0$ (2.148)

Für den antisymmetrischen Vierteilchenzustand (2.143) bedeutet dies, daß er verdrängt, falls zwei Orte \vec{x}_i und \vec{x}_j für $i \neq j$ zusammenfallen:

$$|\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle^{-2} = 0 \quad \text{falls } \vec{x}_i = \vec{x}_j \text{ für } i \neq j \quad (2.149)$$

Damit beinhaltet die Antikommutatoren (2.144) automatisch das Pauli-Prinzip, wonach sich zweiterionen nicht am selben Ort aufhalten dürfen. Die Eigenschaften (2.143) und (2.144) sind ausreichend, um mit dem zweitquantisierten Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3x \hat{a}_{\vec{x}}^+ \left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta + V_1(\vec{x}, t) \right\} \hat{a}_{\vec{x}}^- + \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \hat{a}_{\vec{x}}^+ \hat{a}_{\vec{x}'}^+ V_2(\vec{x} - \vec{x}'; t) \hat{a}_{\vec{x}'}^- \hat{a}_{\vec{x}}^- \quad (2.150)$$

eine zweitquantisierte Schrödinger-Gleichung für einen fermionischen Vierteilchenzustand $|\Psi(t)\rangle$ zu formulieren:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle \quad (2.151)$$

Projiziert man sie auf den antisymmetrischen Basiszustand (2.143), so ergibt sich tatsächlich die n -Teilchen-Schrödinger-Gleichung (2.13), (2.15) für n -Teilchen-Wellenfunktion $\Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; t) = -^2 \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n | \Psi(t) \rangle$ (2.152)

Gehst man vom Schrödinger-Bild in das Heisenberg-Bild über, so genügen die Feldoperatoren

$$\hat{\psi}(\vec{x}, t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{a}_{\vec{x}} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}, \quad \hat{\psi}^+(\vec{x}, t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{a}_{\vec{x}}^+ e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \quad (2.153)$$

den gleichzeitigen Antikommutationssrelationen

$$[\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}(\vec{x}', t)]_+ = [\hat{\psi}^+(\vec{x}, t), \hat{\psi}^+(\vec{x}', t)]_+ = 0, \quad [\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}^+(\vec{x}', t)]_+ = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.154)$$

sowohl der Hamilton-Operator im Heisenberg-Bild

$$\hat{H}_H(t) = \int d^3x \left\{ \hat{\psi}^+(\vec{x}, t) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_1(\vec{x}) \right] \hat{\psi}(\vec{x}, t) + \frac{1}{2} \int d^3x' \int d^3x'' \hat{\psi}^+(\vec{x}, t) \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) V_2(\vec{x} - \vec{x}') \hat{\psi}(\vec{x}'') \hat{\psi}(\vec{x}'') \right\} \quad (2.155)$$

als auch die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen der Feldoperatoren

$$i\hbar \frac{d\hat{\psi}(\vec{x}, t)}{dt} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_1(\vec{x}) \right\} \hat{\psi}(\vec{x}) + \int d^3x' V_2(\vec{x} - \vec{x}') \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \hat{\psi}(\vec{x}, t) \quad (2.156)$$

$$-i\hbar \frac{d\hat{\psi}^+(\vec{x}, t)}{dt} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_1(\vec{x}) \right\} \hat{\psi}^+(\vec{x}) + \hat{\psi}^+(\vec{x}, t) \int d^3x' V_2(\vec{x} - \vec{x}') \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \hat{\psi}(\vec{x}, t) \quad (2.157)$$

besitzen dieselbe Form wie im kōnischen Fall (2.133), (2.140) und (2.142).

2.8 Besetzungszahldarstellung:

Liegen nicht wechselseitwirkende Identische Teilden vor, so lassen sich diese im Rahmen der Besetzungszahldarstellung behandeln. Hierzu gehen wir vom zweitquantisierten Hamilton-Operator im Schrödinger-Bild für nicht wechselseitwirkende identische Teilden aus

$$\hat{H} = \int d^3x \hat{a}_{\vec{x}}^+ h(\vec{x}) \hat{a}_{\vec{x}} \quad (2.158)$$

wobei der erste quantisierte Hamilton-Operator gegeben ist durch

$$h(\vec{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x}) \quad (2.159)$$

Für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperationen $\hat{a}_{\vec{x}}^+$ und $\hat{a}_{\vec{x}}$ sollen entweder die kanonischen Kommutator- oder Antikommutationssrelationen gelten: