Aufgabe 17: Bilanzgleichungen (10 Punkte)

Ein System von Bosonen bzw. Fermionen mit Zwei-Teilchen-Wechselwirkung werde in der zweiten Quantisierung im Schrödinger-Bild durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} \, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \, \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{q}} V^{(\mathrm{int})}(\mathbf{q}) \, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}} \, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \, \hat{a}_{\mathbf{k}} \, \hat{a}_{\mathbf{k}'} \, , \tag{1}$$

beschrieben.

a) Transformieren Sie die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung im Schrödinger-Bild

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_{\mathrm{S}}(t)\rangle = \hat{H} \, |\psi_{\mathrm{S}}(t)\rangle \tag{2}$$

durch die unitäre Transformation

$$|\psi_{\mathrm{S}}(t)\rangle = \exp\left\{ -\frac{i}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} \, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \, \hat{a}_{\mathbf{k}} \, t \right\} |\psi_{\mathrm{I}}(t)\rangle \tag{3}$$

in das Wechselwirkungsbild

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_{\mathrm{I}}(t)\rangle = \hat{H}^{(\mathrm{int})}_{\mathrm{I}}(t) \, |\psi_{\mathrm{I}}(t)\rangle \, . \tag{4}$$

Wie lautet der Wechselwirkungsoperator $\hat{H}^{(\mathrm{int})}_{\mathrm{I}}(t)$ im Wechselwirkungsbild?
Hinweis: Berechnen Sie zunächst

$$\left(\hat{a}_{\mathbf{k}}\right)_{\mathrm{I}}(t) = \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}'} E_{\mathbf{k}'} \, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'} \, \hat{a}_{\mathbf{k}'} \, t \right\} \hat{a}_{\mathbf{k}} \exp\left\{ -\frac{i}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}'} E_{\mathbf{k}'} \, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'} \, \hat{a}_{\mathbf{k}'} \, t \right\} \tag{5}$$

unter Berücksichtigung der Relationen

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}\right]_{-\xi} = \left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}\right]_{-\xi} = 0 \, , \qquad \left[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}\right]_{-\xi} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \, , \tag{6}$$

wobei $\xi = +1$ für Bosonen und $\xi = -1$ für Fermionen gilt. (3 Punkte)

b) Berechnen Sie $|\psi_{\mathrm{I}}(t)\rangle$ durch Lösung von (4) in Störungstheorie erster Ordnung mit der Anfangsbedingung $|\psi_{\mathrm{I}}(0)\rangle = |\psi^{(\mathrm{i})}\rangle$. Wie lautet dann die Amplitude $\langle\psi^{(\mathrm{f})}|\psi_{\mathrm{I}}(t)\rangle$ für einen Übergang von $|\psi^{(\mathrm{i})}\rangle$ nach $|\psi^{(\mathrm{f})}\rangle$ zur Zeit t? (1 Punkt)

c) Durch die Wechselwirkung zwischen Teilchen des Bose- bzw. Fermi-Gases kommt es zu einer zeitlichen Änderung der Anzahl $N(\mathbf{k})$ der Teilchen im Zustand $\mathbf{k}$. Die Prozesse $\mathbf{k}-\mathbf{q}, \mathbf{k}'+\mathbf{q} \to \mathbf{k}, \mathbf{k}'$ erzeugen Teilchen im Zustand $\mathbf{k}$, während die Prozeße $\mathbf{k}, \mathbf{k}' \to \mathbf{k}-\mathbf{q}, \mathbf{k}'+\mathbf{q}$ Teilchen im Zustand $\mathbf{k}$ vernichten. Die Bilanzgleichung für $N(\mathbf{k})$ lautet demnach:

$$\frac{\partial}{\partial t} N(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{q},\mathbf{k}'} w\left(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; \mathbf{k}-\mathbf{q}, \mathbf{k}'+\mathbf{q}\right) - \sum_{\mathbf{q},\mathbf{k}'} w\left(\mathbf{k}'+\mathbf{q}, \mathbf{k}-\mathbf{q}; \mathbf{k}, \mathbf{k}'\right) \, . \tag{7}$$

Berechnen Sie die in (7) auftretenden Übergangsraten w in Störungstheorie erster Ordnung mit Hilfe der Aufgabenteile **a)** und **b)** gemäß

$$w = \lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt} \, |\langle \psi^{(\mathrm{f})} | \psi_{\mathrm{I}}(t) \rangle|^2 \tag{8}$$

unter Verwendung der folgenden Darstellung der Deltafunktion:

$$\delta(\alpha) = \lim_{t\to\infty} \frac{\sin^2 \alpha t}{\pi \alpha^2 t} \,. \tag{9}$$

Hinweis: Die Wirkung der Bose- bzw. Fermi-Operatoren $\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ auf einen Zustand in der Besetzungszahldarstellung lautet:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} \, | \ldots, N(\mathbf{k}), \ldots \rangle \;=\; \sqrt{N(\mathbf{k})} | \ldots, \xi \, \{N(\mathbf{k}) - 1\} \, , \ldots \rangle \, , \tag{10}$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \, | \ldots, N(\mathbf{k}), \ldots \rangle \;=\; \sqrt{1 + \xi N(\mathbf{k})} | \ldots, 1 + \xi N(\mathbf{k}), \ldots \rangle \, , \tag{11}$$

wobei wieder $\xi = +1$ für Bosonen und $\xi = -1$ für Fermionen gilt. (4 Punkte)

d) Zeigen Sie, daß eine stationäre Lösung von (7) die Form

$$N(\mathbf{k}) = \frac{1}{C \, e^{\beta E_{\mathbf{k}}} - \xi} \tag{12}$$

hat. Wie können Sie (12) physikalisch interpretieren? (2 Punkte)