Universität Potsdam **Priv.-Doz. Dr. Axel Pelster**
Quantenmechanik II **Prof. Dr. Jens Eisert**
Sommersemester 2011 **Blatt 10**

Aufgabe 28: Quantisierung des Maxwell-Feldes **(24 Punkte)**

Die Operatoren des transversalen Vektorpotentials $\hat{A}_{\perp i}(\mathbf{x},t)$ und des dazu kanonisch konjugierten Impulsfeldes $\hat{\pi}_i(\mathbf{x},t) = \epsilon_0 \frac{\partial \hat{A}_{\perp i}(\mathbf{x},t)}{\partial t}$ im Heisenberg-Bild genügen den gleichzeitigen Kommutatorrelationen

$$\left[\hat{\pi}_i(\mathbf{x},t), \hat{\pi}_j(\mathbf{x}',t)\right]_- = 0\,, \qquad \left[\hat{A}_{\perp i}(\mathbf{x},t), \hat{A}_{\perp j}(\mathbf{x}',t)\right]_- = 0\,, \qquad \left[\hat{A}_{\perp i}(\mathbf{x},t), \hat{\pi}_j(\mathbf{x}',t)\right]_- = i\hbar\, \delta^{\perp}_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{1}$$

Hierbei bezeichnet

$$\delta^{\perp}_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \delta_{ij}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + \frac{1}{4\pi}\partial'_j\partial'_i\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{2}$$

die transversale Delta-Funktion.

a) Zeigen Sie, dass die Kommutatorrelationen (1) mit der quantisierten Version der Transversalitätsbedingung

$$\partial_i \hat{A}_{\perp i}(\mathbf{x},t) = 0 \tag{3}$$

verträglich ist. Hierbei haben wir die Einsteinsche Summenkonvention verwendet, wonach über gleiche Indizes zu summieren ist. (2 Punkte)

b) In der Vorlesung wird gezeigt, dass der Feldoperator $\hat{\mathbf{A}}_\perp(\mathbf{x},t)$ die folgende Fourier-Zerlegung besitzt:

$$\hat{\mathbf{A}}_\perp(\mathbf{x},t) = \sum_{\lambda=\pm}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} N_{\mathbf{k}} \left\{ \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},\lambda) e^{i(\mathbf{kx}-\omega_{\mathbf{k}}t)}\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda} + \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},\lambda)^* e^{-i(\mathbf{kx}-\omega_{\mathbf{k}}t)}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}\right\} \tag{4}$$

Hierbei gilt $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$ und die Polarisationsvektoren $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},\lambda)$ besitzen die Eigenschaften

$$\mathbf{k}\,\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},\lambda) = 0\,, \qquad \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},\lambda)\,\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},\lambda')^* = \delta_{\lambda,\lambda'}\,, \qquad \boldsymbol{\epsilon}(-\mathbf{k},\lambda) = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},-\lambda) = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},\lambda)^* \tag{5}$$

Zeigen Sie

$$\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda} = \frac{1}{2N_{\mathbf{k}}}\int d^3x\, \boldsymbol{\epsilon}(-\mathbf{k},\lambda)\, e^{-i(\mathbf{kx}-\omega_{\mathbf{k}}t)} \left\{ \hat{\mathbf{A}}_\perp(\mathbf{x},t) + \frac{i}{\epsilon_0\omega_{\mathbf{k}}}\hat{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{x},t)\right\} \tag{6}$$

und die entsprechende Beziehung für $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}$. (4 Punkte)

c) Berechnen Sie die Kommutatoren

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}\,,\, \hat{a}_{\mathbf{k}',\lambda'}\right]_- = ?\,, \qquad \left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}\,,\, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}',\lambda'}\right]_- = ?\,, \qquad \left[\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}\,,\, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}',\lambda'}\right]_- = ?\,. \tag{7}$$

Wie müssen Sie die Normierungskonstanten $N_{\mathbf{k}}$ festlegen, damit die Operatoren $\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}$ und $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}$ als Vernichtungs- und Erzeugunsoperatoren eines einzelnen Teilchens interpretiert werden können?

(6 Punkte)

d) Gemäß der Vorlesung lautet der Hamilton-Operator des elektromagnetischen Feldes

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int d^3x \left\{ \frac{1}{\epsilon_0}\hat{\pi}_i(\mathbf{x},t)\hat{\pi}_i(\mathbf{x},t) + \frac{1}{\mu_0}\partial_i \hat{A}_{\perp j}(\mathbf{x},t)\partial_i \hat{A}_{\perp j}(\mathbf{x},t) \right\} \tag{8}$$

Zeigen Sie, daß der normalgeordnete Hamilton-Operator

$$:\hat{H}: = \hat{H} - \langle 0|\hat{H}|0\rangle \tag{9}$$

die folgende Darstellung besitzt:

$$:\hat{H}: = \sum_{\lambda=\pm 1} \int d^3k\, \hbar\omega_{\mathbf{k}}\, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}\,. \tag{10}$$

(4 Punkte)

h) Der Impuls-Operator des elektromagnetischen Feldes lautet

$$\hat{\mathbf{p}} = \int d^3x \left[\boldsymbol{\nabla} \times \hat{\mathbf{A}}_\perp(\mathbf{x},t)\right] \times \hat{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{x},t)\,. \tag{11}$$

Zeigen Sie, daß der normalgeordnete Impuls-Operator

$$:\hat{\mathbf{p}}: = \hat{\mathbf{p}} - \langle 0|\hat{\mathbf{p}}|0\rangle \tag{12}$$

die folgende Darstellung besitzt:

$$:\hat{\mathbf{p}}: = \sum_{\lambda=\pm 1} \int d^3k\, \hbar\mathbf{k}\, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}\,. \tag{13}$$

(4 Punkte)

i) Der Spin-Operator des elektromagnetischen Feldes lautet

$$\hat{\mathbf{S}} = \int d^3x\, \hat{\mathbf{A}}_\perp(\mathbf{x},t) \times \hat{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{x},t)\,. \tag{14}$$

Zeigen Sie, daß der normalgeordnete Spin-Operator

$$:\hat{\mathbf{S}}: = \hat{\mathbf{S}} - \langle 0|\hat{\mathbf{S}}|0\rangle \tag{15}$$

die folgende Darstellung besitzt:

$$:\hat{\mathbf{S}}: = \sum_{\lambda=\pm 1} \int d^3k\, \lambda\hbar\, \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}\,. \tag{16}$$

Hinweis: Verwenden Sie die folgende Identität für die Polarisationsvektoren

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},\lambda) \times \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},\lambda')^* = -i\lambda\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\delta_{\lambda\lambda'} \tag{17}$$

(4 Punkte)