Universität Potsdam **Priv.-Doz. Dr. Axel Pelster**
Quantenmechanik II **Prof. Dr. Jens Eisert**
Sommersemester 2011 **Blatt 11**

Aufgabe 29: Klein-Gordon-Gleichung mit elektromagnetischem Feld (7 Punkte)

In einer nichtrelativistischen Theorie beschreibt man das elektromagnetische Feld durch das skalare Potential $\Phi(\vec{x},t)$ und das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{x},t)$. Koppelt man ein nichtrelativistisches quantenmechanisches Teilchen minimal an ein elektromagnetisches Feld, dann werden die üblichen Jordan-Regeln im cgs-System modifiziert durch

$$E \Longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi(\vec{x},t), \qquad \vec{p} \Longrightarrow \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x},t). \tag{1}$$

In einer relativistischen Theorie wird das elektromagnetische Feld durch einen Potentialvierervektor beschrieben, dessen kontravarianten Komponenten $A^\mu(x^\mu)$ sich aus dem skalaren Potential $\Phi(\vec{x},t)$ und dem Vektorpotential $\vec{A}(\vec{x},t)$ zusammensetzen:

$$(A^\mu(x^\mu)) = \begin{pmatrix} \Phi(\vec{x},t) \\ \vec{A}(\vec{x},t) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Die minimale Ankopplung (1) eines relativistischen quantenmechanischen Teilchens an ein elektromagnetisches Feld lautet dann in kontravarianter Notation:

$$p^\mu \Longrightarrow i\hbar\partial^\mu - \frac{e}{c}A^\mu(x^\mu). \tag{3}$$

a) Gehen Sie von der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $p^\mu p_\mu - (mc)^2 = 0$ aus und wenden Sie die modifizierte Jordan-Regel (3) an. Sie erhalten die Klein-Gordon-Gleichung mit elektromagnetischem Feld für die Wellenfunktion $\Psi(x^\mu)$. Wie läßt sie sich kompakt formulieren, wenn Sie die eichkovariante Ableitung

$$D^\mu = \partial^\mu + \frac{ie}{\hbar c}A^\mu(x^\mu) \tag{4}$$

als Abkürzung einführen? (1 Punkt)

b) Die Elektrodynamik ist eine eichinvariante Theorie, da sich die Maxwell-Gleichungen für die elektrischen und magnetischen Felder unter der lokalen Eichtransformation des Potentialvierervektors

$$A'^\mu(x^\mu) = A^\mu(x^\mu) + \partial^\mu\chi(x^\mu) \tag{5}$$

mit einer beliebigen Eichfunktion $\chi(x^\mu)$ nicht verändern. Da die Wellenfunktion $\Psi(x^\mu)$ nur bis auf einen Phasenfaktor eindeutig bestimmt ist, können Sie die lokale Eichtransformation (5) ergänzen durch

$$\Psi'(x^\mu) = \Psi(x^\mu)\cdot\exp\left\{-\frac{ie}{\hbar c}\chi(x^\mu)\right\}. \tag{6}$$

Wie transformiert sich dann die eichkovariante Ableitung D^μ? Weisen Sie nach, daß die Klein-Gordon-Gleichung mit elektromagnetischem Feld invariant unter den lokalen Eichtransformationen (5) und (6) ist. (2 Punkte)

c) Leiten Sie für die Klein-Gordon-Gleichung mit elektromagnetischem Feld die Kontinuitätsgleichung

$$\partial^\mu j_\mu(x^\mu) = 0 \tag{7}$$

ab. Bestimmen Sie die kovarianten Komponenten $j_\mu(x^\mu)$ des Stromdichtevierervektors. (2 Punkte)

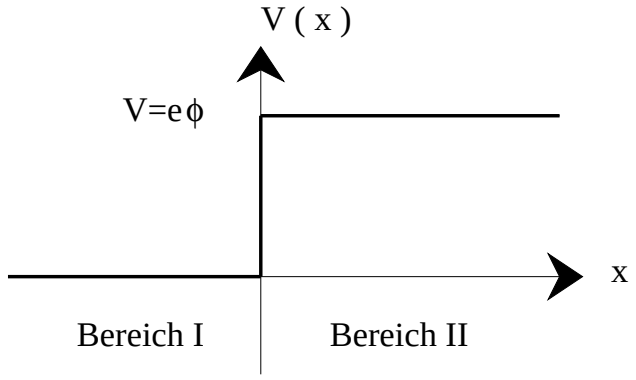
d) Zerlegen Sie den Potentialvierervektor und den Ortsvierervektor in seinen zeit- und seinen raumartigen Anteil. Zeigen Sie, daß dann die Klein-Gordon-Gleichung mit elektromagnetischem Feld die folgende Form annimmt:

$$\left\{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + \frac{2ie}{\hbar c}\left[\frac{\Phi(\vec{x},t)}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \vec{A}(\vec{x},t)\vec{\nabla}\right] + \frac{ie}{\hbar c}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi(\vec{x},t)}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{A}(\vec{x},t)\right]\right.$$
$$\left. -\frac{e^2}{\hbar^2 c^2}\left[\Phi(\vec{x},t)^2 - \vec{A}(\vec{x},t)^2\right] + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right\}\Psi(\vec{x},t) = 0. \tag{8}$$

(2 Punkte)

Aufgabe 30: Kleinsches Paradoxon **(13 Punkte)**

Ein relativistisches Teilchen der Masse m und der Ladung e trifft von $x = -\infty$ kommend an der Stelle $x = 0$ auf eine Potentialschwelle $V(x,t) = V = e\Phi =$ konstant:



a) Spezialisieren Sie die Klein-Gordon-Gleichung (8) auf dieses eindimensionale Problem. Spalten Sie hierzu die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ für die beiden Bereich $x < 0$ und $x > 0$ auf:

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} \Psi_{\mathrm{I}}(x,t) & ; x < 0, \\ \Psi_{\mathrm{II}}(x,t) & ; x > 0. \end{cases} \tag{9}$$

Wie lauten die Bewegungsgleichungen für $\Psi_{\mathrm{I}}(x,t)$ und $\Psi_{\mathrm{II}}(x,t)$? (1 Punkt)

b) In beiden Bewegungsgleichungen ist es möglich, den räumlichen Anteil der Wellenfunktion vom zeitlichen Anteil zu separieren:

$$\Psi_{\mathrm{I}}(x,t) = f_{\mathrm{I}}(t)\varphi_{\mathrm{I}}(x) \quad ; x < 0, \tag{10}$$

$$\Psi_{\mathrm{II}}(x,t) = f_{\mathrm{II}}(t)\varphi_{\mathrm{II}}(x) \quad ; x > 0. \tag{11}$$

Durch diesen Separationsansatz zerfallen die beiden partiellen Differentialgleichungen für $\Psi_{\mathrm{I}}(x,t)$ und $\Psi_{\mathrm{II}}(x,t)$ in gewöhnliche Differentialgleichungen für die Funktionen $f_I(t), f_{\mathrm{II}}(t), \varphi_{\mathrm{I}}(x)$ und $\varphi_{\mathrm{II}}(x)$. (1 Punkt)

c) Aus den allgemeinen Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung muß man die physikalische Lösung durch die Forderung nach Anschlußbedingungen herausfiltern. Wie lauten diese Anschlußbedingungen, wenn die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ und ihre ersten partiellen Ableitungen nach x und t an der Stelle $x = 0$ stetig sein sollen? Bestimmen Sie hieraus die Funktionen $f_{\mathrm{I}}(t)$ und $f_{\mathrm{II}}(t)$. Welches Zwischenergebnis erhalten Sie für die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$?

(2 Punkte)

d) Bestimmen Sie die Funktionen $\varphi_I(x)$ und $\varphi_{\mathrm{II}}(x)$, indem Sie die gewöhnlichen Differentialgleichungen lösen und die Anschlußbedingungen einarbeiten. Beachten Sie ferner die Randbedingung der Aufgabe, daß im Bereich $x > 0$ keine nach links laufende Welle auftreten soll. Diskutieren Sie Ihre Lösungen für die drei Fälle

$$\text{i) } 0 \leq V \leq E - mc^2, \quad \text{ii) } E - mc^2 \leq V \leq E + mc^2, \quad \text{iii) } E + mc^2 \leq V. \tag{12}$$

Behandeln Sie dasselbe Problem im Rahmen der nichtrelativistischen Quantenmechanik. Vergleichen Sie Ihre nichtrelativistischen Ergebnisse mit den relativistischen. (4 Punkte)

e) Mit Hilfe der $\mu = 0$-Komponente des kovarianten Stromdichtevierervektors $j_\mu(x,t)$ aus Aufgabe **29 c)** erhalten Sie gemäß

$$\rho(x,t) = \frac{1}{c} j_0(x,t) \tag{13}$$

die Ladungsdichte $\rho(x,t)$. Berechnen Sie diese Ladungsdichte $\rho(x,t)$ für beide Bereiche $x < 0$ und $x > 0$ und diskutieren Sie die drei Fälle i) bis iii).

(2 Punkte)

f) Berechnen Sie getrennt für die drei Fälle i) bis iii) in den beiden Bereichen $x < 0$ und $x > 0$ die Stromdichte $j(x,t)$, die mit dem Negativen der $\mu = 1$-Komponente des kovarianten Stromdichtevierervektors $j_\mu(x,t)$ aus Aufgabe **29 c)** identisch ist. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie den Transmissionskoeffizienten T und den Reflexionskoeffizienten R einführen. Was ergibt sich im Falle iii), wenn Sie fordern, daß die Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{1}{\hbar}\frac{dE}{dk} \tag{14}$$

im Bereich $x > 0$ positiv sein soll? Ist dieses Ergebnis mit einer 1-Teilchen-Interpretation verträglich? (2 Punkte)

g) Lösen Sie das Kleinsche Paradoxon auf, indem Sie die Heisenbergsche Unschärferelation der Quantenmechanik mit der Einsteinschen Energie-Impuls-Beziehung der Speziellen Relativitätstheorie kombinieren. (1 Punkt)