Universität Potsdam **Priv.-Doz. Dr. Axel Pelster**
Quantenmechanik II **Prof. Dr. Jens Eisert**
Sommersemester 2011 **Blatt 12**

Aufgabe 31: Lorentz-Gruppe I **(8 Punkte)**

Eine Koordinatentransformation $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ ist genau dann eine Lorentz-Transformation, wenn die Minkowski-Metrik g invariant ist:

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^\sigma{}_\mu \Lambda^\rho{}_\nu g_{\sigma\rho} \,. \tag{1}$$

a) Untersuchen Sie die Lorentz-Transformationen in der Umgebung des Einselementes. Machen Sie hierzu den Ansatz $\Lambda^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu + w^\mu{}_\nu$ und zeigen Sie, dass er (1) für kleine Abweichungen $w^\mu{}_\nu$ löst, wenn $w^\mu{}_\nu$ einer Zusatzbedingung genügt. Wie lautet diese ? (1 Punkt)

b) Führen Sie die Zerlegung $w^\mu{}_\nu = -\frac{i}{2}(L^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu w_{\alpha\beta}$ in die Entwicklungskoeffizienten $w_{\alpha\beta}$ und die Basis-Generatoren $(L^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu$ durch. Zeigen Sie, dass die Basisgeneratoren $L^{\alpha\beta}$ der Lorentz-Gruppe im Minkowski-Raum durch folgende Darstellungsmatrizen geben sind:

$$\left(L^{\alpha\beta}\right)^\mu{}_\nu = i\left(g^{\alpha\mu}\, g^\beta{}_\nu - g^{\beta\mu}\, g^\alpha{}_\nu\right) \tag{2}$$

gegeben. (2 Punkte)

c) Beweisen Sie die Symmetrieeigenschaften

$$\left(L^{\alpha\beta}\right)^\mu{}_\nu + \left(L^{\alpha\beta}\right)_\nu{}^\mu = 0\,, \tag{3}$$

$$\left(L^{\alpha\beta}\right)^\mu{}_\nu + \left(L^{\beta\alpha}\right)^\mu{}_\nu = 0\,, \tag{4}$$

und berechnen Sie den Kommutator der Basisgeneratoren:

$$\left[L^{\alpha\beta}\,,\, L^{\gamma\delta}\right]_- = i\left(g^{\alpha\delta}\, L^{\beta\gamma} + g^{\beta\gamma}\, L^{\alpha\delta} - g^{\alpha\gamma}\, L^{\beta\delta} - g^{\beta\delta}\, L^{\alpha\gamma}\right) . \tag{5}$$

(3 Punkte)

d) Die Basisgeneratoren $L^{\alpha\beta}$ lassen sich in zwei Klassen einteilen:

$$M_k = L^{0k}\,, \tag{6}$$

$$L_k = \frac{1}{2}\,\epsilon_{klm}\, L^{lm}\,, \tag{7}$$

wobei die lateinischen Indizes die Werte 1,2,3 annehmen und die obigen griechischen Indizes die Werte 0,1,2,3 durchlaufen. Berechnen Sie durch Spezialisierung von (5) die Kommutatoren

$$[M_k\,,\, M_l]_- = ?\,, \tag{8}$$

$$[L_k\,,\, L_l]_- = ?\,, \tag{9}$$

$$[L_k\,,\, M_l]_- = ?\,. \tag{10}$$

(2 Punkte)

Aufgabe 32: Lorentz-Gruppe II **(12 Punkte)**

a) Bestimmen Sie die Lorentz-Transformation $R(\vec{\varphi})$, die zwischen zwei gegeneinander verdrehten Inertialsystemen S und S' vermittelt. Wenden Sie hierzu das Lie-Theorem an und werten Sie die Matrizenexponentialfunktion

$$R(\vec{\varphi}) \;=\; \exp\Big(-i\,\vec{L}\,\vec{\varphi}\Big) \tag{11}$$

explizit aus. Beachten Sie dabei, daß die Matrizenexponentialfunktion durch ihre Taylor-Reihe definiert ist.

(3 Punkte)

b) Beweisen Sie die beiden folgenden Eigenschaften von $R(\vec{\varphi})$:

$$\mathrm{Sp}\;R(\vec{\varphi}) \;=\; 2 + 2\cos|\vec{\varphi}|\,, \tag{12}$$

$$R(\vec{\varphi})\begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\varphi} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\varphi} \end{pmatrix}\,. \tag{13}$$

(1 Punkt)

c) Bestimmen Sie die Boost-Transformation $B(\vec{\xi})$, die zwischen zwei gleichförmig gegeneinander bewegten Inertialsystemen S und S' vermittelt. Wenden Sie hierzu das Lie-Theorem an und werten Sie Matrizenexponentialfunktion

$$B(\vec{\xi}) \;=\; \exp\Big(-i\,\vec{M}\,\vec{\xi}\Big) \tag{14}$$

explizit aus. (3 Punkte)

d) Bestimmen Sie dann die Beziehung

$$\vec{\xi} \;=\; \vec{\xi}(\vec{v}) \tag{15}$$

zwischen der Rapidität $\vec{\xi}$ und der Geschwindigkeit $\vec{v}$, mit der sich das eine Koordinatensystem S' bezüglich dem anderen Koordinatensystem S bewegt. Diese Beziehung erhalten Sie aus der Forderung, dass der Koordinatenursprung von S' bezüglich S beziehungsweise bezüglich S' die Koordinaten

$$(x^\mu) \;=\; \begin{pmatrix} c\,t \\ \vec{v}\,t \end{pmatrix}\,, \qquad (x'^\mu) \;=\; \begin{pmatrix} c\,t' \\ \vec{0} \end{pmatrix} \tag{16}$$

besitzt und diese gemäß

$$x'^\mu \;=\; \Big(B(\vec{\xi})\Big)^\mu{}_\nu\; x^\nu \tag{17}$$

durch die Boost-Transformation (14) ineinander überführt werden. Wie lautet der resultierende Zusammenhang zwischen t und t'? Geben Sie mit Hilfe von (14) und (15) die Boost-Transformation B in Abhängigkeit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ an:

$$B(\vec{v}) \;=\; B\Big(\vec{\xi}(\vec{v})\Big)\,. \tag{18}$$

(3 Punkte)

e) Die Boost-Transformationen (18) bilden für $\vec{v} = v\vec{e}$ mit einem beliebigen Einheitsvektor $\vec{e}$ eine Untergruppe der eigentlichen Lorentz-Gruppe. Bestimmen Sie aus der Abgeschlossenheitsforderung

$$B\,(\vec{v}) \;=\; B\,(\vec{v}_2)\;B\,(\vec{v}_1) \tag{19}$$

das Additionstheorem für die Geschwindigkeiten

$$\vec{v} \;=\; \vec{v}\,(\vec{v}_1\,,\,\vec{v}_2)\;. \tag{20}$$

Ist das Ergebnis symmetrisch in den Geschwindigkeiten $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$? Welches Resultat erhalten Sie im Falle $v_1 \ll c, v_2 \ll c$ beziehungsweise $v_2 = c$?

(2 Punkte)

Aufgabe 33: Lorentz-Gruppe III **(4 Punkte)**

Die infinitesimale Lorentz-Transformation eines Vierervektors $x = (x^\mu)$ ist gegeben durch

$$x'^\mu \;=\; \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu\,, \tag{21}$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu \;=\; g^\mu{}_\nu \;+\; \omega^\mu{}_\nu\,, \tag{22}$$

$$\omega^\mu{}_\nu \;=\; -\frac{i}{2}\,\left(L^{\alpha\beta}\right)^\mu{}_\nu\;\omega_{\alpha\beta}\,. \tag{23}$$

a) Betrachten Sie ein Skalarfeld $\psi(x)$, das gemäß

$$\psi'(x) \;=\; \psi\left(\Lambda^{-1}\,x\right) \tag{24}$$

unter beliebigen Lorentz-Transformationen invariant ist. Spezialisieren Sie (24) mit Hilfe von (21)–(23) auf infinitesimale Lorentz-Transformationen. Zeigen Sie, daß sich dabei

$$\psi'(x) \;=\; \left\{1 \;-\; \frac{i}{2}\,\omega_{\alpha\beta}\,\hat{L}^{\alpha\beta}\right\}\,\psi(x) \tag{25}$$

ergibt, wobei die Differentialoperatoren

$$\hat{L}^{\alpha\beta} \;=\; \frac{1}{\hbar}\,\left\{x^\alpha\,\hat{p}^\beta \;-\; x^\beta\,\hat{p}^\alpha\right\} \tag{26}$$

die Impulsoperatoren

$$\hat{p}^\alpha \;=\; i\hbar\,\partial^\alpha \tag{27}$$

beinhalten. (1 Punkt)

b) Berechnen Sie die Kommutatoren der Differentialoperatoren (26) mit Orts- und Impulsoperator:

$$\left[\hat{L}^{\alpha\beta}\,,\,x^\gamma\right]_- \;=\; ?\,, \tag{28}$$

$$\left[\hat{L}^{\alpha\beta}\,,\,\hat{p}^\gamma\right]_- \;=\; ?\,. \tag{29}$$

Zeigen Sie unter Verwendung von (28) und (29), daß die Differentialoperatoren $\hat{L}^{\alpha\beta}$ den Kommutator

$$\left[\hat{L}^{\alpha\beta}\,,\,\hat{L}^{\gamma\delta}\right]_{-} = i\,\left(g^{\alpha\delta}\,\hat{L}^{\beta\gamma} + g^{\beta\gamma}\,\hat{L}^{\alpha\delta} - g^{\alpha\gamma}\,\hat{L}^{\beta\delta} - g^{\beta\delta}\,\hat{L}^{\alpha\gamma}\right) \tag{30}$$

besitzen. Welche Schlußfolgerung können Sie aus dem Vergleich von (5) und (30) ziehen?

(3 Punkte)