Universität Potsdam **Priv.-Doz. Dr. Axel Pelster**
Quantenmechanik II **Prof. Dr. Jens Eisert**
Sommersemester 2011 **Blatt 13**

Aufgabe 34: Dirac-Elektron im Magnetfeld **(14 Punkte)**

In minimaler Kopplung lautet die Dirac-Gleichung

$$\left(i\gamma^\mu D_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\Psi = 0\,, \tag{1}$$

wobei $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu/\hbar$ die kovariante Ableitung und $(A_\mu) = (\Phi/c, \mathbf{A})$ das Vierervektorpotential des elektromagnetischen Feldes bezeichnen.

a) Zeigen Sie, dass sich aus (1) die Klein-Gordon-Gleichung herleiten läßt

$$\left(D_\mu D^\mu + \frac{e}{2\hbar}\,\sigma^{\mu\nu}\,F_{\mu\nu} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\Psi = 0\,, \tag{2}$$

wobei $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ die Komponenten des elektromagnetischen Feldstärketensors darstellen und die Matrizen $\sigma^{\mu\nu}$ gegeben sind durch

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\,\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]\,. \tag{3}$$

(4 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass sich mit der Zeitabhängigkeit $\Psi(\mathbf{x}, t) = e^{-iEt/\hbar}\psi(\mathbf{x})$ für den oberen Zweierspinor ϕ aus (2) die folgende Gleichung mit $\hbar = c = 1$ herleiten läßt

$$\left(E^2 - m^2\right)\psi = \hat{K}\phi\,, \tag{4}$$

wobei

$$\hat{K} = -\Delta + e\mathbf{B}\,(\mathbf{l} + \boldsymbol{\sigma}) + e^2\mathbf{A}^2 \tag{5}$$

eine Art Hamilton-Operator, $\mathbf{l} = \mathbf{x} \times \hbar\boldsymbol{\nabla}/i$ den Bahndrehimpuls und $\boldsymbol{\sigma}$ den Pauli-Spin bezeichnen.

(4 Punkte)

c) Es handelt bei (4) um ein Eigenwertproblem, das Sie nun für den Fall eines konstanten Magnetfeldes $\mathbf{B}_0$ lösen sollen. **Hinweis:** Wählen Sie das Vektorpotential $\mathbf{A} = \mathbf{B}_0 \times \mathbf{x}/2$, legen Sie das Magnetfeld $\mathbf{B}_0$ in z-Richtung, und überzeugen Sie sich zunächst davon, dass (4) die Form

$$\left(E^2 - m^2\right)\phi = -\Delta\phi + \frac{m^2\Omega^2}{4}\left(x^2 + y^2\right)\phi + m\Omega\,(l_z + \sigma_z)\,\phi \tag{6}$$

annimmt. Welche Bedeutung hat die nichtrelativistische Zyklotoron-Frequenz $\Omega = eB_0/m$? Zur Lösung von (6) dürfen Sie annehmen, dass ϕ keine Funktion von z ist und Eigenzustand von

σ_z zum Eigenwert $+1$ oder -1 ist. Beachten Sie, dass die ersten beiden Terme in (6) wie zwei ungekoppelte harmonische Oszillatoren mit Vernichter bzw. Erzeuger $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ und $\hat{b}, \hat{b}^\dagger$ aussehen und dass man den Drehimpulsoperator schreiben kann als $l_z = -i\left(\hat{a}^\dagger\hat{b} - \hat{b}^\dagger\hat{a}\right)$. (6 Punkte)

Aufgabe 35: Kleinsches Paradoxon **(13 Punkte)**

a) Betrachten Sie eine stationäre Lösung $\Psi(\mathbf{x}, t) = e^{-iEt/\hbar}\,\psi(\mathbf{x})$ der Dirac-Gleichung (1), bei der der Viererspinor $\psi(\mathbf{x})$ in zwei Zweierspinoren $\phi(\mathbf{x})$ und $\chi(\mathbf{x})$ zerlegt wird. Leiten Sie aus (1) zwei gekoppelte Gleichungen für die Zweierspinoren $\phi(\mathbf{x})$ und $\chi(\mathbf{x})$ ab. (3 Punkte)

b) Spezialisieren Sie nun mit $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ und

$$e\Phi(\mathbf{x}) = V(z) = \begin{cases} 0 & ; z < 0 \\ V & ; z > 0 \end{cases} \tag{7}$$

auf eine Potentialstufe. Bestimmen Sie den Viererspinor $\psi(\mathbf{x})$ in den beiden Bereichen $z < 0$ und $z > 0$ für ein Elektron mit $E > mc^2$ und mit Spin $+1/2$. (3 Punkte)

c) Fordern Sie nun, dass der Viererspinor $\psi(\mathbf{x})$ an der Stelle $z = 0$ stetig ist. Zeigen Sie, dass der Viererspinor $\psi(\mathbf{x})$ dann bis auf eine Normierungskonstante eindeutig festgelegt ist. (2 Punkte)

d) Werten Sie nun die Stromdichte $j_z = \psi^\dagger\alpha_z\psi$ für $z < 0$ und $z > 0$ aus und geben Sie dadurch die einfallende Stromdichte j_{in}, die reflektierte Stromdichte j_{refl} und die transmittierte Stromdichte j_{trans} an. Berechnen Sie den Transmissionskoeffizienten $T = j_{\text{trans}}/j_{\text{in}}$ und den Reflexionskoeffizienten $R = j_{\text{refl}}/j_{\text{in}}$. (2 Punkte)

e) Diskutieren sie R und T für die drei Fälle: i) niedrige Barriere $V < E - mc^2$, ii) hohe Barriere $E - mc^2 < V < E + mc^2$, iii) sehr hohe Barriere $E + mc^2 < V$. (3 Punkte)