Aufgabe 13: Das schwach gekoppelte Bose-Gas (20 Punkte)

Ein System von Bosonen mit Zwei-Teilchen-Wechselwirkung werde in der zweiten Quantisierung im Schrödinger-Bild durch folgenden Hamilton-Operator beschrieben:

$$\hat{H} = \int d^3x\, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{x}} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2M}\,\Delta \right\} \hat{a}_{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\int d^3x \int d^3x'\, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{x}}\, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{x}'}\, V^{(\mathrm{int})}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, \hat{a}_{\mathbf{x}'}\, \hat{a}_{\mathbf{x}}\,. \tag{1}$$

Hierbei genügen die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren den Kommutatorrelationen

$$[\hat{a}_{\mathbf{x}}, \hat{a}_{\mathbf{x}'}]_- = \left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{x}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{x}'}\right]_- = 0\,, \qquad \left[\hat{a}_{\mathbf{x}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{x}'}\right]_- = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,. \tag{2}$$

a) Entwickeln Sie die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für ein endliches Volumen V nach ebenen Wellen

$$\hat{a}_{\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}\,\hat{a}_{\mathbf{k}}\,, \quad \hat{a}^\dagger_{\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}\,\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\,. \tag{3}$$

Wie lauten dann die Kommutatorrelationen

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}]_- = ?\,, \quad \left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}\right]_- = ?\,, \quad \left[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}\right]_- = ?\,. \tag{4}$$

Zeigen Sie, daß der Hamilton-Operator (1) dadurch übergeht in

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}\,\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\,\hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\mathbf{k}'}\sum_{\mathbf{q}} V^{(\mathrm{int})}(\mathbf{q})\,\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}\,\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}\,\hat{a}_{\mathbf{k}}\,\hat{a}_{\mathbf{k}'}\,, \tag{5}$$

und geben Sie $E_{\mathbf{k}}$ sowie $V^{(\mathrm{int})}(\mathbf{q})$ an. Welche Eigenschaft besitzt $V^{(\mathrm{int})}(\mathbf{q})$, falls $V^{(\mathrm{int})}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = v^{(\mathrm{int})}(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)$? Interpretieren Sie die durch (5) beschriebene Wechselwirkung. (3 Punkte)

b) Nehmen Sie an, daß die Bosonen kondensiert sind, d.h. daß die Anzahl $N_{\mathbf{0}}$ der Teilchen im Grundzustand $\mathbf{k}=\mathbf{0}$ sehr groß ist. In diesem Fall können Sie die Operatoren $\hat{a}_{\mathbf{0}}$ und $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{0}}$ näherungsweise als c-Zahlen betrachten, wobei $\hat{a}_{\mathbf{0}} \simeq \hat{a}^\dagger_{\mathbf{0}} \simeq \sqrt{N_{\mathbf{0}}}$ gilt. Zeigen Sie, daß sich dann der Hamilton-Operator (5) nähern läßt durch

$$\hat{H} = C + \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} \left\{ H^{(1)}_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\,\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}\,\hat{a}_{-\mathbf{k}}\right) + H^{(2)}_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\,\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}\,\hat{a}_{-\mathbf{k}}\right) \right\}, \tag{6}$$

und geben Sie $H^{(1)}_{\mathbf{k}}, H^{(2)}_{\mathbf{k}}$ sowie C an. (4 Punkte)

c) Bei einem wechselwirkenden Bose-Gas stimmt die Zahl N aller Bosonen nicht mit der Zahl $N_{\mathbf{0}}$ der kondensierten Bosonen überein. Ersetzen Sie daher in (6) die Zahl $N_{\mathbf{0}}$ der kondensierten Bosonen durch die Zahl N aller Bosonen gemäß

$$N = N_{\mathbf{0}} + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} \left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\,\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}\,\hat{a}_{-\mathbf{k}}\right) \tag{7}$$

und berücksichtigen Sie dabei nur die in den Operatoren $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}$ bilinearen Terme. Zeigen Sie, daß sich dann wieder ein Hamilton-Operator der Form

$$\hat{H} = \bar{C} + \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} \left\{ \bar{H}^{(1)}_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\,\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}\,\hat{a}_{-\mathbf{k}}\right) + \bar{H}^{(2)}_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\,\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}\,\hat{a}_{-\mathbf{k}}\right) \right\}. \tag{8}$$

ergibt. (1 Punkt)

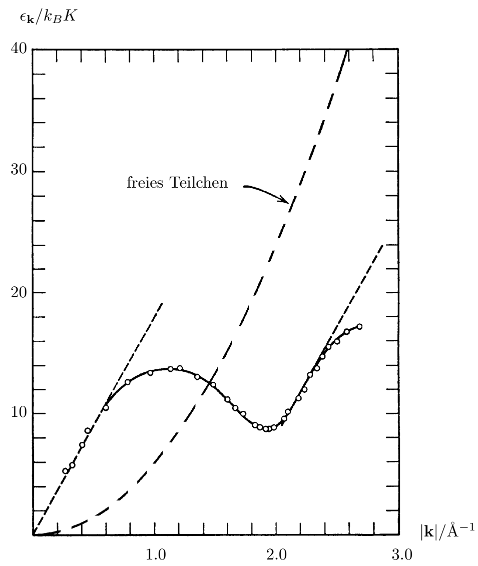

FIG. 1: Spektrum der elementaren Anregungen in superflüssigem Helium bei 1.12 K normalem Dampfdruck, gemessen durch inelastische Streuung mit Neutronen der Wellenlänge $\lambda = 4.04$.

d) Führen Sie nun eine lineare Transformation

$$\hat{b}_{\mathbf{k}} = A_{\mathbf{k}}\,\hat{a}_{\mathbf{k}} + B_{\mathbf{k}}\,\hat{a}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}\,, \quad \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}} = A^{*}_{\mathbf{k}}\,\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}} + B^{*}_{\mathbf{k}}\,\hat{a}_{-\mathbf{k}}\,, \tag{9}$$

durch, bei der die $A_{\mathbf{k}}$ und $B_{\mathbf{k}}$ den Einschränkungen

$$A_{\mathbf{k}} = A^{*}_{\mathbf{k}}\,, \quad A_{\mathbf{k}} = A_{-\mathbf{k}}\,, \quad B_{\mathbf{k}} = B^{*}_{\mathbf{k}}\,, \quad B_{\mathbf{k}} = B_{-\mathbf{k}} \tag{10}$$

genügen. Wenn Sie fordern, daß die Bose-Operatoren $\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}$ mit (4) wieder in Bose-Operatoren $\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}}$ mit

$$\left[\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}_{\mathbf{k}'}\right]_{-} = \left[\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}}, \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}'}\right]_{-} = 0\,, \quad \left[\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}'}\right]_{-} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \tag{11}$$

überführt werden, erhalten Sie eine weitere Einschränkung für $A_{\mathbf{k}}$ und $B_{\mathbf{k}}$. Wie lautet diese und was ergibt sich für die zu (9) inverse Transformation? (4 Punkte)

e) Zeigen Sie, daß sich der Hamilton-Operator (8) durch eine lineare Transformation (9) diagonalisieren läßt:

$$\hat{H} = C' + \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} \epsilon_{\mathbf{k}}\,\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}}\,\hat{b}_{\mathbf{k}}\,. \tag{12}$$

Wie lautet die Dispersionsrelation $\epsilon_{\mathbf{k}}$ der Quasiteilchen? Welche Vereinfachung ergibt sich durch die Wahl $V^{(\mathrm{int})}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = g\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$? Zeigen Sie in diesem Fall, daß die Dispersionsrelation $\epsilon_{\mathbf{k}}$ für $\mathbf{k} \to \mathbf{0}$ einem Phonon mit einer Ausbreitungsgeschwindigkeit c entspricht, und geben Sie c an. Wie verhält sich die Dispersionsrelation $\epsilon_{\mathbf{k}}$ für große $\mathbf{k}$? (4 Punkte)

f) Das schwach gekoppelte Bose-Gas kann als Modell für die Superfluidität verwendet werden. Vergleichen Sie die Dispersionsrelation $\epsilon_{\mathbf{k}}$ aus Aufgabenteil **e)** mit dem experimentellen Spektrum der elementaren Anregungen in superflüssigem Helium in Abbildung 1. Welche Gemeinsamkeiten und welche Unterschiede treten auf? Lesen Sie aus Abbildung 1 den Wert für die Schallgeschwindigkeit c ab. (2 Punkte)

g) Betrachten Sie einen Körper der Masse m und der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$, der sich in superflüssigem Helium bewegt. Stellen Sie Energie- und Impulserhaltungssatz für den Fall auf, daß der Körper eine elementare Anregung erzeugt. Leiten Sie daraus ab, daß der Körper eine minimale Geschwindigkeit haben muß, um kinetische Energie an das superflüssige Helium abgeben zu können. Diskutieren Sie im Grenzübergang $m \to \infty$ den Zusammenhang mit dem in Abbildung 1 gezeigten experimentellen Spektrum der elementaren Anregungen. Wann liegt demnach Superfluidität vor? (2 Punkte)