Universität Bielefeld **Dozent: Priv.-Doz. Dr. Axel Pelster**
Theoretische Festkörperphysik **Tutor: Dr. Mykhaylo Evstigneev**
Sommersemester 2011 **Blatt 9**

Aufgabe 16: Ideales Fermi-Gas (20 Punkte)

Beim idealen Fermi-Gas bestimmt sich die Temperaturabhängigkeit des chemischen Potentials μ bei vorgegebener Teilchenzahl N aus

$$N = gV \left(\frac{Mk_BT}{2\pi\hbar^2} \right)^{D/2} \zeta^+_{D/2} \left(e^{\frac{\mu}{k_BT}} \right) , \tag{1}$$

und die Innere Energie berechnet sich gemäß

$$U = \frac{D}{2} k_B T N \, \frac{\zeta^+_{D/2+1} \left(e^{\frac{\mu}{k_BT}} \right)}{\zeta^+_{D/2} \left(e^{\frac{\mu}{k_BT}} \right)} . \tag{2}$$

Hierbei treten die Integrale

$$\zeta^+_\nu \left(e^{\frac{\mu}{k_BT}} \right) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int\limits_0^\infty dx \, \frac{x^{\nu-1}}{e^{x-\frac{\mu}{k_BT}} + 1} \tag{3}$$

auf, D bezeichnet die Raumdimension und $g = 2s + 1$ den Entartungsgrad.

a) Geben Sie zwei physikalische Systeme an, bei denen ein ideales Gas von Fermionen als Modell verwendet wird. (1 Punkt)

b) Beweisen Sie die Sommerfeldsche Reihenentwicklung

$$\zeta^+_\nu \left(e^{\frac{\mu}{k_BT}} \right) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{\mu}{k_BT} \right)^\nu \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^\infty \prod_{l=0}^{2k-1} (\nu - l) \left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}} \right) \zeta(2k) \left(\frac{k_BT}{\mu} \right)^{2k} \right\} , \tag{4}$$

wobei Sie exponentiell schnell abklingende Terme im Tieftemperaturlimes $T \downarrow 0$ vernachlässigen können. Hierbei bezeichnet

$$\zeta(z) = \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^z} \tag{5}$$

die Riemannsche Zeta-Funktion.
Hinweis: Entwickeln Sie die Differenz

$$\zeta^+_\nu \left(e^{\frac{\mu}{k_BT}} \right) - (-1)^{\nu-1} \zeta^+_\nu \left(e^{-\frac{\mu}{k_BT}} \right) = ? \tag{6}$$

im Tieftemperaturlimes $T \downarrow 0$. (4 Punkte)

c) Berechnen Sie die Funktion

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{m^2 + z^2} \tag{7}$$

unter Verwendung der Poisson-Formel:

$$\sum_{m=-\infty}^\infty f(m) = \sum_{n=-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty dx \, f(x) \, e^{-2\pi i n x} . \tag{8}$$

Zeigen Sie, daß eine Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ auf die Werte der Riemannschen Zeta-Funktion für gerade Zahlen führt:

$$\zeta(2) = ?\,, \quad \zeta(4) = ?\,, \quad \zeta(6) = ?\,. \tag{9}$$

(4 Punkte)

d) Bestimmen Sie die Temperaturabhängigkeit des chemischen Potentials, indem Sie (1) mit dem Ansatz

$$\mu = E_F \left\{ 1 + \mu_2 \left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + \mu_4 \left(\frac{T}{T_F}\right)^4 + \dots \right\} \tag{10}$$

unter Verwendung der Aufgabenteile **b)** und **c)** lösen. Geben Sie (10) für $D = 1, 2, 3$ an. (4 Punkte)

e) Wie groß sind Fermi-Energie E_F und Fermi-Temperatur $T_F = E_F/k_B$ für Elektronen in Kupfer (Dichte N/V $= 8.45\,10^{28}/\mathrm{m}^3$)? Was folgt daraus für die thermodynamischen Eigenschaften von Elektronen in Metallen bei Raumtemperatur? Erläutern Sie, was sich daran bei "Schweren Fermionen"-Systemen ändert. (3 Punkte)

f) Berechnen Sie die Innere Energie (2) im Tieftemperaturlimes $T \downarrow 0$ unter Verwendung der Aufgabenteile **b)** bis **d)**. Zeigen Sie, daß die Wärmekapazität die Form

$$C = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_{V,N} = \left\{ c_1 \frac{T}{T_F} + c_3 \left(\frac{T}{T_F}\right)^3 + \dots \right\} k_B N \tag{11}$$

besitzt und bestimmen Sie c_1, c_3 in Abhängigkeit von der Raumdimension D. (4 Punkte)