Universität Potsdam **Priv.-Doz. Dr. Axel Pelster**
Quantenmechanik II **Prof. Dr. Jens Eisert**
Sommersemester 2011 **Blatt 9**

Aufgabe 25: Streuphasen beim Yukawa-Potential (8 Punkte)

Wir betrachten die Streuung eines Teilchens an einem schwachen Yukawa-Potential

$$V(r) = V_0 \, \frac{a}{r} \, e^{-r/a} \, . \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass die Streuamplitude in erster Bornscher Näherung mit $|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 = 2k^2(1 - \cos\theta)$ wie folgt lautet:

$$f^{(1)}(\theta) = -\frac{2mV_0a^3}{\hbar^2} \, \frac{1}{2(ka)^2(1-\cos\theta)+1} \, . \tag{2}$$

(2 Punkte)

b) Für ein rotationsinvariantes Potential wie (1) kann $f(\theta)$ im Rahmen einer Partialwellenentwicklung über Streuphasen δ_l ausgedrückt werden:

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \, e^{i\delta_l} \, \sin\delta_l \, P_l(\cos\theta) \, . \tag{3}$$

Nehmen Sie an, dass (1) schwach ist, so dass $\delta_l \approx 0$ ist und somit näherungsweise $e^{i\delta_l} \, \sin\delta_l \approx \delta_l$ gilt. Drücken Sie die Streuphasen δ_l des schwachen Yukawa-Potentials (1) mittels (2) und (3) sowie der Orthogonalitätsbeziehung der Legendre-Polynome

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) \, P_m(x) \, dx = \frac{2}{2n+1} \, \delta_{n,m} \tag{4}$$

in den Legendre-Polynomen zweiter Art

$$Q_l(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{P_l(x')}{x - x'} \, dx' \tag{5}$$

aus. (2 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass die Streuphasen für ein attraktiven (repulsives) Potential V positiv (negativ) sind und bestimmen Sie desweiteren δ_l im Limes niedriger Energien, d.h. Sie können $ka \ll 1$ annehmen. Erklären Sie anschaulich, warum die δ_l in diesem Limes schnell mit l abfallen ("s-Wellenstreuung"). **Hinweis:** Die Legendre-Polynome zweiter Art besitzen für $|x| > 1$ die asymptotische Entwicklung

$$Q_l(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(l+2n)!}{(2n)!! \, (2l+2n+1)!!} \, \frac{1}{x^{l+2n+1}} \, . \tag{6}$$

(2 Punkte)

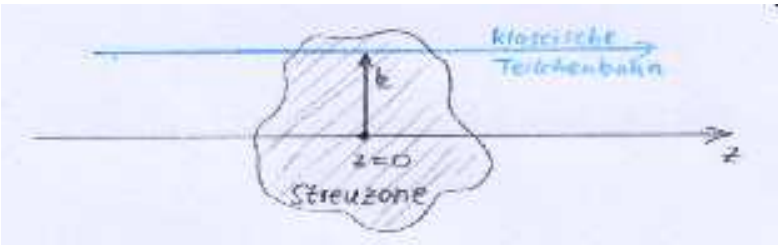
d) Wie kann man ganz allgemein den totalen Wirkungsquerschnitt $\sigma = \int d\Omega |f(\theta)|^2$ über die Streuphasen δ_l aus (3) ausdrücken? Zeigen Sie explizit, dass das optische Theorem $\sigma = 4\pi \mathrm{Im}\, f(\theta = 0)/k$ dasselbe Resultat liefert. Bestimmen Sie mit dem Resultat aus **c)** die über $a_0 = -\lim_{k\to 0} \delta_0/k$ definierte Streulänge a_0 des Yukawa-Potentials. (2 Punkte)

Aufgabe 26: Eikonal-Näherung (11 Punkte)

Die Bornsche Näherung der Streuamplitude setzte voraus, dass das Streupotential $V(\mathbf{x})$ als Störung behandelt werden kann. Bezeichnet a die Reichweite und $|V|$ die Größenordnung des Potentials innerhalb der Reichweite, so muss also $|\psi^{(1)}| \ll |\psi^{(0)}|$ gelten, d.h. es muss $|V| \ll \hbar^2/ma^2$ für $ka \leq 1$ und $|V| \ll \hbar^2 ka/ma^2$ für $ka \geq 1$ gelten. In dieser Aufgabe betrachten wir nun die Streuung im sogenannten semiklassischen Limes der WKB-Näherung, d.h. $V(\mathbf{x})$ soll auf der Längenskala der de Broglie-Wellenlänge nur langsam variieren: $|\nabla V|/(E - V) \ll p/\hbar = \sqrt{2m(E-V)}/\hbar$. In diesem Falle ist die Wellenfunktion von der Form $\psi(\mathbf{x}) = e^{i\Phi(\mathbf{x})}$ mit $\Phi(\mathbf{x}) = \sum_n (\hbar/S_0)^{n-1}\Phi^{(n)}(\mathbf{x})$ und $\hbar/S_0 \ll 1$.

a) Zeigen Sie durch Einsetzen der angegebenen Wellenfunktion in die Eigenwertgleichung des Hamilton-Operators $\hat{H} = \hat{\mathbf{p}}^2/2m + V(\mathbf{x})$, dass die klassische Wirkung $S = S_0\Phi^{(0)}$ der Hamilton-Jakobi-Differentialgleichung $(\nabla S)^2 = p^2 = 2m(E - V)$ genügt. (2 Punkte)

b) Um diese Hamilton-Jakobi-Differentialgleichung zu lösen, nehmen wir im Falle hoher Energie $\hbar^2k^2/2m = E \gg |V|$ an, dass die klassische Trajektorie eine gerade Linie ist mit $\mathbf{x} = \mathbf{b} + z\mathbf{e}_z$. Hierbei ist $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_z$, b bezeichnet den Stoßparameter und $\mathbf{b}$ steht senkrecht auf $\mathbf{e}_z$ gemäß der folgenden Skizze:



Lösen Sie damit die Hamilton-Jakobi-Differentialgleichung und begründen Sie, warum Sie hierzu als Integrationskonstante $\lim_{V\to 0} S/\hbar = kz$ wählen können. Zeigen Sie unter Beachtung von $E \gg V$ weiter, dass die Wellenfunktion die Form der Eikonal-Näherung hat:

$$\psi(\mathbf{x}) \approx \frac{e^{ikz}}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left\{-i\frac{m}{\hbar^2 k}\int_{-\infty}^{z} dz'\, V(\mathbf{b} + z'\mathbf{e}_z)\right\}. \tag{7}$$

(2 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass man mit dieser Wellenfunktion eine Näherung für die Streuamplitude bestimmen kann, die für rotationssymmetrische Potentiale wie folgt lautet:

$$f(\theta) = -ik\int_0^\infty db\, b\, J_0(kb\theta)\left[e^{2i\Delta(b)} - 1\right], \qquad \Delta(b) = -\frac{m}{2\hbar^2 k}\int_{-\infty}^{\infty} dz\, V(\sqrt{b^2 + z^2}). \tag{8}$$

(3 Punkte)

d) Zeigen Sie mit (3), dass die zugehörigen Streuphasen gerade durch $\delta_l = \Delta(b = l/k)$ gegeben sind. Verwenden Sie hierzu, dass im klassischen Limes die Summe über die Drehimpulsquantenzahl l durch ein Integral ersetzt werden kann: $\sum_{l=0}^{\infty} \approx k \int_0^{\infty} db$. **Hinweis:** Für die Bessel-Funktion gilt $J_0(l\theta) \approx P_l(\cos\theta)$ für $l \gg 1$ und $\theta \ll \pi$. (2 Punkte)

e) Wie lauten die Streuphasen δ_l für das Gauß-Potential $V(r) = V_0 e^{-r^2/a^2}$ und das Yukawa-Potential (1) in der Eikonal-Näherung? Vergleichen Sie für den Hochenergie-Limes beim schwachen Yukawa-Potential graphisch mit dem Resultat von Aufgabe **25b)**. (2 Punkte)

Aufgabe 27: Streuung mit Übergang zwischen inneren Zuständen (4 Punkte)

Streuendes Teilchen und Streuzentrum, wie z.B. ein Elektron und ein Atom, sollen nun eine innere Struktur haben. Dann ist die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung für die Wellenfunktionen $\psi_n(\mathbf{x})$ mit den inneren Zuständen n von folgender allgemeiner Form:

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + E_n\right\}\psi_n(\mathbf{x}) + \sum_{n'} V_{n,n'}\psi_{n'}(\mathbf{x}) = E\psi_n(\mathbf{x})\,. \tag{9}$$

a) Verallgemeinern Sie für diesen Fall die Streuamplituden $f_n(\theta,\varphi)$ im Fernfeld:

$$\psi_n(\mathbf{x}) = \delta_{n,m}\, e^{i\mathbf{k}_m\mathbf{x}} + \frac{e^{ik_n r}}{r}\, f_n(\theta,\varphi)\,. \tag{10}$$

Welches Resultat erhalten Sie für $f_n(\theta,\varphi)$? (2 Punkte)

b) Betrachten Sie einen Prozeß, bei dem ein Teilchen von $\mathbf{k}_m$ nach $\mathbf{k}_n$ gestreut wird. Wie lautet in diesem Fall der Zusammenhang zwischen dem differentiellen Wirkungsquerschnitt $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{n,m}(\theta,\varphi)$ und der Streuamplitude $f_n(\theta,\varphi)$? (2 Punkte)