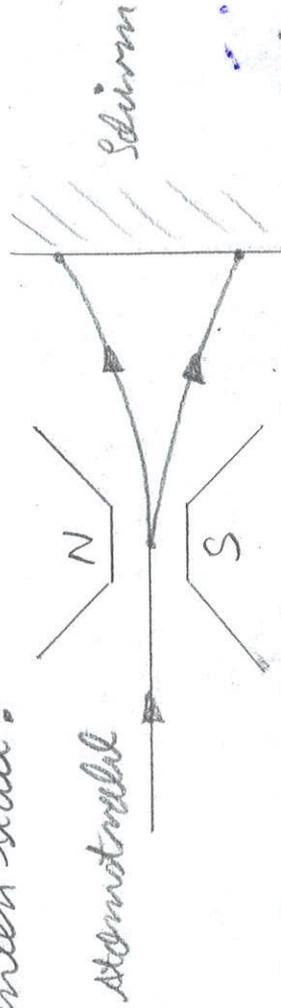


2.5.1. Eigenschaften der Pauli-Matrizen:

Beim Stern-Gerlach-Versuch von 1927 wird ein Strahl von Silber- bzw. Wasserstoffatomen durch ein inhomogenes Magnetfeld gelenkt. Da sich die Atome im Grundzustand befinden, sitzt das Valenzelektron im $5s^1$ - bzw. im $1s^1$ -Zustand. Obwohl die Atome demnach keinen Bahndrehimpuls besitzen, findet eine Aufspaltung des Strahles in zwei Komponenten statt:



Ursache hierfür ist der Spin Drehimpuls $S = \frac{1}{2}$ des Valenzelektrons, der zu einem resultierenden magnetischen Moment des Atoms und damit zu einer Ablenkung im inhomogenen Magnetfeld führt. Zur mathematischen Beschreibung der $2S+1 = 2$ Spinfreiheitsgrade führte Pauli die folgenden komplexen 2×2 -Matrizen ein:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2.608)

Die Pauli-Matrizen besitzen die Antikommutator

$$[\sigma^1, \sigma^1]_+ = 2(\sigma^1)^2 \quad (2.608) \quad 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\sigma^2, \sigma^2]_+ = 2(\sigma^2)^2 \quad (2.608) \quad 2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\sigma^3, \sigma^3]_+ = 2(\sigma^3)^2 \quad (2.608) \quad 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\sigma^1, \sigma^2]_+ = \frac{(2.608)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\sigma^2, \sigma^3]_+ = \frac{(2.608)}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\sigma^3, \sigma^1]_+ = \begin{pmatrix} 2.608 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [\sigma^2, \sigma^0]_+ = \sigma^2 \sigma^0 + \sigma^0 \sigma^2 = 2 \sigma^2 e \cdot I. \quad (2.609)$$

Man beachte (2.609), daß die Pauli-Matrizen eine Clifford-Algebra mit $N=3$ Erzeugenden darstellen. Eine Clifford-Algebra mit N Erzeugenden $\mathcal{J}^1, \dots, \mathcal{J}^N$ ist dabei durch die Antikommutatoren

$$[\mathcal{J}^a, \mathcal{J}^b]_+ = 2 \delta^{ab} e \quad (2.610)$$

definiert. Außerdem besitzen die Pauli-Matrizen die Kommutatoren

$$[\sigma^1, \sigma^2]_- = \begin{pmatrix} 2.608 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = 2i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.608) \quad 2i \sigma^3$$

$$[\sigma^2, \sigma^3]_- = \begin{pmatrix} 2.608 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = 2i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.608) \quad 2i \sigma^1$$

$$[\sigma^3, \sigma^1]_- = \begin{pmatrix} 2.608 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.608) \quad 2i \sigma^2$$

$$\Rightarrow [\sigma^2, \sigma^0]_- = \sigma^2 \sigma^0 - \sigma^0 \sigma^2 = 2i \epsilon_{20m} \sigma^m \quad (2.611)$$

hierbei beachte (2.611), daß die Pauli-Matrizen eine die- \mathcal{J} -Algebra mit $N=3$ Erzeugenden darstellen. Eine die- \mathcal{J} -Algebra mit N Erzeugenden $\mathcal{J}^1, \dots, \mathcal{J}^N$ ist dabei durch die Kommutatoren

$$[\mathcal{J}^a, \mathcal{J}^b]_- = \epsilon_{abc} \mathcal{J}^c \quad (2.612)$$

definiert, wobei ϵ_{abc} die Strukturkonstanten der die- \mathcal{J} -Algebra bezeichnet. Die Addition von (2.609) und (2.611) ergibt die wichtige Fierz-Identität

$$\sigma^a \sigma^b = \delta^{ab} e \cdot I + i \epsilon_{abc} \sigma^c \quad (2.613)$$

mit der sich Produkte von Pauli-Matrizen vereinfachen lassen.

2.5.2. Spinor-Darstellung der Lorentz-Algebra:

Mit Hilfe der Pauli-Matrizen lassen sich zwei verschiedene Darstellungen der Lorentz-Algebra konstruieren. Zunächst bemerken wir, daß die Matrizen

$$L_k = \frac{1}{2} \sigma^k \quad (2.614)$$

den Vertauschungsrelationen (2.44) der Generatoren der Rotationen genügen

$$[L_k, L_l] = \frac{1}{4} [\sigma^k, \sigma^l] = \frac{1}{2} \epsilon_{klm} \sigma^m \stackrel{(2.614)}{=} i \epsilon_{klm} L_m \stackrel{\hat{=}}{=} (2.44) \quad \checkmark$$

Die Generatoren der Boosts kann man dann identifizieren mit

$$M_k = \pm \frac{i}{2} \sigma^k, \quad (2.615)$$

wobei beide Vorzeichen möglich sind. Tatsächlich erhalten wir dann die Vertauschungsrelationen (2.45) und (2.46):

$$1.) [L_k, M_l] = \frac{1}{4} [\sigma^k, \sigma^l] = \frac{1}{2} \epsilon_{klm} \sigma^m \stackrel{(2.614)}{=} \frac{1}{2} \epsilon_{klm} L_m \stackrel{\hat{=}}{=} (2.45) \quad \checkmark$$

$$2.) [M_k, M_l] = \frac{1}{4} [\sigma^k, \sigma^l] = \frac{1}{2} \epsilon_{klm} \sigma^m \stackrel{(2.614)}{=} -i \epsilon_{klm} L_m \stackrel{\hat{=}}{=} (2.46) \quad \checkmark$$

Damit liegen die beiden folgenden Darstellungen der Lorentz-Algebra vor:

$$D^{(1/2, 0)}: \quad (L_k, M_k) = \left(\frac{1}{2} \sigma^k, -\frac{i}{2} \sigma^k \right), \quad (2.616)$$

$$D^{(0, 1/2)}: \quad (L_k, M_k) = \left(\frac{1}{2} \sigma^k, +\frac{i}{2} \sigma^k \right). \quad (2.617)$$

Eine beliebige Darstellung der Lorentz-Algebra wird charakterisiert durch $D^{(s_1, s_2)}$, wobei beide Quantenzahlen s_1, s_2 alle möglichen halben- oder ganzzahligen Werte $0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$ annehmen können. Es stellt sich heraus, daß der Darstellungsraum zur Darstellung $D^{(s_1, s_2)}$ Teilchen beinhaltet, deren Spin s_1 oder s_2 beträgt. Teilchen mit einem einvaluen festen Spin s_1 können deshalbe zur Darstellung $D^{(s_1, 0)}$ oder $D^{(0, s_1)}$ identifiziert werden. Die Zahl $1/2$ für spinlere Teilchen ordnet jedem Generator der Lorentz-Algebra die Zahl $1/2$ zu.

Nach dem Lie-Theorem (2.5.1) erhalten wir durch Auswertung der Matrixelemente der Exponentialfunktion

$$D(\Lambda) = \exp \{ -i [\vec{\varphi} - i \vec{m} \vec{\zeta}] \} \quad (2.618)$$

die zur Darstellung der Symplekt- Algebra entsprechende Darstellung der Lie-Algebra-Gruppe. In den beiden Fällen (2.616) und (2.617) erhalten wir aus (2.618):

$$D^{(1/2, 0)}(\Lambda) = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi} - \frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\zeta} \right\}, \quad (2.619)$$

$$D^{(0, 1/2)}(\Lambda) = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi} + \frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\zeta} \right\}. \quad (2.620)$$

Im folgenden berechnen wir die Matrixelemente der Exponentialfunktionen (2.619) und (2.620) für die Drehungen $\vec{\zeta} = \vec{0}$ und für die Boosts $\vec{\varphi} = \vec{0}$.

2.5.3. Spinor-Darstellung der Rotationen:

Nach (2.619) und (2.620) lautet die Darstellung der Rotationen

$$D(R(\vec{\varphi})) = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi} \right\}, \quad (2.621)$$

wobei aus der Hermitizität der Pauli-Matrizen

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})^\dagger = (\vec{\sigma} \cdot \vec{a}) \quad (2.608) \quad (2.622)$$

folgt, daß die Darstellungsmatrizen der Rotationen unitär sind:

$$D(R(\vec{\varphi}))^\dagger = (D(R(\vec{\varphi})))^{-1}. \quad (2.623)$$

Um die Matrixelemente der Exponentialfunktion (2.621) auszurechnen, verwendet man die Taylor-Reihe

$$D(R(\vec{\varphi})) \stackrel{(2.621)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{-i}{2}\right)^{2n} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi})^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{-i}{2}\right)^{2n+1} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi})^{2n+1}$$

$$\Rightarrow D(R(\vec{\varphi})) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi})^{2n} - i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi})^{2n+1} \quad (2.624)$$

Aus der Reihenregel (2.613) folgt nun

$$(\vec{\varphi} | \vec{\varphi})^2 = \varphi_a \varphi_b \varphi_c \varphi_d \in (2.613) \quad \varphi_a \varphi_b \{ \delta_{ab} I + i \epsilon_{abc} \epsilon^m \} = \vec{\varphi}^2 \cdot I, \quad (2.625)$$

so daß (2.624) übergeht in

$$D(R(\vec{\varphi})) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{|\vec{\varphi}|}{2}\right)^{2n} \right\} I - i \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{|\vec{\varphi}|}{2}\right)^{2n+1} \right\} \vec{\sigma} \vec{\varphi}. \quad (2.626)$$

Beachtet man die Taylor-Reihen der trigonometrischen Funktionen (2.61), so erhält man schließlich für die Darstellungsmatrizen (2.621) der Rotationen

$$D(R(\vec{\varphi})) = e^{-\frac{i}{2} \vec{\sigma} \vec{\varphi}} = \cos\left(\frac{|\vec{\varphi}|}{2}\right) \cdot I - i \sin\left(\frac{|\vec{\varphi}|}{2}\right) \cdot \vec{\sigma} \frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|}. \quad (2.627)$$

Wir bemerken, daß dies für die beiden Darstellungen $D^{(1/2,0)}$ und $D^{(0,1/2)}$ dieselben Darstellungsmatrizen sind.

2.5.4. Spinor-Darstellung der Boosts:

Nach (2.619) und (2.620) lautet die Darstellung der Boosts

$$D(B(\vec{\beta})) = \exp\left\{ \vec{\beta} \cdot \frac{1}{2} \vec{\sigma} \vec{\beta} \right\}, \quad (2.628)$$

wobei aus der Determinanz der Pauli-Matrizen in (2.622) folgt, daß die Darstellungsmatrizen der Boosts hermitesch sind:

$$D(B(\vec{\beta}))^\dagger = \underline{\underline{D(2.622) \cdot (2.628)}} \quad D(B(\vec{\beta})). \quad (2.629)$$

Die Taylor-Reihe der Matrizenlogarithmalfunktion (2.628)

$$D(B(\vec{\beta})) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} (\vec{\sigma} \vec{\beta})^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} (\vec{\sigma} \vec{\beta})^{2n+1} \quad (2.630)$$

geht dann mit Hilfe von (2.625) über in

$$D(B(\vec{\beta})) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{|\vec{\beta}|}{2}\right)^{2n} \right\} \cdot I + \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{|\vec{\beta}|}{2}\right)^{2n+1} \right\} \frac{\vec{\sigma} \vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}. \quad (2.631)$$

Beachtet man die Taylor-Reihen der hyperbolischen Funktionen (2.81), so er-

Wollt man aus (2.631) für die Darstellungsmatrix (2.628) der Boosts

$$D(\vec{\beta}) = e^{\frac{1}{2} \vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}} = \cosh\left(\frac{|\vec{\beta}|}{2}\right) I + \sinh\left(\frac{|\vec{\beta}|}{2}\right) \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} \quad (2.632)$$

hierbei sei daran erinnert, daß das obere Zeilenpaar zur Darstellung $D(p, 0)$ und das untere Zeilenpaar zur Darstellung $D(0, 1/c)$ gehört.

Wir betrachten nun ein Teilchen der Ruhemasse m im Ruhesystem, so daß das 4-vektorkomponenten Viererimpulsvektor der gegebenen Ordnung

$$(P_R^\mu) = (mc, \vec{0}) \quad (2.633)$$

führt man einmündigen Boost durch, so geht der kontravariante Viererimpulsvektor (2.633) über in

$$P^\mu = B_{\mu\nu}(\vec{\beta}) P_R^\nu \xrightarrow{(2.83), (2.633)} (P^\mu) = (p_0, \vec{p}) = (mc \cosh\left(\frac{\beta}{2}\right), mc \sinh\left(\frac{\beta}{2}\right)) \quad (2.634)$$

Mit Hilfe des hyperbolischen Synchronismus

$$\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$$

und der hyperbolischen Additionstheoreme

$$\cosh(\alpha + \beta) = \cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta$$

$$\sinh(\alpha + \beta) = \sinh \alpha \cosh \beta + \cosh \alpha \sinh \beta$$

lassen sich dann zum Vereinfachung von (2.634) die folgenden Relationen ableiten:

$$1.) \cosh\left(\frac{|\vec{\beta}|}{2}\right) = \cosh\left(\frac{|\vec{\beta}|}{2} + \frac{|\vec{\beta}|}{2}\right) \xrightarrow{(2.636)} \cosh^2\left(\frac{|\vec{\beta}|}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{|\vec{\beta}|}{2}\right) = \left\{ \begin{array}{l} 2 \cosh^2\left(\frac{|\vec{\beta}|}{2}\right) - 1 \\ 2 \sinh^2\left(\frac{|\vec{\beta}|}{2}\right) + 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \cosh\left(\frac{|\vec{\beta}|}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh\left(\frac{|\vec{\beta}|}{2}\right) + 1}{2}} \xrightarrow{(2.634)} \sqrt{\frac{p_0/mc + 1}{2}} = \sqrt{\frac{p_0 + mc}{2mc}} \quad (2.638)$$

$$\Rightarrow \sinh \frac{|\vec{\beta}|}{2} = \sqrt{\frac{\cosh |\vec{\beta}| - 1}{2}} = \frac{(2.638) - 1}{2} = \sqrt{\frac{1.638}{2}} = \sqrt{0.819} = 0.905 \quad (2.639)$$

$$2.) \sinh \frac{|\vec{\beta}|}{2} = 2 \sinh \frac{|\vec{\beta}|}{2} \cosh \frac{|\vec{\beta}|}{2} = (2.638) \cdot (2.639) = 6.977 \quad (2.640)$$

Verwendet man (2.634) mit (2.638) - (2.640), so löst sich die Darstellungs-
matrix (2.637) des Boosts durch die Komponenten des Lorentztransformation Wie-
nerimpulsvektors ausdrücken:

$$D(B(\vec{\beta})) = e^{\frac{1}{2} \vec{\beta} \cdot \vec{J}} = \sqrt{\frac{1 + \gamma}{2mc}} I + \sqrt{\frac{1 - \gamma}{2mc}} \vec{J} = \frac{1 + \gamma}{2mc} I + \frac{\gamma}{2mc} \vec{J} \quad (2.641)$$

Es erweist sich nun als gescheitert, die drei Pauli-Matrizen σ^k durch die Einheits-
matrix

$$\sigma^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zu einem vierer-Pauli-Matrizen-Vektor zu ergänzen:

$$(\sigma^a) = (\sigma^0, \sigma^k)$$

dann läßt sich nämlich nach (2.641) der Boost in der Darstellung $D^{(1/2, 0)}$ dar-
stellen als

$$D^{(1/2, 0)}(B(\vec{\beta})) = e^{-\frac{\gamma}{2} \vec{\beta} \cdot \vec{\sigma}} = \frac{1 + \gamma}{2mc} \quad (2.642)$$

wobei das Skalarprodukt zwischen dem vierer-Vierer-Pauli-Matrizen-Vektor (2.643)
und dem Viererimpulsvektor gebildet wurde:

$$P \cdot \sigma = P_\mu \sigma^\mu = P_0 \sigma^0 - \vec{P} \cdot \vec{\sigma} \quad (2.644)$$

Außerdem können wir den räumlich orientierten Viererimpulsvektor

$$\vec{x} = (x_0, \vec{x}) = (x_0, -x^k)$$

und entsprechend den räumlich orientierten Vierer-Pauli-Matrizen-Vektor

$$\vec{\alpha} = (\vec{\alpha}^0, \vec{\alpha}^A) = (0^0, -\vec{A}^A)$$

(2.647)

man läßt sich nämlich nach (2.644) der Boost in der Darstellung $D^{(0, 1/2)}$ schreiben als

(2.648)

$$D^{(0, 1/2)}(\vec{\beta}) = e^{+\frac{1}{2}\vec{\beta}\vec{\beta}} = \frac{P\vec{\beta} + mc}{\sqrt{2mc(P+mc)}}$$

wobei das Skalarprodukt

(2.649)

$$P \cdot \vec{\beta} = P_\mu \vec{\beta}^\mu = P_0 \beta^0 + \vec{P} \cdot \vec{\beta}$$

verwendet wird. Für viele spätere Rechnungen erwies es sich als sinnvoll, die Boost-Darstellungen (2.644) und (2.647) als Wurzel aus demselben Ausdruck mit der doppelten Rapidität darzustellen:

(2.650)

$$e^{\pm \frac{1}{2}\vec{\beta}\vec{\beta}} = \sqrt{\frac{P\vec{\beta}}{mc}} \quad (2.632) \quad \left\{ \cosh|\vec{\beta}| + \frac{\vec{\beta}\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} \sinh|\vec{\beta}| \right\} \sqrt{\frac{P_0}{mc} + \frac{\vec{P}\vec{\beta}}{mc}}$$

(2.645)

$$e^{-\frac{1}{2}\vec{\beta}\vec{\beta}} = \sqrt{\frac{P\vec{\beta}}{mc}} + \frac{1}{2}\vec{\beta}\vec{\beta} = \sqrt{\frac{P\vec{\beta}}{mc}}$$

2.5.5. Lorentz-invariante Kombinationen von Well-Spinoren:

In Form von $D^{(1/2, 0)}$ und $D^{(0, 1/2)}$ haben wir die kleinsten nichttrivialen Darstellungen der Lorentz-Gruppe konstruiert. Nun definieren wir die Well-Spinoren $\xi_\alpha(x)$ und $\xi^{\dot{\alpha}}(x)$ vom Typ $(1/2, 0)$ und $(0, 1/2)$, auf die die Darstellungsmatrizen der Lorentz-Gruppe wirksam sind. Aus unterschiedliche Transformationsverhalten der Well-Spinoren $\xi_\alpha(x)$ und $\xi^{\dot{\alpha}}$ unter einer Lorentz-Transformation wird dabei durch die Verwendung von unteren nicht-gepunkteten und oberen gepunkteten Indizes zum Ausdruck gebracht:

(2.651)

$$\xi_\alpha(x) \xrightarrow{\Lambda} \xi'_\alpha(x) = D^{(1/2, 0)}(\Lambda) \alpha^\beta \xi_\beta(x),$$

(2.652)

$$\xi^{\dot{\alpha}}(x) \xrightarrow{\Lambda} \xi'^{\dot{\alpha}}(x) = D^{(0, 1/2)}(\Lambda) \dot{\alpha}^{\dot{\beta}} \xi_{\dot{\beta}}(x).$$

Wir versuchen nun, mit Hilfe dieser Null-Spinoren einelementar-invariante
 Wirkung zu konstruieren. Dabei sollen quadratische Terme in den Null-
 Spinoren und ihre ersten Ableitungen berücksichtigt werden.

Zunächst werden quadratische Terme in den Null-Spinoren eine erste Ableitungen be-
 trachtet, die zur Erbauung massiver Teilchen benötigt werden. Abgeleitetes ins-
 gesamt vier verschiedene Kombinationen

$$\xi^+ \xi, \quad \xi^+ \eta, \quad \eta^+ \xi, \quad \xi^+ \eta \quad (2.653)$$

die durch eine Lorentz-Transformation A übergehen in

$$\xi^+ D^{(12,0)}(A) \xi, \quad \xi^+ D^{(0,12)}(A) \eta, \quad \eta^+ D^{(0,12)}(A) \xi, \quad \eta^+ D^{(12,0)}(A) \eta \quad (2.654)$$

Im Falle einer Rotation $A = R$ sind die Darstellungsmatrizen $D^{(12,0)}(R)$ und $D^{(0,12)}(R)$
 gemäß (2.649) und (2.620) identisch. Aus der Unitarität (2.623) dieser Darstellungsmat-
 rizen folgt, daß die vier transformierten Kombinationen (2.654) mit der Umgrup-
 pierung Kombinationen (2.653) übereinstimmen. Im Falle eines Boost $A = B$ sind die
 Darstellungsmatrizen $D^{(12,0)}(B)$ und $D^{(0,12)}(B)$ gemäß (2.649) und (2.620) gerade in-
 vrs zueinander:

$$D^{(12,0)}(B) = D^{(0,12)}(B) - 1 \quad (2.655)$$

In Verbindung mit der Hermitizität (2.629) dieser Darstellungsmatrizen folgt, daß
 nur die Beträge beider der transformierten Kombinationen (2.654) mit allen Elementen
 werden unverändlichen Kombinationen (2.653) übereinstimmen. Aus demselben
 Grunde kann man festhalten, daß eine elementar-invariante Wirkung ohne
 Raum-Zeit-Ableitungen nur mit Beteiligung der beiden Spinoren ξ und η möglich
 ist.

Um ein Teilchen ausdrücklich zu konstruieren, muß sich in der Raum-Zeit beweisen, muß
 die Wirkung auf erste Ableitungen der Null-Spinoren enthalten. Wir betrachten

zunächst räumliche Ableitungen und bilden die Fuguberechnungen

$$\mathfrak{z} + \mathcal{E}^k \partial_A \mathfrak{z}, \quad \mathfrak{z} + \mathcal{E}^k \partial_A \mathfrak{z}, \quad \mathfrak{z} + \mathcal{E}^k \partial_A \mathfrak{z}, \quad \mathfrak{z} + \mathcal{E}^k \partial_A \mathfrak{z}, \quad (2.656)$$

die durch eine Lorentz-Transformation Λ übergehen in

$$\begin{aligned} \mathfrak{z} + D^{(12,0)}(R) + \mathcal{E}^k D^{(12,0)}(R) \partial_A \mathfrak{z}, & \quad \mathfrak{z} + D^{(0,12)}(R) + \mathcal{E}^k D^{(0,12)}(R) \partial_A \mathfrak{z}, \\ \mathfrak{z} + D^{(0,10)}(R) + \mathcal{E}^k D^{(0,10)}(R) \partial_A \mathfrak{z}, & \quad \mathfrak{z} + D^{(10,0)}(R) + \mathcal{E}^k D^{(10,0)}(R) \partial_A \mathfrak{z}. \end{aligned} \quad (2.657)$$

Im Falle einer Rotation $\Lambda = R$ sind die Darstellungsmatrizen $D^{(12,0)}(R)$ und $D^{(0,12)}(R)$ identisch, so daß in (2.657) der Ausdruck

$$D(R) + \mathcal{E}^k D(R) \quad (2.658)$$

zu untersuchen ist. Verwendet man (2.627), so folgt zunächst

$$\begin{aligned} D(R) + \mathcal{E}^k D(R) &= \left\{ \cos \frac{|\mathfrak{P}|}{2} + i \frac{\mathfrak{P}^j}{|\mathfrak{P}|} \sin \frac{|\mathfrak{P}|}{2} \right\} \mathcal{E}^k \left\{ \cos \frac{|\mathfrak{P}|}{2} - i \frac{\mathfrak{P}^j}{|\mathfrak{P}|} \sin \frac{|\mathfrak{P}|}{2} \right\} = \cos^2 \left(\frac{|\mathfrak{P}|}{2} \right) \cdot \mathcal{E}^k \\ &+ i \sin \left(\frac{|\mathfrak{P}|}{2} \right) \cos \left(\frac{|\mathfrak{P}|}{2} \right) \frac{\mathfrak{P}^j}{|\mathfrak{P}|} \left[\mathcal{E}^j, \mathcal{E}^k \right] + \sin^2 \left(\frac{|\mathfrak{P}|}{2} \right) \frac{\mathfrak{P}^j \mathfrak{P}^k}{|\mathfrak{P}|^2} \mathcal{E}^j \mathcal{E}^k. \end{aligned} \quad (2.659)$$

Dieser taucht das Produkt zweier Pauli-Matrizen aus, das sich mit der Feinregel (2.617) vereinfachen läßt:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^j \mathcal{E}^k &= \frac{1}{2} (\delta_{jk} I + i \epsilon_{lmk} \mathcal{E}^l) \mathcal{E}^m = \delta_{jk} \mathcal{E}^m + i \epsilon_{lmk} \mathcal{E}^l \mathcal{E}^m = \delta_{jk} \mathcal{E}^m + i \epsilon_{lmk} \mathcal{E}^l \mathcal{E}^m - (\delta_{lm} \mathcal{E}^k - \delta_{km} \mathcal{E}^l) \mathcal{E}^m \\ &= \delta_{jk} \mathcal{E}^m + i \epsilon_{lmk} \mathcal{E}^l \mathcal{E}^m + \delta_{km} \mathcal{E}^l - \delta_{lm} \mathcal{E}^k. \end{aligned} \quad (2.660)$$

Setzt man (2.614) und (2.660) in (2.659) ein, so folgt

$$\begin{aligned} D(R) + \mathcal{E}^k D(R) &= \cos^2 \left(\frac{|\mathfrak{P}|}{2} \right) \mathcal{E}^k + i \sin \left(\frac{|\mathfrak{P}|}{2} \right) \cos \left(\frac{|\mathfrak{P}|}{2} \right) \frac{\mathfrak{P}^j}{|\mathfrak{P}|} \left\{ 2i \epsilon_{lmk} \mathcal{E}^l \mathcal{E}^m + \sin^2 \left(\frac{|\mathfrak{P}|}{2} \right) \frac{\mathfrak{P}^j \mathfrak{P}^k}{|\mathfrak{P}|^2} \right\} \\ &+ \delta_{jk} \mathcal{E}^m + \delta_{km} \mathcal{E}^l - \delta_{lm} \mathcal{E}^k = \frac{1}{2} \left\{ 4 + \cos |\mathfrak{P}| \right\} \mathcal{E}^k + \sin |\mathfrak{P}| \epsilon_{lmk} \frac{\mathfrak{P}^l \mathfrak{P}^m}{|\mathfrak{P}|^2} \mathcal{E}^m + \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos |\mathfrak{P}| \right\} \\ &\cdot \left\{ \frac{\mathfrak{P}^j \mathfrak{P}^k}{|\mathfrak{P}|^2} 2 - \mathcal{E}^k \right\} = \cos |\mathfrak{P}| \mathcal{E}^k + \sin |\mathfrak{P}| \epsilon_{lmk} \frac{\mathfrak{P}^l \mathfrak{P}^m}{|\mathfrak{P}|^2} \mathcal{E}^m + \left\{ 1 - \cos |\mathfrak{P}| \right\} \frac{\mathfrak{P}^j \mathfrak{P}^k}{|\mathfrak{P}|^2} \mathcal{E}^k \end{aligned} \quad (2.661)$$

Dieses Ergebnis läßt sich zusammenfassen als

$$D(R)^T \in^R D(R) = R \cdot e \cdot e^T, \quad (2.662)$$

wobei die Matrix

$$R \cdot e = \cos|\varphi| \delta_{re} + \sin|\varphi| \frac{1}{|\varphi|} \varepsilon_{mre} + (1 - \cos|\varphi|) \frac{r \cdot r}{|\varphi|^2} \quad (2.663)$$

mit der Darstellungsmatrix (2.66) der Rotationen im dreidimensionalen Raum übereinstimmt. Da sich die partiellen Ableitungen in (2.657) ebenfalls wie ein Vektor verhalten, können

$$\partial_k \underline{R} \rightarrow \partial_k^a = R \cdot e \cdot \partial_k e, \quad (2.664)$$

und die Darstellungsmatrix R orthogonalmatrix:

$$R \cdot R^T = I \quad (\Leftrightarrow) \quad R \cdot e \cdot R^T \cdot e = \delta_{em}, \quad (2.665)$$

sind alle Kombinationen (2.657) invariant unter Rotationen:

$$D(R)^T \in^R D(R) \partial_k^a \quad (2.662), (2.664) \quad R \cdot e \cdot e^T \cdot R^T \cdot e = \delta_{em} \quad (2.665) \quad \delta_{em} \in^R \delta_{em} = \delta^R \delta_{em} \quad (2.666)$$

Es stellt sich nun die Frage, wie sich die Kombinationen (2.656) zu relativistisch invarianten Kombinationen erweitern lassen. Dazu erinnern wir uns daran, daß sich die Pauli-Matrizen σ_k auf zweifach Weisen zu Überlagerungsform erweitern lassen, nämlich in Form des Vektor-Pauli-Matrizen-Vektors σ_m in (2.643) und in Form des räumlich invertierten Vektor-Pauli-Matrizen-Vektors $\tilde{\sigma}_m$ in (2.646). Wir betrachten deshalb die folgenden acht Kombinationen:

$$\begin{aligned} & \delta + \sigma_m \partial_m, \quad \delta + \tilde{\sigma}_m \partial_m, \quad \delta + \sigma_m \partial_m, \quad \delta + \tilde{\sigma}_m \partial_m, \\ & \delta + \sigma_m \partial_m, \quad \delta + \tilde{\sigma}_m \partial_m, \quad \delta + \sigma_m \partial_m, \quad \delta + \tilde{\sigma}_m \partial_m. \end{aligned} \quad (2.667)$$

20.06.00

Der hier bei jeweils neu hinzukommende Term $\delta + \sigma_m \partial_m$ mittels Zeitableitung invariant unter Rotationen:

$$\Rightarrow D(B)^T (F \oplus E) D(B) = F \oplus E^k + \sinh |\vec{y}| \frac{y^k}{|\vec{y}|} + (\cosh |\vec{y}| - 1) \frac{F(F \oplus E)}{|\vec{y}|} \frac{y^k}{|\vec{y}|} \quad (2.671)$$

Die beiden Ergebnisse (2.670) und (2.671) lassen sich zusammenfassen als

$$D^{(1|2,0)}(B)^T \tilde{G}^{\mu\nu} D^{(1|2,0)}(B) = B^{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu}, \quad (2.672)$$

$$D^{(0,1|2)}(B)^T \tilde{G}^{\mu\nu} D^{(0,1|2)}(B) = B^{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu}, \quad (2.673)$$

Wobei die Matrix

$$(B^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \cosh |\vec{y}| & & \\ \frac{y^k}{|\vec{y}|} \sinh |\vec{y}| & \delta_{jk} + (\cosh |\vec{y}| - 1) \frac{y^j y^k}{|\vec{y}|^2} & \\ & & \end{pmatrix} \quad (2.674)$$

mit der Darstellungsmatrix (2.83) der Boosts in der räumlichen Raumzeit übereinstimmt. Da sich die räumlichen Ableitungen in (2.667) auf ein kovarianten Vektor transformieren

$$\partial_\mu \xrightarrow{B} \partial'_\mu = B^\nu{}_\mu \partial^\nu \quad (2.675)$$

lassen sich die folgenden Invarianzen beweisen:

$$1.) \quad \int + \tilde{G}^{\mu\nu} \partial_\mu \int \xrightarrow{B} \int + D^{(1|2,0)}(B)^T \tilde{G}^{\mu\nu} D^{(1|2,0)}(B) \partial'_\mu \int \quad (2.672), (2.675) \quad \int + B^{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu} B_\mu{}^\lambda \partial_\lambda \int$$

$$(2.22) \quad \int + \tilde{G}^{\mu\nu} \partial_\mu \int = \int + \tilde{G}^{\mu\nu} \partial_\mu \int$$

$$2.) \quad \int + \tilde{G}^{\mu\nu} \partial_\mu \int \xrightarrow{B} \int + D^{(0,1|2)}(B)^T \tilde{G}^{\mu\nu} D^{(0,1|2)}(B) \partial'_\mu \int \quad (2.673), (2.675) \quad \int + B^{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu} B_\mu{}^\lambda \partial_\lambda \int$$

$$(2.22) \quad \int + \tilde{G}^{\mu\nu} \partial_\mu \int = \int + \tilde{G}^{\mu\nu} \partial_\mu \int$$

Für die beiden restlichen Kombinations $\int + \tilde{G}^{\mu\nu} \partial_\mu \int$ und $\int + \tilde{G}^{\mu\nu} \partial_\mu \int$ in (2.667) ist keine Boost-Invarianz beweisbar, da sich $\tilde{G}^{\mu\nu}$ und $\tilde{G}^{\mu\nu}$ unter den Darstellungen $D^{(1|2,0)}$ und $D^{(0,1|2)}$ nicht als Vektoren transformieren.

2.5.6. Airac - Winklung und Airac - Gleichung:

Aus den Überlegungen des vorhergehenden Abschnittes folgt, daß die allgemeinste Lorentz-invariante Winklung eines massiven Teilchens, die nur quadratische Terme in den Wurf-Spinoren und ihren ersten Ableitungen enthält, gegeben ist durch

$$A[\mathcal{J}(\cdot), \mathcal{J}^+(\cdot), \mathcal{Z}^+(\cdot)] = \int d^4x \mathcal{L}(\mathcal{J}(x), \partial_\mu \mathcal{J}(x), \mathcal{J}^+(x), \partial_\mu \mathcal{J}^+(x), \mathcal{Z}(x), \partial_\mu \mathcal{Z}(x), \mathcal{Z}^+(x), \partial_\mu \mathcal{Z}^+(x)) \quad (2.676)$$

mit der Lagrange - Dichte

$$\mathcal{L} = \alpha \{ \mathcal{J}^+ \tilde{\epsilon}^{\mu\nu} \partial_\mu \mathcal{J} + \beta i \mathcal{Z}^+ \tilde{\epsilon}^{\mu\nu} \partial_\mu \mathcal{Z} + \gamma \mathcal{J}^+ \mathcal{Z} + \delta \mathcal{Z}^+ \mathcal{J} \}, \quad (2.677)$$

wobei die Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ noch unbestimmt sind. Man werden in Abschnitt 2.5.8. sehen, daß die zusätzliche Forderung nach einer Invarianz der Lagrange - Dichte unter Raumspiegelungen dazu führt, daß die beiden Wurf-Spinoren \mathcal{J} und \mathcal{Z} gleichwertigkeit aufweisen müssen. Deshalb reduziert sich (2.677) auf

$$\mathcal{L} = \alpha \{ i \mathcal{J}^+ \tilde{\epsilon}^{\mu\nu} \partial_\mu \mathcal{J} + i \mathcal{Z}^+ \tilde{\epsilon}^{\mu\nu} \partial_\mu \mathcal{Z} - M \mathcal{J}^+ \mathcal{Z} - M \mathcal{Z}^+ \mathcal{J} \}. \quad (2.678)$$

Die noch unbestimmten Parameter d und M liegen die Dimensionen der Winklung \mathcal{J} und werden erst zu einem späteren Zeitpunkt durch den nichtrelativistischen Limes festgelegt. Aufgrund der von Hell verbrachten Ruhemasse des Teilchens sort - hält die Winklung (2.678) notwendigerweise beide Wurf - Spinoren \mathcal{J} und \mathcal{Z} . Wenn man die Ruhemasse des Teilchens verschwindet, kann eine Lorentz - invariante Winklung nur mit einem der beiden Wurf - Spinoren gebildet werden, wie in Abschnitt 2.5.9. näher diskutiert werden soll. Die Wurf - Spinoren \mathcal{J} und \mathcal{Z} gehören nun den Bewegungsgleichungen

$$\frac{\delta A}{\delta \mathcal{J}^+(x)} \quad (2.676) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{J}^+(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \mathcal{J}^+(x))} \quad (2.678) \quad i \tilde{\epsilon}^{\mu\nu} \partial_\mu \mathcal{J}(x) - M \mathcal{Z}(x) = 0, \quad (2.679)$$

$$\frac{\delta A}{\delta \mathcal{Z}^+(x)} \quad (2.676) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{Z}^+(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \mathcal{Z}^+(x))} \quad (2.678) \quad i \tilde{\epsilon}^{\mu\nu} \partial_\mu \mathcal{Z}(x) - M \mathcal{J}(x) = 0. \quad (2.680)$$

Um die beiden Bewegungsgleichungen ineinander einsetzen zu können, be-

notiert man die Reduzierung

(2.681)

$$g^m \tilde{e}^n + e^r \tilde{e}^m = 2g^{nr} \cdot I, \quad \tilde{e}^n \tilde{e}^r + \tilde{e}^r \tilde{e}^n = 2g^{nr} \cdot I,$$

die sich explizit nachrechnen lässt:

1.) $5^0 \tilde{e}^0 + 5^0 \tilde{e}^0 \quad (2.647) \quad 2(5^0)^2 \quad (2.642) \quad 2I = 2g^{00} I,$

2.) $5^0 \tilde{e}^k + 5^k \tilde{e}^0 \quad (2.647) - 5^0 \tilde{e}^k + 5^k \tilde{e}^0 \quad (2.642) \quad 0 = 2g^{0k} I,$

3.) $5^k \tilde{e}^l + 5^l \tilde{e}^k \quad (2.647) - 5^k \tilde{e}^l - 5^l \tilde{e}^k \quad (2.609) - 2\delta^{kl} I = 2g^{kl} I.$

Multipliziert man (2.679) mit $i\delta^{rn}$ und verwendet man (2.680) bzw. multipliziert man (2.680) mit $i\delta^{rn}$ und verwendet man (2.679), so gilt

$$0 \quad (2.679) - \tilde{e}^r \tilde{e}^m \partial_r \partial_m f(x) - M(i\tilde{e}^r \partial_r) z(x) \quad (2.680), (2.681) - g^{mn} \partial_r \partial_r f(x) - M^2 f(x) = 0, \quad (2.682)$$

$$0 \quad (2.680) - \tilde{e}^r \tilde{e}^m \partial_r \partial_m g(x) - M(i\tilde{e}^r \partial_r) f(x) \quad (2.679), (2.681) - g^{mn} \partial_r \partial_r g(x) - M^2 f(x) = 0. \quad (2.683)$$

Abmach führen die beiden Auf-Spinoren f und g der Klein-Gordon-Gleichung (2.2.12) eines Teilchens, wobei der Parameter M mit mc/\hbar zu identifizieren ist.

Da bei einem massiven Teilchen notwendigerweise beide Auf-Spinoren f und g auftreten, liegt es nahe, beide zu einem Dirac-Spinor zusammenzufassen:

(2.684)

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}.$$

Im Hinblick darauf wird die Lagrange-Dichte (2.678) umgeformt

$$\mathcal{L} = \alpha \left\{ (f^+, g^+) \begin{pmatrix} \tilde{e}^m & 0 \\ 0 & \tilde{e}^n \end{pmatrix} i\partial_\mu \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} - (f^+, g^+) \begin{pmatrix} 0 & MI \\ MI & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\}, \quad (2.685)$$

wobei die 2×2 -Nullmatrix eingeführt wurde

(2.686)

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Außerdem wird der zum Dirac-Spinor $\psi(x)$ Dirac adjungierte Dirac-Spinor $\bar{\psi}(x) = (\psi^\dagger(x), \eta^\dagger(x)) \left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{smallmatrix} \right) \Leftrightarrow \psi^\dagger(x) = (\psi^\dagger(x), \eta^\dagger(x)) = \bar{\psi}(x) \left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{smallmatrix} \right)$ (2.687)

eingeführt, so daß (2.685) übersichtlicher

$$\mathcal{L} = \alpha \left\{ \bar{\psi} \left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} \tilde{\sigma}^0 & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}^0 \end{smallmatrix} \right) \partial_\mu \psi - \bar{\psi} \left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & M I \\ M I & 0 \end{smallmatrix} \right) \psi \right\} = \alpha \bar{\psi} \{ i \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu - M \} \psi. \quad (2.688)$$

dabei treten die Dirac-Matrizen

$$\tilde{\sigma}^\mu = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \tilde{\sigma}^0 \\ \tilde{\sigma}^0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \quad (2.689)$$

auf, die die Eigenschaften einer Clifford-Algebra

$$\begin{aligned} [\tilde{\sigma}^\mu, \tilde{\sigma}^\nu]_+ &= \tilde{\sigma}^\mu \tilde{\sigma}^\nu + \tilde{\sigma}^\nu \tilde{\sigma}^\mu \quad (2.689) \quad \left(\begin{smallmatrix} 0 & \tilde{\sigma}^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & \tilde{\sigma}^\nu \\ \tilde{\sigma}^\nu & 0 \end{smallmatrix} \right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & \tilde{\sigma}^\nu \\ \tilde{\sigma}^\nu & 0 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & \tilde{\sigma}^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{smallmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{smallmatrix} \tilde{\sigma}^\mu \tilde{\sigma}^\nu + \tilde{\sigma}^\nu \tilde{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}^\mu \tilde{\sigma}^\nu + \tilde{\sigma}^\nu \tilde{\sigma}^\mu \end{smallmatrix} \right) \quad (2.689) \quad \underline{\underline{2 \tilde{\sigma}^{\mu\nu}}} \quad \left(\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{smallmatrix} \right) \quad (2.690) \end{aligned}$$

besitzen. Die Verbindung (2.676) wird damit als ein Funktionell des Dirac-Spinors $\psi(x)$ und des Dirac adjungierten Dirac-Spinors $\bar{\psi}(x)$ aufgefaßt (2.691)

$$A[\psi; \bar{\psi}] = \int d^4x \mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x), \bar{\psi}(x), \partial_\mu \bar{\psi}(x)).$$

Die Bewegungsgleichung des Dirac-Spinors lautet damit

$$\frac{\delta A}{\delta \bar{\psi}(x)} \quad (2.691) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi}(x))} \quad (2.688) \quad \alpha \{ i \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi(x) - M \psi(x) \} = 0 \quad (2.692)$$

was sich auf

$$\{ i \not{\partial} - m \} \psi(x) = 0$$

reduziert, wenn man die weitere Ableitung der Eigenwert-Ausdrücke

$$\not{\partial} = \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu$$

verwendet. (2.694)

2.5.7. Darstellung der Lorentz-Gruppe im Raum der Dirac-Spinoren:

Nach Konstruktion ist die Dirac-Wirkung (2.688), (2.691) invariant unter Lorentz-Transformationen. Dies wollen wir hier nochmal formal beweisen, indem wir die Darstellung der Lorentz-Gruppe im Raum der Dirac-Spinoren studieren. Aus den Darstellungen der Lorentz-Gruppe im Raum der Dirac-Spinoren in (2.651) und (2.652) folgt

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \psi'(x) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}(x) \psi(x) \\ \bar{\mathcal{D}}(x) \bar{\psi}(x) \end{pmatrix} \quad (2.695)$$

wobei sich die Darstellungsmatrizen $\mathcal{D}(A)$ aus den Darstellungsmatrizen $\mathcal{D}^{(1/2,0)}(A)$ und $\mathcal{D}^{(0,1/2)}(A)$ zusammensetzen:

$$\mathcal{D}(A) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}^{(1/2,0)}(A) & 0 \\ 0 & \mathcal{D}^{(0,1/2)}(A) \end{pmatrix} \quad (2.696)$$

Da zwischen dem Dirac adjungierten Spinor $\bar{\psi}$ und dem adjungierten Spinor ψ^\dagger wegen (2.687) und (2.685) die Beziehung

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \gamma^0, \quad \psi^\dagger(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^0 \quad (2.697)$$

besteht, lautet der Lorentz-transformierte Dirac adjungierte Spinor

$$\bar{\psi}'(x) \stackrel{(2.697)}{=} \psi'^\dagger(x) \gamma^0 \stackrel{(2.695)}{=} \psi^\dagger(x) \mathcal{D}(A)^\dagger \gamma^0 \stackrel{(2.697)}{=} \bar{\psi}(x) \bar{\mathcal{D}}(A), \quad (2.698)$$

wobei die Dirac adjungierten Darstellungsmatrizen auftreten:

$$(2.699)$$

$$\bar{\mathcal{D}}(A) = \gamma^0 \mathcal{D}(A)^\dagger \gamma^0.$$

Für diese erhält man im einzelnen

$$\bar{\mathcal{D}}(A) \stackrel{(2.689), (2.696), (2.699)}{=} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{D}^{(1/2,0)}(A)^\dagger & 0 \\ 0 & \mathcal{D}^{(0,1/2)}(A)^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}^{(1/2,0)}(A)^\dagger \\ \mathcal{D}^{(0,1/2)}(A)^\dagger & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{D}^{(1/2,0)}(A)^\dagger \end{pmatrix}, \quad (2.700)$$

$$= \begin{pmatrix} D^{(12,0)}(A) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D^{(12,0)}(A) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^{(12,0)}(A) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D^{(12,0)}(A) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.702), (2.703)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Lambda_{\mu\nu} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.689) \quad \Lambda_{\mu\nu} \delta^{\mu\nu} \quad (2.706)$$

Nach diesen Vorbereitungen löst sich die Invarianz der Dirac-Gleichung explizit zeigen. Man sieht nämlich die partiellen Ableitungen in (2.688) wie ein gewöhnlicher Vektor transformieren:

$$\partial_\mu \xrightarrow{\Lambda} \partial'_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu \partial_\nu \quad (2.707)$$

folgt nämlich

$$A) \int d^4x' \alpha \bar{\psi}'(x') \{ i \partial'_\mu \partial'_\mu - M \} \psi'(x') \quad (2.26), (2.695), (2.698)$$

$$\int d^4x \alpha \bar{\psi}(x) \{ i D(A) \partial'_\mu \partial'_\mu - M D(A) \} \psi(x) \quad (2.701), (2.706)$$

$$\int d^4x \alpha \bar{\psi}(x) \{ i \Lambda^\mu{}_\nu \partial'_\mu \partial'_\nu - M \} \psi(x) \stackrel{(2.707)}{=} \int d^4x \alpha \bar{\psi}(x) \{ i \Lambda^\mu{}_\nu \partial_\mu \partial_\nu - M \} \psi(x)$$

$$(2.22) \int d^4x \alpha \bar{\psi}(x) \{ i \partial_\mu \partial_\mu - M \} \psi(x) \quad (2.688), (2.691) \quad A \checkmark$$

Die Darstellung (2.696) der Dirac-Gruppe im Raum der Dirac-Gruppen löst sich mit Hilfe von (2.691) und (2.620) auf die folgende Form bringen:

$$D(A) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi} - \frac{1}{2} \sigma_3 \varphi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi} + \frac{1}{2} \sigma_3 \varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp \left\{ -i \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \sigma_3 \end{pmatrix} \varphi - i \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \sigma_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{\varphi} \right\} \quad (2.708)$$

Vergleicht man dies mit einer gewöhnlichen Formelbildung des Hilbert-Elementes wie in (2.48)

$$D(A) = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \varphi \sigma_3 + \frac{1}{2} \vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma} \right\} \quad (2.49), (2.50), \sigma_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^\alpha \sigma^\beta \quad \exp \left\{ -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^\alpha \sigma^\beta \varphi^\mu \varphi^\nu \right\}, \quad (2.709)$$

so lautet die Darstellungsmatrix der Generatoren der Ebene

$$D(M_k) = S_0^k = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sigma^k & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma^k \end{pmatrix}, \quad (2.7.10)$$

während sich die Darstellungsmatrix aus der Rotation aus

$$D(L_k) = S^k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} S^j = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma^k & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma^k \end{pmatrix} \quad (2.7.11)$$

erhalten zu

$$S^j = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma^k & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma^k \end{pmatrix}. \quad (2.7.12)$$

Nach (2.17.6) stellt (2.7.11) gerade den Spin-Operator für Spin 1/2-Teilchen dar. Nach dem Mittel 2.1.14 lassen sich die massiven Spin 1/2-Teilchen nach dem Eigenwert bezüglich der z-Komponente des Spin-Operators klassifizieren. Die beiden Ergebnisse (2.7.10) und (2.7.12) lassen sich zusammenfassen zu

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\sigma^\mu, \sigma^\nu] - . \quad (2.7.13)$$

Zusätzlich erhält man im einreihigen

$$\begin{aligned} 1.) \quad S_0^k & \stackrel{(2.7.13)}{=} \frac{i}{4} \{ \sigma^0 \sigma^k - \sigma^k \sigma^0 \} \stackrel{(2.6.89)}{=} \frac{i}{4} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ & = \frac{i}{4} \left\{ \begin{pmatrix} -\sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & -\sigma^k \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sigma^k & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma^k \end{pmatrix} \stackrel{(2.7.10)}{=} \checkmark \\ 2.) \quad S^j & \stackrel{(2.7.13)}{=} \frac{i}{4} \{ \sigma^i \sigma^j - \sigma^j \sigma^i \} \stackrel{(2.6.89)}{=} \frac{i}{4} \left\{ \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \right\} \\ & = \frac{i}{4} \left\{ \begin{pmatrix} -\sigma^i \sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^i \sigma^j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sigma^j \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^j \sigma^i \end{pmatrix} \right\} = \frac{-i}{4} \left[\begin{pmatrix} \sigma^i & \sigma^j \\ 0 & \sigma^i & \sigma^j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma^j & \sigma^i \\ 0 & \sigma^j & \sigma^i \end{pmatrix} \right] \stackrel{(2.6.11)}{=} \frac{-i}{4} \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \\ & = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma^k & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma^k \end{pmatrix} \stackrel{(2.7.12)}{=} \checkmark \end{aligned}$$

Nun wird der Kommutator zwischen den Darstellungsmatrizen $S^{\mu\nu}$ der So-

venta-Algebra im Raum der lineare - Spalten und den lineare - Matrizen δ^2 berechnet. verwendet man die Rechenregel

$$[A+B, C]_- = ABC - CAB = A[BC - CBA] + - [A, C] + B, \quad (2.714)$$

so folgt

$$[S_{m, \delta^2}]_- \stackrel{(2.713)}{=} \frac{i}{4} \{ [\delta^m \delta^2, \delta^2]_- - [\delta^2 \delta^m, \delta^2]_- \} \stackrel{(2.714)}{=} \frac{i}{4} \{ \delta^m [\delta^2, \delta^2]_+ - [\delta^m, \delta^2]_+ + \delta^2 - \delta^2 [\delta^m, \delta^2]_+ + [\delta^2, \delta^2]_+ \} \stackrel{(2.690)}{=} \frac{i}{4} \{ 2 \{ g^2 \delta^m - g^m \delta^2 - g^m \delta^2 + g^2 \delta^m \} \} \quad (2.715)$$

$$\Rightarrow [S_{m, \delta^2}]_- = i (g^2 \delta^m - g^m \delta^2).$$

Damit kann nun der Kommutator zwischen zwei Darstellungen Matrizen S_{m, δ^2} und S_{n, δ^2} berechnet werden:

$$[S_{m, S_{n, \delta^2}}]_- \stackrel{(2.713)}{=} \frac{i}{4} \{ [S_{m, \delta^2 \delta^2}]_- - [S_{n, \delta^2 \delta^2}]_- \} \stackrel{(1.115)}{=} \frac{i}{4} \{ [S_{m, \delta^2}]_- - [\delta^2 + \delta^2 + \delta^2 + \delta^2]_- - [S_{m, \delta^2}]_- - [\delta^2 + \delta^2 + \delta^2 + \delta^2]_- \} \stackrel{(2.715)}{=} \frac{i}{4} \{ (g^2 \delta^m - g^m \delta^2) \delta^2 - \delta^2 (g^2 \delta^m - g^m \delta^2) - (g^2 \delta^m - g^m \delta^2) \delta^2 - \delta^2 (g^2 \delta^m - g^m \delta^2) \} = -\frac{1}{4} \{ g^2 \delta^m (\delta^2 \delta^2 - \delta^2 \delta^2) - g^m \delta^2 (\delta^2 \delta^2 - \delta^2 \delta^2) \} \stackrel{(2.713)}{=} \frac{i}{4} \cdot (-4i) \cdot \{ g^2 \delta^m S_{n, \delta^2} + g^2 \delta^m - g^m \delta^2 S_{n, \delta^2} - g^m \delta^2 - g^2 \delta^m S_{n, \delta^2} - g^2 \delta^m - g^m \delta^2 S_{n, \delta^2} - g^m \delta^2 \} \stackrel{(2.716)}{=} \dots$$

Aus (2.716) liest man ab, daß die Darstellungen Matrizen S_{m, δ^2} tatsächlich den üblichen Vertauschungsrelationen (2.36) der Lambda-Algebra genügen. Außerdem zeigen (2.715) und (2.716), daß δ^2 und S_{n, δ^2} einen Kommutator vom Rang $n=1$ und $n=2$ im Sinne von (2.113) darstellen.

2.5.8. Raumspiegelung:

Durch eine Raumspiegelung P wird der Vektorraum X in den räumlich orientierten Vektorraum \tilde{X} von (2.646) abgebildet:

$$x^1_P = P x = \tilde{x}. \quad (2.717)$$

22.06.00

Führt man eine Raumspiegelung P zweimal hintereinander aus, so ergibt sich wieder den ursprünglichen Zustand. Die Raumspiegelung P ist demnach involutorisch:

$$P^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1} = P \quad (2.718)$$

Die Darstellungsmatrix für eine solche Raumspiegelung lautet

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.719)$$

Die Raumspiegelung kommutiert mit den Generatoren der Rotationen (2.41)

$$P^{-1} L_1 P = (-i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L_1$$

$$P^{-1} L_2 P = (-i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L_2$$

$$P^{-1} L_3 P = (-i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L_3$$

$$\Rightarrow P^{-1} L_i P = L_i \quad (2.720)$$

und antikommutiert mit den Generatoren der Boosts (2.42)

$$P^{-1} M_1 P = (-i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -M_1$$

$$P^{-1} M_2 P = (-i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -M_2$$

$$P^{-1} M_3 P = (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -M_3 \quad (2.721)$$

$\Rightarrow P^{-1} M_3 P = -M_3$
 Führt man eine Raumspiegelung an einem Dirac-Spinor durch, so gilt

$$\psi_P(x) \xrightarrow{P} \psi_P^*(x) = D(P) \psi(x), \quad (2.722)$$

wobei $D(P)$ die Darstellungsmatrix der Raumspiegelung im Raum der Dirac-Spinoren darstellt. Dabei muß $D(P)$ auch die Invarianzeigenschaft (2.719) besitzen

$$D(P)^2 = 1 \quad (2.723)$$

und dieselben Kommutator- bzw. Antikommutatorrelationen (2.720) bzw. (2.721) mit den Darstellungsmatrizen $D(L_A)$ bzw. $D(M_A)$ der Festachse- bzw. Boosts im Raum der Dirac-Spinoren erfüllen:

$$D(P)^{-1} D(L_A) D(P) = D(L_A), \quad (2.724)$$

$$D(P)^{-1} D(M_A) D(P) = D(M_A). \quad (2.725)$$

Wir bestimmen nun die Darstellungsmatrix $D(P)$ aus der Forderung, daß die Dirac-Gleichung unter einer Raumspiegelung invariant ist. Hierzu setzen wir wie zunächst die Dirac-Gleichung (2.632) durch die Substitution $x \rightarrow \tilde{x}$ trivial um:

$$(i \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\partial}_\mu - m) \psi(\tilde{x}) = 0. \quad (2.726)$$

Nach (2.722) kann man dann in (2.726) $\psi(\tilde{x})$ durch $\psi_P^*(x)$ ersetzen:

$$(i D(P) \tilde{\gamma}^\mu D(P)^{-1} \partial_\mu - m) \psi_P^*(x) = 0. \quad (2.727)$$

Damit (2.727) in die Dirac-Gleichung für den raumspiegelten Dirac-Spinor

von $\psi(x)$ überseht

$$(2.7.28)$$

(i) $\delta^n \delta^n - M$) $\psi(x) = 0$,
muß die Darstellungsmatrix $D(P)$ der Bedingung

$$(2.7.29)$$

genügen. Legen wir die Darstellungsmatrix $D(P)$ durch

$$(2.7.30)$$

fest, so ist sowohl die Involutionsgleichung (2.7.23)

$$D(P)^2 \quad (2.7.30) \quad (2.689) \quad \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

als auch die Bedingung (2.7.29) erfüllt:

$$1.) \quad \delta^0 \delta^0 \delta^0 = (\delta^0)^3 \quad (2.690) \quad \delta^0 \quad \checkmark$$

$$2.) \quad \delta^0 \delta^1 \delta^0 = -\delta^0 \delta^1 \delta^0 \quad (2.690) \quad \delta^1 \quad \checkmark$$

Anßerdem gelten tatsächlich die Kommutatoren (2.7.24)

$$D(P)^{-1} D(L) D(P) \quad (2.689), (2.711), (2.730) \quad \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \delta^1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \delta^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \delta^1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \delta^1 \end{pmatrix} \quad (2.711) \quad D(L) \quad \checkmark$$

und die Antikommutatoren (2.7.25)

$$D(P)^{-1} D(M) D(P) \quad (2.689), (2.710), (2.730) \quad \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \delta^1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \delta^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \delta^1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \delta^1 \end{pmatrix} \quad (2.710) \quad -D(M)$$

Aus der Kommutatorgleichung von δ^0 in (2.689) liest man ab, daß eine Raumspiegelung die zwei Spindeln δ und $\bar{\delta}$ miteinander vertauscht:

$$\psi(x) \quad (2.684) \quad \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \psi'(x) \quad (2.689), (2.730) \quad \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix} \quad (2.731)$$

In einer Theorie, bei der sowohl $\psi(x)$ als auch $\bar{\psi}(x)$ physikalisch realisierte Zustände darstellen, benötigt man deshalb beide Wellenspinoren δ und $\bar{\delta}$.

Aus den Überlegungen in Abschn. 2.5.5. folgt, daß eine solche unter Raum-
spiegelungen invariante Theorie notwendigerweise einmassenlos sein muß.

2.5.9. Neutrinos:

Masselose Spin $1/2$ -Teilchen wie die Neutrinos werden durch einen einachsigen Weyl-Spinor ξ oder ζ beschrieben. Nach (2.677) ist deren Lagrange-Dichte entweder durch

$$\mathcal{L} = \alpha \{ \dot{\xi}^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi \} \quad (2.732)$$

oder durch

$$\mathcal{L} = \alpha \{ \dot{\zeta}^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \zeta \} \quad (2.733)$$

gegeben. In beiden Fällen ist die Lagrange-Dichte zwar invariant unter Lorentz-
Transformationen aber nicht invariant unter Raumspiegelungen. Um Neutrinos
auch mit einem Dirac-Spinor ψ beschreiben zu können, muß man den oberen
bzw. unteren Weyl-Spinor ξ bzw. ζ herausprojizieren. Hierzu verwendet man die
Matrix

$$\gamma_5 = i \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} -\sigma^1 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma^2 \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \sigma^3 \end{pmatrix} \quad (2.734)$$

wobei das dabei auftretende Produkt der Pauli-Matrizen sich ergibt zu

$$\sigma^1 \sigma^2 \sigma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (2.735)$$

so daß (2.734) übergeht in

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (2.736)$$

Die Projektionsmatrizen

$$P_\pm = \frac{1}{2} (1 \mp \gamma_5) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.737)$$

$$P_e = \frac{1}{2}(1 + \delta^5) \frac{(2.736)}{2} \left\{ \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (2.738)$$

bestehen dann die gewöhnliche Wirkung

$$P_u \psi \frac{(2.684), (2.737)}{(I \ 0) \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.739)$$

$$P_e \psi \frac{(2.684), (2.738)}{(0 \ 0) \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}. \quad (2.740)$$

Die Vert-Spinoren $\bar{1}$ und $\bar{2}$ stellen im Fernum von $\frac{1}{2}(17\delta^5)\psi$ Eigenzustände der Matrize δ^5 zu den Eigenwerten ∓ 1 dar:

$$\delta^5 \frac{1}{2}(17\delta^5)\psi = \mp \frac{1}{2}(17\delta^5)\psi. \quad (2.741)$$

Da sich die Verting-Zustände nach den Eigenwerten der Matrize δ^5 klassifizieren lassen, kommt der Matrize δ^5 eine besondere Bedeutung zu. Man bezeichnet δ^5 als Chiralitäts-Operator und spricht bei den Zuständen $\frac{1}{2}(17\delta^5)\psi$ von linker (-1) bzw. rechter $(+1)$ Chiralität.

Wir bemerken, daß der Chiralitäts-Operator δ^5 aus (2.734) aufgrund der Antikommutatorrelation (2.650) auch geschrieben werden kann als

$$\delta^5 = \frac{i}{24} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta. \quad (2.742)$$

Da sich die Dirac-Matrizen zu gemäß (2.706) unter Lorentz-Transformationen wie ein kontravarianter Vektor transformieren, besagt (2.742), daß der Chiralitäts-Operator δ^5 Lorentz-invariant ist:

$$\begin{aligned} \bar{D}(\Lambda) \delta^5 D(\Lambda) & \frac{(2.701), (2.742)}{\frac{i}{24} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}} \left\{ \bar{D}(\Lambda) \gamma^\mu D(\Lambda) \right\} \left\{ \bar{D}(\Lambda) \gamma^\nu D(\Lambda) \right\} \left\{ \bar{D}(\Lambda) \gamma^\alpha D(\Lambda) \right\} \left\{ \bar{D}(\Lambda) \gamma^\beta D(\Lambda) \right\} \\ & \cdot \left\{ \bar{D}(\Lambda) \gamma^\alpha D(\Lambda) \right\} \frac{(2.706)}{\frac{i}{24} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}} \frac{i}{24} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \Lambda^\mu \Lambda^\nu \Lambda^\alpha \Lambda^\beta \gamma^{\mu\nu\alpha\beta} \\ & = \frac{i}{24} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \frac{(2.742)}{\frac{i}{24} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}} \gamma^5 \end{aligned} \quad (2.743)$$

hierbei wurde verwendet, daß aufgrund der Weierstraßschen Entwicklung der Determinante einer 4×4 -Matrix $A = (A^m_n)$

$$(\det A) \cdot \varepsilon_{m_1 m_2 m_3 m_4} = \varepsilon_{m_1 m_2 m_3 m_4} A^m_{m_1} A^m_{m_2} A^m_{m_3} A^m_{m_4} \quad (2.744)$$

und der Eigenschaft $\det A = 1$ der eigentlichen Lorentz-Transformations- der Levi-Civita-Elemente in allen Inertialsystemen dieselben Komponenten besitzt:

$$\varepsilon_{m_1 m_2 m_3 m_4} = \varepsilon_{m_1 m_2 m_3 m_4} \quad (2.745)$$

Mit Hilfe von (2.737) - (2.740) lassen sich demnach die beiden Neutrino-Ausdrücke (2.732) und (2.733) durch $\psi(x)$ -Größen ausdrücken:

$$\mathcal{L} = \alpha i \bar{\psi}(x) \sigma^m \partial_\mu \frac{1}{2} (1 + \sigma_5) \psi(x) \quad (2.746)$$

Interessanterweise erhält man durch explizites Nachrechnen:

$$1.) \mathcal{L} = \alpha i \bar{\psi}(x) \sigma^m \partial_\mu \frac{1}{2} (1 - \sigma_5) \psi(x) \quad (2.689), (2.687), (2.689) \quad \alpha i (\bar{\psi}^+, \bar{z}^+) \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \sigma^m & 0 \end{pmatrix} \partial_\mu \frac{1}{2} (1 - \sigma_5) \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (2.739) \quad \alpha i (\bar{\psi}^+, \bar{z}^+) \begin{pmatrix} \sigma^m & 0 \\ 0 & \sigma^m \end{pmatrix} \partial_\mu \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \alpha i \bar{\psi}^+ \sigma^m \partial_\mu \chi \quad \checkmark$$

$$2.) \mathcal{L} = \alpha i \bar{\psi}(x) \sigma^m \partial_\mu \frac{1}{2} (1 + \sigma_5) \psi(x) \quad (2.689), (2.687), (2.689) \quad \alpha i (\bar{\psi}^+, \bar{z}^+) \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \sigma^m & 0 \end{pmatrix} \partial_\mu \frac{1}{2} (1 + \sigma_5) \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (2.740) \quad \alpha i (\bar{\psi}^+, \bar{z}^+) \begin{pmatrix} \sigma^m & 0 \\ 0 & \sigma^m \end{pmatrix} \partial_\mu \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \alpha i \bar{z}^+ \sigma^m \partial_\mu \psi \quad \checkmark$$

Die beiden Neutrino-Wechselwirkungen (2.746) sind aufgrund von (2.695), (2.698), (2.706) und (2.713) manifest Lorentz-invariant. Auf Problem lösen oder auf Grund von

$$D(P)^{-1} \sigma_5 D(P) \stackrel{(2.742)}{=} \frac{i}{24} \varepsilon_{m_1 m_2 m_3 m_4} \{ D(P)^{-1} \sigma^m D(P) \} \{ D(P)^{-1} \sigma^m D(P) \} \{ D(P)^{-1} \sigma^m D(P) \} \{ D(P)^{-1} \sigma^m D(P) \}$$

• $\{ D(P) \rightarrow \delta \uparrow P \} \frac{(2.729)(2.730)}{24} \frac{\epsilon_{\mu\nu} \delta^{\mu\nu}}{24} = \frac{\epsilon_{\mu\nu} \delta^{\mu\nu}}{24} \rightarrow \delta \uparrow = \frac{\epsilon_{\mu\nu} \delta^{\mu\nu}}{24} \rightarrow \delta \uparrow$

(2.742) $\rightarrow D(P) \rightarrow \delta \uparrow P = - \delta \uparrow$ (2.747)

ab, daß eine Raumspiegelung die beiden Neutrino-Wirkungen (2.746) ineinander überführt. Die Neutrino-Wirkungen (2.746) wurden erstens von mir im Jahre 1929 veröffentlicht, um masselose Spin 1/2-Teilchen zu beschreiben. Da die Neutrino-Wirkungen (2.746) aber nicht invariant unter Raumspiegelungen sind und man zum damaligen Zeitpunkt nur Wechselwirkungen wie die elektromagnetische oder die starke kannte, die unter Raumspiegelungen invariant sind, wurden die Neutrino-Wirkungen (2.746) lange Zeit nicht beachtet. Erst 1956 wurde durch Lee und Yang anhand des β -Zerfalls von ^{60}Co gezeigt, daß die schwache Wechselwirkung nicht invariant unter Raumspiegelungen ist und damit die Parität verletzt. Seitdem hat sich die Beschreibung von Neutrinos durch die Wirkungen (2.746) durchgesetzt.

Abschließend betrachten wir noch die wellengleichung, d.h. die Bewegungsgleichung des Neutrinos:

$$\frac{\partial A}{\partial t} (2.69) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} (2.746) \alpha_i \delta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x} (2.746) = 0 \quad (2.748)$$

Im Falle eines Teilchens mit einem festen Viererimpuls $P = (P^0)$

$$\psi(x) = \psi \cdot \exp \{ i P x \} \quad (2.749)$$

geht die wellengleichung (2.748) über in

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{P} \frac{1}{2} (1 + \tau) \psi = \delta P^0 \frac{1}{2} (1 + \tau) \psi \quad (2.750)$$

Multipliziert man (2.750) von links mit $\delta \tau$, so erhält man wegen

$\delta_5 \delta_0 \delta_2$ & (2.689), (2.736) $\begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -G & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -G & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$ (2.751)
 und dem Spin-Operator (2.712) das Ergebnis

$$\frac{\sum \vec{P}}{|\rho|} \frac{1}{2} (1 + \delta_5) = \frac{1}{2} \text{sgn}(\rho_0) \delta_5 \frac{1}{2} (1 + \delta_5) \quad (2.752)$$

wegen der Energie-Impuls-Äquivalenzrelation $\rho_0 = \pm |\vec{P}|$ sind die Eigenan-
 stände $\frac{1}{2}(1 + \delta_5)$ ψ des Drehimpuls-Operators δ_5 zu den Eigenwerten ∓ 1 auch
 Eigenzustände der Helizität-Operatoren (2.193) zu den Eigenwerten $\mp \frac{1}{2} \text{sgn} \rho_0$.
 Demnach sind Drehimpuls und Helizität bei Nullimpuls identisch.

2.5.10. Ladungskonjugation:

Die Wirkung (2.688) des Dirac-Feldes ist noch bezüglich einer weiteren diskreten
 Symmetrioperation invariant, bei der die Komponenten des Dirac-Spinors $\psi(x)$ durch
 die Komponenten des komplex konjugierten Dirac-Spinors $\psi^*(x)$ ersetzt wer-
 den. Im Hinblick auf eine solche Symmetrietransformation machen wir den An-
 satz

$$\psi^c(x) = C \bar{\psi}^T \quad (2.689), (2.697) \quad C \gamma_0 \psi^* \quad (2.753)$$

wobei der Zeilenspinor $\bar{\psi}(x)$ aus (2.687) durch die Transposition T in der entgeg-
 gerichteten Spaltenspinor $\bar{\psi}^T(x)$ übergeht und C eine komplexe 4×4 -Matrix dar-
 stellt, die diese Komponenten vermischt. Die Matrix C soll dadurch festge-
 legt werden, daß der transformierte Dirac-Spinor (2.753) denselben Dirac-
 Gleichung

$$(i \partial_\mu \partial_\mu - m) \psi^c(x) = 0 \quad (2.754)$$

erfüllt wie der ursprüngliche Dirac-Spinor $\psi(x)$ in (2.692). Setzt man (2.753)
 in (2.754) ein und multipliziert man von links mit C^{-1} , so folgt

$$i C^{-1} \partial_\mu C \partial_\mu \bar{\psi}^T(x) - m \bar{\psi}^T(x) = 0 \quad (2.755)$$

was durch eine Transposition T übergeht in

$$i \partial_n \bar{\psi}(x) (C^{-2} \delta^{nc})^T - M \bar{\psi}(x) = 0 \quad (2.756)$$

Diese Bewegungsgleichung ist nun zu vergleichen mit der Dirac-Gleichung für den Dirac-adjungierten Spinor $\bar{\psi}(x)$. Um diese abzuleiten, gehen wir aus von der Dirac-Gleichung (2.692) und erhalten durch Adjungieren

$$-i \partial_n \psi^\dagger(x) (\delta^{n+} - M \psi^\dagger(x)) = 0 \quad (2.757)$$

Mit Hilfe von (2.690) für $\mu = \nu = 0$ und (2.697) ergibt dann (2.757) über in

$$-i \partial_n \bar{\psi}(x) \delta^0 (\delta^{n+} + \delta^0 - M \bar{\psi}(x)) = 0 \quad (2.758)$$

die Dirac-Matrizen $\delta^{\mu\nu}$ herleiten nun die Eigenschaften

$$\delta^0 (\delta^{n+} + \delta^0) \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{n+} & 0 \\ 0 & \delta^{n+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^{n+} & 0 \\ 0 & \delta^{n+} \end{pmatrix} \delta^0 \quad (2.759)$$

so daß die Dirac-Gleichung für den Dirac-adjungierten Spinor $\bar{\psi}(x)$ gegeben ist durch

$$i \partial_n \bar{\psi}(x) \delta^0 + M \bar{\psi}(x) = 0 \quad (2.760)$$

Diese Bewegungsgleichung für den Dirac-adjungierten Spinor $\bar{\psi}(x)$ entspricht der Euler-Lagrange-Gleichung der Dirac-Wirkung:

$$\delta A \frac{\partial \delta}{\partial \psi(x)} - \partial_n \frac{\partial \delta}{\partial (\partial_n \psi(x))} - \alpha \int d^4x \bar{\psi}(x) \delta^4 M \bar{\psi}(x) = 0 \quad (2.760)$$

Der Vergleich von (2.756) und (2.760) liefert dann auf die folgende Bestimmungsgleichung für die Matrix C :

$$(C^{-2} \delta^{nc})^T = -\delta^{cn} \Rightarrow C^{-2} \delta^{nc} = -(\delta^{cn})^T \quad (2.761)$$

Macht man zur Lösung von (2.761) für die Matrix C den diagonalen Ansatz

$$C = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}, \quad C^{-2} = \begin{pmatrix} c^{-2} & 0 \\ 0 & -c^{-2} \end{pmatrix} \quad (2.762)$$

so ergibt sich aus (2.689) und (2.761)

$$\begin{pmatrix} C^{-2} & 0 \\ 0 & -C^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^{-2} & 0 \\ 0 & -C^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -C^{-2} & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C^{-2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C^{-2} B^M C = (B^M)^T, \quad C^{-2} \delta^M C = -(B^M)^T.$$

Erachtet man beide Gleichungen (2.763) im $\mu=0$ und $\mu=1$ aus, so führen beide auf die Bedingungen

$$\begin{aligned} C^{-2} B^0 C &= (B^0)^T, & (2.764) \\ C^{-2} B^1 C &= -(B^1)^T. & (2.765) \end{aligned}$$

Wenn man sich die transponierten Invers-Matrizen zu (2.692) B^0 , $(B^1)^T$ (2.608) B^1 , $(B^2)^T$ (2.608) B^2 , $(B^3)^T$ (2.608) B^3 leisten würde, so ergibt sich durch

$$C = -i B^2 \begin{pmatrix} 2.608 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.767)$$

mit der Eigenschaft

$$C^T = C^{-2} = C^T = -C = -C^*$$

so sind (2.764) und (2.765) tatsächlich erfüllt:

- 1.) $C^{-2} B^0 C = \begin{pmatrix} 2.767 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.768 \\ 0 \end{pmatrix} = B^0 \begin{pmatrix} 2.609 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (B^0)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$
- 2.) $C^{-2} B^1 C = \begin{pmatrix} 2.767 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.768 \\ 0 \end{pmatrix} = B^1 \begin{pmatrix} 2.609 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -(B^1)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$
- 3.) $C^{-2} B^2 C = \begin{pmatrix} 2.767 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.768 \\ 0 \end{pmatrix} = B^2 \begin{pmatrix} 2.609 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (B^2)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$
- 4.) $C^{-2} B^3 C = \begin{pmatrix} 2.767 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.768 \\ 0 \end{pmatrix} = B^3 \begin{pmatrix} 2.609 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -(B^3)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$

Aufgrund von (2.768) besitzt die Matrix C von (2.762) die Eigenschaft

$$C^T = C^{-2} = C^T = -C = -C^* \quad (2.769)$$

und läßt sich als Produkt von zwei Matrizen darstellen:

$$\underline{(2.762)} \rightarrow \vec{\varphi}_C(x) = \varphi^T(x) C$$

(2.774)

Für die transformierte Vektorstromdichte gilt zunächst

$$\dot{j}_C^m(x) \underline{(2.773)} \llcorner \varphi_C^l(x) \delta^m \varphi_C^l(x) \underline{(2.753)}, \underline{(2.774)} \llcorner \varphi^T(x) C \delta^m C \delta^0 \varphi^*(x) \underline{(2.775)}$$

Da die einzelnen Komponenten $\dot{j}_C^m(x)$ der transformierten Vektorstromdichte mit ihrem Transponierten übereinstimmen, folgt dann

$$\dot{j}_C^m(x) = (\dot{j}_C^m(x))^T \underline{(2.775)} \llcorner \varphi^T(x) C \delta^m C \varphi(x) \underline{(2.689)}, \underline{(2.761)}, \underline{(2.769)}$$

$$\llcorner \varphi^T(x) \delta^0 \delta^m \varphi(x) \underline{(2.697)} \llcorner \varphi^T(x) \delta^m \varphi(x) \underline{(2.773)} \dot{j}^m(x) \underline{(2.776)}$$

Die physikalische Bedeutung der diskreten Symmetriegeneration (2.753) als Ladungskonjugation wird erst bei der Quantisierung des Dirac-Felds deutlich werden, da dann im Unterschied zu (2.776) der Vektorstromdichtektor sein Vorzeichen wechselt.

27.06.00

2.5.11. Zeitspiegelung:

Auch eine Zeitspiegelung T wird der Vektorvektor x in den zeitlich invertierten Vektorvektor $-x$ abgebildet:

$$\underline{(2.777)}$$

$$x_T^i = T x = -x.$$

Führt man eine Zeitspiegelung T zweimal hintereinander aus, so verbleibt man im ursprünglichen Zustand. Die Zeitspiegelung T ist demnach involutorisch

$$\underline{(2.778)}$$

$$T^2 = 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad T^{-1} = T.$$

Die Darstellungsmatrix für eine solche Zeitspiegelung lautet

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{(2.779)}$$

Die Zeitgleichung harmonisiert mit den Eigenwerten der Potenzen (2.41)

$$\begin{aligned}
 T^{-2} L_1 T &= (-i) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L_1 \\
 T^{-2} L_2 T &= (-i) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L_2 \\
 T^{-2} L_3 T &= (-i) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L_3
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T^{-2} L_1 T = L_1 \quad (2.780)$$

und antisymmetrisch mit den Eigenwerten der Potenzen (2.42)

$$\begin{aligned}
 T^{-2} M_1 T &= (-i) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -M_1 \\
 T^{-2} M_2 T &= (-i) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -M_2 \\
 T^{-2} M_3 T &= (-i) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -M_3
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T^{-2} M_k T = -M_k \quad (2.781)$$

Wir untersuchen zunächst die Hermiteschen in der Zeitgleichung für die Lösung der Gleichung

$$\left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} \psi(x,t) = 0 \quad (2.782)$$

Oftenermisch genügt die zeitgenetische Wellenfunktion

(2.783)

$$\psi_{\downarrow}(\vec{x}, t) = \psi^*(\vec{x}, -t)$$

ebenfalls der Schrödinger-Gleichung

(2.784)

$$\left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \vec{x}^2} \right\} \psi_{\downarrow}(\vec{x}, t) = 0.$$

In Analogie zu (2.783) führen wir die Zeiterspiegelung an einem Dirac-Spinor durch

(2.785)

$$\psi(x) \xrightarrow{T} \psi_{\downarrow}(x) = D(T) \psi^*(-x)$$

ein, wobei $D(T)$ die Darstellungsmatrix der Zeiterspiegelung im Raum der Dirac-Spinoren darstellt. Dabei vermuten wir, daß $D(T)$ auch die übliche Unitäritätsbedingung (2.778) besitzt

(2.786)

$$D(T)^2 = 1$$

und wir erwarten, daß auch die üblichen Kommutator bzw. Antikommutatorrelationen (2.780) bzw. (2.781) mit den Darstellungsmatrizen $D(L_a)$ bzw. $D(M_k)$ der Rotationen und Boost im Raum der Dirac-Spinoren erfüllt sind:

(2.787)

$$D(T)^{-1} D(L_a) D(T) = D(L_a),$$

(2.788)

$$D(T)^{-1} D(M_k) D(T) = -D(M_k).$$

In Analogie zu (2.784) fordern wir, daß alle zeitgespiegelte Dirac-Spinoren (2.785) ebenfalls der Dirac-Gleichung (2.692) genügt:

(2.789)

$$(i \partial_m \partial_m - m) \psi_{\downarrow}(x) = 0.$$

Setzen wir (2.785) in (2.789) ein so folgt

(2.790)

$$-i \{ D(T)^{-1} \partial_m D(T) \}^* \partial_m \psi(-x) - m \psi(-x) = 0.$$

Vergleichen wir (2.790) mit der zeitgespiegelten Dirac-Gleichung (2.692)

(2.791)

$$-i \partial_m \partial_m \psi(-x) - m \psi(-x) = -i \partial_m \partial_m \psi(-x) - m \psi(-x) = 0,$$

so erhalten wir für die Darstellungsmatrix $D(T)$ der Zeiterspiegelung die Be-

Eine Lösung von (2.797) lautet

$$D(T)C^{-1} = -i85, \quad \{D(T)C^{-1}\}^{-1} = 2i85, \quad (2.798)$$

wie wir durch explizites Nachrechnen überprüfen können:

$$85i85 \begin{pmatrix} 2.689 & 2.736 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.689)$$

Damit ergibt sich aus (2.798) die Darstellungsmatrix $D(T)$ zu

$$D(T) = \begin{pmatrix} 2.798 & \\ -i85C & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.736 & 2.762 \\ 0 & -C \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \quad (2.799)$$

wobei dies die Eigencharaktere

$$D(T) = D(T)^{-1} = D(T)^{\dagger} = -D(T)^* \quad (2.800)$$

besitzt. Gemäß (2.800) erfüllt die Darstellungsmatrix $D(T)$ zwar die Eigenschaft (2.786), die Zeit Spiegelung am Dirac - Spinner ist aber nicht invertierbar. Nicht:

$$\psi_T^{\dagger}(x) \begin{pmatrix} 2.785 \\ D(T) \end{pmatrix} \psi_T^*(-x) \begin{pmatrix} 2.785 \\ D(T) \end{pmatrix}^* \psi(x) = \psi(x). \quad (2.801)$$

Also erhalten von Dirac - Spinoren unter Zeit Spiegelung entspricht dem bei einer Raum Drehung, wie nach (2.627) und (2.696) der ursprüngliche Dirac - Spinner erst durch eine Raum Drehung um ψ_T entsteht. Für die Kommutatoren von $D(T)$ mit $D(C)$ erhalten wir

$$D(T)^{-1} D(L) D(T) \begin{pmatrix} 2.711 & 2.799 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C \frac{1}{2} C & 0 \\ 0 & -C \frac{1}{2} C \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2.765 & 2.768 \\ 0 & \frac{1}{2}(5A)T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.622 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(5A)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.711 & \\ 0 & \frac{1}{2}(5A)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.711 & \\ 0 & \frac{1}{2}(5A)^* \end{pmatrix}^* D(L) \begin{pmatrix} 2.802 \end{pmatrix}$$

und entsprechend gibt für die Kommutatoren von $D(T)$ mit $D(M)$

$$D(T)^{-1} D(M) D(T) \begin{pmatrix} 2.710 & 2.799 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} C & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} C \end{pmatrix}$$

$$\underline{(2.765), (2.768)} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(G^A)^T & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(G^A)^T & \underline{(2.622)} \\ \underline{-\frac{1}{2}(G^A)^*} & 0 & \underline{\frac{1}{2}(G^A)^*} \end{pmatrix} \underline{(2.710)} - D(M^A)^* \quad (2.803)$$

Die Ergebnisse (2.802), (2.803) stimmen nicht mit unseren ursprünglichen Erwartungen (2.787), (2.788) überein. Sie deuten darauf hin, daß die Zeitgleichung antilinear ist.

2.5.12. Dirac-Darstellung:

Die bisher verwendete Darstellung (2.689) der Dirac-Matrizen δ^{\pm} wird als direkte Darstellung (Weyl-Darstellung) bezeichnet, da in dieser Darstellung der Dirac-Operatoren δ^{\pm} gemäß (2.736) diagonal ist. Ausgruppen-theoretischer Sicht bedeutet sie den Vorteil, daß die Darstellungsmatrizen der Lorentz-Transformationsmatrix (2.696) eine Blockdiagonalgestalt besitzen. Eine andere gleichmäÙigere Darstellung ist die sogenannte Dirac-Darstellung (Standard-Darstellung)

$$(2.804)$$

wobei die Transformationsmatrix S_D gegeben ist durch

$$S_D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix} \quad (2.805)$$

mit dem Inversen

$$S_D^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} = S_D^T. \quad (2.806)$$

Die Transformationsmatrix S_D ist demnach orthogonal bzw. unitär. Für den Dirac-adjungierten Dirac-Spinor $\bar{\psi}(x)$ erhält man in der Dirac-Darstellung

$$\underline{\bar{\psi}_D(x)} \underline{(2.697)} \underline{\psi_D^{\pm}(x)} \delta^0 \underline{(2.804)} \underline{\psi^{\pm}(x)} S_D^{\pm} \delta^0 \underline{(2.697)} \underline{\bar{\psi}(x)} \delta^0 S_D^{\pm} \delta^0 \underline{(2.689), (2.805)}$$

$$\mathcal{P}(x) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix} = \mathcal{P}(x) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} \quad (2.807)$$

Für die Dirac-Matrizen σ_n erhält man in der Dirac-Darstellung

$$\sigma_D^0 = S_D \sigma^0 S_D^{-1} \quad (2.805), (2.806) \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (2.808)$$

$$\sigma_D^k = S_D \sigma^k S_D^{-1} \quad (2.805), (2.806) \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.809)$$

Es kann entsprechend berechnet werden, daß sich der Chiralitäts-Operator γ_5 in der Dirac-Darstellung:

$$\gamma_5^D = S_D \gamma_5 S_D^{-1} \quad (2.736), (2.805), (2.806) \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (2.810)$$

und ist demnach nicht mehr diagonal. Umgekehrt ist die Dirac-Matrix σ^0 in der Weir-Darstellung (2.689) nicht diagonal, während sie in der Dirac-Darstellung (2.808) diagonal ist. Die Generatoren der Rotationen im Spinorraum sind unter dem Darstellungswechsel invariant

$$D(L_A)_D = S_D D(L_A) S_D^{-1} \quad (2.711), (2.805), (2.806) \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sigma^k & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \sigma^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sigma^k & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \sigma^k \end{pmatrix} \quad (2.811)$$

und für die Generatoren der Boosts im Spinorraum erhält man in der Dirac-Darstellung

$$D(M_k)_D = S_D D(M_k) S_D^{-1} \quad (2.710), (2.805), (2.806) \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sigma^k & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \sigma^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \sigma^k \\ \frac{1}{2} \sigma^k & 0 \end{pmatrix} \quad (2.812)$$

2.5.13. Nichtrelativistischer Limes:

Die Dirac-Darstellung besitzt den Vorteil, daß in ihr der nichtrelativistische Limes einfach durchzuführen ist. Im Limes einfach durchzuführen ist die Dirac-Darstellung

$$\text{die Dirac-Gleichung (2.692) gemäß (2.804) in die Dirac-Darstellung} \\ i \sigma_D^0 \partial_t \psi_D(x) - m \mathcal{P}_D(x) = 0. \quad (2.813)$$

In dieser manliest kovarianten Formulierung der Dirac-Gleichung treten
 nur wie nun zeitliche und räumliche Anteile

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_D(\vec{x}, t) + i \hbar \vec{\alpha} \cdot \nabla \psi_D(\vec{x}, t) - M c \psi_D(\vec{x}, t) = 0 \quad (2.814)$$

die Dirac-Gleichung läßt sich dann in die Form einer Schrödinger-Gleichung bringen

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_D(\vec{x}, t) = \hat{H}_D \psi_D(\vec{x}, t) \quad (2.815)$$

wobei der Diracsche Hamilton-Operator gegeben ist durch

$$\hat{H}_D = -i \hbar \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + c \alpha_4 M c \beta \quad (2.816)$$

wie hierbei auftretenden Matrizen

$$\beta = \sigma_D \quad (2.808) \quad \left(\begin{array}{c} I \\ 0 \\ 0 \\ -I \end{array} \right), \quad (2.817)$$

$$\alpha^k = \sigma_D \otimes \sigma_D^k \quad (2.809) \quad \left(\begin{array}{c} I & 0 \\ 0 & -I \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{array} \right) \quad (2.818)$$

besten dabei die Antikommutationsrelationen

$$1.) [\beta, \beta]_+ = 2 \beta^2 \quad (2.817) \quad 2. \left(\begin{array}{c} I & 0 \\ 0 & -I \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} I & 0 \\ 0 & I \end{array} \right) = 2 I \quad (2.819)$$

$$2.) [\alpha^k, \beta]_+ = \frac{(2.817), (2.818)}{\left(\begin{array}{c} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{array} \right)} \left(\begin{array}{c} I & 0 \\ 0 & -I \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} I & 0 \\ 0 & -I \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{array} \right) = 0 \quad (2.820)$$

$$3.) [\alpha^k, \alpha^l]_+ = \frac{(2.818)}{\left(\begin{array}{c} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{array} \right)} \left(\begin{array}{c} 0 & \sigma^l \\ \sigma^l & 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 0 & \sigma^l \\ \sigma^l & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \sigma^k \sigma^l & 0 \\ 0 & \sigma^l \sigma^k \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \sigma^l \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \sigma^l \end{array} \right) = 0 \quad (2.821)$$

$$= \left(\begin{array}{c} [\sigma^k, \sigma^l]_+ & 0 \\ 0 & [\sigma^k, \sigma^l]_+ \end{array} \right) \frac{(2.609)}{2 \sigma^k \sigma^l} \left(\begin{array}{c} I & 0 \\ 0 & I \end{array} \right) = 2 \sigma^k \sigma^l I \quad (2.822)$$

Wie in der Weier- Darstellung in (2.684) so zerlegen wir auch in der Dirac-
 Darstellung der vierkomponentigen Dirac-Spinor in zwei zweikomponen-
 tenten Weier-Spinoren:

$$\psi_D(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) \\ \tilde{\chi}_D(\vec{x}, t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_D(\vec{x}, t) \\ \chi_D(\vec{x}, t) \end{pmatrix} \quad (2.822)$$

Einsetzen von (2.822) in (2.815) und (2.816) führt dann unter Beachtung von (2.817) und (2.818) auf zwei gekoppelte Bewegungsgleichungen für diese vier Spinoren:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) \\ \tilde{\chi}_D(\vec{x}, t) \end{pmatrix} = -i\hbar c \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \nabla \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) \\ \tilde{\chi}_D(\vec{x}, t) \end{pmatrix} + c\hbar M \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) \\ \tilde{\chi}_D(\vec{x}, t) \end{pmatrix} \quad (2.823)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) = -i\hbar c \vec{\sigma} \cdot \nabla \tilde{\chi}_D(\vec{x}, t) + c\hbar M \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t), \quad (2.824)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\chi}_D(\vec{x}, t) = -i\hbar c \vec{\sigma} \cdot \nabla \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) - c\hbar M \tilde{\chi}_D(\vec{x}, t). \quad (2.825)$$

Wir berücksichtigen nun, dass gemäß (2.158) die relativistische und nicht-relativistische Energieerhaltung um die Ruheenergie mc^2 gegeneinander verschieben sind:

$$\psi_D(\vec{x}, t) \stackrel{(2.822)}{=} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t} \\ \tilde{\chi}_D(\vec{x}, t) e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t} \end{pmatrix} \quad (2.826)$$

Es durch gehen die beiden gekoppelten Bewegungsgleichungen (2.823), (2.824) über in

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) = -i\hbar c \vec{\sigma} \cdot \nabla \tilde{\chi}_D(\vec{x}, t) + \{c\hbar M - mc^2\} \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t), \quad (2.827)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\chi}_D(\vec{x}, t) = -i\hbar c \vec{\sigma} \cdot \nabla \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) + \{-c\hbar M - mc^2\} \tilde{\chi}_D(\vec{x}, t).$$

Setzen wir den noch offenen Parameter M durch die Compton-Wellenlänge des Teilchens fest

$$M = \frac{mc}{\lambda}, \quad (2.828)$$

so tritt die Ruheenergie mc^2 nur noch in der zweiten Bewegungsgleichung auf

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) = -i\hbar c \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t), \quad (2.829)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) = -i\hbar c \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) + 2mc^2 \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t). \quad (2.830)$$

Zur nichtrelativistischen Grenze $c \rightarrow \infty$ ist nun die kinetische Energie des Well-Spinors $\tilde{\psi}_D$ gegenüber dessen Ruheenergie vernachlässigbar

$$\left| i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) \right| \ll |mc^2 \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t)|, \quad (2.831)$$

so daß sich näherungsweise der Well-Spinor $\tilde{\psi}_D$ durch den Well-Spinor $\tilde{\psi}_D$ ausdrücken läßt:

$$\tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) = \frac{i\hbar}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t). \quad (2.832)$$

Einsetzen von (2.832) in (2.829) führt dann auf die Schrödingere-Gleichung für den Well-Spinor $\tilde{\psi}_D(\vec{x}, t)$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\sigma} \cdot \nabla \vec{\sigma} \cdot \nabla \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{2} [\sigma_x, \sigma_y] + \partial_x \partial_x \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) \quad (2.833)$$

(2.609) $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{2} \sigma_x \sigma_x \partial_x \partial_x \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t)$.
 Führt man den nichtrelativistischen Limes in der Dirac-Gleichung bei Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes durch, so erhält man für den Well-Spinor $\tilde{\psi}_D(\vec{x}, t)$ statt der Schrödingere-Gleichung (2.833) die Pauli-Gleichung. Dabei tritt automatisch der richtige Lande-Faktor $g_s = 2$ auf.

Wer betrachtet nun den nichtrelativistischen Limes der Dirac-Wirkung (2.688), (2.691) in der Dirac-Darstellung

$$A = \int d^4x \alpha \bar{\psi}_D(\vec{x}, t) \{ \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \partial_x - M \} \psi_D(\vec{x}, t). \quad (2.834)$$

Nach (2.697), (2.808), (2.825) lautet der Dirac-adjungierte Dirac-Spinor

$$\Psi_D(x,t) = \psi_D^+(x,t) \psi_0 = \left(\int_D^+ (x,t) e^{+i\frac{1}{2} m c^2 t} - \int_D^- (x,t) e^{+i\frac{1}{2} m c^2 t} \right) \quad (2.835)$$

damit ergibt sich die Dirac - Wärlung (2.834) unter Beachtung von (2.809), (2.809), (2.825), (2.828) zu

$$A = \int d^4x \alpha \left\{ i \psi_D^+(x,t) \psi_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi_D^+(x,t) + i \psi_D^-(x,t) \psi_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi_D^-(x,t) \right\} - m \psi_D^+(x,t) \psi_0(x,t) \quad (2.836)$$

$$= \int d^4x \alpha \left\{ \frac{i}{c} \left(\int_D^+ (x,t) - \int_D^- (x,t) \right) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \left(\frac{\partial \int_D^+ (x,t)}{\partial t} - \frac{i}{4} m c^2 \int_D^+ (x,t) \right) \right. \\ \left. - \frac{m c}{4} \left(\int_D^+ (x,t) - \int_D^- (x,t) \right) \begin{pmatrix} \int_D^+ (x,t) \\ \int_D^- (x,t) \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \int d^4x \alpha \left\{ \frac{i}{c} \left[\int_D^+ (x,t) \frac{\partial \int_D^+ (x,t)}{\partial t} + \int_D^- (x,t) \frac{\partial \int_D^- (x,t)}{\partial t} \right] + \frac{m c}{4} \left[\int_D^+ (x,t) \int_D^+ (x,t) + \int_D^- (x,t) \int_D^- (x,t) \right] \right.$$

$$+ i \left[\int_D^+ (x,t) \psi_0 \int_D^- (x,t) + \int_D^- (x,t) \psi_0 \int_D^+ (x,t) \right] - \frac{m c}{4} \left[\int_D^+ (x,t) \int_D^+ (x,t) - \int_D^- (x,t) \int_D^- (x,t) \right] \left. \right\}$$

$$= \int d^4x \alpha \left\{ \frac{i}{c} \left[\int_D^+ (x,t) \frac{\partial \int_D^+ (x,t)}{\partial t} + \int_D^- (x,t) \frac{\partial \int_D^- (x,t)}{\partial t} \right] + i \left[\int_D^+ (x,t) \psi_0 \int_D^- (x,t) + \int_D^- (x,t) \psi_0 \int_D^+ (x,t) \right] \right.$$

$$+ 2 \frac{m c}{4} \int_D^+ (x,t) \int_D^- (x,t) \left. \right\}$$

achtet man nun den Well - Spinor ψ_0 gemäß (2.832) durch den Well - Spinor \int_D^+ aus, so ergibt (2.836) im nichtrelativistischen Limes $c \rightarrow \infty$ die Form

$$A = \int d^4x \alpha \left\{ \frac{i}{c} \int_D^+ (x,t) \frac{\partial \int_D^+ (x,t)}{\partial t} + i \left[\int_D^+ (x,t) \psi_0 \int_D^- (x,t) - \frac{i b}{2 m c} \int_D^+ (x,t) + \frac{i b}{2 m c} \int_D^- (x,t) \right] \right.$$

$$\left. + 2 \frac{m c}{4} \int_D^+ (x,t) \int_D^- (x,t) \right\}$$

$$(2.613) \rightarrow A = \int d^4x \alpha \left\{ \frac{i}{c} \int_D^+ (x,t) \frac{\partial \int_D^+ (x,t)}{\partial t} + \frac{b}{4} \int_D^+ (x,t) \Delta \int_D^+ (x,t) \right\} -$$

Wegen ψ_0 im den nach obigen Parameter a durch

$$a = c t \quad (2.838)$$

geht, so geht (2.837) in die Schrödinger-Wellengleichung (1.155) - (1.157) für den reellen Spinor ψ über

$$A = \int d^4x \left\{ i\hbar \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^\dagger \Delta \psi \right\} \quad (2.839)$$

Nach den Festlegungen (2.828) und (2.838) lautet dann die Dirac-Lagrangendichte in der Weir-Darstellung

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) \{ i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - mc^2 \} \psi(x). \quad (2.840)$$

Im folgenden werden wir einige Anwendungen des in Abschnitt 2.3. diskutierten Noether-Theorems auf die Lagrange-Dichte (2.840) des Dirac-Feldes diskutieren. Dabei haben wir zu beachten, daß die in Abschnitt 2.3. diskutierten allgemeinen Felder $\psi(x)$ sowohl mit dem Dirac-Spinor $\psi(x)$ als auch mit dem Dirac adjungierten Dirac-Spinor $\bar{\psi}(x)$ zu identifizieren sind.

2.5.14. Viererstromdichte:

Die Lagrange-Dichte (2.840) besitzt die innere Symmetrie, daß sie unter den globalen Phasentransformationen

$$\psi'(x^\lambda) = \psi(x^\lambda) e^{-\frac{i}{\hbar} \varphi}, \quad \bar{\psi}'(x'^\lambda) = \bar{\psi}(x^\lambda) e^{+\frac{i}{\hbar} \varphi}, \quad x'^\lambda = x^\lambda \quad (2.841)$$

invariant ist. Sie infinitesimalen Transformationen zu (2.841) lautet

$$\delta \psi(x^\lambda) = -\frac{i}{\hbar} \varphi(x^\lambda) \psi(x^\lambda), \quad \delta \bar{\psi}(x^\lambda) = +\frac{i}{\hbar} \varphi(x^\lambda) \bar{\psi}(x^\lambda), \quad \delta x^\lambda = 0, \quad (2.842)$$

so daß sich die allgemeine Kontinuitätsgleichung (2.375) auf die Kontinuitätsgleichung der Ladungserhaltung (2.772) reduziert. Die Viererstromdichte $\delta^\mu(x^\lambda)$ ist dabei gegeben durch

$$\dot{j}^m(x^\lambda) \stackrel{(2.376)}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_m \psi(x^\lambda))} \delta \psi(x^\lambda) + \delta \bar{\psi}(x^\lambda) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_m \bar{\psi}(x^\lambda))}$$

$$\stackrel{(2.842)}{=} -i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_m \psi(x^\lambda))} \psi(x^\lambda) - \bar{\psi}(x^\lambda) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_m \bar{\psi}(x^\lambda))} \right\} \stackrel{(2.840)}{=} \bar{\psi}(x^\lambda) c \gamma^m \psi(x^\lambda). \quad (2.843)$$

Damit ist die in (2.773) aufstretende Konstante K festgelegt zu

$$K = c. \quad (2.844)$$

Die zur Kontinuitätsgleichung (2.772) gehörende Erhaltungsgroße ist die Ladung:

$$Q = \int d^3x \frac{1}{c} \dot{\psi}(\vec{x}, t) \stackrel{(2.843)}{=} \int d^3x \bar{\psi}(\vec{x}, t) \gamma^0 \psi(\vec{x}, t) \stackrel{(2.690), (2.697)}{=} \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t). \quad (2.845)$$

2.5.15. Hamiltonischer Energie - Impuls - Tensor:

Die Lagrange - Dichte (2.840) des Dirac - Feldes besitzt darüber hinaus die äquivalente Symmetrie, daß sie unter den Raum - Zeit - Transformationen

$$\psi'(x'^\lambda) = \psi(x^\lambda), \quad \bar{\psi}'(x'^\lambda) = \bar{\psi}(x^\lambda), \quad x'^\nu = x^\nu + \epsilon^\nu \quad (2.846)$$

invariant ist. Da die infinitesimalen Transformationen in (2.846) gegeben sind durch

$$\delta \psi(x^\lambda) = 0, \quad \delta \bar{\psi}(x^\lambda) = 0, \quad \delta x^\nu = \epsilon^\nu, \quad (2.847)$$

reduziert sich die allgemeine Kontinuitätsgleichung (2.375) auf die Kontinuitätsgleichung der Energie - Impuls - Erhaltung in (2.380). Die Kontinuitätsidenten Komponenten $\mathbb{D}^{\mu\nu}(x^\lambda)$ des Energie - Impuls - Tensors ergeben sich dabei unter Verwendung der Dirac - Gleichung zu

$$\mathbb{D}^{\mu\nu}(x^\lambda) \stackrel{(2.381)}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_m \psi(x^\lambda))} \partial^\nu \psi(x^\lambda) + \partial^\nu \bar{\psi}(x^\lambda) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_m \bar{\psi}(x^\lambda))} - g^{\mu\nu} \cdot \mathcal{L}$$

$$(2.840) \quad i\hbar c \bar{\psi}(x_A) \delta^m \delta^n \psi(x_A) - g_{mn} \bar{\psi}(x_A) \delta^m \delta^n \psi(x_A) - mc^2 I_3 \psi(x_A)$$

$$(2.828) \quad i\hbar c \bar{\psi}(x_A) \delta^m \delta^n \psi(x_A) \quad (2.848)$$

Es ist anzunehmen, daß der kanonische Energie-Impuls-Tensor des Dirac-Feldes nicht symmetrisch ist. Dies liegt am nicht verschwindenden Spin der Quanten des Dirac-Feldes. Sie zur Kontinuitätsgleichung (2.375) gehörenden Erhaltungsgroßen bilden den Vierimpulsvektor

$$P^r = \frac{1}{c} \int d^3x \Theta^{0r}(\vec{x}, t) \quad (2.848) \quad i\hbar \int d^3x \bar{\psi}(\vec{x}, t) \delta^0 \delta^r \psi(\vec{x}, t) \quad (2.690), (2.697) \quad \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}, t) i\hbar \delta^0 \delta^r \psi(\vec{x}, t) \quad (2.849)$$

Der Vierimpulsvektor des Dirac-Feldes ist demnach das skalare Produkt des Vierimpulsoperators (2.108) bezüglich des Dirac-Spinors. Die Energie des Dirac-Feldes ist dann gegeben durch

$$(2.850)$$

$$E = c P^0 \quad (2.849) \quad i\hbar \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}, t) \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t}$$

und der Impuls des Dirac-Feldes lautet

$$(2.851)$$

$$P^k \quad (2.849) \quad \frac{\hbar}{i} \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}, t) \vec{\nabla} \psi(\vec{x}, t).$$

2.5.16. Symmetrisierter Energie-Impuls-Tensor:

Wir führen nun die in Abschnitt 2.3.11. diskutierte Belinfante-Kontinuität zur Symmetrisierung des kanonischen Energie-Impuls-Tensor des Dirac-Feldes durch. Zunächst bemerken wir, daß die Darstellungsmatrizen γ^A des Lorentz-Algebros im Spinorraum nach (2.709) durch die Matrizen S^AB in (2.713) gegeben sind. Der Spinorimpuls-Tensor des Dirac-Feldes lautet dann

$$S^{mn}{}^r(x) \quad (2.390) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_m \psi(x))} \quad (-i) S^{mn} \psi(x) + (-i) \bar{\psi}(x) S^{mn} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_n \bar{\psi}(x))}$$

$$(2.840) \quad \bar{\psi}(x) i\hbar c \delta^m(-i) S^{nr} \psi(x) = \hbar c \bar{\psi}(x) \delta^m S^{nr} \psi(x).$$

$$(2.852)$$

