

2.1.1. Wienervektoren:

Die spezielle Relativitätstheorie beruht auf zwei Postulaten:

(P1) Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich.  
(P2) Die Fundamentalen Gleichungen der Physik besitzen in allen Inertialsystemen die gleiche Form (Relativitätsprinzip).

Die Forderung auf eine Forminvarianz der Postulate (P2) werden Wienervektoren eingeführt. Ereignisweise wird ein Punkt in der Raum-Zeit (Minkowski-Massenschwerkeln koordinaten) Wienervektor

$$(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{x}) = (ct, \vec{x}^i) \tag{2.1}$$

bedeuten. Hierbei vereinbaren wir, dass die griechischen (bestimmlichen) Indizes von 0 bis 3 (von 1 bis 3) laufen und dass über doppelt auftretende Indizes gemäß der Einsteinischen Summenkonvention aufsummiert wird.

Aus dem Postulat (P1) folgt für einen Lichtstrahl in zwei verschiedenen Inertialsystemen  $c^2 t^2 - \vec{x}^2 = c^2 t'^2 - \vec{x}'^2$  (2.2)

Diese Bedingung lässt sich mit Hilfe der Lorentztransformation Minkowski-Metrik (2.3)

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

als Invarianz des Skalarproduktes der Lorentztransformierten Wienervektoren  $x^\mu$  und  $x'^\nu$  formulieren: (2.4)

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu$$

Neben dem Lorentztransformierten Wienervektor (2.1) führt man gemäß (2.5)

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

noch den kovarianten Wienervektor ein:

$$(x^0) = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x^i) = (ct, -\vec{x}) \quad (2.6)$$

Wenn lautet nämlich die Transformation des Vierlingsvektors (2.4)

$$x^{\mu} x_{\mu} = x^{\nu} \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\mu} \quad (2.7)$$

Aufgrund der offensichtlich Identität

$$g_{\mu\nu} \delta^{\nu\alpha} = g_{\mu\alpha} \quad (2.8)$$

können man das Transformations-Symbol identifizieren als

$$\delta^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} \quad (2.9)$$

Die kontravariante Minkowski-Metrik (2.3) ist mit ihrem Inversen

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

identisch. Aufgrund der offensichtlich Identität

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \quad (2.11)$$

und (2.9) läßt sich (2.10) als kontravariante Minkowski-Metrik identifizieren. Mit ihrem Rufe läßt sich umgekehrt ein kontravariante Vierlingsvektor in einem Raum-Transformations Vierlingsvektor umwandeln:

$$g^{\mu\alpha} x_{\alpha} \stackrel{(2.5)}{=} g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} x^{\nu} \stackrel{(2.11)}{=} \delta^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = x^{\mu} \quad (2.12)$$

Zusammenfassend können man den nach festhalten, daß die kontravariante Metrik (2.4) Invariant, während die kontravariante Metrik (2.10) Invariant bleibt. richtig.

Der Beweis des Vierlingsvektors erstreckt sich auf alle Objekte, deren Produkt in allen Inertialsystemen übereinstimmen. Etwa den vier Beispielsweise die Energie-Impuls-Beziehungen eines relativistischen Teilchens im zwei Inertialsystemen

$$E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2, \quad E'^2 = m^2 c^4 + \vec{p}'^2 c^2 \quad (2.13)$$

so folgt aus der Gleichheit der Massen

$$m = m' \quad (2.14)$$

die Bedingung

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 = \left(\frac{E'}{c}\right)^2 - \vec{p}'^2 \quad (2.15)$$

Erlaubt man den kontravarianten Viererimpuls-vektor ein

$$(p_\mu) = (p_0, p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right), \quad (2.16)$$

so lässt sich die Bedingung (2.15) als Invarianz des Skalarproduktes der kontravarianten Impulsvektoren  $p_\mu$  und  $p'_\mu$  formulieren:

$$g_{\mu\nu} p^\mu p'^\nu = g_{\mu\nu} p'^\mu p'^\nu$$

Erlaubt man analog zu (2.5) mit

$$p_\mu = g_{\mu\nu} p'^\nu$$

auch einen kontravarianten Viererimpulsvektor  $p^\mu$

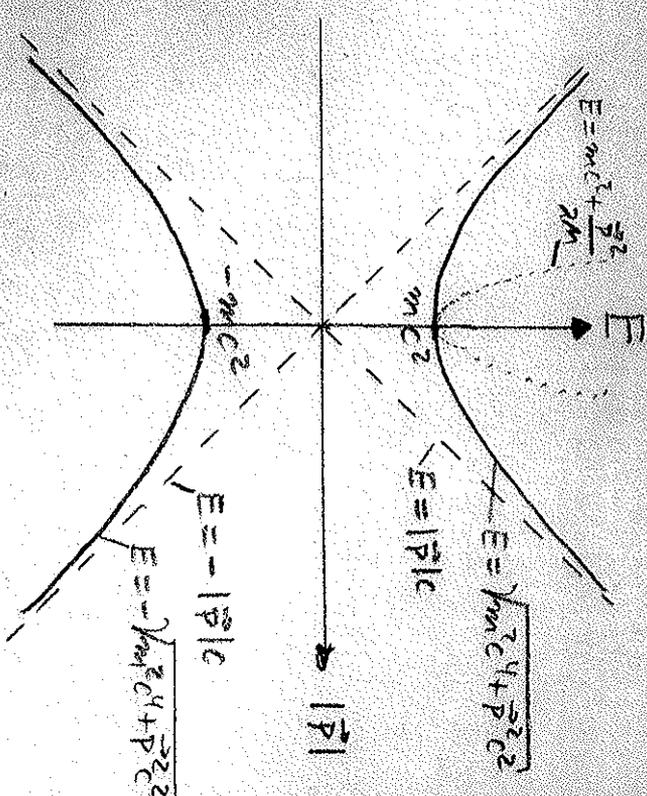
$$(p^\mu) = (p_0, p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right), \quad (2.17)$$

so lautet die Invarianz des Skalarproduktes (2.17)

$$p_\mu p^\mu = p'_\mu p'^\mu \quad (2.18)$$

### 2.1.2. Relativierende Darstellung der Lorentz-Gruppe:

Wenn strahlen wir die Sondergebilde, die sich aus der Invarianz der Skalarprodukte ableiten lassen, überlegen wir uns, wie sich diese in einem anderen Inertialsystem darstellen. Wir wissen, dass zwischen zwei Inertialsystemen eine lineare Ab-



$$(2.17)$$

$$(2.18)$$

$$(2.19)$$

$$(2.20)$$

Orthogonaltransformationen herstellt:

$$x^m = A^m x^r \quad (2.21)$$

Die Inverse  $(21)$  führt dann zu einer Eindeutigkeit der in  $(2.21)$  aufgestellten  $4 \times 4$ -Matrizen  $(A^m)$ :

$$g_{m \times n} \xrightarrow{(2.4)} g_{m \times m} x^r \xrightarrow{(2.21)} g_{m \times n} A^m A^r x^s = g_{s \times n} A^s A^r x^m x^r$$

$$\xrightarrow{x^m, x^r \text{ beliebig}} g_{m \times n} = A^s A^r A^s A^r g_{s \times n} \quad (2.22)$$

Bezeichnet man die Indizesformungen

$$(A^T)_m^s = g_{m \times r} (A^T)_{r \times s} = g_{m \times r} A^s x^r = A^s x^r g_{r \times m} = A^s A^m \quad (2.23)$$

so lautet die Inverse  $(2.22)$  in Matrixschreibweise

$$g = A^T g A \quad (2.24)$$

Die Menge  $\mathcal{L}$  aller  $4 \times 4$ -Matrizen  $A$ , die die Minkowski-Metrik  $g$  gemäß  $(2.24)$  zweier in die Minkowski-Metrik  $g$  abbilden, definieren die Lorentz-Transformationen. Die Menge  $\mathcal{L}$  genügt dabei den Gruppenaxiomen:

- Assoziativität:  $A_1, A_2 \in \mathcal{L}$

$$(A_1 A_2)^T g (A_1 A_2) = A_2^T (A_1^T g A_1) A_2 \xrightarrow{(2.24)} A_2^T g A_2 \xrightarrow{(2.24)} g \xrightarrow{(2.24)} A_1 A_2 \in \mathcal{L}$$

- Assoziativität der Multiplikation:  $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{L}$

$$(A_1 A_2) A_3 = A_1 (A_2 A_3)$$

- Das Einselement besitzt das symmetrische Symbol  $(2.9)$  als Symmetrisches:  $A_e = (g^{\mu\nu})$

$$\Rightarrow g = A_e^T g A_e \Rightarrow A_e \in \mathcal{L} \quad (2.25)$$

$$\Rightarrow A_e \in \mathcal{L}: A_e A = A A_e = A$$

• Zu jedem  $A \in \mathcal{R}$  gibt es ein Inverses  $A^{-1}$ :

$$g = A^T g A \Rightarrow (A^T)^{-1} g A^{-1} = g \Rightarrow (A^{-1})^T g A^{-1} = g \Rightarrow 1^{-1} \in \mathcal{R}$$

Man beachtet die Menge  $\mathcal{R}$  aller Skalar-Transformationen als Skalar-Gruppe bzw. als multiplikative Gruppe  $O(1,3)$  aufgrund der herkömmlichen Gestalt der kovarianten Minkowski-Metrik (2.35). Die Skalar-Gruppe  $\mathcal{R}$  läßt sich hinsichtlich zweier Merkmale klassifizieren:

(M1) Bildet man die Determinante von (2.24), so folgt (2.26)

$$\det g = \det A^T \cdot \det g \cdot \det A \Rightarrow (\det A)^2 = 1$$

Die Skalar-Transformation mit  $\det A = +1$  ( $\det A = -1$ ) bezeichnet man als *gerade* bzw. *speziell* (unregelmäßig bzw. nicht speziell).

(M2) Aus (2.22) folgt für  $\mu = r = 0$ :

$$1 = g_{00} = \Lambda^0_{\ 0} g_{00} \Lambda^0_{\ 0} = \Lambda^0_{\ 0} \Lambda^0_{\ 0} \Lambda^0_{\ 0} \Rightarrow (\Lambda^0_{\ 0})^2 = 1 + (\Lambda^i_{\ 0})^2 \Rightarrow (\Lambda^0_{\ 0})^2 \geq 1 \quad (2.27)$$

Eine Skalar-Transformation  $\Lambda$  mit  $\Lambda^0_{\ 0} \geq 1$  ( $\Lambda^0_{\ 0} \leq -1$ ) bezeichnet man als *orthogonal* (nicht orthogonal).

Demnach erfüllt die Skalar-Gruppe in vier verschiedene Zweige:

Zweig	$\det \Lambda$	$\Lambda^0_{\ 0}$	Beispiel
$\mathcal{R}_1$	+1	> 0	Identität: $\text{diag}(1, 1, 1, 1)$
$\mathcal{R}_2$	-1	> 0	Raum- Spiegelung: $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$
$\mathcal{R}_3$	-1	< 0	Zeit- Spiegelung: $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$
$\mathcal{R}_4$	+1	< 0	Raum- Zeit- Spiegelung: $\text{diag}(-1, -1, -1, -1)$

Da sich Skalar-Transformationen aus verschiedenen Zweigen nicht ineinander überführen lassen, ist die Skalar-Gruppe nicht zusammenhängend. Nur der Zweig  $\mathcal{R}_1$  der eigentlichen orthogonalen Skalar-Transformationen bildet ei-

ne Untersgruppe der Komuta-Gruppe, da der Hintereinanderschritt zweier Invertierungen aus diesem Zweig nicht herauszuführen. Deshalb beschaffen wir uns im folgenden nur mit diesem Zweig  $\mathcal{K}$  und bezeichnen die eigentliche ortho-donale Komuta-Gruppe der Einfachheit halber verkürzend als die Komuta-Gruppe.

### 2.1.3. Abkürzende Darstellung der Komuta-Gruppe:

Die Menge aller  $4 \times 4$ -Matrizen  $A$  wird ingeplant durch  $4 \cdot 4 = 16$  Freiheitsgraden beschrieben, wobei die Invertierbarkeit (2.22) zu  $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10$  Nebenbedingungen führt. Restall ist die Ähnlichkeit der Komuta-Gruppe

$$n = 16 - 10 = 6 \quad (2.28)$$

Nun unterscheiden wir die Komuta-Gruppe in der Umgehung des Einzelelementes in (2.25). Alle Elemente der Komuta-Gruppe, die infinitesimal vom Einzelelement abweichen, lassen sich darstellen als

$$A^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} + \omega^{\mu\nu} \tau \quad (2.29)$$

Setzt man (2.29) in die Invertierbarkeit (2.22) ein, so erhält man bis zur ersten Ordnung in der Abweichung  $\omega^{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} A^{\nu\mu} A^{\beta\alpha} g_{\beta\alpha} &= (g^{\nu\mu} + \omega^{\nu\mu}) (g^{\beta\alpha} + \omega^{\beta\alpha}) g_{\beta\alpha} \approx g^{\nu\mu} g^{\beta\alpha} + \omega^{\nu\mu} g^{\beta\alpha} + g_{\beta\alpha} \omega^{\beta\alpha} + \omega^{\nu\mu} g_{\beta\alpha} + \omega^{\beta\alpha} g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} + \omega_{\mu\nu} \stackrel{!}{=} g_{\mu\nu} \\ &\Rightarrow \omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0 \quad (2.30) \end{aligned}$$

Alle Abweichungen ( $\omega_{\mu\nu}$ ) der Komuta-Invertierbarkeit von der Identität sind also nach dem Antisymmetriecharakter der  $4 \times 4$ -Matrizen gegeben. Die Menge aller Antisymmetrischen  $4 \times 4$ -Matrizen stellen die Komuta-Gruppe der Komuta-Gruppe dar. Alle Ähnlichkeiten der Komuta-Gruppe stimmen mit der der Komuta-Gruppe in (2.28) überein.



$$= i \{ -g^{\alpha\tau} i (g^{\beta\mu} g^{\delta\nu} - g^{\delta\mu} g^{\beta\nu}) - g^{\beta\delta} i (g^{\alpha\mu} g^{\sigma\nu} - g^{\sigma\mu} g^{\alpha\nu}) + g^{\alpha\delta} i (g^{\beta\mu} g^{\sigma\nu} - g^{\sigma\mu} g^{\beta\nu}) + g^{\beta\sigma} i (g^{\alpha\mu} g^{\delta\nu} - g^{\delta\mu} g^{\alpha\nu}) \}$$

(2.33)  $i \{ g^{\alpha\delta} (L^{\beta\tau})_{\mu\nu} + g^{\beta\sigma} (L^{\alpha\delta})_{\mu\nu} - g^{\alpha\tau} (L^{\beta\delta})_{\mu\nu} - g^{\beta\delta} (L^{\alpha\tau})_{\mu\nu} \}$

$$\Rightarrow [L^{\alpha\beta}, L^{\gamma\delta}] = i \{ g^{\alpha\delta} L^{\beta\gamma} + g^{\beta\sigma} L^{\alpha\delta} - g^{\alpha\tau} L^{\beta\delta} - g^{\beta\delta} L^{\alpha\tau} \} \quad (2.36)$$

Der Kommutator zwischen zwei Basisgeneratoren l\$\$sst sich demnach zusammenfassen zu

$$[L^{\alpha\beta}, L^{\gamma\delta}] = i (C_{\epsilon\gamma}^{\alpha\beta\gamma\delta} L^{\epsilon\delta}), \quad (2.37)$$

wobei die Strukturkonstanten der Lorentz-Algebra gegeben sind durch

$$C_{\epsilon\gamma}^{\alpha\beta\gamma\delta} = g^{\alpha\delta} g^{\beta\epsilon} g^{\gamma\delta} + g^{\beta\sigma} g^{\alpha\epsilon} g^{\delta\gamma} - g^{\alpha\tau} g^{\beta\epsilon} g^{\delta\gamma} - g^{\beta\delta} g^{\alpha\epsilon} g^{\gamma\delta}. \quad (2.38)$$

23.05.2000

2.1.4. Einteilung der Basisgeneratoren:

Die Basisgeneratoren  $L^{\alpha\beta}$  lassen sich in zwei Klassen einteilen:

$$L_k = \frac{1}{2} \epsilon_{kmn} L^{em}, \quad (2.39)$$

$$M_k = L^{0k}, \quad (2.40)$$

wobei die lateinischen Indizes die Werte 1, 2, 3 annehmen und die griechischen Indizes die Werte 0, 1, 2, 3 annehmen. Nach (2.33), (2.39) und (2.40) ergibt sich dabei die folgenden expliziten Anordnungen f\$\$r die Basisgeneratoren der Drehungen

$$L_1 = L^{23} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g^{22}g^{33} \\ 0 & 0 & g^{33}g^{22} & 0 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_2 = L^{3^1} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g^{11}g^{3^3} \\ 0 & -g^{3^3}g^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

$$L_3 = L^{1^2} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g^{11}g^2 & 0 \\ 0 & g^{2^2}g^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und für die Basisvektoren der Basis

$$M_1 = L^{0^1} = (+i) \begin{pmatrix} 0 & g^{00}g^1 & 0 & 0 \\ -g^{11}g^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (+i) \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = L^{0^2} = (+i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & g^{00}g^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g^{2^2}g^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (+i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = L^{0^3} = (+i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g^{00}g^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g^{3^3}g^0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (+i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

durch Spezialisierung von (2.36) auf zeitliche bzw. räumliche Indizes unter  
 durch Beachtung der Invertierung von (2.39)

$$\text{Eiße } L_R = \frac{1}{2} \text{ Eiße } E_{\text{em}} L^{\text{em}} = \frac{1}{2} \text{ Eiße } E_{\text{em}} L^{\text{em}} = \frac{1}{2} (\text{Diodin-Dimdie}) L^{\text{em}} = \frac{1}{2} (L^{i5} - L^{5i})$$

$$\xrightarrow{(2.34)} L^{i5} = \text{Eiße } L_R \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned}
 \text{i.) } [L_R, L_E] &\stackrel{(2.39)}{=} \frac{1}{4} \{ \varepsilon_{Rmn} \varepsilon_{Emn} [L^{mn}, L^{mn}] \} \stackrel{(2.36)}{=} \frac{i}{4} \{ \varepsilon_{Rmn} \varepsilon_{Emn} \{ g^{mn} L^{mn} + g^{mn} L^{mn} \\
 &- g^{mn} L^{mn} - g^{mn} L^{mn} \} = \frac{-i}{4} \{ \varepsilon_{Rmn} \varepsilon_{Emn} L^{mn} + \varepsilon_{Rmn} \varepsilon_{Emn} L^{mn} - \varepsilon_{Rmn} \varepsilon_{Emn} L^{mn} \\
 &- \varepsilon_{Rmn} \varepsilon_{Emn} L^{mn} \} = \frac{-i}{4} \{ \varepsilon_{Rkn} \varepsilon_{Emn} L^{mn} + \varepsilon_{Rmn} \varepsilon_{Ekn} L^{mn} - \varepsilon_{Rmn} \varepsilon_{Ekn} L^{mn} \\
 &- \varepsilon_{Rmn} \varepsilon_{Ekn} L^{mn} \} = \frac{-i}{4} \{ (\delta_{nk} \delta_{ml} - \delta_{ml} \delta_{nk}) L^{mn} + (\delta_{kn} \delta_{ml} - \delta_{ml} \delta_{kn}) L^{mn} \\
 &- (\delta_{mn} \delta_{kl} - \delta_{kl} \delta_{mn}) L^{mn} - (\delta_{kl} \delta_{mn} - \delta_{mn} \delta_{kl}) L^{mn} \} = \frac{-i}{4} \{ L^{lk} - \delta_{lk} L^{mn} \\
 &+ L^{lk} - \delta_{lk} L^{mn} - \delta_{lk} L^{mn} + L^{lk} - \delta_{lk} L^{mn} + L^{lk} \} \stackrel{(2.34)}{=} \frac{i}{4} \cdot 4 L^{lk} \stackrel{(2.34)}{=} i \cdot L^{lk}
 \end{aligned}$$

$$\stackrel{(2.43)}{\longrightarrow} [L_R, L_E]_- = i \varepsilon_{Rkm} L_m \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii.) } [L_R, M_E]_- &\stackrel{(2.39), (2.40)}{=} \frac{1}{2} \varepsilon_{Rmn} [L^{mn}, L^{00}]_- \stackrel{(2.36)}{=} \frac{i}{2} \varepsilon_{Rmn} \{ g^{ml} L^{no} + g^{no} L^{ml} - g^{ml} L^{no} \\
 &- g^{no} L^{ml} \} = \frac{-i}{2} \{ \varepsilon_{Rkm} L^{no} - \varepsilon_{Rme} L^{no} \} = -\frac{i}{2} \{ \varepsilon_{Rkm} L^{no} + \varepsilon_{Rkm} L^{no} \} = -i \varepsilon_{Rkm} L^{no} \\
 &\stackrel{(2.34), (2.40)}{\longrightarrow} [L_R, M_E]_- = i \varepsilon_{Rkm} M_m \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{iii.) } [M_R, M_E]_- &\stackrel{(2.40)}{=} [L^{0k}, L^{00}]_- \stackrel{(2.36)}{=} i \{ g^{0l} \delta_{lk} + g^{00} \delta_{00} - g^{00} L^{lk} - g^{0l} L^{0k} \} \\
 &\stackrel{(2.34)}{=} -i [L^{0k}, L^{00}]_- - i \varepsilon_{Rkm} L_m \quad (2.46)
 \end{aligned}$$

Bei Kommutator (2.44) besagt, daß die Basisgeneratoren der Drehungen  $L_1, L_2, L_3$  eine Unteralgebra der Lorentz-Algebra bilden.

2.1.5. Die-Boostern:

Betrachtet man die Lorentz-Gruppe in der Nähe des Einselementes, so treten 6-
 maß (2.29) und (2.32) die Basisgeneratoren  $L^{\alpha\beta}$  auf:

$$L^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{i}{2} (L^{\alpha\beta})^{\mu\nu} \text{ WAP.} \quad (2.47)$$

Das die - Basen besagt man versteht, dass man aus der Normals der Basisvektoren  $L^A$  jedes Element der Lorentz-Gruppe durch Anwendung einer Matrixelementalfunktion bestimmen kann:

$$L = \exp \left\{ -\frac{1}{2} L^{AB} \omega_{AB} \right\} \quad (2.48)$$

Entsprechend der Einteilung der Basisoperatoren  $L^A$  in die Basisgeneratoren der Drehungen (2.35) und der Boosts (2.40) werden die Erzeugendengeneratoren wie folgt in Winkel

$$\varphi^A = \frac{1}{2} \epsilon^{ABCD} \omega_{BCD} \quad (2.49)$$

und in Rapiditäten

$$\eta^A = \omega_{0A} \quad (2.50)$$

aufgeteilt. Das die - Basen (2.48) lautet dann unter Beachtung von (2.30)

$$L = \exp \left\{ -\frac{1}{2} L^{AB} \omega_{AB} - L^{0A} \omega_{0A} \right\} \stackrel{(2.40), (2.43), (2.49), (2.50)}{=} \exp \left\{ -i \varphi \vec{L} - i \vec{\eta} \vec{N} \right\} \quad (2.51)$$

Im folgenden untersuchen wir das die - Basen (2.51) für die Drehungen  $\vec{\eta} = \vec{0}$  und für die Boosts  $\varphi = 0$ .

### 2.1.6. Rotationen:

Nach dem die - Basen (2.51) ist eine beliebige Rotation mit dem Drehwinkel  $\varphi$  durch die folgende Matrixelementalfunktion definiert:

$$R(\varphi) = \exp \left\{ -i \varphi \vec{L} \right\}. \quad (2.52)$$

Beachtet man die expliziten Anstellungsmatrizen der Basisgeneratoren  $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$  in (2.41), so folgt

$$R(\vec{\varphi}) = \exp \{ F \} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} F^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} F^{2n+1}, \quad (2.53)$$

wobei  $F$  gegeben ist als

$$F = \varphi_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \varphi_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \varphi_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

Multipliziert man  $F$  mit sich selbst, erhält man

$$F^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Außerdem besitzt die Matrix  $F$  das charakteristische Polynom

$$\det (F - \lambda I) = (-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & -\lambda & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda (\lambda^3 + \lambda |\vec{\varphi}|^2). \quad (2.56)$$

Nachdem Satz von Cayley-Hamilton folgt dann für die dritte Potenz von  $F$

$$F^3 = -|\vec{\varphi}|^2 F, \quad (2.57)$$

was man auch durch Multiplikation von (2.54) mit (2.55) direkt nachweisen kann. Für die geraden und ungeraden Potenzen von  $F$  ergibt sich damit:

$$F^{2n+1} = \{-|\vec{\varphi}|^2\}^n \cdot F, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (2.58)$$

$$F^{2n} = F \cdot F^{2(n-1)+1} = \{-|\vec{\varphi}|^2\}^{n-1} \cdot F^2, \quad n=1, 2, \dots \quad (2.59)$$

Setzt man (2.58) und (2.59) in (2.53) ein, so gilt:

$$\begin{aligned} R(F) &= I + \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-|\vec{\varphi}|^2)^n}{(2n+1)!} \right\} F + \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-|\vec{\varphi}|^2)^{n-1}}{(2n)!} \right\} F^2 \\ &= I + \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n |\vec{\varphi}|^{2n+1}}{(2n+1)!} \right\} \frac{F}{|\vec{\varphi}|} - \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n |\vec{\varphi}|^{2n}}{(2n)!} \right\} \frac{F^2}{|\vec{\varphi}|} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Bachtet man die Taylor-Reihen der trigonometrischen Funktionen

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad (2.61)$$

ergibt (2.60) über in

$$R(\vec{\varphi}) = \mathbb{I} + \sin|\vec{\varphi}| \frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|} + \{1 - \cos|\vec{\varphi}|\} \frac{\vec{\varphi}\vec{\varphi}^T}{|\vec{\varphi}|^2}. \quad (2.62)$$

Die Matrizen (2.54) und (2.55) geloven damit zu

$$R(\vec{\varphi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos|\vec{\varphi}| + (1 - \cos|\vec{\varphi}|) \frac{\varphi_1^2}{|\vec{\varphi}|^2} & -\sin|\vec{\varphi}| \frac{\varphi_2}{|\vec{\varphi}|} + (1 - \cos|\vec{\varphi}|) \frac{\varphi_1\varphi_3}{|\vec{\varphi}|^2} & \sin|\vec{\varphi}| \frac{\varphi_2}{|\vec{\varphi}|} + (1 - \cos|\vec{\varphi}|) \frac{\varphi_1\varphi_3}{|\vec{\varphi}|^2} \\ 0 & \sin|\vec{\varphi}| \frac{\varphi_1}{|\vec{\varphi}|} + (1 - \cos|\vec{\varphi}|) \frac{\varphi_1\varphi_3}{|\vec{\varphi}|^2} & \cos|\vec{\varphi}| + (1 - \cos|\vec{\varphi}|) \frac{\varphi_2^2}{|\vec{\varphi}|^2} & -\sin|\vec{\varphi}| \frac{\varphi_1}{|\vec{\varphi}|} + (1 - \cos|\vec{\varphi}|) \frac{\varphi_2\varphi_3}{|\vec{\varphi}|^2} \\ 0 & -\sin|\vec{\varphi}| \frac{\varphi_1}{|\vec{\varphi}|} + (1 - \cos|\vec{\varphi}|) \frac{\varphi_1\varphi_3}{|\vec{\varphi}|^2} & \sin|\vec{\varphi}| \frac{\varphi_2}{|\vec{\varphi}|} + (1 - \cos|\vec{\varphi}|) \frac{\varphi_2\varphi_3}{|\vec{\varphi}|^2} & \cos|\vec{\varphi}| + (1 - \cos|\vec{\varphi}|) \frac{\varphi_3^2}{|\vec{\varphi}|^2} \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

Diese Darstellungsmatrix besitzt die Eigenwerte

$$(E1) \quad \text{SP } R(\vec{\varphi}) = 2 + 2\cos|\vec{\varphi}|, \quad (2.64)$$

$$(E2) \quad R(\vec{\varphi}) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

so daß (2.63) totaldiagonalisierbar ist und interpretiert werden kann. In Komponentenweise lautet die räumlichen Komponenten

$$R_{jk}(\vec{\varphi}) = \sin|\vec{\varphi}| \frac{\varphi_j}{|\vec{\varphi}|} \varepsilon_{ijk} + (1 - \cos|\vec{\varphi}|) \frac{\varphi_j \varphi_k}{|\vec{\varphi}|^2} + \cos|\vec{\varphi}| \delta_{jk}. \quad (2.66)$$

Bildet man einen räumlichen Vektor  $\vec{x}$  mit (2.66) ab, so ergibt man  $\vec{x}'$  mit

$$x'_j = \sin|\vec{\varphi}| \varepsilon_{ijk} \frac{\varphi_i}{|\vec{\varphi}|} x_k + (1 - \cos|\vec{\varphi}|) \frac{\varphi_j \varphi_k}{|\vec{\varphi}|^2} x_k + \cos|\vec{\varphi}| x_j. \quad (2.67)$$

In Vektorschreibweise lautet dies ebenfalls

$$\vec{x}' = \sin|\vec{\varphi}| \frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|} \times \vec{x} + (1 - \cos|\vec{\varphi}|) \frac{\vec{\varphi} \vec{x}}{|\vec{\varphi}|} + \cos|\vec{\varphi}| \vec{x}. \quad (2.68)$$

Mit der Zerlegung in

$$\vec{x}_{||} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{|\vec{p}|} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|},$$

$$\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{||}$$

(2.69)

gibt dies über in

$$\vec{x} = \vec{x}_{||} + \cos|\vec{p}| \vec{x}_{\perp} + \sin|\vec{p}| \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \times \vec{x}.$$

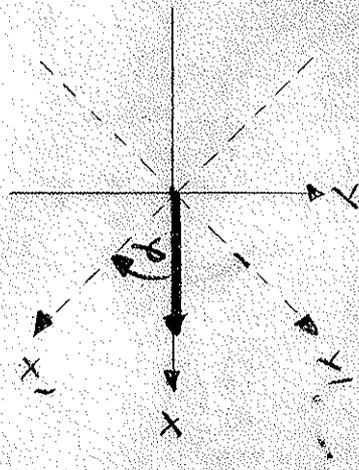
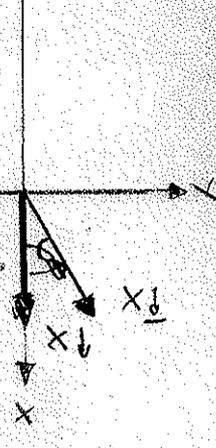
(2.70)

Substituiert man auf eine Rotation um die Achse  $\vec{p} = (0, 0, 1)$ , beobachtet man

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(2.71)

Eine Rotationsmatrix kann aber auch wie in (2.71) leicht zwei Instanzmatrixen zu:

Passive Rotation	Aktive Rotation
Erhalten des Systems	Bewegung des Systems
Bewegung des Koordinatensystems	Erhalten des Koordinatensystems
 <p><math>\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}</math></p>	 <p><math>\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}</math></p>

Aktive und passive Rotationsmatrixen sind einander entgegengesetzt.

2.1.7. Exer 3:

Nach dem 12.5.1) ist ein beliebiges Exer mit der Rangigkeit  $\bar{r}$  durch folgende Matrixelementenfunktion definiert:

$$B(\bar{r}) = \exp \{ -i \bar{r} \vec{m} \} \quad (2.72)$$

Beachtet nun die expliziten Darstellungsmatrizen der Basisoperatoren  $M = (M_1, M_2, M_3)$  in (2.42), so folgt

$$B(\bar{r}) = \exp P(M) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} P^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} P^{2n+1}, \quad (2.73)$$

wobei  $P$  gegeben ist durch

$$P = \bar{r}_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \bar{r}_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \bar{r}_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \bar{r}_3 \\ \bar{r}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{r}_2 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{r}_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.74)$$

Multipliziert man  $P$  mit sich selbst, erhält man

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \bar{r}_3 \\ \bar{r}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{r}_2 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{r}_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \bar{r}_3 \\ \bar{r}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{r}_2 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{r}_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\bar{r}|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{r}_1^2 & \bar{r}_1 \bar{r}_2 & \bar{r}_1 \bar{r}_3 \\ 0 & \bar{r}_1 \bar{r}_2 & \bar{r}_2^2 & \bar{r}_2 \bar{r}_3 \\ 0 & \bar{r}_1 \bar{r}_3 & \bar{r}_2 \bar{r}_3 & \bar{r}_3^2 \end{pmatrix}. \quad (2.75)$$

Anwenden besitzt  $P$  das charakteristische Polynom

$$\det(P - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \bar{r}_3 \\ \bar{r}_1 & -\lambda & 0 & 0 \\ \bar{r}_2 & 0 & -\lambda & 0 \\ \bar{r}_3 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda^3) \begin{vmatrix} \bar{r}_1 & -\lambda & 0 \\ \bar{r}_2 & 0 & -\lambda \\ \bar{r}_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} + (-\lambda) \begin{vmatrix} \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \bar{r}_3 \\ \bar{r}_2 & -\lambda & 0 \\ \bar{r}_3 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 \lambda^2 + (-\lambda) \{ -\lambda^3 + \lambda \bar{r}_2^2 + \lambda \bar{r}_3^2 \} = -\lambda^5 + \lambda \{ \bar{r}_1^2 \lambda^3 - |\bar{r}|^2 \lambda \} \quad (2.76)$$

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton folgt dann für die dritte Potenz von  $P$

$$P^3 = |\bar{r}|^2 P, \quad (2.77)$$

was man auch durch Multiplikation von (2.74) mit (2.75) direkt nachweisen

Kann. Ein die geraden und ungeraden Potenzen von  $P$  ergibt sich damit

$$P^{2n+1} = |y|^{2n} \cdot P \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.78)$$

$$P^{2n} = P \cdot P^{2(n-1)+1} = |y|^{2n-2} P^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.79)$$

Setzt man (2.78) und (2.79) in (2.73) ein, so gilt

$$B(\vec{r}) = I + \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} |y|^{2n} \right\} P + \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} |y|^{2n-2} \right\} P^2 \\ = I + \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} |y|^{2n+1} \right\} \frac{P}{|y|} + \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} |y|^{2n} \right\} \frac{P^2}{|y|^2} \quad (2.80)$$

Bachtet man die Taylor-Reihen der hyperbolischen Funktionen

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \quad (2.81)$$

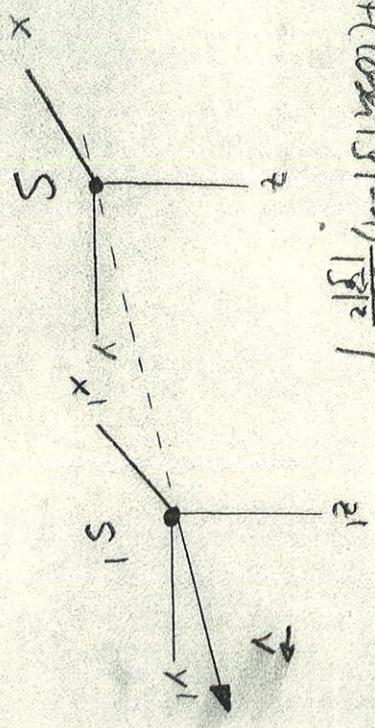
so gilt (2.80) über in

$$B(\vec{r}) = I + \sinh |y| \cdot \frac{P}{|y|} + \left\{ \cosh |y| - 1 \right\} \frac{P^2}{|y|^2} \quad (2.82)$$

Die Matrizen (2.74) und (2.75) führen damit zu

$$B(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \cosh |y| & & & \\ \sinh |y| \frac{y^1}{|y|} & 1 + (\cosh |y| - 1) \frac{y^1 y^1}{|y|^2} & & \\ \sinh |y| \frac{y^2}{|y|} & (\cosh |y| - 1) \frac{y^1 y^2}{|y|^2} & 1 + (\cosh |y| - 1) \frac{y^2 y^2}{|y|^2} & \\ \sinh |y| \frac{y^3}{|y|} & (\cosh |y| - 1) \frac{y^1 y^3}{|y|^2} & (\cosh |y| - 1) \frac{y^2 y^3}{|y|^2} & 1 + (\cosh |y| - 1) \frac{y^3 y^3}{|y|^2} \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

Interpretiert man den Exakt (2.83) passiv, so ist eine Beziehung zwischen der Raumzeit  $\vec{r}$  und der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  gegeben, mit der sich das Koordinatensystem  $S'$  bewegt. S beweist. Sie ergibt sich aus der Forderung,



darf die Normalenabmessung von  $S'$  bezüglich  $S$  und  $S'$  die folgenden Raum-Zeit-Koordinaten besitzt:

$$(x^{\mu}) = \begin{pmatrix} c^2 t \\ x \end{pmatrix}, \quad (x'^{\mu}) = \begin{pmatrix} c^2 t' \\ x' \end{pmatrix}. \quad (2.84)$$

Setzt man  $(x^{\mu})$  mit Hilfe von (2.83) nach  $(x'^{\mu})$  ab, so folgt

$$t = \pm \cos |\vec{\beta}| + \frac{x}{|\vec{\beta}|} \frac{\beta}{c} \sin |\vec{\beta}|, \quad \frac{x'}{c} = \frac{x}{|\vec{\beta}|} \sin |\vec{\beta}| + \frac{\beta}{c} \cos |\vec{\beta}|. \quad (2.85)$$

$$\vec{0} = \frac{x}{|\vec{\beta}|} \sin |\vec{\beta}| + \frac{\beta}{c} + \left\{ \cos |\vec{\beta}| - 1 \right\} \frac{x \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\beta}| c} \cdot \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}. \quad (2.86)$$

Das (2.86) lässt man dann ab

$$\frac{x}{|\vec{\beta}|} \left\{ \sin |\vec{\beta}| + \left( \cos |\vec{\beta}| - 1 \right) \frac{x \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\beta}| c} \right\} + \frac{\beta}{c} = 0, \quad (2.87)$$

d.h. Parallelität  $\vec{\beta}$  und Geschwindigkeit  $\vec{v}$  sind zueinander antiparallel:

$$\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} = - \frac{|\vec{v}|}{c} \cdot \quad (2.88)$$

Setzt man (2.88) in (2.83) ein, folgt für die Beziehung der Parallelitäten und der Geschwindigkeit:

$$\frac{|\vec{v}}{c} = \sin |\vec{\beta}| - \frac{|\vec{v}|}{c} \left( \cos |\vec{\beta}| - 1 \right) \Rightarrow \frac{|\vec{v}|}{c} = \tan |\vec{\beta}|, \quad (2.89)$$

$$\cos |\vec{\beta}| = \frac{1}{\sqrt{1 - \tan^2 |\vec{\beta}|}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma, \quad (2.90)$$

$$\sin |\vec{\beta}| = \frac{\tan |\vec{\beta}|}{\sqrt{1 - \tan^2 |\vec{\beta}|}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{|\vec{v}|}{c} = \gamma \frac{|\vec{v}|}{c}. \quad (2.91)$$

Nach (2.83), (2.88) - (2.91) lautet die Darstellungsmatrix eines Boosts

$$B(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c} \gamma \\ -\frac{v}{c} \gamma & \gamma \\ \delta_{ij} + (\gamma - 1) \frac{v_i v_j}{v^2} \end{pmatrix} \quad (2.92)$$

Außerdem ergibt sich aus (2.85) und (2.88) - (2.91) die Restriktion zu

$$\epsilon^i = \epsilon \left\{ \gamma - \frac{v^2}{c^2} \gamma \right\} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.93)$$

2.1.8. Additionstheorem für Geschwindigkeiten:

Führt man zwei Boost-Transformationen (2.92) hintereinander aus, so gilt

$$B(\vec{v}_2) B(\vec{v}_1) = \begin{pmatrix} \gamma_2 & & & \\ -\frac{\vec{v}_2}{c} \gamma_2 & I + (\gamma_2 - 1) \frac{\vec{v}_2 \otimes \vec{v}_2}{v_2^2} & & \\ & & \gamma_1 & \\ & & -\frac{\vec{v}_1}{c} \gamma_1 & I + (\gamma_1 - 1) \frac{\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_1}{v_1^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \gamma_2 \left( 1 + \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2} \right) & & & \\ -\gamma_1 \gamma_2 \left( \frac{\vec{v}_1}{c} + \frac{\vec{v}_2}{c} \gamma_2 - \gamma_2 (\gamma_1 - 1) \frac{\vec{v}_2 \otimes \vec{v}_1}{v_2^2} + (\gamma_1 - 1) \frac{\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2}{v_1^2} + (\gamma_2 - 1) (\gamma_1 - 1) \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{v_1^2} \cdot \frac{\vec{v}_2 \otimes \vec{v}_1}{v_2^2} \right) & & & \\ & & \gamma_1 & \\ & & -\frac{\vec{v}_1}{c} \gamma_1 & I + (\gamma_1 - 1) \frac{\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_1}{v_1^2} \end{pmatrix} \quad (2.94)$$

damit das wieder eine Boost-Transformation (2.92) zur Geschwindigkeit  $\vec{v}$  darstellt, muß gelten:

$$i.) \quad \frac{v}{c} \gamma = \gamma_1 \gamma_2 \left( \frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c} \gamma_2 + \gamma_2 (\gamma_1 - 1) \frac{v_1}{v_1^2} \right) \quad (2.95)$$

$$ii.) \quad \gamma = \gamma_1 \gamma_2 \left( 1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \right) \Rightarrow \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma} = \frac{1}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad (2.96)$$

Setzt man (2.96) in (2.95) ein, erhält man das Lorentz-Additionstheorem für Geschwindigkeiten:

$$\vec{v} (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \left( \gamma_1 - \frac{v_1^2}{c^2} - 1 \right) \left( \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \cdot \frac{\vec{v}_1 v_2}{c^2} \right)}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad (2.97)$$

hieraus liest man ab:

i.) Die Boost-Transformation sind im Allgemeinen nicht kommutativ:

$$B(\vec{v}_2) B(\vec{v}_1) \neq B(\vec{v}_1) B(\vec{v}_2) \quad (\Leftrightarrow \vec{v}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \neq \vec{v}(\vec{v}_2, \vec{v}_1)) \quad (2.98)$$

ii.) Für miteinander parallele Geschwindigkeiten  $\vec{v} = v_1 \vec{e}_1$  und  $\vec{v}_2 = v_2 \vec{e}_2$  sind die Boost-Transformationen kommutativ:

$$v(v_1, v_2) = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = v(v_2, v_1)$$

iii.) Im Spezialfall  $v_1 \ll c$  und  $v_2 \ll c$  erhält man aus (2.99) das galileische Additions theorem für Geschwindigkeiten:

$$v(v_1, v_2) = v_1 + v_2$$

iv.) Im Spezialfall  $v_2 = c$  folgt aus (2.99):

$$v(v_1, c) = c$$

In allen Inertialsystemen bleibt die Lichtgeschwindigkeit denselben Wert. Dies entspricht gerade dem Ursprung der relativistischen Kosmologie (TR) der speziellen Relativitätstheorie.

2.1.9. Darstellung der Lorentz-Gruppe durch Differentialoperatoren:

Wir betrachten nun ein Skalarfeld  $\phi(x^\mu)$ , das als Tensorfeld vom Rang  $n=0$  unter beliebigen Lorentz-Transformationen  $\Lambda$  invariant ist. Bei einer massiven Interaktion der Lorentz-Transformation

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad \Leftrightarrow \quad x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu x'^\nu \quad (2.102)$$

beschreiben  $x^\mu$  bzw.  $x'^\mu$  ein- und denselben Raum-Zeit-Tupel bzw. des Ursprungs des invariante kovarianten Koordinatensystems  $S$  bzw.  $S'$ . Aufgrund der Invarianz des Skalarfeldes muß das ursprüngliche Skalarfeld  $\phi(x^\mu)$  im Ursprung des Koordinatensystems  $S$  mit dem transformierten Skalarfeld  $\phi'(x'^\mu)$  im transformierten Koordinatensystem  $S'$  übereinstimmen: