

## 1. Streutheorie:

Die Streuung zwischen zwei Teilchen ist von grundlegender Bedeutung, um Informationen über den Aufbau der Materie von Elementarteilchen bis hin zu Festkörpern zu erhalten. Daher diskutieren wir in diesem Kapitel die quantenmechanische Behandlung der Streutheorie.

### 1.1 Schrödinger-Gleichung:

Wir beginnen mit der Beschreibung zweier unterschiedlicher quantenmechanischer Teilchen. Hierzu haben wir die zugrunde liegende zeitabhängige Schrödinger-Gleichung zu analysieren:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2; t)}{\partial t} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_1} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta_2 + V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \right\} \Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2; t) \quad (1.1)$$

Hierbei bezeichnet  $V(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  das Wechselwirkungspotential. Aufgrund eines Newtonschen Axioms müssen die durch 2-Teilchen-Wechselwirkungen bestimmten Kräfte betragsmäßig gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sein. Das entsprechende Wechselwirkungspotential  $V(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  muss daher von der Differenz der Koordinaten abhängen:

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2). \quad (1.2)$$

Beispiele für solch ein Wechselwirkungspotential sind

- die Coulomb-Wechselwirkung zwischen zwei geladenen Teilchen

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_0 |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \quad (1.3)$$

- die Dipol-Dipol-Wechselwirkung zwischen zwei magnetischen Dipolen

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3[\vec{m}_1 \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)]^2 - \vec{m}_1^2 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^5} \quad (1.4)$$

- das sphärische  $\lambda$ -Potential als Modell für eine kurzwellenlängige Welle:
 
$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \begin{cases} -v_0 & ; |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| < a \\ 0 & ; |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| > a \end{cases} \quad (1.5)$$

Wir interessieren uns für stationäre Zustände und führen daher den Generationsansatz

$$\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2; t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \quad (1.6)$$

durch. Dadurch reduziert sich die zeitabhängige Schrödingers-Gleichung (1.1) unter Berücksichtigung von (1.2) auf die zeitunabhängige Schrödingers-Gleichung

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2M_1} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2M_2} \Delta_2 + V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \right\} \Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = E \Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \quad (1.7)$$

## 1.2 Schwerpunktssystem:

Wir transformieren nun das im Laborsystem aufgestellte Problem (1.7) in das Schwerpunktssystem. Dazu gehen wir von den individuellen Raumkoordinaten  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  auf die Schwerpunktkoordinate

$$\vec{X} = \frac{M_1 \vec{x}_1 + M_2 \vec{x}_2}{M_1 + M_2} \quad (1.8)$$

und die Relativkoordinate

$$\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \quad (1.9)$$

Über. Die zweiten partiellen Ableitungen transformieren sich dadurch gemäß

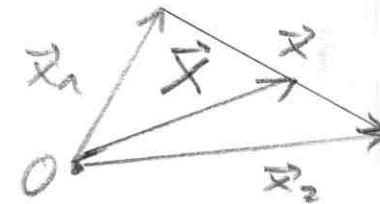
$$\vec{\nabla}_1 = \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{x}_1} \frac{\partial}{\partial \vec{X}} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{x}_1} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \xrightarrow{(1.8), (1.9)} \frac{M_1}{M_1 + M_2} \vec{\nabla}_{\vec{X}} + \vec{\nabla}_{\vec{r}} \quad (1.10)$$

$$\vec{\nabla}_2 = \frac{\partial}{\partial \vec{x}_2} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{x}_2} \frac{\partial}{\partial \vec{X}} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{x}_2} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \xrightarrow{(1.8), (1.9)} \frac{M_2}{M_1 + M_2} \vec{\nabla}_{\vec{X}} - \vec{\nabla}_{\vec{r}} \quad (1.11)$$

und die entsprechenden kinetischen Energien ergeben sich zu

$$-\frac{\hbar^2}{2M_1} \Delta_1 \xrightarrow{(1.10)} -\frac{\hbar^2}{2M_1} \left[ \frac{M_1^2}{(M_1 + M_2)^2} \Delta_{\vec{X}} + \frac{2M_1}{M_1 + M_2} \vec{\nabla}_{\vec{X}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} + \Delta_{\vec{r}} \right] \quad (1.12)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2M_2} \Delta_2 \xrightarrow{(1.11)} -\frac{\hbar^2}{2M_2} \left[ \frac{M_2^2}{(M_1 + M_2)^2} \Delta_{\vec{X}} - \frac{2M_2}{M_1 + M_2} \vec{\nabla}_{\vec{X}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} + \Delta_{\vec{r}} \right] \quad (1.13)$$



Demnach gilt die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung (1.7) über in

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2M_{\text{ges}}} \Delta \vec{x} - \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \vec{x} + V(\vec{x}) \right\} \psi(\vec{x}, z) = E \psi(\vec{x}, z) \quad (1.14)$$

Hierbei bezeichnen  $M_{\text{ges}}$  und  $\mu$  die Gesamtmasse bzw. die reduzierte Masse

$$M_{\text{ges}} = M_1 + M_2, \quad \mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \quad (1.15)$$

Im Falle zweier identischer Teildaten  $M_1 = M_2 = M$  erhalten wir  $M_{\text{ges}} = 2M$  und  $\mu = M/2$ . In der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung (1.14) lässt sich die freie Schwerpunktbewegung abgrenzen

$$\psi(\vec{x}, z) = \frac{e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}}}{(2\pi)^3} \psi(\vec{x}), \quad E = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2M_{\text{ges}}} + \epsilon \quad (1.16)$$

und wir erhalten für die Relativbewegung im Schwerpunktssystem

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \vec{x} + V(\vec{x}) \right\} \psi(\vec{x}) = \epsilon \psi(\vec{x}) \quad (1.17)$$

Demnach lässt sich das Problem zweier wechselwirkender Teildaten auf ein effektives System mit der reduzierten Masse  $\mu$  zurückführen, das sich im Wechselwirkungspotential  $V(\vec{x})$  bewegt. Beispielsweise lässt sich mit Hilfe von (1.17) das Wasserstoffatom reduzieren, wobei  $V(\vec{x})$  das Lennard-Jones-Potential und  $\mu$  die effektive Masse von Proton und Elektron darstellen.

### 1.3 Streulösungen:

Im folgenden wollen wir Streulösungen von (1.17) untersuchen, so dass  $\epsilon \geq 0$  vorausgesetzt werden kann. Dann führen wir einen Wellenvektor  $\vec{k}$  mit dem Betrag  $k = \sqrt{\hbar^2 / 2\mu}$  gemäß

$$\epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \quad (1.18)$$

ein und erhalten aus (1.17)

$$\left\{ \Delta \vec{x} + k^2 - \frac{2\mu}{\hbar^2} V(\vec{x}) \right\} \psi(\vec{x}) = 0 \quad (1.19)$$

Außerdem wollen wir annehmen, daß das Wechselwirkungspotential rotationsymmetrisch ist:

$$V(\vec{r}) = V(r), \quad r = |\vec{r}| \quad (1.20)$$

Dann gilt in Zugekordinaten

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l^2}{r^2} + k^2 - \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) \right\} \Psi(r, \vartheta, \varphi) = 0 \quad (1.21)$$

wobei

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} = -\frac{1}{r^2} \left\{ \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} \quad (1.22)$$

das Betragquadrat des Anzugsoperators darstellt. Die Windabhängigkeit der Wellenfunktion ist durch die Zugekflächenfunktion  $\gamma_{lm}(\vartheta, \varphi)$  mit  $l = 0, 1, 2, \dots$  und  $m = -l, \dots, +l$  gegeben, die dem Eigenwertproblem

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \gamma_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} l(l+1) \gamma_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (1.23)$$

geht. Die Wellenfunktion läßt sich dann erneut in einen Radial- und einen Windanteil separieren:

$$\Psi_{lm}(r, \vartheta, \varphi) = R_l(r) \gamma_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (1.24)$$

Die resultierende Schrödinger-Gleichung für die Radialkomponente der Wellenfunktion lautet:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 - \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) \right\} R_l(r) = 0 \quad (1.25)$$

#### 1.4 Freie Zustände:

Liegt keine Wechselwirkung vor, ist also  $V(r) = 0$ , so vereinfacht sich (1.25) auf

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right\} R_l(r) = 0 \quad (1.26)$$

was sich mit der dimensionslosen Variablen  $s = kr$  auf die Form

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2}{s} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{l(l+1)}{s^2} + 1 \right\} R_e(s) = 0 \quad (1.27)$$

bringen läßt. Wir betrachten zunächst  $l=0$ , d.h. sogenannte Wellenfunktionen, die gemäß (1.24) stationärsymmetrisch sind:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2}{s} \frac{\partial}{\partial s} + 1 \right\} R_0(s) = 0 \quad (1.28)$$

Die beiden Fundamentalslösungen von (1.28) lauten offenbar

$$R_0^{(1)}(s) = \frac{\sin s}{s}, \quad R_0^{(2)}(s) = -\frac{\cos s}{s} \quad (1.29)$$

Nun betrachten wir den Fall  $l \neq 0$  und führen die Substitution

$$R_l(s) = s^l X_e(s) \quad (1.30)$$

durch. Dadurch geht die gewöhnliche Differentialgleichung (1.27) über in

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2(l+1)}{s} \frac{\partial}{\partial s} + 1 \right\} X_e(s) = 0 \quad (1.31)$$

Differentiation von (1.31) bezüglich  $s$  führt auf

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial s^2} s \left( \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \right) + 2(l+1) \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \right) + s \left( \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \right)^2 \right\} X_e(s) = 0$$

$$\left\{ s \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2 \frac{\partial}{\partial s} + 2(l+1) \frac{\partial}{\partial s} + s \right\} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} X_e(s) = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2(l+2)}{s} \frac{\partial}{\partial s} + 1 \right\} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} X_e(s) = 0$$

Der Vergleich von (1.31) und (1.32) ergibt die Identifikation

$$X_{e+1}(s) = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} X_e(s) \quad (1.33)$$

so daß durch Iteration folgt

$$X_e(s) = \left( \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \right)^l X_0(s) \quad (1.34)$$

Damit liegt zwischen den Funktionen  $\chi_e(\xi)$  dränglich der Anzahl der Radialimpulskoordinatenzahl  $l$  eine Rekursionsrelation vor, wobei  $\chi_0(\xi)$  wegen (1.30) durch (1.29) gegeben ist. Wir fassen nun die resultierenden Lösungen von (1.27) durch folgende Definitionen zusammen. Wir definieren zum einen die sphärischen Bessel-Funktionen

$$j_e(\xi) = (-3)^e \left( \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^e \frac{\sin \xi}{\xi} \quad (1.35)$$

und zum anderen die sphärischen Neumann-Funktionen

$$n_e(\xi) = -(-3)^e \left( \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^e \frac{\cos \xi}{\xi} \quad (1.36)$$

wobei der Faktor  $(-1)^e$  aus Konventiongründen hinzugefügt wurde. Die sphärischen Bessel- und Neumann-Funktionen lauten explizit

$$\begin{aligned} j_0(\xi) &= \frac{\sin \xi}{\xi}, & n_0(\xi) &= -\frac{\cos \xi}{\xi} \\ j_1(\xi) &= \frac{\sin \xi}{\xi^2} - \frac{\cos \xi}{\xi}, & n_1(\xi) &= -\frac{\cos \xi}{\xi^2} - \frac{\sin \xi}{\xi} \\ j_2(\xi) &= \left( \frac{3}{\xi^3} - \frac{1}{\xi} \right) \sin \xi - \frac{3}{\xi^2} \cos \xi, & n_2(\xi) &= \left( -\frac{3}{\xi^3} + \frac{1}{\xi} \right) \cos \xi - \frac{3}{\xi^2} \sin \xi \end{aligned} \quad (1.37)$$

Für kleine Argumente verhalten sich diese Funktionen wie

$$j_0(\xi) = 1 + \dots, \quad j_1(\xi) = \frac{1}{3} \xi + \dots, \quad j_2(\xi) = \frac{1}{15} \xi^2 + \dots \Rightarrow j_e(\xi) = \frac{\xi^e}{(2e+1)!!} + \dots \quad (1.40)$$

$$n_0(\xi) = -\frac{1}{\xi} + \dots, \quad n_1(\xi) = -\frac{1}{\xi^2} + \dots, \quad n_2(\xi) = -\frac{3}{\xi^3} + \dots \Rightarrow n_e(\xi) = -\frac{(2e-1)!!}{\xi^{e+1}} + \dots \quad (1.41)$$

d.h.  $j_e(\xi)$  ist am Ursprung  $\xi=0$  endlich, während  $n_e(\xi)$  dort divergiert.

Für große Argumente erhalten wir dagegen

$$j_0(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi}, \quad j_1(\xi) \approx -\frac{\cos \xi}{\xi}, \quad j_2(\xi) \approx -\frac{\sin \xi}{\xi} \Rightarrow j_e(\xi) \approx \frac{\sin(\xi - e\pi/2)}{\xi} \quad (1.42)$$

$$n_0(\xi) = -\frac{\cos \xi}{\xi}, \quad n_1(\xi) \approx -\frac{\sin \xi}{\xi}, \quad n_2(\xi) \approx \frac{\cos \xi}{\xi} \Rightarrow n_e(\xi) \approx -\frac{\cos(\xi - e\pi/2)}{\xi} \quad (1.43)$$

somit können wir die allgemeine Lösung von (1.26) durch eine Linearkombination der beiden Fundamentallösungen (1.35) und (1.36) angeben:

$$R_e(r) = A e^{i\epsilon(kr)} + B e^{-i\epsilon(kr)} \quad (1.44)$$

Aus (1.42) und (1.43) folgt dann deren asymptotisches Verhalten:

$$R_e(r) \approx \frac{A e^{\sin(kr - \ell\pi/2)} - B e^{\cos(kr - \ell\pi/2)}}{kr}, \quad r \rightarrow \infty \quad (1.45)$$

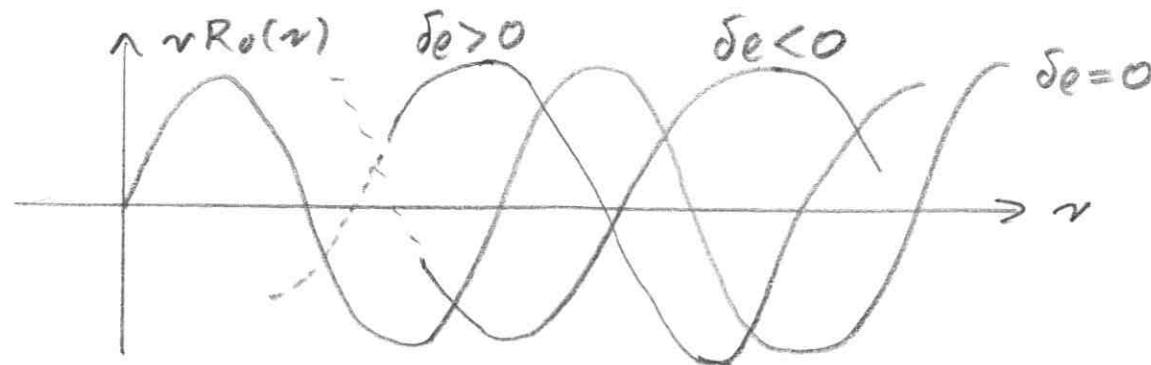
das sich auf folgende Form bringen lässt:

$$R_e(r) \approx \frac{(e \sin(kr - \ell\pi/2 + \delta\epsilon))}{kr}, \quad r \rightarrow \infty \quad (1.46)$$

Für große Abstände stellt  $R_e(r)$  demnach eine Zugwelle dar, die eine Phasenverschiebung  $\delta\epsilon$  aufweist. Hierbei sind Amplitude  $e$  und Max.  $\delta\epsilon$  gegeben durch

$$\begin{aligned} Ce \cos \delta\epsilon &= Ae \\ Ce \sin \delta\epsilon &= -Be \end{aligned} \quad \left\} \quad Ce = \sqrt{Ae^2 + Be^2}, \quad \delta\epsilon = -\arctan \frac{Be}{Ae} \quad (1.47)$$

Ist das Wechselwirkungspotential  $V(r)$  in (1.25) von Null verschieden, so wird die Radialkomponente der Wellenfunktion  $R_e(r)$  im allgemeinen nicht mehr die Form (1.46) besitzen. Liegt aber eine kugelsymmetrische Wechselwirkung vor, so können wir erwarten, dass  $R_e(r)$  für große Abstände von der Form (1.46) ist. Die Phasenverschiebung  $\delta\epsilon$  ergibt sich dabei als Funktion vom Betrag  $k$  des Wellenvektors  $\mathbf{k}$  bzw. der Energie  $E$  und der Stärke der Wechselwirkung. Da das Vorzeichen der Phasenverschiebung können wir schon ohne Bedenken aus physikalischen Gründen vertauschen. Für ein anziehendes Potential wird die Wellenfunktion im Außengebiet bremsen müssen, d.h.  $\delta\epsilon > 0$ , für ein repulsives Potential dagegen wird die Wellenfunktion ins Außengebiet gedrückt und es ist  $\delta\epsilon < 0$ .



### 1.5 Harte Zugeln:

Als wichtiges Beispiel für eine Kurzwellenlängen Wechselwirkung betrachten wir das rotationsymmetrische Wechselwirkungspotential für harte Zugeln

$$V(r) = \begin{cases} 0 & ; r > a \\ \infty & ; 0 \leq r \leq a \end{cases} \quad (1.48)$$

wobei  $a$  den doppelten Zugelradius bestimmt. Die Lösung der Schrödinger-Gleichung (1.25) mit dem Wechselwirkungspotential (1.48) ist dann gegeben durch

$$R_0(r) = \begin{cases} A e^{i\delta_e(kr)} + B e^{-i\delta_e(kr)}, & r > a \\ 0 & ; 0 \leq r \leq a \end{cases} \quad (1.49)$$

wir fordern, daß die Wellenfunktion an der Stelle  $r=a$  stetig sein soll, sodass gilt

$$A e = D e u_e(ka), \quad B e = -D e \delta_e(ka) \quad (1.50)$$

Ein großer Abstand ist die Radialkomponente der Wellenfunktion dann mit von der Form (1.46), wobei Amplitude  $C_e$  und Phasen  $\delta_e$  gegeben sind durch

$$(C_e = D e \sqrt{\delta_e^2(ka) + u_e^2(ka)}), \quad \delta_e = \arctan \frac{\delta_e(ka)}{u_e(ka)} \quad (1.51)$$

Für kleine Zugradien  $a$  bzw. kleine Energien (1.18) vereinfacht sich die Ikonverteilung  $\rho$  mit Hilfe von (1.40) und (1.41):

$$\rho \approx -\frac{(2l+1)(ka)^{2l+1}}{[(2l+1)!!]^2} \quad (1.52)$$

Das Vorzeichen von  $\rho$  ist negativ, da das Potential für harte Zugeln (1.48) eine abstoßende Wechselwirkung darstellt. Außerdem stellen wir fest, daß im Limes kleiner Zugradien  $a$  bzw. kleiner Energien (1.18) die relevante Ikonverteilung bei der  $s$ -Wellenstreuung auftritt. Die Beiträge höherer Dreimomentenzahl  $l > 0$  sind in diesem Limes vernachlässigbar.

### 1.6 Pseudopotentialmethode:

Wir diskutieren nun die Pseudopotentialmethode, die von Enrico Fermi begründet wurde, am Beispiel der  $s$ -Wellenstreuung. Sie basiert auf der Idee, die harte Randbedingung bei  $r=a$  durch eine Quelle bei  $r=0$  zu ersetzen, die das Verhalten der Wellenfunktion im Außengebiet  $r>a$  genau reproduziert. Damit setzen wir die Radialkomponente  $R_0(r)$  aus (1.49) zu

$$\tilde{R}_0(r) = A_0 j_0(kr) + B_0 n_0(kr) \quad (1.53)$$

für  $r > a$ , so daß im physikalischen Bereich  $r > a$  gilt:  $R_0(r) = \tilde{R}_0(r)$ . Die beiden Wellenfunktionen  $R_0(r)$  und  $\tilde{R}_0(r)$  sind daher im unphysikalischen Bereich  $0 \leq r \leq a$  voneinander verschieden. Wir suchen einen Pseudopotentialoperator  $\tilde{V}(r)$ , so daß die fortgesetzte Radialkomponente (1.53) die zu (1.25) analog ist und die Fortsetzung für  $r > 0$  erfüllt:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2 - \frac{2U}{h^2} \tilde{V}(r) \right\} \tilde{R}_0(r) = 0 \quad (1.54)$$

Zuzüglich stellen wir fest, daß (1.53) für  $r > 0$  schon die Differentialgleichung

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2 \right\} \tilde{R}_0(r) = 0 \quad (1.55)$$

erfüllt, denn nach erwartet wir, dass der Pseudodifferentialoperator  $\tilde{V}(r)$  in (1.54) eine Distribution darstellt, die am Ursprung eine Singularität aufweist. Um dies näher zu untersuchen, betrachten wir eine Kugel  $K(R)$  mit Radius  $R$  um den Ursprung und erhalten mit Hilfe des Gaußschen Satzes

$$\int_{K(R)} d^3x (\Delta_{\vec{x}} + k^2) \tilde{R}_0(r) = \oint_{\partial K(R)} d\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} \tilde{R}_0(r) + k^2 \int_{K(R)} d^3x \tilde{R}_0(r) \quad (1.56)$$

Wir werten die rechte Seite mit Zirkularkoordinaten aus und beachten dabei  $d\vec{\gamma} = R^2 \sin \theta d\vartheta d\phi \hat{e}_r$  sowie  $\vec{\nabla}_{\vec{x}} \tilde{R}_0(r) = \tilde{R}'_0(r) \hat{e}_r$ :

$$\int_{K(R)} d^3x (\Delta_{\vec{x}} + k^2) \tilde{R}_0(r) = 4\pi R^2 \frac{\partial \tilde{R}_0(R)}{\partial R} + 4\pi k^2 \int_0^R dr r^2 \tilde{R}_0(r) \quad (1.57)$$

Verwenden wir die Differentialgleichung (1.55) für den Integranden auf der rechten Seite, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{K(R)} d^3x (\Delta_{\vec{x}} + k^2) \tilde{R}_0(r) &= 4\pi R^2 \frac{\partial \tilde{R}_0(R)}{\partial R} - 4\pi \int_0^R dr r^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \tilde{R}'_0(r) + \frac{2}{r} \tilde{R}'_0(r) \right\} \\ &= 4\pi R^2 \frac{\partial \tilde{R}_0(R)}{\partial R} - 4\pi \left[ r^2 \tilde{R}'_0(r) \right]_0^R + 4\pi \int_0^R dr 2r \tilde{R}'_0(r) - 4\pi \int_0^R dr 2r \tilde{R}'_0(r) \\ \Rightarrow \int_{K(R)} d^3x (\Delta_{\vec{x}} + k^2) \tilde{R}_0(r) &= 4\pi \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ r^2 \frac{\partial \tilde{R}_0(r)}{\partial r} \right\} \end{aligned} \quad (1.58)$$

Dies reduziert sich mit Hilfe von (1.37) und (1.53) auf

$$\begin{aligned} \int_{K(R)} d^3x (\Delta_{\vec{x}} + k^2) \tilde{R}_0(r) &= 4\pi \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[ A_0 \frac{\sin kr}{kr} - B_0 \frac{\cos kr}{kr} \right] \right\} \\ &= 4\pi \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ r^2 \left[ A_0 k \left( \frac{\cos kr}{kr} - \frac{\sin kr}{(kr)^2} \right) - B_0 k \left( -\frac{\sin kr}{kr} - \frac{\cos kr}{(kr)^2} \right) \right] \right\} = \frac{4\pi B_0}{k} \end{aligned} \quad (1.59)$$

Aus dem Vergleich von (1.55) und (1.59) lesen wir ab

$$(\Delta_{\vec{x}} + k^2) \tilde{R}_0(r) = \frac{4\pi B_0}{k} \delta(\vec{x}) \quad (1.60)$$

Hierbei ist noch zu klären, wie die Konstante  $B_0$  mit der Radialkomponente in (1.53) zusammenhängt - zunächst stellen wir fest, daß aus (1.47) folgt

$$B_0 = -R_0 \tan \delta_0 \quad (1.61)$$

und aus (1.51) lesen wir die Phasenverschiebung der s-Wellenstreuung ab

$$\delta_0 = \arctan \frac{\text{io}(ka)}{n(ka)} \quad (1.62)$$

Ferner erhalten wir aus (1.37) und (1.53)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial r} \{ r \tilde{R}_0(r) \} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ R_0 \frac{\sin kr}{k} - B_0 \frac{\cos kr}{k} \right\} = R_0 \quad (1.63)$$

so daß (1.60) schließlich übergeht in

$$(\Delta \vec{x} + k^2) \tilde{R}_0(r) = - \frac{4\pi \text{io}(ka)}{k n(ka)} \delta(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial r} \{ r \tilde{R}_0(r) \} \quad (1.64)$$

Aufgrund der Delta-Funktion auf der rechten Seite wurde der Hinweis auf die Auswertung an der Stelle  $r=0$  weggelassen. Der Vergleich von (1.54) und (1.64) führt damit auf den Pseudopotentialoperator

$$\tilde{V}(r) \circ = - \frac{2\pi t^2 \text{io}(ka)}{m k n(ka)} \delta(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial r} \{ r \circ \} \quad (1.65)$$

Im Limes kleiner Kugelradien  $a$  bzw. kleiner Energien (1.18) folgt hieraus unter Berücksichtigung von (1.40) und (1.41)

$$\tilde{V}(r) \circ = g \delta(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial r} \{ r \circ \} \quad (1.66)$$

wobei die Stärke der Wechselwirkung

$$g = \frac{2\pi t^2 a}{m} \quad (1.67)$$

unabhängig von der Energie (1.18) ist. Wir bedachten, daß der Operator

$$\hat{O} \circ = \frac{\partial}{\partial r} \{ r \circ \} \Big|_{r=0} \quad (1.68)$$

für am Ursprung reguläre Funktionen  $\delta(r)$  die Eigenschaft

$$\partial \delta(r) = \delta(0)$$

berstat. gilt dagegen  $\delta(r) \rightarrow k/r$  für  $r \rightarrow 0$ , so folgt

(1.69)

$$\partial \delta(r) = 0$$

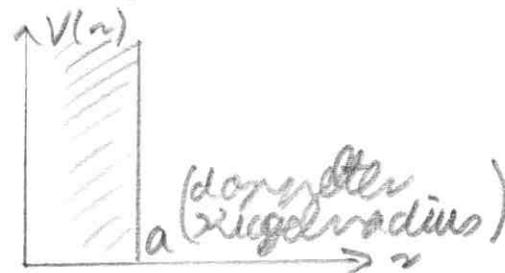
(1.70)

Dennach hat der Operator  $\partial$  die Eigenschaft, etwaig  $1/r$ -Singularitäten herauszufiltern. Ansonsten wirkt er wie eine Delta-Funktion.

Wendet man also den Pseudopotentialoperator (1.66) nur auf am Ursprung reguläre Wellenfunktionen an, so entspricht er der Kontaktweldewirkung

$$\tilde{V}(\vec{r}) = g \delta(\vec{r})$$

mit der Stärke (1.67). Dennach können wir feststellen, daß im Falle von S-Wellenstreuung das Modellpotential für harte Kugeln (1.48) für  $r > a$  mit dem Pseudopotential (1.71) für  $r \geq 0$  äquivalent ist:



Potential für 2 harte Kugeln

$\xrightleftharpoons{\text{Äquivalent}}$

$$\tilde{V}(\vec{r}) = g \delta(\vec{r})$$

$$g = \frac{2\pi \hbar^2 a}{\mu}$$

$\xrightarrow{x}$   
kontaktweldewirkung

### 1.7 Streuamplitude:

Wir werden nun die allgemeine Struktur der Streulösung  $\Psi(\vec{r})$  von (1.19) für eine beliebige 2-Teilchen-Wedelwirkung  $V(\vec{r})$  bestimmen. Dazu stellen wir fest, daß die Schrödingergleichung (1.19) formal die Struktur einer inhomogenen Helmholtz-Gleichung besitzt

$$(\Delta \vec{r} + k^2) \Psi(\vec{r}) = F(\vec{r})$$

(1.72)

wobei aber die Inhomogenität  $F(\vec{z})$  noch von der gesuchten Streulösung  $\psi(\vec{z})$  abhängt:

$$F(\vec{z}) = \frac{2\mu}{k^2} V(\vec{z}) \psi(\vec{z}) \quad (1.73)$$

eine formale Lösung von (1.72) ist durch

$$\psi(\vec{z}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{z}} + \int d^3x' G(\vec{z}, \vec{x}') F(\vec{x}') \quad (1.74)$$

gegeben. Aus mathematischer Sicht bedeckt dabei der erste Term eine homogene Lösung der Helmholtz-Gleichung, während der zweite Term eine inhomogene Lösung darstellt. Aus physikalischer Sicht ist dagegen  $\psi(\vec{z})$  eine Summe aus einer einlaufenden ebenen Welle und einer Streuwellen. Dabei tritt die Green'sche Funktion  $G(\vec{z}, \vec{x}')$  der Helmholtz-Gleichung auf, die folgender Differentialgleichung genügt:

$$(\Delta \vec{z} + k^2) G(\vec{z}, \vec{x}') = \delta(\vec{z} - \vec{x}') \quad (1.75)$$

da die Inhomogenität von der Differenz der Koordinaten  $\vec{z} - \vec{x}'$  abhängt, wird darüber für die Green'sche Funktion gelten:

$$G(\vec{z}, \vec{x}') = G(\vec{z} - \vec{x}') \quad (1.76)$$

setzen wir eine Fourier-Transformation an

$$G(\vec{z}, \vec{x}') = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} G(\vec{q}) e^{i\vec{q} \cdot (\vec{z} - \vec{x}')} \quad (1.77)$$

so folgt aus (1.75) eine algebraische Gleichung für die Fourier-transformierte

$$G(\vec{q}) = \frac{-1}{\vec{q}^2 - k^2} \quad (1.78)$$

die Green'sche Funktion  $G(\vec{z}, \vec{x}')$  folgt dann durch Einsetzen von (1.78) in (1.77) und durch Ausführung des verbleibenden  $\vec{q}$ -Integrals:

$$G(\vec{z}, \vec{x}') = \frac{-1}{(2\pi)^3} \int d^3q \frac{e^{i\vec{q} \cdot (\vec{z} - \vec{x}')}}{\vec{q}^2 - k^2} \quad (1.79)$$

Dabei tritt beim Übergang zu Zirkelkoordinaten das Problem auf, dass bei

der Ausführung des radikalen  $\vec{q}$ -Integrals ein Pol auf dem Integrationsweg liegt und daher das  $\vec{q}$ -Integral (1.79) nicht eindeutig definiert ist. Um ein wohldefiniertes  $\vec{q}$ -Integral zu erhalten, müssen wir den Pol im Intervall von der reellen Achse wegschieben. Verdrückt man nach Formen den "Masseterm" um einen "+ $i\zeta$ -Term" bzw. "- $i\zeta$ -Term" und betrachtet man den Limes  $\zeta \rightarrow 0$ , so erhält man eine veränderte bzw. angepasste Grundeinfunktion:

$$G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{-1}{(2\pi)^3} \lim_{\zeta \downarrow 0} \int d^3 q \frac{e^{i\vec{q} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}}{\vec{q}^2 - k^2 \mp i\zeta} \quad (1.80)$$

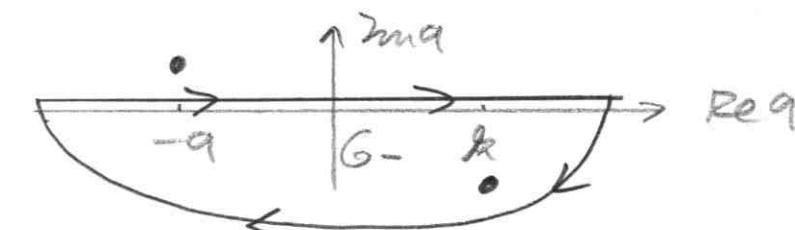
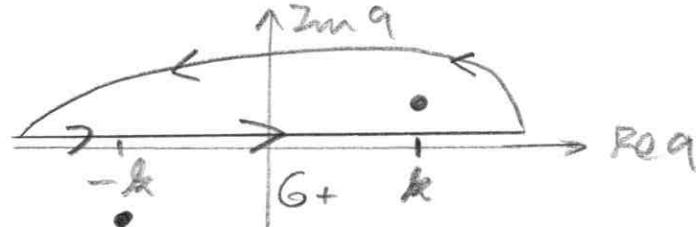
Beim Übergang zu Zylinderkoordinaten folgt zunächst

$$G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{-1}{4\pi^2} \lim_{\zeta \downarrow 0} \int_0^\infty dq \frac{q^2}{q^2 - k^2 \mp i\zeta} \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta e^{iq|\vec{x} - \vec{x}'| \cos\vartheta} \quad (1.81)$$

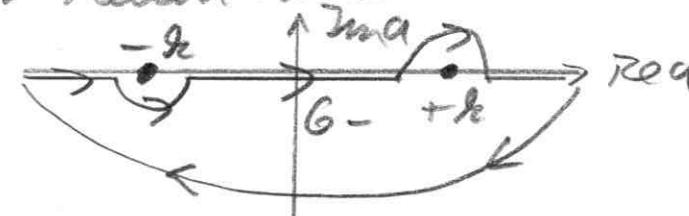
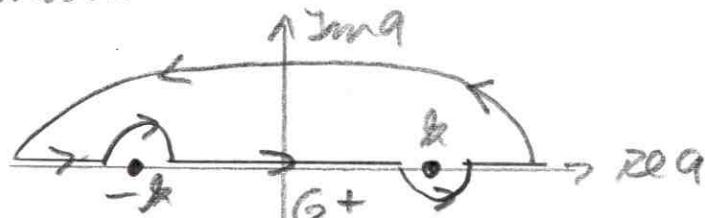
wobei die Ausführung des  $\vartheta$ -Integrals ergibt

$$G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{i}{4\pi^2 |\vec{x} - \vec{x}'|} \lim_{\zeta \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{q}{q^2 - k^2 \mp i\zeta} e^{iq|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (1.82)$$

Im Integranden von  $G_+$  sind die Pole an den Stellen  $q = \pm(k + i\zeta/2k)$  und von  $G_-$  an den Stellen  $q = \pm(k - i\zeta/2k)$ :



Die Verdrückung der Pole von  $G_+$  im Limes  $\zeta \downarrow 0$  ist dabei äquivalent zu einer Deformation des Integrationsweges längs der reellen Achse:



Das reelle Integral muß aufgrund der Exponentialfunktion für  $G+$  bzw.  $G-$  in den oberen bzw. unteren komplexen Zahlenkreis geschlossen werden, so daß bei der Anwendung des Residuensatzes nur das Residuum an der Stelle  $q_+ = k - i\gamma/2k$  bzw.  $q_- = -k + i\gamma/2k$  beträgt:

$$G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{-1}{2\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \underset{q=\pm k}{\text{Res}} \left\{ \frac{q}{q^2 - k^2} e^{i q |\vec{x} - \vec{x}'|} \right\} \quad (1.83)$$

Damit stellt die retardierte bzw. avancierte brechende Funktion  $G+$  bzw.  $G-$  eine nach außen bzw. nach innen laufende Zugwelle dar:

$$G_{\pm}(\vec{x}, \vec{x}') = - \frac{e^{\pm ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (1.84)$$

Beschränkt man sich wegen der Kausalität auf die retardierte brechende Funktion  $G+$ , so folgt aus (1.73), (1.74) und (1.84) die folgende Integraldarstellung für die Streulösung  $\psi(\vec{x})$ :

$$\psi(\vec{x}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} - \frac{\mu}{2\pi n^2} \int d^3x' \frac{e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} V(\vec{x}') \psi(\vec{x}') \quad (1.85)$$

Bei den typischen Streuproblemen sind die Detektoren weit vom Streuer entfernt, d.h. es gilt  $|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$ . Damit erhalten wir die Näherung

$$k|\vec{x} - \vec{x}'| = k\sqrt{\vec{x}^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}' + \vec{x}'^2} \approx k\vec{r} - \vec{k}' \cdot \vec{x}' + \dots \quad (1.86)$$

wobei  $\vec{k}' = \vec{k}\vec{x}/\vec{r}$  mit  $\vec{r} = |\vec{x}|$ . Weit entfernt vom Streuer hat die statische Lösung  $\psi(\vec{x})$  nach (1.85) und (1.86) die Gestalt

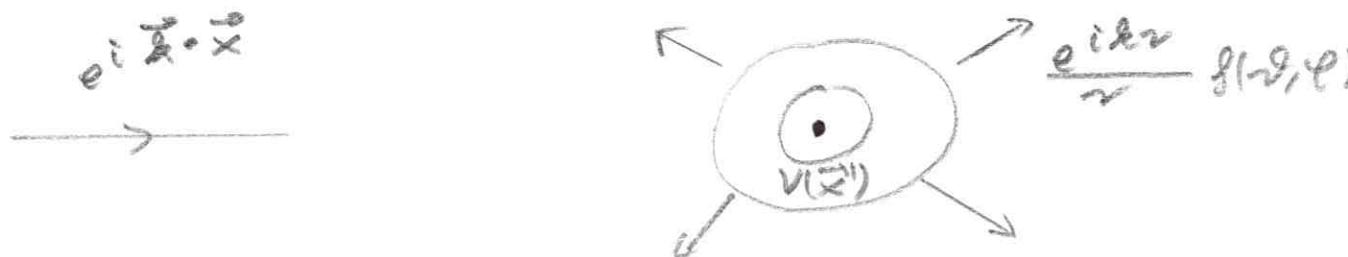
$$\psi(\vec{x}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \frac{e^{ik\vec{r}}}{\gamma} g(\vartheta, \varphi) \quad (1.87)$$

wobei als Streuamplitude

$$g(\vartheta, \varphi) = - \frac{\mu}{2\pi n^2} \int d^3x' e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x}'} V(\vec{x}') \psi(\vec{x}') \quad (1.88)$$

eingeführt wurde. Sie hängt nur von der Richtung  $\vec{x}/\vec{r}$ , nicht aber vom Ab-

stand r ab und hat die Dimension einer Länge. Mit (1.87) haben wir die allgemeine Gestalt der stationären Streulösungen gefunden:



### 1.8 Wirkungsquerschnitt:

Der differentielle Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/d\Omega$  gibt die Zahl der Teilchen  $dN(\Omega)$  an, die pro Zeiteinheit dt und pro Winkellement d $\Omega$  in das Winkellement d $\Omega$  bei  $\Omega$  gestreut werden bezogen auf die Stromdichte in den einfallenden Teilchen:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN(\Omega)}{\text{in ein } \Omega \text{ dt}} \quad (1.89)$$

Der gesamte Wirkungsquerschnitt entsteht dann durch Integration über Raumwinkel  $\Omega$  mit  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$

$$\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) (\theta, \varphi) \quad (1.90)$$

und besitzt die Dimension einer Fläche. In der Kernphysik wird der Wirkungsquerschnitt in der Einheit von 1 barn =  $10^{-24} \text{ cm}^2$  angegeben. Liegt eine Wellenfunktion  $\psi(\vec{x})$  vor, so lautet deren Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{x}) = \frac{t_0}{2\mu c} \left\{ \psi^*(\vec{x}) \vec{\nabla}_x \psi(\vec{x}) - \psi(\vec{x}) \vec{\nabla}_x \psi^*(\vec{x}) \right\} \quad (1.91)$$

Wir betrachten zunächst die einlaufende ebene Welle  $\psi_{\text{ein}}(\vec{x}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$  in (1.87), deren Stromdichte durch (1.91) gegeben ist:

$$\mathcal{S}_{\text{ein}}(\vec{x}) = \frac{tik}{\mu}$$

(1.92)

Der zweite Term in (1.87) beschreibt die radiale Streulösung

$$\psi_{\text{str}}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{e^{ikr}}{r} g(\vartheta, \varphi) \quad (1.93)$$

Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt (1.89) ist nur die auslaufende radiale Komponente der Stromdichte von Interesse:

$$j_{\text{str}}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{tik}{2\pi i} \left\{ \psi_{\text{str}}^*(r, \vartheta, \varphi) \frac{\partial}{\partial r} \psi_{\text{str}}(r, \vartheta, \varphi) - \psi_{\text{str}}(r, \vartheta, \varphi) \frac{\partial}{\partial r} \psi_{\text{str}}^*(r, \vartheta, \varphi) \right\} \quad (1.94)$$

für die wir erhalten

$$j_{\text{str}}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{tik}{\mu} \frac{|g(\vartheta, \varphi)|^2}{r^2} \quad (1.95)$$

Daraus ergibt sich die Zahl der gestreuten Teilchen gemäß

$$dN(\vartheta, \varphi) = j_{\text{str}}(r, \vartheta, \varphi) r^2 d\Omega d\varphi \quad (1.96)$$

Damit lautet der differentielle Wirkungsquerschnitt (1.89) mit Hilfe von (1.92), (1.95) und (1.96)

$$\left( \frac{dE}{d\Omega} \right)(\vartheta, \varphi) = |g(\vartheta, \varphi)|^2 \quad (1.97)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist demnach durch das Betragsquadrat der Streuamplitude gegeben.

### 1.9 Partialwellen:

Wir wollen nun die allgemeine Streulösung nach den entsprechenden Beiträgen der Anzahlpulsquantenzahl  $l$  zerlegen, die man auch als Partialwellen bezeichnet. Hierzu setzen wir nun wieder voraus, daß das Potentiel rotationsymmetrisch ist:  $V(\vec{x}) = V(|\vec{x}|)$ . Wir betrachten zunächst die in (1.87) einlaufende ebene Welle und zerlegen diese nach der durch (1.24) und (1.44) definierten sphärischen Basis:

$$e^{ik \cdot \vec{x}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{ A_{lm} j_l(kr) + B_{lm} n_l(kr) \} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (1.98)$$

Dabei fallen die sogenannten Neumann-Funktionen  $n_l(kr)$  weg, da sie gemäß (1.37) am Ursprung divergieren:

$$e^{ik \cdot \vec{x}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{lm} j_l(kr) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (1.99)$$

Außerdem wollen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass die ebene Welle in  $\vec{z}$ -Richtung einfallen möge, das also  $\vec{k} = k \hat{e}_z$  vorliegt. Da dann die linke Seite den Winkel  $\vartheta$  nicht mehr enthält, muss das auch für die rechte Seite gelten, d.h. erstehen nur Zugflächenfunktionen  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  mit konstanter Magnetquantenzahl  $m$  auf:

$$Y_{l0}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \vartheta) \quad (1.100)$$

Die bilden die Legendre-Polynome

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dz^l} (z^2 - 1)^l \quad (1.101)$$

der Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^{+1} dz P_l(z) P_{l'}(z) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \quad (1.102)$$

Die ersten Legendre-Polynome lauten explizit

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = z, \quad P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1), \quad P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z), \dots \quad (1.103)$$

Die Entwicklung (1.99) der ebenen Welle nach Zugwellen reduziert sich damit auf

$$e^{ikr \cos \vartheta} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} j_l(kr) P_l(\cos \vartheta) \quad (1.104)$$

Zur Berechnung der Koeffizienten  $A_l$  multiplizieren wir (1.104) mit  $P_l(\cos \vartheta)$  und integrieren über alle Winkel  $\vartheta$ . Durch Anwendung der Orthogonalitätsre-

lation (1.102) erhalten wir

$$\int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta e^{ikr \cos \vartheta} P_l(\cos \vartheta) = \int_{-1}^{+1} dz e^{ikrz} P_l(z) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \frac{\sqrt{2l+1}}{4\pi} j_l(kr) \cdot \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta$$

$$A_l P_l(\cos \vartheta) P_l(\cos \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \frac{\sqrt{2l+1}}{4\pi} j_l(kr) \int_{-1}^{+1} dz P_l(z) P_l(z) = A_l \frac{1}{\sqrt{\pi(2l+1)}} j_l(kr)$$

$$\Rightarrow A_l j_l(kr) = \sqrt{\pi(2l+1)} \int_{-1}^{+1} dz e^{ikrz} P_l(z) \quad (1.105)$$

Da diese Beziehung für alle  $z$ -werten muss, reicht es zur Berechnung von  $A_l$  aus, den eingeschlossenen Winkel zu betrachten. Aufgrund von (1.40) gilt für  $z \rightarrow 0$ :

$$A_l \frac{(kr)^l}{(2l+1)!!} = \sqrt{\pi(2l+1)} \int_{-1}^{+1} dz P_l(z) \left\{ 1 + \dots + \frac{(krz)^{l-1}}{(l-1)!} + \frac{(krz)^l}{l!} + \frac{(krz)^{l+1}}{(l+1)!} + \dots \right\} \quad (1.106)$$

Die Terme auf der rechten Seite mit  $(krz)^n$  mit  $n \geq l+1$  tragen im Limes  $z \rightarrow 0$  nicht bei. Andererseits lesen wir aus (1.101), (1.103) ab, daß sich die Potenzen  $z^n$  nach Taylor-Polynome entwickeln lässt:

$$z^n = \frac{z^n (n!)^2}{(2n)!} P_n(z) + \sum_{m=0}^{n-1} c_m P_m(z) \quad (1.107)$$

Deshalb folgt unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsrelation (1.102) aus (1.106) im Limes  $z \rightarrow 0$ :

$$A_l \frac{(kr)^l}{(2l+1)!!} = \sqrt{\pi(2l+1)} \int_{-1}^{+1} dz P_l(z) \frac{(kr)^l}{l!} \frac{2^l (l!)^2}{(2l)!} P_l(z) \quad (1.108)$$

woraus wir mit Hilfe von (1.102) und  $(2l+1)! = (2l+1)!! 2^l l!$  ablesen

$$A_l = \sqrt{4\pi (2l+1)} i^l \quad (1.109)$$

Da aber (1.105) für alle  $z$  gültig sein muss, erhalten wir als Mittleresultat eine Integraldarstellung der sphärischen Bessel-Funktion

$$j_l(x) = \frac{(-i)^l}{2} \int_{-1}^{+1} dz e^{izx} P_l(z) \quad (1.110)$$

Unser Lauterresultat also bestätigt darin, daß wir aus (1.104) und (1.109) ableiten

können, wie sich eine in z-Richtung ausbreitende ebene Welle nach Kugelkoordinaten zerlegen lässt:

$$e^{ikr \cos \vartheta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \vartheta) \quad (1.111)$$

Anschließend wenden wir uns der Streuamplitude  $f(\vartheta, \ell)$  in (1.87) zu. Aufgrund der angenommenen Zylindersymmetrie des Streuproblems ist zu erwarten, daß die Streuamplitude  $f(\vartheta, \ell)$  nicht vom azimuthalen Winkel abhängt:  $f(\vartheta, \ell) = f(\vartheta)$ . Da über die Legendre-Polynome  $P_l(\cos \vartheta)$  eine Basis bilden, lässt sich auch die Streuamplitude  $f(\vartheta)$  nach diesen entwickeln

$$f(\vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_\ell (2\ell+1) P_l(\cos \vartheta) \quad (1.112)$$

wobei die Entwicklungskoeffizienten  $f_\ell$  als Partialwellenamplituden bezeichnet werden. Für die Streulösung (1.87) gilt aufgrund von (1.111) und (1.112):

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) P_l(\cos \vartheta) \left\{ i^l j_l(kr) + f_\ell \frac{e^{ikr}}{r} \right\} \quad (1.113)$$

Das asymptotische Verhalten für große Distanz ist wegen (1.42) gegeben durch

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) P_l(\cos \vartheta) \left\{ i^{\ell} \frac{1}{2ikr} [e^{ikr} e^{-il\frac{\pi}{2}} - e^{-ikr} e^{il\frac{\pi}{2}}] + f_\ell \frac{e^{ikr}}{r} \right\} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2\ell+1) P_l(\cos \vartheta)}{2ikr} \left\{ e^{ikr} i^{\ell} (-i)^{\ell} - e^{-ikr} i^{\ell} + f_\ell 2ik e^{ikr} \right\} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2\ell+1) P_l(\cos \vartheta)}{2ikr} \left\{ e^{ikr} [1 + 2ik f_\ell] - (-1)^\ell e^{-ikr} \right\}, \quad r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1.114)$$

Der zweite Term beschreibt dabei eine einlaufende Zugelwelle, die vom Streuergebnis beeinflußt wird. Demgegenüber stellt der erste Term eine ausvorgang nicht beeinflußt dar, die durch die Beeilung am Potential mit der Einlaufende Zugelwelle dar, die durch die Beeilung am Potential mit der allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung (1.24) vor der Form

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (2m) R_m(r) Y_m(\vartheta, \ell) \quad (1.115)$$

ist. Wegen der Zylindersymmetrie reduziert sich dann (1.115) unter Beachtung von (1.100) auf

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l R_l(r) P_l(\cos\theta) \quad (1.116)$$

In Abschnitt 1.4 hatten wir diskutiert, dass das asymptotische Verhalten der Radialkomponente  $R_l(r)$  gemäß (1.46) durch die Phasenverschiebung  $\delta_l$  bestimmt wird. Für große Abstände erhalten wir daher

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c_l P_l(\cos\theta)}{2ik_r} \left\{ e^{irk_r} (-i)^l e^{i\delta_l} - i^l e^{-i\delta_l} e^{-irk_r} \right\}, \quad r \rightarrow \infty \quad (1.117)$$

Vergleichen wir zunächst die einlaufende Zugwelle in (1.114) und (1.117), so wird die Amplitude  $c_l$  festgelegt durch

$$c_l = (2l+1) i^l e^{i\delta_l} \quad (1.118)$$

Vergleichen wir dann noch die anlaufende Zugwelle in (1.114) und (1.117), so ergibt hieraus eine Beziehung zwischen der Partialwellenamplitude  $s_l$  und der Phasenverschiebung  $\delta_l$ :

$$1 + 2ik_r s_l = \frac{c_l}{2l+1} (-i)^l e^{i\delta_l} = \frac{(2l+1)i^l e^{i\delta_l}}{2l+1} (-i)^l e^{i\delta_l} = e^{2i\delta_l} \Rightarrow s_l = \frac{e^{i\delta_l}}{k} \quad (1.119)$$

Einsetzen von (1.119) in (1.112) führt auf die Streuamplitude

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} s_l P_l(\cos\theta) \quad (1.120)$$

und der differentielle Wirkungsquerschnitt (1.97) ergibt sich zu

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)(\theta) = \frac{1}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} (2l+1)(2l'+1) e^{i(\delta_l - \delta_{l'})} s_l s_{l'} P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) \quad (1.121)$$

Während beim differentiellen Wirkungsquerschnitt (1.121) zwischen den verschiedensten Partialwellen Interferenzterme auftreten, sind die Partialwellen im totalen Wirkungsquerschnitt (1.90) aufgrund der Orthogonalitätsrelation (1.102) additiv:

$$G = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (1.122)$$

Wir kehren nochmals zum Modell harten Kugeln von Abschnitt 1.5 zurück. Aufgrund von (1.52) dominiert für kleine Kugelradien bzw. kleine Energien (1.18) die s-Wellenstreuung. In diesem Limit reduziert sich (1.21) auf den Beitrag mit  $l=0$  und wir erhalten mit  $\delta_0 = -ka$

$$G = 4\pi a^2 \quad (1.123)$$

unabhängig von  $k$ . Deshalb bezeichnet man den Parameter  $a$  auch als s-Wellenlänge. Er charakterisiert aufgrund von (1.67) für kleine Energien vollständig die Stärke der Wechselwirkung.

Betrachten wir einmal einen typischen Zahlenwert, wie er z.B. im Experiment bei einem verdünnten Gas von  $^{87}\text{Rb}$ -Atomen vorliegt. Dort ist die Wechselwirkung repulsiv mit einer s-Wellenlänge von  $a \approx 100 \text{ aB}$  geprägt und es handelt sich um eine Abstoßung. Wir wollen nun zeigen, ob die angenommene Näherung  $ka \ll 1$  tatsächlich gerechtfertigt ist. Dazu müssen wir die Größe  $ka$  bestimmen. Hierzu müssen wir die Erfordernisse des Betrags des Betrags des Vektors  $k$  abstimmen, indem wir die kinetische Energie (1.18) eines Konvektors  $k$  abstimmen, indem wir die thermische Energie  $k_B T$  mit der thermischen Energie  $\frac{1}{2} M k_B T$  vergleichen:

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2M} \approx k_B T \Rightarrow k \approx \frac{\sqrt{2M k_B T}}{\hbar} \quad (1.124)$$

Bei einer Temperatur von  $T \approx 300 \text{ mK}$  erhalten wir dann

$$a k \approx \frac{\sqrt{2M k_B T}}{\hbar} a \approx 0.056 \ll 1 \quad (1.125)$$

Zusammenfassend erhalten wir, dass es tatsächlich gerechtfertigt ist, die kleinen Partikelwellen zu vernachlässigen und sich auf die s-Wellenstreuung zu konzentrieren.

## 1.10 Ununterscheidbare Teileien:

Bisher haben wir uns darauf verständigt, die Streuung zweier unterschiedbarer Teileien zu diskutieren. Nun wollen wir untersuchen, wie sich die einzelnen Größen verändern, wenn wir die Streuung zweier ununterscheidbarer Teileien betrachten. Wir stellen zunächst fest, daß bei identischen Teileien ihre Massen übereinstimmen, d.h.  $m_1 = m_2 = m$ , so daß die reduzierte Masse (1.15) durch  $\mu = m/2$  und die Stärke der Wechselwirkung (1.66), (1.67) durch

$$g = \frac{4\pi \hbar^2 a}{m} \quad (1.126)$$

ergeben ist. Außerdem ist zu berücksichtigen, daß die Streulösung bei Bosonen symmetrisch bzw. Fermionen unter dem Vertausch beider Teileien antisymmetrisch ist. Da die bisher verwendete Koordinate  $x$  die Paritätssymmetrie einmaß, da die später (1.9) dargestellt, führt ein Vertausch beider Teileien zur Paritätskoordinate  $-x$  nach  $-x$ . Eine Symmetrisierung bzw. Antisymmetrisierung der Streulösung  $\psi(x)$  führt dann auf

$$\psi^\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi(x) + \epsilon \psi(-x) \}, \quad (1.127)$$

wobei  $\epsilon = +1$  für Bosonen und  $\epsilon = -1$  für Fermionen vorliegt. Verwenden wir nun die Streulösung (1.87) mit der Eigenschaft  $\delta(\vartheta, \epsilon) = \delta(-\vartheta)$  wogegen der angenommenen Zylindersymmetrie, so geht (1.127) über in

$$\psi^\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ e^{ikx} + \epsilon e^{-ikx} \} + \frac{e^{ikx}}{\sqrt{\nu}} g^\epsilon(\vartheta), \quad (1.128)$$

wobei die Streuamplitude ununterscheidbarer Teileien lautet

$$g^\epsilon(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \delta(\vartheta) + \epsilon \delta(\pi - \vartheta) \} \quad (1.129)$$

seinen Betrag quadrat führt dann analog zu (1.97) auf den differentiellen

Wirkungsquerschnitt ununterscheidbarer Teilchen

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^E(\vartheta) = \frac{1}{2} |f(\vartheta) + E f(\pi - \vartheta)|^2 \quad (1.130)$$

Setzen wir hierin die Partialwellenzerlegung (1.120) der Streuamplitude ein, so müssen wir nach (1.101) beachten, dass für die Legendre-Polynome

$$P_l(\cos(\pi - \vartheta)) = P_l(-\cos \vartheta) = (-1)^l P_l(\cos \vartheta) \quad (1.131)$$

gilt und erhalten

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^E(\vartheta) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(2l'+1) e^{i(l\vartheta - l'\vartheta)} \sin \vartheta \sin l\vartheta [1 + E(-1)^l] [1 + E(-1)^{l'}] P_l(\cos \vartheta) P_{l'}(\cos \vartheta) \quad (1.132)$$

Für den totalen Wirkungsquerschnitt (1.90) ununterscheidbarer Teilchen erhalten wir dann mit der Orthonormalitätsrelation (1.102):

$$\sigma^E = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 l\vartheta \cdot [1 + E(-1)^l]^2 \quad (1.133)$$

Bei Modell kugel-symmetrischer Kugeln erhalten wir mit (1.52) für kleine Kugelradien den kleinen Erregungen (1.18) einen totalen Wirkungsquerschnitt, der nur von der S-Wellenstreuung dominiert wird:

$$\sigma^E = 2\pi a^2 (1+E)^2 \quad (1.134)$$

Im Falle von Bosonen ( $E=+1$ ) erhalten wir demnach einen totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma^{+1} = 8\pi a^2 \quad (1.135)$$

der gegenüber dem totalen Wirkungsquerschnitt (1.123) zu vier unterschiedlichen Teilchen um einen Faktor 2 vergrößert ist. Im Falle von Fermionen ( $E=-1$ ) erhalten wir dagegen aus (1.134) einen verschwindenden totalen Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma^{-1} = 0 \quad (1.136)$$

Wir berücksichtigen, dass bei Fermionen aufgrund der Antisymmetrisierung die S-

Wellenstreuung keinen Beitrag zur Streuung leistet. Die Beiträge höherer Partikellwellen  $l > 0$  sind aber gemäß (1.52) mit  $(ka)^{2l+1}$  unterdrückt und daher im Limes kleiner Kugelradien bzw. kleiner Energien (1.18) vernachlässigbar. Demnach kann man also die Streuung von Elektronen beim modellhaften Kugeln vernachlässigen.

### 1.11 Optisches Theorem:

Nach diesem Exkurs über ununterscheidbare Teildichten kehnen wir wieder zu unterscheidbaren Teildichten zurück. Für den Imaginärteil der Streuamplitude (1.120) erhalten wir:

$$\operatorname{Im} f(\vartheta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta e P_l(\cos \vartheta) \quad (1.137)$$

Wertet man diesen Ausdruck für  $\vartheta = 0$  aus, so folgt mit der Eigenschaft  $P_0(0) = 1$ , die in (1.103) abgeleitet werden kann;

$$\operatorname{Im} f(0) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta e \quad (1.138)$$

Der Vergleich von (1.122) und (1.138) zeigt, daß es einen tiefliegenden Zusammenhang zwischen dem totalen Streuquerschnitt  $\sigma$  und der Streuamplitude  $f(\vartheta)$  gibt, der in der Literatur als optisches Theorem bekannt ist:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(0) \quad (1.139)$$

In folgenden zeigen wir, daß dieses optische Theorem eine direkte Folge der Wahrscheinlichkeitsverhältnisse ist. Hierzu betrachten wir den radialen Anteil der Stromdichte (1.91)

$$j_r(\vec{x}) = \frac{t_n}{2\mu i} \left\{ \psi^*(\vec{x}) \frac{\partial \psi(\vec{x})}{\partial r} - \psi(\vec{x}) \frac{\partial \psi^*(\vec{x})}{\partial r} \right\} \quad (1.140)$$

und werten ihm für die Storulösung (1.87) aus:

$$j_r(\vec{x}) = \frac{t_n}{2\mu i} \left\{ \left[ e^{-ik\cdot\vec{x}} + \frac{e^{-ikr}}{r} g^* \right] \left[ i \frac{\vec{x} \cdot \vec{k}}{r} e^{ik\cdot\vec{x}} + \left( ik \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \right) g \right] - c.c. \right\} \quad (1.141)$$

Im Limes großer Abstände  $r \rightarrow \infty$  läßt sich der  $1/r^2$ -Term gegenüber dem  $1/r$ -Term vernachlässigen und wir erhalten

$$\hat{s}_r(\vec{r}) = \hat{s}_{r,0}(\vec{r}) + \hat{s}_{r,\text{str}}(\vec{r}) + \hat{s}_{r,\text{int}}^{(1)}(\vec{r}) + \hat{s}_{r,\text{int}}^{(2)}(\vec{r}) \quad (1.142)$$

mit der durchlaufenden radialen Stromdichte

$$\hat{s}_{r,0}(\vec{r}) = \frac{tk}{\mu r} \vec{k} \cdot \vec{x} \quad (1.143)$$

mit der gestreuten radialen Stromdichte

$$\hat{s}_{r,\text{str}}(\vec{r}) = \frac{tk}{\mu r^2} |\vec{s}|^2 \quad (1.144)$$

und den beiden Beiträgen zur interferierenden radialen Stromdichte

$$\hat{s}_{r,\text{int}}^{(1)}(\vec{r}) = \frac{tk}{2\mu r} e^{ikr} f e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \left( 1 + \frac{\vec{x} \cdot \vec{k}}{r k} \right), \quad \hat{s}_{r,\text{int}}^{(2)}(\vec{r}) = \hat{s}_{r,\text{int}}^{(1)}(\vec{r})^* \quad (1.145)$$

Nun berechnen wir für diese radialen Stromdichten separat den totalen Strom. Für (1.143) folgt zunächst

$$I_0 = \int d\Omega \hat{s}_{r,0}(\vec{r}) = \frac{tk}{\mu r} \int_0^\pi d\vartheta \int_0^\pi d\varphi \sin\vartheta \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix} = 0 \quad (1.146)$$

Demnach trägt die durchlaufende radiale Stromdichte (1.143) nicht zum totalen Strom bei. Als nächstes betrachten wir den Beitrag von (1.144):

$$I_{\text{str}} = \int d\Omega \hat{s}_{r,\text{str}}(\vec{r}) = \frac{2\pi tk}{\mu r^2} \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta |\vec{s}(\vartheta)|^2 \quad (1.147)$$

Aus dem Vergleich von (1.90), (1.97) und (1.147) lesen wir ab, daß der gestreute Strom durch den totalen Winkelvergrößerungsfaktor  $G$  gegeben ist:

$$I_{\text{str}} = \frac{tk}{\mu r^2} G \quad (1.148)$$

Schließlich untersuchen wir den ersten Beitrag in (1.145):

$$I_{\text{int}}^{(1)} = \int d\Omega \hat{s}_{r,\text{int}}^{(1)}(\vec{r}) = \frac{tk}{2\mu r} e^{ikr} 2\pi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta |\vec{s}(\vartheta)| (1 + \cos\vartheta) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} (\cos\vartheta - 1)} \quad (1.149)$$

Für die weitere Reduktion ist es eine entscheidende Vereinfachung, den  $\cos\vartheta - 1$ -

Faktor durch eine partielle Ableitung nach  $r$  zu erhalten:

$$I^{(1)}_{\text{int}} = \frac{\pi t k}{\mu r} e^{ikr} \left(1 + \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial r}\right) \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta f(\vartheta) e^{-ikr} \cos^2 \vartheta \quad (1.150)$$

Setzt man hierin die Partialwellenzerlegungen der ebenen Welle (1.111) und der Streuamplitude (1.120) ein, so erhalten wir zunächst

$$I^{(1)}_{\text{int}} = \frac{\pi t h}{\mu r} e^{ikr} \left(1 + \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial r}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{e=0}^{\infty} (-i)^l (2e+1) j_e(kr) (2e+1) e^{ide} \sin \vartheta \int_0^{\pi} d\vartheta \cos^2 \vartheta P_l(\cos \vartheta) P_l(\cos \vartheta) \quad (1.151)$$

Wit Hilfe der Orthogonalitätsrelation (1.102) reduziert sich dies auf

$$I^{(1)}_{\text{int}} = \frac{2\pi t h}{\mu r} e^{ikr} \left(1 + \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial r}\right) \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l (2l+1) j_e(kr) e^{ide} \sin \vartheta \quad (1.152)$$

Im ländesgrößen Abstände  $r \rightarrow \infty$  lassen sich die sphärischen Bessel-Funktionsreihen durch die asymptotischen Formeln (1.42) ersetzen:

$$\begin{aligned} I^{(1)}_{\text{int}} &= \frac{2\pi t h}{\mu r} e^{ikr} \left(1 + \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial r}\right) \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{ide} \sin \vartheta \frac{(-i)^l}{2ikr} \{ e^{ikr} (-i)^l - e^{-ikr} i^l \} \\ &= \frac{\pi t h}{\mu r k} e^{ikr} \left(1 + \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial r}\right) \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{ide} \sin \vartheta (-i) \frac{1}{r} \{ e^{ikr} (-1)^l - e^{-ikr} \} \end{aligned} \quad (1.153)$$

Bei der Auswertung der partiellen Ableitung werden wir nur die im ländesgrößen Abständen  $r \rightarrow \infty$  dominierenden Terme berücksichtigen:

$$\begin{aligned} I^{(1)}_{\text{int}} &= \frac{\pi t h}{\mu r k} e^{ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{ide} \sin \vartheta (-i) \frac{1}{r} \{ (-1)^l [1 + \frac{i}{k} ik] e^{ikr} - [\frac{i}{k} (1-i) k] e^{-ikr} \} \\ &\Rightarrow I^{(1)}_{\text{int}} = \frac{2\pi t h}{\mu r^2 k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin \vartheta i e^{ide} \end{aligned} \quad (1.154)$$

Der zweite Beitrag in (1.145) führt gerade zu dem in (1.154) konjugiert komplexen:

$$I^{(2)}_{\text{int}} = \int d\vartheta J^{(2)}_{\text{int}}(r, \vartheta) \xrightarrow{(1.145)} \int d\vartheta J^{(1)}_{\text{int}}(r, \vartheta) \xrightarrow{(1.149), (1.154)} \frac{2\pi t h}{\mu r^2 k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin \vartheta (-i) e^{-ide} \quad (1.155)$$

Eine Addition von (1.154) und (1.155) ergibt den interferierenden Strom

$$I_{\text{int}} = I^{(1)}_{\text{int}} + I^{(2)}_{\text{int}} = -\frac{4\pi t h}{\mu r^2 k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \vartheta \quad (1.156)$$

Zu die Summe aller Ströme (1.146), (1.148), (1.156) aufgrend der Wahrscheinlichkeit

Wirklichkeitsverhältnisse verhindern muss, folgt das optische Theorem:

$$I_0 + I_{\text{str}} + I_{\text{int}} = \frac{t k}{\mu n^2} \left\{ G - \frac{4\pi}{k^2} \sum_{e=0}^{\infty} (2e+1) \sin^2 \theta_e \right\} \stackrel{!}{=} 0 \quad (1.138) \xrightarrow{(1.139)} (1.139) \checkmark$$

### 1.12 Bornsche Näherung:

Wir kehren nun wieder zur stationären Lösung (1.87) der Schrödinger-Gleichung (1.19) zurück, wobei die Streuamplitude  $f(\vec{k}, \vartheta)$  durch (1.88) gegeben ist. Falls das Wechselwirkungspotential  $V(\vec{x})$  klein ist, kann man  $\psi(\vec{x}')$  in (1.88) durch die nullte Ordnung  $\psi(\vec{x}') \approx e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}'}$  von (1.87) ersetzen und erhält somit die Streuamplitude in erster Ordnung Störungstheorie, die man auch als Bornsche Näherung bezeichnet:

$$f(\vec{k}, \vartheta) = -\frac{1}{2\pi\hbar^2} \int d^3x' e^{-i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{x}'} V(\vec{x}') = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \tilde{V}(\vec{k}' - \vec{k}) \quad (1.157)$$

Somit ist die Streuamplitude dann proportional zur Fourier-Transformierten des Wechselwirkungspotentials. Es lassen sich zwei wichtige Grenzfälle diskutieren:

- Bei kleinen Energien (1.18) ist  $|\vec{k}'| = |\vec{k}| = k$  so klein, daß die Exponentialfunktion in (1.157) approximiert werden kann durch  $e^{-i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{x}'} \approx 1$  und wir erhalten

$$f(\vec{k}, \vartheta) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3x' V(\vec{x}') = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \tilde{V}(\vec{0}) \quad (1.158)$$

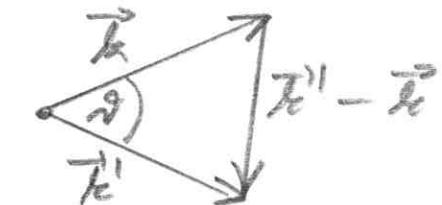
Das bedeutet, daß eine zentralsymmetrische Wellen-Streuung vorliegt, da die Streuamplitude (1.158) unabhängig von den Winkeln  $\vartheta$  und  $\varphi$  ist.

- Bei großen Energien (1.18) ist  $|\vec{k}'| = |\vec{k}| = k$  so groß, daß die Exponentialfunktion in (1.157)

$$e^{-i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{x}'} = e^{-i|\vec{k}' - \vec{k}| r' \cos \vartheta'} \quad (1.159)$$

aufgrund der Identität

$$|\vec{k} - \vec{k}'|^2 = \vec{k}^2 - 2\vec{k} \cdot \vec{k}' + \vec{k}'^2 = 2k^2(1 - \cos \vartheta) = 4k^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \quad (1.160)$$



Für  $\vartheta \neq 0$  stinkt oszilliert und die Streuamplitude (1.157) sehr klein wird. Nur wenn  $\vartheta = 0$  ist, kann die Streuamplitude (1.157) von Null verschieden sein. Das bedeutet also, daß bei großen Energien im wesentlichen nur eine vorwärtstreueung mit  $\vartheta \neq 0$  stattfindet.

In Falle eines zentrale symmetrischen Wechselwirkungspotentials  $V(\vec{r}) = V(r)$  mit  $r = |\vec{r}|$  läßt sich die Bornsche Näherung (1.157) für  $f(\vartheta) = f(\vartheta, \ell)$  weiter ausweiten. Für die Fourier-Transformierte des Wechselwirkungspotentials erhalten wir nämlich:

$$\tilde{V}(\vec{k}) = \int d^3x e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} V(\vec{x}) = 2\pi \int_0^\infty dr r \sin \vartheta \int_0^\infty dr r^2 e^{-irr \cos \vartheta} V(r) = 2\pi \int_0^\infty dr r^2 V(r) \cdot$$

$$\text{Im } \vartheta \text{ sin } \vartheta e^{-irr \cos \vartheta} \underline{U(\vartheta)} = \underline{\cos \vartheta} 2\pi \int_0^\infty dr r^2 V(r) \int_{-\pi}^{+\pi} du e^{-iru} = 2\pi \int_0^\infty dr r^2 V(r) \cdot$$

$$\frac{e^{-irr} - e^{+irr}}{-i\hbar r} = 2\pi \int_0^\infty dr r^2 \frac{-2i \sin \hbar r}{-i\hbar r} V(r) = \frac{4\pi}{\hbar} \int_0^\infty dr r \sin \hbar r V(r) \quad (1.161)$$

Als Beispiel betrachten wir das Yukawa-Potential:

$$V(r) = a \frac{e^{-2r}}{r} \quad (1.162)$$

dessen Fourier-Transformierte aus (1.161) und (1.162) folgt:

$$\tilde{V}(\vec{k}) = \frac{4\pi a}{\hbar} \int_0^\infty dr r \sin \hbar r e^{-2r} = \frac{4\pi a}{\hbar} \int_0^\infty dr \frac{1}{2i} (e^{-2r + i\hbar r} - e^{-2r - i\hbar r})$$

$$= \frac{4\pi a}{\hbar} \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{2-i\hbar} - \frac{1}{2+i\hbar} \right\} = \frac{4\pi a}{\hbar} \frac{1}{2i} \frac{(2+i\hbar) - (2-i\hbar)}{4\hbar^2 + 4r^2} = \frac{4\pi a}{\hbar^2 + \hbar^2} \quad (1.163)$$

Einsetzen von (1.163) in (1.157) führt mit Hilfe von (1.160) auf die Streuamplitude

$$f(\vartheta) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \frac{4\pi a}{\hbar^2 + 4\hbar^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \quad (1.164)$$

Mit Hilfe der Energie (1.18) reduziert sich (1.164) auf

$$f(\vartheta) = -\frac{a}{\frac{\hbar^2 \vartheta^2}{2M} + 4E \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \quad (1.165)$$

so daß sich der differentielle Wirkungsquerschnitt (1.97) ergibt zu

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)(\vartheta) = \frac{a^2}{\left[\frac{b^2 \lambda^2}{2\mu} + 4e \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right]^2} \quad (1.166)$$

Im Grenzfall 1 → 0 gilt das Yukawa-Potential (1.162) gegen das Coulomb-Potential

$$V(r) = \frac{a}{r} \quad a = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_0} \quad (1.167)$$

In diesem Grenzfall 2 → 0 erhalten wir aus (1.166) und (1.167) die Rutherford-Streuung:

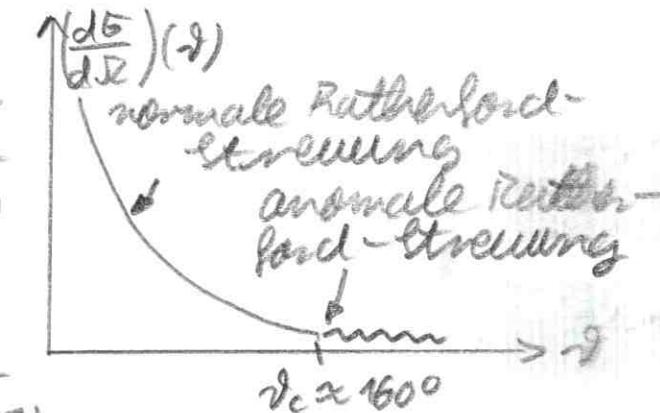
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)(\vartheta) = \left(\frac{Q_1 Q_2}{16\pi \epsilon_0 e}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \quad (1.168)$$

Es ist bemerkenswert, daß die Bornsche Näherung auf den exakten klassischen differentiellen Wirkungsquerschnitt führt, der durch Rutherford im Jahre 1911 berechnet wurde. Der experimentelle Nachweis von (1.168) erfolgte 1913 und stellte eine Bestätigung des Rutherford-Sommerfeldschen Modells dar. Bei etwa  $\vartheta_c \approx 160^\circ$  beobachtet man deutliche Abweichungen des differentiellen Wirkungsquerschnittes vom Rutherford-Effekt (1.168) aufgrund der kinetisch schwierigen Kernkräfte. Im Rahmen der klassischen Rutherford-Rechnung läßt sich aus  $\vartheta_c \approx 160^\circ$  die Größe des Kernradius zu  $10^{-15} \text{ m} = 1 \text{ fm}$  (Femtometer) ableiten.

Zum Schluß diskutieren wir noch den Gültigkeitsbereich der Bornschen Näherung. Dazu stellen wir zunächst fest, daß die Bornsche Näherung eine Entwicklung der Störung einbeinhaltet:

$$\Psi(\vec{x}) = \Psi_0(\vec{x}) + \Psi_1(\vec{x}) + \dots \quad (1.169)$$

Dabei sind nullte und erste Ordnung gemäß (1.87) und (1.157) gegeben durch



$$\psi_0(\vec{x}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad \psi_1(\vec{x}) = -\frac{\mu e^{ikz}}{2\pi\hbar^2} \int d^3x' e^{-i(\vec{k}'-\vec{k}) \cdot \vec{x}'} V(\vec{x}') \quad (1.170)$$

eine solche Entwicklung ist nur gerechtfertigt, wenn die erste Ordnung betragsmäßig klein gegenüber der nullten Ordnung ist:

$$1 = |\psi_0(\vec{x})| \gg |\psi_1(\vec{x})| = \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \left| \int d^3x' e^{-i(\vec{k}'-\vec{k}) \cdot \vec{x}'} V(\vec{x}') \right| \quad (1.171)$$

Bei kleinen Energien gilt analog zu (1.158)

$$1 \gg \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \left| \int d^3x' V(\vec{x}') \right| \quad (1.172)$$

unabhängig vom Betrag des Wellenvektors  $\vec{k}$ . Läßt sich das Streupotential  $V(\vec{x}')$  durch einen mittleren Wert  $V$  abschätzen, so reduziert sich (1.172) auf

$$1 \gg \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \frac{4\pi}{3} r^3 |V| \sim \frac{\mu r^2 |V|}{\hbar^2} \Rightarrow |V| \ll \frac{\hbar^2}{\mu r^2} \quad (1.173)$$

In (1.157) angenommen wurde, daß  $r$  groß ist, bedeutet (1.173), daß  $|V|$  in einigen Fällen kleiner als die Bornsche Näherung dann gerechtfertigt ist und das Streupotential  $V(\vec{x})$  schwach ist. Bei großen Energien verwenden (1.159), (1.160) und erhalten aus (1.171) mit einem mittleren Potentialwert

$$1 \gg \frac{\mu |V|}{2\pi\hbar^2} 2\pi \left| \int_0^\pi d\vartheta \sin^2 \int_0^\pi d\varphi \sin\varphi e^{-2ikr \sin\frac{\theta}{2} \cos\varphi} \right| \quad (1.174)$$

Die Ausführung dieser Integrale ergibt

$$1 \gg \frac{\mu |V|}{2\pi\hbar^2 (kr \sin\frac{\theta}{2})^3} \left| \sin(2kr \sin\frac{\theta}{2}) - 2kr \sin\frac{\theta}{2} \cos(2kr \sin\frac{\theta}{2}) \right| \quad (1.175)$$

Bei festem Stewinkel heißt das, daß die Bornsche Näherung für genügend große Energien immer gültig ist.

## 2. Zweite Quantisierung:

In diesem Kapitel behandeln wir den Formalismus der Zweiten Quantisierung, der die Grundlage der nichtrelativistischen Wellfeldtheorie darstellt. Durch die Einführung von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für identische Teilchen werden wir wiedervereinigte Bosz- und Fermi-Systeme beschreiben können. Als Anwendungen werden wir dabei die Bogoliubov-Theorie der Superfluidität in den Übungen und die Barden-Cooper-Schrieffer-Theorie der Supraleitung in der Vorlesung behandeln.

### 2.1 Unterscheidbare Teilchen:

ein Wellfeldsystem nichtrelativistischer, spinloser Teilchen der Masse  $M$  wird durch die folgende Hamilton-Funktion bestimmt:

$$H(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n; \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; t) = \sum_{r=1}^n \frac{\vec{p}_r^2}{2M} + \sum_{r=1}^n V_1(\vec{x}_r; t) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{\mu=1}^n V_2(\vec{x}_r, \vec{x}_{\mu}; t) \quad (2.1)$$

Bei Bezeichnung  $V_1(\vec{x}_r; t)$  ein auflösbar-Teilchen-Potential und die Wiedervereinigung zweier Teilchen wird durch das  $\lambda$ -Teilchen-Potential  $V_2(\vec{x}_r, \vec{x}_{\mu}; t)$  dargestaltet, das aufgrund des kontinuierlichen Axioms "actio = -ratio" der Einschränkung

$$V_2(\vec{x}_r, \vec{x}_{\mu}; t) = V_2(\vec{x}_r - \vec{x}_{\mu}; t) \quad (2.2)$$

genügt. Aufgrund der Regelsumme in (2.1) können wir dabei ohne Berücksichtigung der Allgemeinheit voraussetzen

$$V_2(\vec{x}_r - \vec{x}_{\mu}; t) = V_2(\vec{x}_p - \vec{x}_r; t) \quad (2.3)$$

Von der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik gelangt man im Rahmen der Ersten Quantisierung dadurch, daß den Operatoren zugordnet werden:

$$\vec{x}_r \rightarrow \hat{\vec{x}}_r, \vec{p}_r \rightarrow \hat{\vec{p}}_r, H(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n; \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; t) \rightarrow \hat{H} = H(\hat{\vec{p}}_1, \dots, \hat{\vec{p}}_n; \hat{\vec{x}}_1, \dots, \hat{\vec{x}}_n; t) \quad (2.4)$$

zwei werden die folgenden kanonischen Vertauschungsrelationen gefordert:

$$[\hat{x}_{jv}, \hat{x}_{kv}]_- = [\hat{p}_{jv}, \hat{p}_{kv}]_- = 0, \quad [\hat{p}_{jv}, \hat{x}_{kv}]_- = \frac{\hbar}{i} \delta_{jk} \delta_{rv} \quad (2.5)$$

um die Heisenberg'sche Unabhängigkeitsrelationen zu erfüllen. Die zeitliche Entwicklung eines quantenmechanischen Zustandsvektors  $|\psi(t)\rangle$  wird durch die Schrödinger-Gleichung beschrieben:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (2.6)$$

Um von dieser Darstellungsweise Formulierung zur Ortsdarstellung zu gelangen, wählt man als Basis die Eigenwerte  $|\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle$  der Ortsoperator  $\vec{x}_n$ :

$$\text{Eigenwertproblem: } \hat{x}_n |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle = \vec{x}_n |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle \quad (2.7)$$

$$\text{Orthonormalität: } \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n | \vec{x}_1^*, \dots, \vec{x}_n^* \rangle = \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_1^*) \cdots \delta(\vec{x}_n - \vec{x}_n^*) \quad (2.8)$$

$$\text{Vollständigkeit: } \int d^3x_1 \cdots d^3x_n |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n| = 1 \quad (2.9)$$

Entwickelt man den quantenmechanischen Zustandsvektor  $|\psi(t)\rangle$  nach dieser Basis

$$|\psi(t)\rangle \stackrel{(2.9)}{=} \int d^3x_1 \cdots d^3x_n |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n | \psi(t) \rangle \quad (2.10)$$

so treten als Entwicklungshilfssymbole die  $n$ -Teildien-Wellenfunktionen auf:

$$\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; t) = \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n | \psi(t) \rangle \quad (2.11)$$

die Ortsdarstellung der Impulsoperatoren  $\hat{p}_n$  ist durch die Jordan-Regel gegeben:

$$\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n | \hat{p}_n = \frac{\hbar}{i} \vec{p}_n \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n | \quad (2.12)$$

Multipliziert man die Darstellungsweise Schrödinger-Gleichung (2.6) von links mit dem bra-Vektor  $\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n |$ , erhält man für die  $n$ -Teildien-

Wellenfunktionen (2.11) die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; t) = \hat{H} \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; t) \quad (2.13)$$

wobei die Ortsdarstellung des Hamilton-Operators aus (2.4), (2.7) und (2.12) folgt:  $\hat{H} = H\left(\frac{i}{\hbar} \vec{p}_1, \dots, \frac{i}{\hbar} \vec{p}_n; \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; t\right)$  (2.14)

Im Falle der Hamilton-Funktion (2.1) ergibt sich mit (2.2) insbesondere

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{n=1}^N \Delta_n + \sum_{n=1}^N V_1(\vec{x}_n; t) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{\mu=1}^N V_2(\vec{x}_n - \vec{x}_\mu; t) \quad (2.15)$$

sind die 1-Teildaten- und die 2-Teildaten-Potentiale nicht explizit zeitabhängig

$$V_1(\vec{x}_n; t) = V_1(\vec{x}_n), \quad V_2(\vec{x}_n - \vec{x}_\mu; t) = V_2(\vec{x}_n - \vec{x}_\mu) \quad (2.16)$$

Es stellt sich für die  $n$ -Teildaten-Wellenfunktion der Separationsansatz

$$\Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; t) = \Psi_E(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \quad (2.17)$$

zu nehmen, der die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung (2.13) auf die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung

$$\hat{H} \Psi_E(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = E \Psi_E(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \quad (2.18)$$

reduziert.

## 2.2 Identische Teildaten - Bosonen und Fermionen

Die bisher dargestellten quantenmechanischen Gesetze gelten nur unter der Annahme, daß identische Teildaten unterschieden sind. Experimentell stellt sich nun aber heraus, daß zwei identische Teildaten immer gleich verhalten und durch keine objektive Messung voneinander unterscheiden werden können. Im Gültigkeitsbereich der Quantenmechanik gilt daher das fundamentale Prinzip der Ununterscheidbarkeit.

Physikalisch relevant sind die Erwartungswerte von Observablen. Das Prinzip der Ununterscheidbarkeit identischer Teilchen besagt dann, dass sich diese Erwartungswerte nicht ändern dürfen, wenn man in der  $n$ -Teilchen-Wellenfunktion die Nummerierung zweier Teilchen mit einander vertauscht:

$$\int d^3x_1 \dots \int d^3x_n \Psi^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_n) \hat{A} \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_n) = \int d^3x_1 \dots \int d^3x_n \Psi^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_n) \hat{A} \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_n) \quad (2.19)$$

Zur dieser Definitionsgleichung für ununterscheidbare identische Teilchen werden im Folgenden charakteristische Eigenschaften für die Operatoren  $\hat{A}$  und für die  $n$ -Teilchen Wellenfunktionen  $\Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$  abgeleitet. Daß man in (2.19) die Gleichheit der Erwartungswerte nur für die Vertauschung von zwei Teilchen fordert bedeutet keine prinzipielle Einschränkung, da jede beliebige Permutation Produkt von Transpositionen  $\hat{P}_{ik}$  darstellbar ist:

$$P = \prod \hat{P}_{ik} \quad (2.20)$$

Die Wirkung von  $\hat{P}_{ik}$  definiert ist durch

$$\hat{P}_{ik} \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_n) = \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n) \quad (2.21)$$

Die Transposition  $\hat{P}_{ik}$  ist offenbar involutorisch, d.h. die zweimalige Anwendung der Transposition  $\hat{P}_{ik}$  führt wieder zur ursprünglichen Wellenfunktion zurück:

$$\hat{P}_{ik} \hat{P}_{ik} = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{P}_{ik}^{-1} = \hat{P}_{ik} \quad (2.22)$$

Mit Hilfe des Transpositionsoperators  $\hat{P}_{ik}$  läßt sich die Definitionsgleichung (2.19) für identische Teilchen von der Ortsdarstellung in die Darstellungsreihe Formulierung umschreiben:

$$\langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = \langle \hat{P}_{ik} \hat{A} | \hat{A} | \hat{P}_{ik} \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{P}_{ik}^\dagger \hat{A} \hat{P}_{ik} | \Psi \rangle \quad (2.23)$$

Aus der trivialen Zerlegung

$$\langle \Psi | \hat{A} | \psi \rangle = \frac{1}{4} \{ \langle \Psi + \Psi' | \Psi | \Psi + \psi \rangle - \langle \Psi - \Psi' | \Psi | \Psi - \psi \rangle + i \langle \Psi + i\psi | \Psi | \Psi + i\psi \rangle - i \langle \Psi - i\psi | \Psi | \Psi - i\psi \rangle \} \quad (2.24)$$

folgt dann mit (2.23) eine Identität für beliebig Matrizelemente

$$\langle \Psi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \Psi | \hat{P}_{jk}^+ \hat{A} \hat{P}_{jk}^- | \psi \rangle \quad (2.25)$$

und damit eine Identität für Operatoren

$$\hat{A} = \hat{P}_{jk}^+ \hat{A} \hat{P}_{jk}^- \quad (2.26)$$

setzt man hierin speziell  $\hat{A} = \hat{P}_{jk}$  ein, so folgt mit (2.22) die Hermitizität

$$\hat{P}_{jk} = \hat{P}_{jk}^+ \quad (2.27)$$

und die Unitarität

$$\hat{P}_{jk}^{-1} = \hat{P}_{jk}^+ \quad (2.28)$$

des Transpositionsoperators  $\hat{P}_{jk}$ . Ferner folgt aus (2.26) und (2.28), daß jeder Operator  $\hat{A}$  mit dem Transpositionsoperator  $\hat{P}_{jk}$  kommutiert:

$$[\hat{P}_{jk}, \hat{A}]_- = \hat{P}_{jk} \hat{A} - \hat{A} \hat{P}_{jk} = 0 \quad (2.29)$$

da dies insbesondere auch für den Hamilton-Operator  $\hat{H} = \hat{H}$  gilt, gilt es zu Teilketten-Wellenfunktionen, die gleichzeitig Eigenfunktionen zum Hamilton-Operator  $\hat{H}$  und zu allen Transpositionsoperatoren  $\hat{P}_{jk}$  sind:

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad \hat{P}_{jk}|\psi\rangle = P_{jk}|\psi\rangle \quad (2.30)$$

Aufgrund der Hermitizität (2.27) des Transpositionsoperators  $\hat{P}_{jk}$  sind dessen Eigenwerte reell. Aus der involutorischen Eigenschaft (2.22) folgt ferner  $P_{jk}^2 = 1$ . Danach sind die Eigenwerte des Transpositionsoperators  $\hat{P}_{jk}$  entweder  $P_{jk} = +1$  oder  $P_{jk} = -1$ .

Es ist einrichtig, daß eine  $n$ -Teilketten-Wellenfunktion  $\psi(x_1, \dots, x_n)$ , die Eigenfunktion zu allen Transpositionsoperatoren  $\hat{P}_{jk}$  ist, immer denselben Eigenwert

besitzt. Aus der Operatorzerlegung

$$\begin{aligned} \hat{P}_{1j} \hat{P}_{2k} \hat{P}_{12} \hat{P}_{22} \hat{P}_{1j} |\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_m)| &= \hat{P}_{1j} \hat{P}_{2k} \hat{P}_{12} \Psi(\vec{x}_j, \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m) \\ &= \hat{P}_{1j} \hat{P}_{2k} \Psi(\vec{x}_k, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m) = \Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_m) = \hat{P}_{jk} \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) \\ \Rightarrow \hat{P}_{1j} \hat{P}_{2k} \hat{P}_{12} \hat{P}_{22} \hat{P}_{1j} &= \hat{P}_{jk} \end{aligned} \quad (2.31)$$

folgt für die Eigenwerte unmittelbar die Behauptung

$$\hat{P}_{jk} = (\hat{P}_{1j})^2 (\hat{P}_{2k})^2 \hat{P}_{12} \Rightarrow \hat{P}_{jk} = \hat{P}_{12} \quad (2.32)$$

Identische Teilchen besitzen demnach entweder eine symmetrische ( $\epsilon = +1$ ) oder eine antisymmetrische ( $\epsilon = -1$ ) Wellenfunktion:

$$\hat{P}_{jk} |\Psi^\epsilon\rangle = \epsilon |\Psi^\epsilon\rangle \quad (2.33)$$

Symmetrische und antisymmetrische Wellenfunktionen sind zueinander stets orthogonal:

$$\langle \Psi^- | \Psi^+ \rangle \stackrel{(2.33)}{=} \langle \Psi^- | \hat{P}_{jk} \Psi^+ \rangle \stackrel{(2.27)}{=} \langle \Psi^- | \hat{P}_{jk}^+ \Psi^+ \rangle = \langle \hat{P}_{jk} \Psi^- | \Psi^+ \rangle \stackrel{(2.33)}{=} -\langle \Psi^- | \Psi^+ \rangle \quad (2.34)$$

$$\Rightarrow \langle \Psi^- | \Psi^+ \rangle = 0$$

Außerdem behalten identische Teilchen ihren Symmetriekarakter für alle Zeiten bei. Da der Zeitentwicklungsoperator  $\hat{U}(t_2, t_1)$  einen Anfangszustand  $|\Psi^{e_1}(t_1)\rangle$  mit einer definierten Symmetrie in einen Endzustand  $|\Psi^{e_2}(t_2)\rangle = \hat{U}(t_2, t_1) |\Psi^{e_1}(t_1)\rangle$  mit einer definierten Symmetrie abbildet, folgt:

$$E_2 |\Psi^{e_2}(t_2)\rangle \stackrel{(2.33)}{=} \hat{P}_{jk} |\Psi^{e_2}(t_2)\rangle = \hat{P}_{jk} \hat{U}(t_2, t_1) |\Psi^{e_1}(t_1)\rangle \stackrel{(2.29)}{=} \hat{U}(t_2, t_1) \hat{P}_{jk} |\Psi^{e_1}(t_1)\rangle \stackrel{(2.33)}{=} E_1 |\Psi^{e_2}(t_2)\rangle \quad (2.35)$$

$$\Rightarrow e_2 = e_1$$

Als Ergebnis können wir daher festhalten, daß der Zustandsraum identischer Teilchen entweder nur symmetrische oder nur antisymmetrische Wellenfunktionen beinhaltet. In der relativistischen Quantenfeldtheorie wird gezeigt, welcher Teil-

bett-Raum für welchen Teilchentyp in Frage kommt. Nach dem Spin-Statistik-Theorem von Pauli besitzen identische Teilchen mit ganzzahligen Spin die Bosonen, die symmetrischen Wellenfunktionen und identische Teilchen mit halbzähligen Spin, die Fermionen, die antisymmetrischen Wellenfunktionen.

### 2.3 Nichtwechselwirkende identische Teilchen:

Im allgemeinen ist es sehr aufwendig,  $n$ -Teilchen-Wellenfunktionen unter Bedingung der Symmetrieeigenschaften zu berechnen. Das soll am Beispiel nicht-wechselwirkender identischer Teilchen illustriert werden. Nach (2.13), (2.15), (2.16) und einem verdundenden  $2$ -Teilchen-Potential  $V_2(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = 0$  ist die folgende zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung zu lösen:

$$\sum_{r=1}^n \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_r + V_r(\vec{x}_r) \right\} \Psi_E(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = E \Psi_E(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \quad (2.36)$$

von ausgegangen, dass die  $1$ -Teilchen-Wellenfunktionen  $\Psi_{E\alpha}(\vec{x})$  von der zeitunabhängigen  $1$ -Teilchen-Schrödinger-Gleichung

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x}) \right\} \Psi_{E\alpha}(\vec{x}) = E_\alpha \Psi_{E\alpha}(\vec{x}) \quad (2.37)$$

mit den diskreten Quantenzahlen  $\alpha$  bekannt sind und dass diese eine orthonormierte Basis darstellen:

$$\int d^3x \Psi_{E\alpha}^*(\vec{x}) \Psi_{E\alpha'}(\vec{x}) = \delta_{\alpha\alpha'} \quad (2.38)$$

$$\sum_{\alpha} \Psi_{E\alpha}^*(\vec{x}) \Psi_{E\alpha}(\vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.39)$$

Wären die Teilchen unterscheidbar, dann würden die Lösungen der zeitunabhängigen  $n$ -Teilchen-Schrödinger-Gleichung (2.36) in die  $1$ -Teilchen-Wellenfunktionen faktorisierten:

$$\Psi_E(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \Psi_{E\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \prod_{r=1}^n \Psi_{E\alpha_r}(\vec{x}_r) \quad (2.40)$$

und die Gesamtenergie wäre die Summe der 1-Teildien-Energien

$$E = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^n E_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \quad (2.41)$$

Aus der Orthonormalitäts- und der Vollständigkeitsrelationen der 1-Teildien-Wellenfunktionen (2.38) und (2.39) würden dann unmittelbar entsprechende Relationen für die  $n$ -Teildien-Wellenfunktionen (2.40) folgen:

$$\int d^3x_1 \dots \int d^3x_n \Psi_{E_{\alpha_1}, \dots, E_{\alpha_n}}^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \Psi_{E_{\alpha_1}, \dots, E_{\alpha_n}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \delta_{\alpha_1, \alpha_1} \dots \delta_{\alpha_n, \alpha_n} \quad (2.42)$$

$$\sum_{\alpha_1} \dots \sum_{\alpha_n} \Psi_{E_{\alpha_1}, \dots, E_{\alpha_n}}^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \Psi_{E_{\alpha_1}, \dots, E_{\alpha_n}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_1) \dots \delta(\vec{x}_n - \vec{x}_n) \quad (2.43)$$

Da identische Teildien aber ununterscheidbar sind, muss die  $n$ -Teildien-Wellenfunktion symmetrisch bzw. antisymmetrisch sein. Daraus wird der (Anti-)Symmetrisierungsoperator

$$\hat{S}^\epsilon = \sum_{\hat{P}} \epsilon^P \hat{P} \quad (2.44)$$

eingeführt, bei dem sich die Summation über alle Permutationsoperatoren  $P$  erstreckt und  $P$  die Anzahl der Transpositionen einer Permutation gemäß der Zerlegung (2.20) bezeichnet. Multipliziert man eine Permutation  $P$  in der Form (2.44) mit einer einzelnen Transposition  $\hat{P}_{ik}$ , so ergibt sich eine andere Permutation  $\hat{P}' = \hat{P}_{ik} P$ . Dies hat folgende Konsequenz:

$$\hat{P}_{ik} \hat{S}^\epsilon \underset{(2.44)}{=} \sum_P \epsilon^P \hat{P}_{ik} \hat{P} = \sum_P \epsilon^{P' + i} \hat{P}' \underset{\epsilon = \pm 1}{=} \epsilon \sum_{\hat{P}'} \epsilon^{\hat{P}'} \hat{P}' \underset{(2.44)}{=} \epsilon \hat{S}^\epsilon \quad (2.45)$$

Durch die Vorschrift

$$\Psi_{\{E_{\alpha}\}}^{\epsilon}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = N_{\{E_{\alpha}\}} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^n \hat{S}^\epsilon \prod_{\alpha} \Psi_{E_{\alpha}}(\vec{x}_\alpha) \quad (2.46)$$

werden demnach wegen (2.45) aus den  $n$ -Teildien-Wellenfunktionen (2.40) symmetrische ( $\epsilon = +1$ ) bzw. antisymmetrische ( $\epsilon = -1$ )  $n$ -Teildien-Wellenfunktionen (2.33) konstruiert. Aufgrund des Prinzips der Ununterscheidbarkeit sind dabei die (anti-)symmetrischen  $n$ -Teildien-Wellenfunktionen (2.46) von den konkret

Reihenfolge der Energien  $E_{\alpha_1}, \dots, E_{\alpha_n}$  unabhängig - dies wird in (2.46) durch den Index  $\{\alpha_i\}$  zum Ausdruck gebracht.

Zunächst ist festzuhalten, daß die (anti-)symmetrischen-Teildreh-Wellenfunktionen (2.46) auch der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung (2.36) mit dem Energieoperator (2.41) genügen. Dies folgt aus (2.29) und dem Umstand (2.20), daß  $\hat{P}$  der Permutationsoperator  $\hat{P}$  in der Summe (2.44) als Produkt von Transpositionsoperatoren darstellbar ist:

$$\hat{H}|\Psi_E\rangle = E|\Psi_E\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{A} \hat{S}^E |\Psi_E\rangle \stackrel{(2.20), (2.29), (2.44)}{=} E \hat{S}^E |\Psi_E\rangle \quad (2.47)$$

Ferner ergibt sich aus (2.44) und (2.46) eine wichtige Beziehung für die antisymmetrische  $n$ -Teildreh-Wellenfunktionen mit  $E = -1$ :

$$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = N_{\{\alpha_i\}}^{-} \sum_{\hat{P}} (-1)^{\hat{P}} \{ \Psi_{E_{\alpha_1}}(\vec{x}_1) \dots \Psi_{E_{\alpha_n}}(\vec{x}_n) \} = N_{\{\alpha_i\}}^{-} \sum_{\hat{P}} (-1)^{\hat{P}} \Psi_{E_{\alpha_1}}(\vec{x}_{\hat{P}(1)}) \dots \Psi_{E_{\alpha_n}}(\vec{x}_{\hat{P}(n)}) \quad (2.48)$$

Somit läßt sich die antisymmetrische  $n$ -Teildreh-Wellenfunktion in Form einer Slater-Determinante darstellen:

$$\Psi_{\{\alpha_i\}}^{-} (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = N_{\{\alpha_i\}}^{-} \begin{vmatrix} \Psi_{E_{\alpha_1}}(\vec{x}_1) & \Psi_{E_{\alpha_2}}(\vec{x}_2) & \dots & \Psi_{E_{\alpha_n}}(\vec{x}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Psi_{E_{\alpha_1}}(\vec{x}_n) & \Psi_{E_{\alpha_2}}(\vec{x}_2) & \dots & \Psi_{E_{\alpha_n}}(\vec{x}_n) \end{vmatrix} \quad (2.49)$$

Sind zwei Zeilen  $i = d, k$  oder zwei Spalten  $j = \vec{x}_d = \vec{x}_k$  gleich, so verschwindet offenbar die antisymmetrische  $n$ -Teildreh-Wellenfunktion und damit die Wahrscheinlichkeit, einen solchen Zustand zu finden. Dies ist gerade die Aussage des fundamentalen Pauli-Prinzips, wonach zwei Fermionen weder ein- und denselben Zustand besetzen noch sich an ein- und demselben Ort aufhalten können. Entsprechende Einschränkungen gilt es nicht für Bosonen.

Es soll nun die Normierungskonstante  $N_{\{E_{\alpha}\}}^{\varepsilon}$  in (2.46) berechnet werden. Bei Fermionen ( $\varepsilon = -1$ ) ist aufgrund des Pauli-Prinzips gewährleistet, daß die 1-Zeilchen-Zustände  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  voneinander verschieden sind. Um die folgende Herleitung zu vereinfachen, nehmen wir auch für Bosonen an, daß die 1-Zeilchen-Zustände  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  voneinander verschieden sind. Baut man gemäß (2.20) eine Permutation  $\hat{P}$  aus ihren Transpositionen  $P_i$  auf, so folgt durch Iteration von (2.45)

$$\hat{P} \hat{S}^{\varepsilon} = \varepsilon^P \hat{S}^{\varepsilon} \quad (2.50)$$

Damit läßt sich das Skalarprodukt zwischen zwei (anti-)symmetrischen 1-Zeilchen-Wellenfunktionen (2.46) berechnen:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\{E_{\alpha}\}}^{\varepsilon} | \psi_{\{E_{\alpha'}\}}^{\varepsilon} \rangle &\xrightarrow{(2.44), (2.46)} N_{\{E_{\alpha}\}}^{\varepsilon} \sum_{\hat{P}} \varepsilon^P \langle \hat{P} \psi_{E_{\alpha_1}} \dots \psi_{E_{\alpha_n}} | \psi_{\{E_{\alpha'}\}}^{\varepsilon} \rangle = N_{\{E_{\alpha}\}}^{\varepsilon} \sum_{\hat{P}} \varepsilon^P \langle \psi_{E_{\alpha_1}} \dots \psi_{E_{\alpha_n}} | \hat{P} \psi_{\{E_{\alpha'}\}}^{\varepsilon} \rangle \\ &\xrightarrow{(2.20), (2.27)} N_{\{E_{\alpha}\}}^{\varepsilon} \sum_{\hat{P}} \varepsilon^P \langle \psi_{E_{\alpha_1}} \dots \psi_{E_{\alpha_n}} | \hat{P} \psi_{\{E_{\alpha'}\}}^{\varepsilon} \rangle \xrightarrow{(2.46), (2.50)} N_{\{E_{\alpha}\}}^{\varepsilon} \sum_{\hat{P}} \varepsilon^P \langle \psi_{E_{\alpha_1}} \dots \psi_{E_{\alpha_n}} | \psi_{\{E_{\alpha'}\}}^{\varepsilon} \rangle \\ &\xrightarrow{\varepsilon = \pm 1} N_{\{E_{\alpha}\}}^{\varepsilon} \sum_{\hat{P}} \langle \psi_{E_{\alpha_1}} \dots \psi_{E_{\alpha_n}} | \psi_{\{E_{\alpha'}\}}^{\varepsilon} \rangle = N_{\{E_{\alpha}\}}^{\varepsilon} n! \langle \psi_{E_{\alpha_1}} \dots \psi_{E_{\alpha_n}} | \psi_{\{E_{\alpha'}\}}^{\varepsilon} \rangle \\ &\xrightarrow{(2.44), (2.46)} N_{\{E_{\alpha}\}}^{\varepsilon} N_{\{E_{\alpha'}\}}^{\varepsilon} n! \sum_{\hat{P}} \varepsilon^P \hat{P}^1 \langle \psi_{E_{\alpha_1}} \dots \psi_{E_{\alpha_n}} | \psi_{E_{\alpha'_1}} \dots \psi_{E_{\alpha'_n}} \rangle \\ &\xrightarrow{(2.42)} \langle \psi_{\{E_{\alpha}\}}^{\varepsilon} | \psi_{\{E_{\alpha'}\}}^{\varepsilon} \rangle = N_{\{E_{\alpha}\}}^{\varepsilon} N_{\{E_{\alpha'}\}}^{\varepsilon} n! \sum_{\hat{P}} \varepsilon^P \delta_{\alpha_1, \alpha'_{P(1)}} \dots \delta_{\alpha_n, \alpha'_{P(n)}} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Erfordert man die Orthonormalitätsrelation

$$\langle \psi_{\{E_{\alpha}\}}^{\varepsilon} | \psi_{\{E_{\alpha'}\}}^{\varepsilon} \rangle = \delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; \alpha'_1, \dots, \alpha'_n}^{\varepsilon} \quad (2.52)$$

mit dem (anti-)symmetrischen Kronecker-Symbol

$$\delta_{\alpha_1, \dots, \alpha_n; \alpha'_1, \dots, \alpha'_n}^{\varepsilon} = \sum_{\hat{P}} \varepsilon^P \delta_{\alpha_1, \alpha'_{P(1)}} \dots \delta_{\alpha_n, \alpha'_{P(n)}} \quad (2.53)$$

so folgt aus (2.51) für die Normierungskonstante

$$N_{\{E\alpha\}}^{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{n!}} \quad (2.54)$$

Wir bemerken noch, daß diese Normierungskonstante für Bosonen ( $\epsilon = +1$ ) für den Fall modifiziert werden muß, daß einig 1-Zülden-Zustände mehrfach besetzt sind.

Nun wird noch gezeigt, daß man mit Hilfe von (2.46) den gesamten Zülden-Raum der (anti-)symmetrischen  $n$ -Zülden-Wellenfunktionen annehmen kann. Dazu geht man von der Vollständigkeitsrelation (2.43) der  $n$ -Zülden-Wellenfunktion (2.40) aus und wendet zweimal den (anti-)Symmetrisierungsoperator (2.44) an, einmal auf die Ortskoordinaten  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  und einmal auf die Ortskoordinaten  $\vec{x}'_1, \dots, \vec{x}'_n$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{\vec{p}} \sum_{\vec{p}'} \epsilon^{P+P'} \sum_{\alpha_1} \dots \sum_{\alpha_n} \psi_{E\alpha_1}^*(\vec{x}_{P(1)}) \dots \psi_{E\alpha_n}^*(\vec{x}_{P(n)}) \psi_{E\alpha_1}(\vec{x}'_{P'(1)}) \dots \psi_{E\alpha_n}(\vec{x}'_{P'(n)}) \\ &= \sum_{\vec{p}} \sum_{\vec{p}'} \epsilon^{P+P'} \delta(\vec{x}_{P(1)} - \vec{x}'_{P'(1)}) \dots \delta(\vec{x}_{P(n)} - \vec{x}'_{P'(n)}) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Auf der linken Seite werden die Ortskoordinaten  $\vec{x}_{P(1)}, \dots, \vec{x}_{P(n)}$  bzw.  $\vec{x}'_{P'(1)}, \dots, \vec{x}'_{P'(n)}$  umgestellt. In Folgedessen in die Standardordnung  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  bzw.  $\vec{x}'_1, \dots, \vec{x}'_n$  umgestellt. In Folgedessen werden die Quantenzahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  zu  $\alpha_{P(1)}, \dots, \alpha_{P(n)}$  bzw.  $\alpha_{P'(1)}, \dots, \alpha_{P'(n)}$  umgestellt. Eine entsprechende Umsortierung auf der rechten Seite von  $\vec{x}'_{P(n)}$ , führt  $\vec{x}'_{P'(1)}, \dots, \vec{x}'_{P'(n)}$  in  $\vec{x}'_{P(P(1))}, \dots, \vec{x}'_{P(P(n))}$  über:

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha_1} \dots \sum_{\alpha_n} \left\{ \sum_{\vec{p}} \epsilon^P \psi_{E\alpha_1}^*(\vec{x}_1) \dots \psi_{E\alpha_n}^*(\vec{x}_n) \right\} \left\{ \sum_{\vec{p}'} \epsilon^{P'} \psi_{E\alpha_1}(\vec{x}'_{P(1)}) \dots \psi_{E\alpha_n}(\vec{x}'_{P(n)}) \right\} \\ &= \sum_{\vec{p}} \sum_{\vec{p}'} \epsilon^{P+P'} \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}'_{P(P(1))}) \dots \delta(\vec{x}_n - \vec{x}'_{P(P(n))}) \end{aligned} \quad (2.56)$$

Auf der linken Seite kann man nun (2.44), (2.46), (2.54) verwenden, während auf der rechten Seite die Summe über die Permutationen  $\hat{P}$  durch eine Summe über die Permutationen  $\hat{Q} = \hat{P}'\hat{P}$  mit  $q = p' + p$  ersetzt wird und die Summe über die Permutationen  $\hat{P}$  trivial ausgeführt wird, was zu einem Faktor  $n!$  führt. Man erhält dann insgesamt die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{x_1, \dots, x_n} \psi^{\epsilon^*}_{\{E_a\}}(x_1, \dots, x_n) \psi^{\epsilon}_{\{E_a\}}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = \delta^{\epsilon}(x_1, \dots, x_n; \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \quad (2.57)$$

wobei analog zu (2.53) die (anti-)symmetrische Delta-Funktion durch

$$\delta^{\epsilon}(x_1, \dots, x_n; \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = \sum_Q \epsilon^q \delta(x_1 - \tilde{x}_{Q(1)}) \cdots \delta(x_n - \tilde{x}_{Q(n)}) \quad (2.58)$$

definiert ist.

Die überlegungsgemäß vorliegenden Abschnitte dienen dazu, eine Basis des Hilbert-Raumes von ununterscheidbaren identischen Teilchen durch (Anti-)Symmetrisierung einer bekannten Basis des Hilbert-Raumes untertrennbarer identischen Teilchen zu erzeugen. Bisher sind wir dabei vom Eigenwertproblem (2.36) des Hamilton-Operators ausgegangen. Andere Basen ergeben sich, wenn man stattdessen das Eigenwertproblem (2.7) der Antooperatoren als Ausgangspunkt wählt. Die Eigenfunktionen  $|x_1, \dots, x_n\rangle$  mit den kontinuierlichen Eigenwerten  $x_1, \dots, x_n$  spannen dann den Hilbert-Raum von unterschiedbaren ununterscheidbaren identischen Teilchen auf. Die anschließende (Anti-)Symmetrisierung analog zu (2.44), (2.46), (2.54) führt auf die Basis

$$|x_1, \dots, x_n\rangle^{\epsilon} = \frac{1}{n!} \sum_{\hat{P}} \epsilon^{\hat{P}} |\tilde{x}_{P(1)}, \dots, \tilde{x}_{P(n)}\rangle \quad (2.59)$$

im Hilbert-Raum ununterscheidbarer identischer Teilchen. Orthonormalitätsrelation (2.52) und Vollständigkeitsrelation (2.57) lauten dabei

$$\epsilon \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n | \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \rangle^\epsilon = \delta^\epsilon(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \quad (2.60)$$

$$\int d^3x_1 \dots \int d^3x_n |\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle^\epsilon \epsilon \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n | = 1 \quad (2.61)$$

zur Illustration betrachten wir die Ortsdarstellung für zwei Teildaten. Die Basis für zwei unterschiedbare identische Teildaten lautet dann in Ortsdarstellung

$$\psi_{\vec{x}_1, \vec{x}_2}(\vec{z}_1, \vec{z}_2) \stackrel{(2.11)}{=} \langle \vec{z}_1, \vec{z}_2 | \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle \stackrel{(2.8)}{=} \delta(\vec{z}_1 - \vec{x}_1) \delta(\vec{z}_2 - \vec{x}_2) \quad (2.62)$$

die (Anti-)Symmetrisierung (2.59) führt dann auf die Basis für unterscheidbare identische Teildaten:

$$\psi_{\vec{x}_1, \vec{x}_2}^\epsilon(\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \delta(\vec{z}_1 - \vec{x}_1) \delta(\vec{z}_2 - \vec{x}_2) + \delta(\vec{z}_1 - \vec{x}_2) \delta(\vec{z}_2 - \vec{x}_1) \right\} \quad (2.63)$$

Damit erhält man für die Orthonormalitätsrelation (2.60) mit (2.58)

$$\int d^3x_1 \int d^3x_2 \psi_{\vec{x}_1, \vec{x}_2}^{*\epsilon}(\vec{z}_1, \vec{z}_2) \psi_{\vec{x}_1, \vec{x}_2}^\epsilon(\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \delta^\epsilon(\vec{x}_1, \vec{x}_2; \vec{x}_1, \vec{x}_2) \quad (2.64)$$

und für die Vollständigkeitsrelation (2.61) mit (2.60) und (2.62)

$$\int d^3x_1 \int d^3x_2 \psi_{\vec{x}_1, \vec{x}_2}^{*\epsilon}(\vec{z}_1, \vec{z}_2) \psi_{\vec{x}_1, \vec{x}_2}^\epsilon(\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \delta^\epsilon(\vec{z}_1, \vec{z}_2; \vec{z}_1, \vec{z}_2) \quad (2.65)$$

## 2.4 Erzeugungs- und Vernichtungsoperationen für Bosonen:

Die bisher vorgestellte Formulierung von Vielteilchensystemen erfordert immer eine nachträgliche (Anti-)Symmetrisierung von Wellenfunktionen. Da dies in der Regel sehr aufwendig ist, wurde eine alternative Formulierung von Vielteilchensystemen entwickelt, bei der die (Anti-)Symmetrisierung der Wellenfunktionen automatisch berücksichtigt ist. Dazu bedient man sich des Leiteroperator-Formalismus, der die algebraische Behandlung eines einzelnen harmonischen Oszillators ermöglicht.

Der harmonische Oszillator stellt ein quantenmechanisches Standardmodell dar, mit dem sich beispielsweise Schwingungen in Hohlkugeln oder in Festkörpern beschreiben lassen. Der Hamilton-Operator des eindimensionalen harmonischen Oszillators lautet:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 \hat{q}^2 \quad (2.66)$$

wobei der Ortsoperator  $\hat{q}$  und Impulsoperator  $\hat{p}$  nichttriviale Kommutatorenrelationen gefordert werden:

$$[\hat{q}, \hat{q}] = [\hat{p}, \hat{p}]_- = 0, \quad [\hat{p}, \hat{q}] = \frac{i\hbar}{m} \quad (2.67)$$

Die Aufgabe besteht darin, zum Eigenwertproblem des Hamilton-Operators

$$\hat{H} |\alpha\rangle = E_\alpha |\alpha\rangle \quad (2.68)$$

die Eigenwerte  $E_\alpha$  und die Eigenfunktionen  $|\alpha\rangle$  zu berechnen. Üblicherweise wird hierzu die darstellungsfreie Formulierung des Eigenwertproblems (2.68) in die Ortsdarstellung überführt und die entstehende Schrödinger-Gleichung gelöst. Im folgenden wird ein anderer Weg beschritten, bei dem das Eigenwertproblem (2.68) in der darstellungsfreien Formulierung einzig und allein unter Zuhilfenahme der Kommutatorrelationen (2.67) gelöst wird.

Zunächst geht man von den herkömmlichen Operatoren  $\hat{q}$  und  $\hat{p}$  zu zueinander adjungierten Operatoren  $\hat{a}$  und  $\hat{a}^\dagger$  über:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad (2.69)$$

$$\hat{p} = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} i(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$$

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (\hat{q} + \frac{i}{m\omega} \hat{p}) \quad (2.70)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (\hat{q} - \frac{i}{m\omega} \hat{p})$$

Setzt man die Zerlegung (2.69) in (2.66) ein, so lässt sich der Hamilton-Operator durch die neuen Operatoren  $\hat{a}$  und  $\hat{a}^\dagger$  ausdrücken:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \frac{\hbar^2 w^2}{2} (-1)(\hat{a}^+ - \hat{a})^2 + \frac{m}{2} w^2 \frac{\hbar}{2m w} (\hat{a}^+ + \hat{a})^2 = \frac{\hbar w}{4} (-\hat{a}^{+2} + \hat{a}^+ \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^+ + \hat{a}^{+2} + \hat{a}^{+2} \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^+ + \hat{a}^2)$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{\hbar w}{2} (\hat{a}^+ \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^+) \quad (2.71)$$

Die Zerlegung (2.70) liefert dann die Verwandlungsrelationen zwischen den neuen Operatoren  $\hat{a}$  und  $\hat{a}^+$ :

$$[\hat{a}, \hat{a}]_- = \frac{mw}{2\hbar} \left[ \hat{q} + \frac{i}{mw} \hat{p}, \hat{q} + \frac{i}{mw} \hat{p} \right]_- = \frac{mw}{2\hbar} \frac{i}{mw} \{ [\hat{p}, \hat{q}]_- + [\hat{q}, \hat{p}]_- \} = 0, \quad (2.72)$$

$$[\hat{a}^+, \hat{a}^+]_- = \frac{mw}{2\hbar} \left[ \hat{a} - \frac{i}{mw} \hat{p}, \hat{a} - \frac{i}{mw} \hat{p} \right]_- = \frac{mw}{2\hbar} \frac{-i}{mw} \{ [\hat{p}, \hat{q}]_- + [\hat{q}, \hat{p}]_- \} = 0, \quad (2.73)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^+]_- = \frac{mw}{2\hbar} \left[ \hat{q} + \frac{i}{mw} \hat{p}, \hat{a} - \frac{i}{mw} \hat{p} \right]_- = \frac{mw}{2\hbar} \frac{i}{mw} \{ [\hat{p}, \hat{q}]_- - [\hat{q}, \hat{p}]_- \} = 1 \quad (2.74)$$

Unter Verwendung von (2.74) läßt sich der Hamilton-Operator (2.71) auch schreiben als

$$\hat{H} = \hbar w (\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2}) \quad (2.75)$$

wobei der Operator

$$\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a} \quad (2.76)$$

auftritt. Beachtet man die Reduzurregel

$$[\hat{A} \hat{B}, \hat{C}]_- = \hat{A} \hat{B} \hat{C} - \hat{C} \hat{A} \hat{B} = (\hat{A} \hat{B} \hat{C} - \hat{A} \hat{C} \hat{B}) + (\hat{A} \hat{C} \hat{B} - \hat{C} \hat{A} \hat{B}) = \hat{A} [\hat{B}, \hat{C}]_- + [\hat{A}, \hat{C}]_- \hat{B} \quad (2.77)$$

dann erhält man die Kommutatorrelationen

$$[\hat{N}, \hat{a}^+]_- \stackrel{(2.76)}{=} [\hat{a}^+ \hat{a}, \hat{a}^+]_- \stackrel{(2.77)}{=} \hat{a}^+ [\hat{a}, \hat{a}^+]_- + [\hat{a}^+, \hat{a}^+] \hat{a} \stackrel{(2.73), (2.74)}{=} \hat{a}^+ \quad (2.78)$$

$$[\hat{N}, \hat{a}]_- \stackrel{(2.76)}{=} [\hat{a}^+ \hat{a}, \hat{a}]_- \stackrel{(2.77)}{=} \hat{a}^+ [\hat{a}, \hat{a}]_- + [\hat{a}^+, \hat{a}] \hat{a} \stackrel{(2.72), (2.74)}{=} -\hat{a} \quad (2.79)$$

Wir betrachten nun das Eigenwertproblem dieses Operators (2.76):

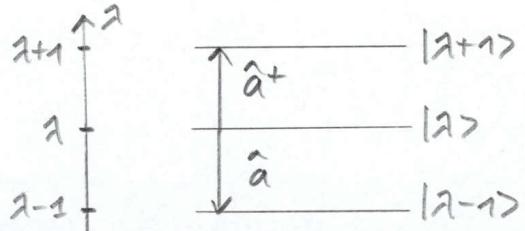
$$\hat{N} |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle \quad (2.80)$$

Mit den Kommutatorrelationen (2.78) und (2.79) kann man untersuchen, welche Wirkung  $\hat{a}^+$  und  $\hat{a}$  auf die Eigenfunktionen  $|\lambda\rangle$  haben:

$$\hat{N}\hat{a}^+|2\rangle \xrightarrow{(2.78)} (\hat{a} + \hat{N} + \hat{a}^+)|2\rangle \xrightarrow{(2.80)} (2+1)\hat{a}^+|1\rangle \Rightarrow \hat{a}^+|2\rangle \sim |2+1\rangle \quad (2.81)$$

$$\hat{N}\hat{a}|2\rangle \xrightarrow{(2.79)} (\hat{a}\hat{N} - \hat{a})|2\rangle \xrightarrow{(2.80)} (2-1)\hat{a}|1\rangle \Rightarrow \hat{a}|2\rangle \sim |2-1\rangle \quad (2.82)$$

Dennach kann man  $\hat{a}^+$  und  $\hat{a}$  als Leiteroperatoren auffassen, die in der Leiter der Eigenfunktionen  $|2\rangle$  auf- und absteigen. Der Aufsteigeroperator  $\hat{a}^+$  bzw. der Absteigeroperator  $\hat{a}$  führen zu einer Eigenfunktion mit einem um 1 erhöhten bzw. erniedrigten Eigenwert.



Andererseits lässt sich zeigen, dass die Eigenwerte  $\lambda$  des Operators  $\hat{N}$  immer positiv sind:

$$0 \leq \langle \hat{a} \lambda | \hat{a} \lambda \rangle = \langle \lambda | \hat{a}^+ \hat{a} | \lambda \rangle \xrightarrow{(2.76)} \langle \lambda | \hat{N} | \lambda \rangle \xrightarrow{(2.80)} \lambda \langle \lambda | \lambda \rangle = \lambda \quad (2.83)$$

Aus (2.82) und (2.83) folgt nun, dass die Eigenwerte  $\lambda$  durch

$$\lambda = n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.84)$$

gegeben sind. Gäbe es einen Eigenwert, der nicht eine positive ganze Zahl ist, so könnte man durch iterative Anwendung des Absteigeroperators  $\hat{a}$  gemäß (2.82) den Eigenwert so lange erniedrigen, bis er negativ wird. Dies würde dann aller im Widerspruch zu (2.83) stehen. Es gilt demnach einen Grundzustand  $|0\rangle$  mit der Eigenschaft

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle 0 | \hat{a}^+ = 0 \quad (2.85)$$

Die Eigenfunktionen  $|n\rangle$  lassen sich demnach wie folgt konstruieren. Zunächst bedient man

$$\langle \hat{a}^+ n | \hat{a}^+ n \rangle = \langle n | \hat{a} \hat{a}^+ | n \rangle \xrightarrow{(2.74)} \langle n | \hat{a}^+ \hat{a} + 1 | n \rangle \xrightarrow{(2.76)} \langle n | \hat{N} + 1 | n \rangle \xrightarrow{(2.80), (2.84)} n+1 \quad (2.86)$$

Aus (2.81), (2.84) und (2.86) ergibt sich dann eine Regel, wie man unter Erhaltung der Normierung mit dem Aufsteigeroperator  $\hat{a}^+$  von  $|n\rangle$  nach  $|n+1\rangle$  gelangt:

$$\hat{a}^+|n\rangle = c_m |n+1\rangle \Rightarrow c_m^2 \langle n+1|n+1\rangle = n+1 \Rightarrow \hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (2.87)$$

Abschließend gewinnt man durch Iteration von (2.87) eine Voraussetzung, wie man die Eigenfunktionen  $|n\rangle$  ausgehend vom Grundzustand  $|0\rangle$  konstruieren kann:  
 $|n\rangle \xrightarrow{(2.87)} \frac{1}{\sqrt{m}} \hat{a}^+ |n-1\rangle \xrightarrow{(2.87)} \frac{1}{\sqrt{m(n-1)}} (\hat{a}^+)^2 |n-2\rangle \xrightarrow{(2.87)} \dots \Rightarrow |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^+)^n |0\rangle \quad (2.88)$

Zur Vollständigkeit halber geben wir noch die Wirkung des Aufsteigoperators  $\hat{a}$  auf die Eigenfunktionen  $|n\rangle$  an:

$$\langle \hat{a}^+ n | \hat{a}^+ n \rangle = \langle n | \hat{a}^+ \hat{a} | n \rangle \xrightarrow{(2.76)} \langle n | \hat{N} | n \rangle \xrightarrow{(2.80), (2.84)} \quad (2.89)$$

$$\hat{a} |n\rangle = D_n |n-1\rangle \xrightarrow{(2.89)} D_n^2 \langle n-1|n-1\rangle = n \Rightarrow \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (2.90)$$

Aus (2.75), (2.76), (2.80) und (2.84) liest man ferner die Energieniveaus des harmonischen Oszillators ab:

$$E_n = \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.91)$$

Zur Leiteroperatorformalismus beider algebraischen Behandlung des harmonischen Oszillators wird nun zur Beschreibung ununterscheidbarer Identität der Bosonen Bezug genommen. Dazu dient die folgende Übersetzungs-tabelle:

Harmonischer Oszillator	Identische Bosonen
$n$ : Quantenzahl eines 1-Teilchen-Systems	$n\vec{x}$ : Zähle von Bosonen am Ort $\vec{x}$
$\hat{a}^+$ : Aufsteigoperator	$\hat{a}_{\vec{x}}^+$ : Erzeugung eines Teilchens am Ort $\vec{x}$
$\hat{a}$ : Absteigoperator	$\hat{a}_{\vec{x}}$ : Vernichtung eines Teilchens am Ort $\vec{x}$
$[\hat{a}, \hat{a}]_- = [\hat{a}^+, \hat{a}^+]_- = 0, [\hat{a}, \hat{a}^+]_- = 1$	$[\hat{a}_{\vec{x}}, \hat{a}_{\vec{x}}^+]_- = [\hat{a}_{\vec{x}}^+, \hat{a}_{\vec{x}}^+]_- = 0, [\hat{a}_{\vec{x}}, \hat{a}_{\vec{x}}^+]_- = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$ (2.92)
$\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a}$	$\hat{N} = \int d^3x \hat{a}_{\vec{x}}^+ \hat{a}_{\vec{x}}^-$ (2.93)

$[\hat{N}, \hat{a}^+]_- = \hat{a}^+$	$[\hat{N}, \hat{a}_{\vec{x}}^+]_- \xrightarrow{(2.77), (2.92), (2.93)} \hat{a}_{\vec{x}}^+ \quad (2.94)$
$[\hat{N}, \hat{a}]_- = -\hat{a}$	$[\hat{N}, \hat{a}_{\vec{x}}]_- \xrightarrow{(2.77), (2.92), (2.93)} -\hat{a}_{\vec{x}} \quad (2.95)$
grundzustand: $\hat{a} 0\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle 0 \hat{a}^+ = 0$	Vakuumzustand: $\hat{a}_{\vec{x}} 0\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle 0 \hat{a}_{\vec{x}}^+ = 0 \quad (2.96)$
$ n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^+)^n  0\rangle$	$ \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle^{+1} = \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \cdots \hat{a}_{\vec{x}_n}^+  0\rangle \quad (2.97)$ beizuarweise veränderten Orten

dabei wurde bei den Kommutatorenrelationen (2.92) eine Delta-Funktion eingeführt, um für den Teildrahtoperator  $N$  in (2.93) zu (2.78) und (2.79) analoge Kommutatorenrelationen (2.94) und (2.95) zu erhalten. Letztendlich garantieren diese, dass man die Operatoren  $\hat{a}_{\vec{x}}$  und  $\hat{a}_{\vec{x}}^+$  dalmüglich integrieren kann, dass sie ein Teildraht am Ort  $\vec{x}$  erzeugen und verhindern. Dies führt dann unmittelbar auf die Definitionen (2.96) des Vakuumzustandes  $|0\rangle$  und (2.97) der Basiszustände  $|\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle^{+1}$ . Letzteres kann man sich dadurch plausibel machen, dass man die Orthonormalitätsrelationen (2.60) für  $n=1$  und  $n=2$  Teildrahten nachweist:

$$+1 \langle \vec{x}_1 | \vec{x}_1 \rangle^{+1} \xrightarrow{(2.97)} \langle \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ | \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ | 0 \rangle \xrightarrow{(2.92)} \langle 0 | \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ + \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_1) | 0 \rangle \quad (2.98)$$

$$\xrightarrow{(2.58)} +1 \langle \vec{x}_1 | \vec{x}_1 \rangle = \delta^{+1}(\vec{x}_1; \vec{x}_1) \stackrel{!}{=} (2.60)$$

$$+1 \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 | \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle^{+1} \xrightarrow{(2.97)} \langle \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ | 0 \rangle \langle \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ | 0 \rangle$$

$$\xrightarrow{(2.92)} \langle 0 | \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ \{ \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ + \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \} \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ | 0 \rangle \xrightarrow{(2.92)} \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \langle 0 | \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ + \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) | 0 \rangle$$

$$+ \langle 0 | \{ \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ + \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \} \{ \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ + \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \} | 0 \rangle$$

$$\xrightarrow{(2.92)} +1 \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 | \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle^{+1} = \delta^{+1}(\vec{x}_1, \vec{x}_2; \vec{x}_1, \vec{x}_2) \stackrel{!}{=} (2.58) \quad (2.99)$$

## 2.5 Schrödinger-Gleichung zweidrehwirkender Bosonen:

Die Einführung der lokalen Teildrehenzugangs- und vernichtungsoperatoren  $\hat{a}_z^+$  und  $\hat{a}_z$  hat nicht nur den Vorteil, daß sich Vielteildenaustände kontrahieren lassen, die automatisch die gewünschte Symmetrie aufweisen. Es läßt sich außerdem eine universelle Form der Schrödinger-Gleichung erzielen, die von der Teilchenzahl  $n$  unabhängig ist.

In zweiter Quantisierung lautet die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle \quad (2.100)$$

Hierbei bezeichnet der Zustand  $|\Psi(t)\rangle$  irgend einen Vielteildenaustand aus dem zweitquantisierten Hilbert-Raum, der von den Basisvektoren  $|\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle^{+}$  aufgespannt wird. Der zweitquantisierte Hamilton-Operator  $\hat{H}(t)$  setzt sich additiv aus zwei Teilen zusammen:

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_1(t) + \hat{H}_2(t) \quad (2.101)$$

Der lokale Hamilton-Operator  $\hat{H}_1(t)$  ist dadurch gegeben, daß der 1-Teildrehen-Hamilton-Operator mit zweidrehwirkenden Bosonen

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_1(\vec{x}; t) \quad (2.102)$$

mit den lokalen Teildrehenzugangs- und vernichtungsoperatoren  $\hat{a}_z^+$  und  $\hat{a}_z$  multipliziert wird und dann die Ortskoordinate  $\vec{x}$  ausintegriert wird:

$$\hat{H}_1(t) = \int d^3x \hat{a}_z^+ \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_1(\vec{x}; t) \right\} \hat{a}_z \quad (2.103)$$

Entsprechend wird der lokale Hamilton-Operator  $\hat{H}_2(t)$  mit Hilfe der 2-Teildrehen-Weddwirkung  $V_2(\vec{x} - \vec{x}'; t)$  konstruiert:

$$\hat{H}_2(t) = \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \hat{a}_z^+ \hat{a}_{z'}^+ V_2(\vec{x} - \vec{x}'; t) \hat{a}_{z'} \hat{a}_z \quad (2.104)$$

Der Operatordcharakter von  $\hat{a}_z^+$  und  $\hat{a}_z$  ist dafür verantwortlich, daß die

Schrödinger-Gleichung (2.100) ein Vierteildchenproblem bedient. Dies zeigt wir dadurch, daß die Schrödinger-Gleichung (2.100) von links mit dem zum Basiszustand (2.97) adjungierten Basisszustand

$$+1 \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n | = \langle 0 | \hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_1 \quad (2.105)$$

multipliziert wird:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle 0 | \hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_1 | \psi(t) \rangle = \langle 0 | \hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_1 \hat{H}(t) | \psi(t) \rangle \quad (2.106)$$

Nun folgen wir aus der Definition (2.96) des Vakuumzustandes  $|0\rangle$  und der Definition des Hamilton-Operators  $\hat{H}(t)$  in (2.101), (2.103), (2.104), daß der Vakuumzustand  $|0\rangle$  keine Energie besitzt:

$$\hat{H}(t)|0\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle 0 | \hat{H}(t) = 0 \quad (2.107)$$

Dann läßt sich die rechte Seite von (2.106) durch zwei Kommutatoren ausdrücken:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle 0 | \hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_1 | \psi(t) \rangle &= \langle 0 | [\hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_1, \hat{H}(t)]_- | \psi(t) \rangle \\ &= \int d^3y_1 \int d^3y_2 \delta(\vec{y}_1 - \vec{y}_2) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \vec{y}_2 + V_1(\vec{y}_2; t) \right\} \langle 0 | [\hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_1, \hat{a}^\dagger \vec{y}_2]_- | \psi(t) \rangle \quad (2.108) \\ &+ \frac{1}{\hbar} \int d^3y_1 \int d^3y_2 \int d^3y_3 \delta(\vec{y}_1 - \vec{y}_2) \delta(\vec{y}_2 - \vec{y}_3) V_1(\vec{y}_3; t) \langle 0 | [\hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_1, \hat{a}^\dagger \vec{y}_2, \hat{a}^\dagger \vec{y}_3]_- | \psi(t) \rangle \end{aligned}$$

Der erste Kommutator in (2.108) läßt sich zunächst mithilfe der Rechenregel  
 $[\hat{A}, \hat{B} \hat{C}]_- = \hat{A} \hat{B} \hat{C} - \hat{B} \hat{C} \hat{A} = (\hat{A} \hat{B} \hat{C} - \hat{B} \hat{A} \hat{C}) + (\hat{B} \hat{A} \hat{C} - \hat{B} \hat{C} \hat{A}) = [\hat{A}, \hat{B}]_- \hat{C} + \hat{B} [\hat{A}, \hat{C}]_-$  vereinfachen:

$$[\hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_1, \hat{a}^\dagger \vec{y}_2]_- = [\hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_1, \hat{a}^\dagger]_- \hat{a} \vec{y}_2 + \hat{a}^\dagger [\hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_1, \hat{a}^\dagger]_- \quad (2.110)$$

und anschließend rekursiv mit Hilfe der Rechenregel (2.77) vereinfachen:

$$\begin{aligned} [\hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_1, \hat{a}^\dagger]_- &\xrightarrow{(2.77)} \hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_2 [\hat{a} \vec{x}_1, \hat{a}^\dagger]_- + [\hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_2, \hat{a}^\dagger]_- \hat{a} \vec{x}_1 \\ &\xrightarrow{(2.77)} \hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_2 [\hat{a} \vec{x}_1, \hat{a}^\dagger]_- + \hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_3 [\hat{a} \vec{x}_2, \hat{a}^\dagger]_- \hat{a} \vec{x}_1 + [\hat{a} \vec{x}_n \cdots \hat{a} \vec{x}_3, \hat{a}^\dagger]_- \hat{a} \vec{x}_2 \hat{a} \vec{x}_1 \end{aligned}$$

$$(2.77) \dots (2.77) \sum_{r=1}^m \hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_{r+1}} [\hat{a}_{\vec{x}_r}, \hat{a}_{\vec{y}}^+] - \hat{a}_{\vec{x}_{r+1}} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1}$$

$$\xrightarrow{(2.92)} [\hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1}, \hat{a}_{\vec{y}}^+] = \sum_{r=1}^n \delta(\vec{x}_r - \vec{y}) \hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_{r+1}} \hat{a}_{\vec{x}_{r+1}} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1} \quad (2.111)$$

Dann erhält man für den ersten Erwartungswert in (2.108):

$$\langle 0 | [\hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1}, \hat{a}_{\vec{y}}^+ \hat{a}_{\vec{z}}]_- | \psi(t) \rangle \xrightarrow{(2.110)} \langle 0 | [\hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1}, \hat{a}_{\vec{y}}^+] \hat{a}_{\vec{z}} | \psi(t) \rangle \quad (2.112)$$

$$(2.111) \sum_{r=1}^m \delta(\vec{x}_r - \vec{y}) \langle 0 | \hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_{r+1}} \hat{a}_{\vec{z}} \hat{a}_{\vec{x}_r} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1} | \psi(t) \rangle$$

Der zweite Kommutator in (2.108) lässt sich durch zweimalige Anwendung der Rechenregel (2.109) auf den ersten Kommutator (2.111) zurückführen:

$$[\hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1}, (\hat{a}_{\vec{y}_1}^+ \hat{a}_{\vec{y}_2}^+) (\hat{a}_{\vec{z}_2} \hat{a}_{\vec{z}_1})] \xrightarrow{(2.109)} [\hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1}, \hat{a}_{\vec{y}_1}^+ \hat{a}_{\vec{y}_2}^+] \hat{a}_{\vec{z}_2} \hat{a}_{\vec{z}_1} + \hat{a}_{\vec{y}_2}^+ \hat{a}_{\vec{y}_1}^+ [\hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1}, \hat{a}_{\vec{z}_2} \hat{a}_{\vec{z}_1}]$$

$$\xrightarrow{(2.109)} [\hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1}, \hat{a}_{\vec{y}_1}^+] \hat{a}_{\vec{z}_2} \hat{a}_{\vec{z}_1} + \hat{a}_{\vec{y}_1}^+ [\hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1}, \hat{a}_{\vec{y}_2}^+] \hat{a}_{\vec{z}_2} \hat{a}_{\vec{z}_1} \quad (2.113)$$

$$(2.111) \sum_{r=1}^m \delta(\vec{x}_r - \vec{y}_1) \hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_{r+1}} \hat{a}_{\vec{x}_r} \hat{a}_{\vec{y}_2}^+ \hat{a}_{\vec{z}_1} + \sum_{r=1}^m \delta(\vec{x}_r - \vec{y}_2) \hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_{r+1}} \hat{a}_{\vec{x}_r} \hat{a}_{\vec{y}_1}^+ \hat{a}_{\vec{z}_1}$$

und ergibt sich der zweite Erwartungswert in (2.108) zu

$$\langle 0 | [\hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1}, \hat{a}_{\vec{y}_1}^+ \hat{a}_{\vec{y}_2}^+ \hat{a}_{\vec{z}_2} \hat{a}_{\vec{z}_1}] | \psi(t) \rangle \xrightarrow{(2.113)} \sum_{r=1}^m \delta(\vec{x}_r - \vec{y}_1) \langle 0 | \hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_{r+1}} \hat{a}_{\vec{x}_r} \hat{a}_{\vec{y}_2}^+ \hat{a}_{\vec{z}_2} \hat{a}_{\vec{z}_1} | \psi(t) \rangle$$

$$+ \sum_{r=1}^m \delta(\vec{x}_r - \vec{y}_2) \langle 0 | \hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_{r+1}} \hat{a}_{\vec{x}_r} \hat{a}_{\vec{y}_1}^+ \hat{a}_{\vec{z}_2} \hat{a}_{\vec{z}_1} | \psi(t) \rangle \quad (2.114)$$

$$(2.96) \sum_{r=1}^m \delta(\vec{x}_r - \vec{y}_1) \langle 0 | [\hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_{r+1}} \hat{a}_{\vec{x}_r}, \hat{a}_{\vec{y}_2}^+] \hat{a}_{\vec{z}_2} \hat{a}_{\vec{z}_1} | \psi(t) \rangle \quad (2.114)$$

$$(2.111) \sum_{r=1}^m \sum_{r' \neq r} \delta(\vec{x}_r - \vec{y}_1) \delta(\vec{x}_{r'} - \vec{y}_2) \langle 0 | \hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_{r+1}} \hat{a}_{\vec{x}_{r-1}} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_{r'+1}} \hat{a}_{\vec{x}_{r'+1}} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1} \hat{a}_{\vec{z}_2} \hat{a}_{\vec{z}_1} | \psi(t) \rangle$$

$$= \sum_{r=1}^m \sum_{r' \neq r} \delta(\vec{x}_r - \vec{y}_1) \delta(\vec{x}_{r'} - \vec{y}_2) \langle 0 | \hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_{r+1}} \hat{a}_{\vec{x}_{r-1}} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_{r'+1}} \hat{a}_{\vec{x}_{r'+1}} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1} | \psi(t) \rangle$$

Setzt man schließlich (2.112) und (2.114) in (2.108) ein, so führt man die Zwischenintegrierten über die Delta-Funktionen aus und erhält gerade die Teilchen-Schrödinger-Gleichung (2.13), (2.15):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle 0 | \hat{a}_{x_1} \cdots \hat{a}_{x_n} | \Psi(t) \rangle = \sum_{n=1}^m \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{x_n} + V_1(x_n; t) \right\} \langle 0 | \hat{a}_{x_1} \cdots \hat{a}_{x_n} | \Psi(t) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m \sum_{\mu=1}^m V_2(x_n - x_\mu; t) \langle 0 | \hat{x}_n \cdots \hat{a}_{x_n} | \Psi(t) \rangle \quad (2.115)$$

Ziehen wir die  $n$ -Teilchen Schrödinger-Wellenfunktion  $\Psi(x_1, \dots, x_n; t)$  durch die Projektion des Zustandes  $|\Psi(t)\rangle$  auf den Basiszustand (2.97) gegeben:

$$\Psi(x_1, \dots, x_n; t) = {}^{+1}\langle x_1, \dots, x_n | \Psi(t) \rangle \quad (2.116)$$

## 2.6 Feldoperatoren im Heisenberg-Bild:

Die nichtrelativistische Vierteildentheorie wurde bisher im Schrödinger-Bild formuliert, da die lokalen Teilchenerzeugungs- und vernichtungsoperatoren  $\hat{a}_x^\pm$  und  $\hat{a}_x$  zeitunabhängig sind, während der Vierteildenzustand  $|\Psi(t)\rangle$  aus dem zweitquantisierten Hilbert-Raum zeitabhängig ist. Nun soll der Übergang ins Heisenberg-Bild vollzogen werden, bei dem der Vierteildenzustand zeitunabhängig wird und die gesamte Zeitabhängigkeit von Feldoperatoren getragen wird.

Zur Wiederholung: Wir zerlegen zunächst das entsprechende Vorzeichen bei der Erstquantisierung. Wir gehen vom Schrödinger-Bild aus und bedenken uns der Einheitlichkeit halber darauf, daß der Hamilton-Operator  $\hat{H}_S$  nicht explizit zeitabhängig ist. Die Bewegungsgleichungen für den zeitabhängigen Zustand  $|\Psi_S(t)\rangle$  und den zeitunabhängigen Operator  $\hat{O}_S$  lauten dann:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_S(t)\rangle = \hat{H}_S |\Psi_S(t)\rangle \quad (2.117)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{O}_S = 0 \quad (2.118)$$

Die formale Lösung der Schrödinger-Gleichung (2.117) ist gegeben durch

$$|\Psi_S(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} |\Psi_S(0)\rangle \quad (2.119)$$

Dabei identifizieren wir den Anfangszustand  $|\Psi_S(0)\rangle$  mit dem Zustand  $|\Psi_A\rangle$  im

Heisenberg-Bild

$$|\psi_s(0)\rangle = |\psi_H\rangle \quad (2.120)$$

so dass der Übergang vom Schrödinger-Bild zum Heisenberg-Bild durch die Beziehungen

$$|\psi_s(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} |\psi_H\rangle \Leftrightarrow |\psi_H\rangle = e^{+\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} |\psi_s(t)\rangle \quad (2.121)$$

definiert wird. Offensichtlich ist der Zustand  $|\psi_H\rangle$  im Heisenberg-Bild zeit-abhängig:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_H\rangle \xrightarrow{(2.121)} i\hbar \frac{i}{\hbar} \hat{H}_S e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} |\psi_s(t)\rangle + e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_s(t)\rangle \xrightarrow{(2.117)} 0 \quad (2.122)$$

Um nun den Operator  $\hat{O}_H(t)$  im Heisenberg-Bild zu bestimmen, fordern wir, dass sich die Erwartungswerte beim Übergang vom Schrödinger-Bild zum Heisenberg-Bild nicht ändern:

$$\langle \psi_s(t) | \hat{O}_S | \psi_s(t) \rangle = \langle \psi_H | \hat{O}_H(t) | \psi_H \rangle \quad (2.123)$$

Einsetzen von (2.121) in (2.123) führt dann tatsächlich auf den Operator  $\hat{O}_H(t)$  im Heisenberg-Bild:

$$\langle e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} \psi_H | \hat{O}_S | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} \psi_H \rangle = \langle \psi_H | e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} \hat{O}_S e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} | \psi_H \rangle = \langle \psi_H | \hat{O}_H(t) | \psi_H \rangle$$

$$\Rightarrow \hat{O}_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} \hat{O}_S e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} \quad (2.124)$$

Beispielweise ergibt sich für den Hamilton-Operator  $\hat{O}_S = \hat{H}_S$ , dass dieser seine Form beim Übergang vom Schrödinger-Bild zum Heisenberg-Bild nicht ändert:

$$\hat{A}_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} \hat{H}_S e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} = \hat{H}_S \quad (2.125)$$

Zusätzlich erhalten wir für den Operator  $\hat{O}_H(t)$  im Heisenberg-Bild die Heisenberg'sche Bewegungsgleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{O}_H(t) \xrightarrow{(2.124)} e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} \left\{ i\hbar \frac{i}{\hbar} \hat{H}_S \hat{O}_S + \hat{O}_S i\hbar \frac{i}{\hbar} \hat{H}_S \right\} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} + e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t} i\hbar \frac{\partial \hat{O}_S}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_S t}$$

$$\xrightarrow{(2.118)} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{O}_H(t) = [\hat{O}_H(t), \hat{H}_S] - \xrightarrow{(2.125)} [\hat{O}_H(t), \hat{H}_H(t)] \quad (2.126)$$

Nun übertragen wir dieses Vorgehen auf die zweite Quantisierung. Dabei ordnen wir analog zu (2.124) den zeitabhlängigen lokalen Teildichtenproduktions- und Vernichtungsoperatoren  $\hat{a}_x^+$  und  $\hat{a}_x^-$  im Schrödinger-Bild zeitabhängige Feldoperatoren im Läsernberg-Bild zu:

$$\hat{\psi}(\vec{x}, t) = \hat{a}_x^+ e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \quad \hat{\psi}^+(\vec{x}, t) = \hat{a}_x^+ e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \quad \hat{\psi}^-(\vec{x}, t) = e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \hat{a}_x^- e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \quad (2.127)$$

Zunächst berechnen wir die gleichartigen Kommutatorrelationen dieser Feldoperatoren:

$$[\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}(\vec{x}', t)]_- = \hat{\psi}(\vec{x}, t) \hat{\psi}(\vec{x}', t) - \hat{\psi}(\vec{x}', t) \hat{\psi}(\vec{x}, t) \xrightarrow{(2.127)} e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \hat{a}_x^- e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \hat{a}_x^+ e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t}$$

$$- e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \hat{a}_x^+ e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \hat{a}_x^- e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} = e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} [\hat{a}_x^+, \hat{a}_x^-] - e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \xrightarrow{(2.92)} 0 \quad (2.128)$$

$$[\hat{\psi}^+(\vec{x}, t), \hat{\psi}^+(\vec{x}', t)]_- = e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} [\hat{a}_x^+, \hat{a}_x^+] e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \xrightarrow{(2.92)} 0 \quad (2.129)$$

$$[\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}^+(\vec{x}', t)]_- = e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} [\hat{a}_x^+, \hat{a}_x^-] e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \xrightarrow{(2.92)} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.130)$$

Dannach erfüllen die Feldoperatoren  $\hat{\psi}^+(\vec{x}, t)$  und  $\hat{\psi}^-(\vec{x}, t)$  im Läsernberg-Bild zu dem Zeitpunkt  $t$  dieselben Kommutatorrelationen wie die lokalen Teildichtenproduktions- und Vernichtungsoperatoren  $\hat{a}_x^+$  und  $\hat{a}_x^-$  im Schrödinger-Bild in (2.92).

Nun überführen wir den Hamilton-Operator (2.101), (2.103), (2.104) vom Schrödinger- ins Läsernberg-Bild. Dazu bedürfen wir uns darauf, daß das 1-Teilchen-Zeitpotential  $V_1(\vec{x}; t)$  und das 2-Teilchen-Zeitpotential  $V_2(\vec{x} - \vec{x}'; t)$  nicht explizit zeitabhängig sind. Analog zu (2.124) multiplizieren wir hieran den Hamilton-Operator

$$H = \int d^3x \hat{a}_x^+ \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_1(\vec{x}) \right\} \hat{a}_x^- + \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \hat{a}_x^+ \hat{a}_x^- V_2(\vec{x} - \vec{x}') \hat{a}_{x'}^- \hat{a}_{x'}^+ \quad (2.131)$$

von links mit  $e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t}$  und von rechts mit  $e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t}$ :

$$\hat{H}_H(t) = \hat{H} = e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} H e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} = \int d^3x e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \hat{a}_x^+ e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_1(\vec{x}) \right\} e^{i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t} \hat{a}_x^- e^{-i\frac{\hbar}{\hbar} \vec{H} t}$$

$$+\frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' e^{\frac{i}{\hbar} \hat{p}_z} \hat{a}_z^+ e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{p}_z} e^{\frac{i}{\hbar} \hat{p}_z} \hat{a}_z^+ e^{\frac{i}{\hbar} \hat{p}_z} V_2(x-x') e^{\frac{i}{\hbar} \hat{p}_z} \hat{a}_z^+ e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{p}_z} e^{\frac{i}{\hbar} \hat{p}_z} \hat{a}_z^+ e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{p}_z} \quad (2.132)$$

verwendet man die Feldoperatoren (2.127), so lautet der Hamilton-Operator im Zeisenberg-Bild:

$$\hat{H}_H(t) = \int d^3x \hat{\psi}^+(x,t) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_1(x,t) \right\} \hat{\psi}(x,t) + \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \hat{\psi}^+(x',t) V_2(x-x') \hat{\psi}(x',t) \hat{\psi}(x,t) \quad (2.133)$$

Mit diesem Hamilton-Operator im Zeisenberg-Bild lassen sich analog zu (2.126) die Zeisenberg'schen Bewegungsgleichungen der Feldoperatoren herleiten:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}(x,t)}{\partial t} \stackrel{(2.126)}{=} [\hat{\psi}(x,t), \hat{H}_H(t)] - \stackrel{(2.133)}{=} \int d^3x' \int d^3x'' \delta(x'-x'') \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta x'' + V_1(x'') \right\} [\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}^+(x',t) \hat{\psi}(x'',t)] - + \frac{1}{2} \int d^3x' \int d^3x'' V_2(x'-x'') [\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}^+(x',t) \hat{\psi}^+(x'',t) \hat{\psi}(x'',t) \hat{\psi}(x',t)] - \quad (2.134)$$

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}^+(x,t)}{\partial t} \stackrel{(2.126)}{=} [\hat{\psi}^+(x,t), \hat{H}_H(t)] - \stackrel{(2.133)}{=} \int d^3x' \int d^3x'' \delta(x'-x'') \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta x'' + V_1(x'') \right\} [\hat{\psi}^+(x,t), \hat{\psi}^+(x',t) \hat{\psi}(x'',t)] - \quad (2.135)$$

$$+ \frac{1}{2} \int d^3x' \int d^3x'' V_2(x'-x'') [\hat{\psi}^+(x,t), \hat{\psi}^+(x',t) \hat{\psi}^+(x'',t) \hat{\psi}(x'',t) \hat{\psi}(x',t)] - \quad (2.135)$$

Die dabei auftretenden Kommutatoren werden mit Hilfe der Reduktionsregel (2.109) ausgewertet:

$$[\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}^+(x',t) \hat{\psi}(x'',t)] \stackrel{(2.109)}{=} [\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}^+(x',t)] \hat{\psi}(x'',t) + \hat{\psi}^+(x',t) [\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}(x'',t)] - \quad (2.136)$$

$$\stackrel{(2.128), (2.130)}{>} [\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}^+(x',t) \hat{\psi}(x'',t)] - = \delta(x-x') \hat{\psi}(x'',t) \quad (2.136)$$

$$[\hat{\psi}^+(x,t), \hat{\psi}^+(x',t) \hat{\psi}(x'',t)] \stackrel{(2.109)}{=} [\hat{\psi}^+(x,t), \hat{\psi}^+(x',t)] \hat{\psi}(x'',t) + \hat{\psi}^+(x',t) [\hat{\psi}^+(x,t), \hat{\psi}(x'',t)] - \quad (2.137)$$

$$\stackrel{(2.129), (2.130)}{>} [\hat{\psi}^+(x,t), \hat{\psi}^+(x',t) \hat{\psi}(x'',t)] - = -\delta(x-x'') \hat{\psi}^+(x',t) \quad (2.137)$$

$$[\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}^+(x',t) \hat{\psi}^+(x'',t) \hat{\psi}(x'',t) \hat{\psi}(x',t)] \stackrel{(2.109)}{=} [\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}^+(x',t) \hat{\psi}^+(x'',t)] \hat{\psi}(x'',t) \hat{\psi}(x',t) - \hat{\psi}^+(x',t) \hat{\psi}^+(x'',t) [\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}(x',t) \hat{\psi}(x'',t)] - \stackrel{(2.109), (2.128)}{>} \{ [\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}^+(x',t)] - \hat{\psi}^+(x'',t) \} (2.138)$$

$$+ \hat{\psi}^+(x',t) \hat{\psi}^+(x'',t) [\hat{\psi}(x,t), \hat{\psi}(x',t) \hat{\psi}(x'',t)] - \stackrel{(2.130)}{>} \{ \delta(x-x') \hat{\psi}^+(x'',t) + \delta(x-x'') \hat{\psi}^+(x',t) \} \hat{\psi}(x'',t) \quad (2.138)$$

$$\begin{aligned} & [\hat{\psi}^+(\vec{x}, t), \hat{\psi}^+(\vec{x}', t)] \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) \hat{\psi}^+(\vec{x}'''', t) - [\hat{\psi}^+(\vec{x}, t), \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t)] \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) \hat{\psi}^+(\vec{x}'''', t) \quad (2.109) \\ & + \hat{\psi}^+(\vec{x}, t) \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) [\hat{\psi}^+(\vec{x}', t), \hat{\psi}^+(\vec{x}'''', t)] \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \hat{\psi}^+(\vec{x}'''', t) \{ [\hat{\psi}^+(\vec{x}, t), \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t)] - \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \\ & + \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) [\hat{\psi}^+(\vec{x}, t), \hat{\psi}^+(\vec{x}', t)] \} = - \hat{\psi}^+(\vec{x}, t) \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) \{ \delta(\vec{x} - \vec{x}'') \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) + \delta(\vec{x} - \vec{x}') \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) \} \quad (2.139) \end{aligned}$$

Einsetzen von (2.136) und (2.138) in (2.134) führt auf die Zeisenberg'sche Bewegungsgleichung von  $\hat{\psi}(\vec{x}, t)$ :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}(\vec{x}, t)}{\partial t} &= \int d^3x' \int d^3x'' \delta(\vec{x}' - \vec{x}'') \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \vec{x}'' + V_1(\vec{x}'') \right\} \delta(\vec{x} - \vec{x}'') \hat{\psi}(\vec{x}'', t) + \frac{1}{2} \int d^3x' \int d^3x'' V_2(\vec{x}' - \vec{x}'') \cdot \\ & \cdot \{ \delta(\vec{x} - \vec{x}') \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) \hat{\psi}(\vec{x}'', t) \hat{\psi}(\vec{x}', t) + \delta(\vec{x} - \vec{x}'') \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) \hat{\psi}(\vec{x}', t) \} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_2(\vec{x}, t) \right\} \hat{\psi}(\vec{x}, t) \\ & + \frac{1}{2} \int d^3x' \int d^3x'' V_2(\vec{x}' - \vec{x}'') \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \hat{\psi}(\vec{x}'', t) \hat{\psi}(\vec{x}', t) + \frac{1}{2} \int d^3x' \int d^3x'' V_2(\vec{x}' - \vec{x}'') \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \hat{\psi}(\vec{x}'', t) \hat{\psi}(\vec{x}', t) \\ (2.3), (2.128) \rightarrow i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}(\vec{x}, t)}{\partial t} &= \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_1(\vec{x}) \right\} \hat{\psi}(\vec{x}, t) + \int d^3x' \int d^3x'' V_2(\vec{x}' - \vec{x}'') \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \hat{\psi}(\vec{x}'', t) \hat{\psi}(\vec{x}, t) \quad (2.140) \end{aligned}$$

Entsprechend führt das Einsetzen von (2.137) und (2.139) in (2.135) auf die Zeisenberg'sche Bewegungsgleichung von  $\hat{\psi}^+(\vec{x}, t)$ :

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}^+(\vec{x}, t)}{\partial t} = \int d^3x' \int d^3x'' \delta(\vec{x}' - \vec{x}'') \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \vec{x}'' + V_2(\vec{x}'') \right\} (-1) \delta(\vec{x} - \vec{x}'') \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) \quad (2.141)$$

$$+ \frac{1}{2} \int d^3x' \int d^3x'' V_2(\vec{x}' - \vec{x}'') \{ -\delta(\vec{x} - \vec{x}'') \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) + \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \}$$

Verwendet man die Hermitizität des 1-teiligen Hamilton-Operators (2.102), so folgt:

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}^+(\vec{x}, t)}{\partial t} &= \int d^3x' \int d^3x'' \delta(\vec{x}' - \vec{x}'') \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \vec{x}'' + V_2(\vec{x}'') \right\} \delta(\vec{x}' - \vec{x}'') \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) \\ & + \frac{1}{2} \int d^3x' \int d^3x'' V_2(\vec{x}' - \vec{x}'') \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) + \frac{1}{2} \int d^3x' \int d^3x'' V_2(\vec{x}' - \vec{x}'') \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \\ (2.3), (2.128) \rightarrow -i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}^+(\vec{x}, t)}{\partial t} &= \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_1(\vec{x}) \right\} \hat{\psi}^+(\vec{x}, t) + \hat{\psi}^+(\vec{x}, t) \int d^3x' \int d^3x'' V_2(\vec{x}' - \vec{x}'') \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \hat{\psi}^+(\vec{x}'', t) \quad (2.142) \end{aligned}$$

Die Zeisenberg'schen Bewegungsgleichungen der Feldoperatoren (2.140) und (2.142) sind nichtlineare Integrodifferentialgleichungen dar. Wegen ihrer komplizierten Struktur kann man nicht großen, exakten Lösungen zu finden und ist deshalb darauf angewiesen, Näherungsverfahren zu entwickeln.

## 2.7 Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Fermionen:

Wir hatten bisher gesehen, daß sich die symmetrischen Vielteildenaustände der Bosonen sehr erfolgreich mit Hilfe von lokalen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren im Schrödinger-Bild verdrücken lassen. Dies wirft die Frage auf, ob es auch einen entsprechenden Formalismus für die antisymmetrischen Vielteildenaustände der Fermionen gibt. Dazu erinnern wir uns daran, daß die Symmetrie des Vielteildenaustandes der Bosonen eine unmittelbare Konsequenz der Kommutatorrelationen (2.92) der lokalen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren  $\hat{a}_z^+$  und  $\hat{a}_z^-$  war. Um zahlenalog zu (2.97) auch für Fermionen einen antisymmetrischen Vielteildenaustand gemäß

$$|\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle^{-1} = \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \cdots \hat{a}_{\vec{x}_n}^+ |0\rangle \quad (2.143)$$

zu konstruieren, muß man fordern, daß die lokalen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren  $\hat{a}_z^+$  und  $\hat{a}_z^-$  analog zu den Kommutatorrelationen (2.92) den folgenden Antikommutatorrelationen genügen:

$$[\hat{a}_z, \hat{a}_{z'}]_+ = [\hat{a}_{z_1}^+, \hat{a}_{z_2}^+]_+ = 0, \quad [\hat{a}_z, \hat{a}_{z'}^\pm]_+ = \delta(z - z') \quad (2.144)$$

Wie im bosonischen Fall definieren wir außerdem den Vakuumzustand  $|0\rangle$  durch die Bedingung, daß er keine Teileilern enthält:

$$\hat{a}_z |0\rangle = 0 \quad (\Rightarrow \langle 0 | \hat{a}_z^\pm = 0) \quad (2.145)$$

Ist tatsächlich gewährleisten (2.144) und (2.145) für die antisymmetrischen Vielteildenaustände (2.143) die Orthonormalitätsrelationen (2.60). Bei spielsweise erhalten wir für  $n=1$  und  $n=2$  Teilchen analog zu (2.98) und (2.99):

$$\begin{aligned} -1 \langle \vec{x}_1 | \vec{x}_2 \rangle^{-1} &\stackrel{(2.143)}{=} \langle \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ | \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ | 0 \rangle \stackrel{(2.144)}{=} \langle 0 | -\hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ + \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) | 0 \rangle \\ &\stackrel{(2.58)}{=} -1 \langle \vec{x}_1 | \vec{x}_2 \rangle^{-1} = \delta^{-1}(\vec{x}_1; \vec{x}_2) \stackrel{\cong}{=} (2.60) \end{aligned} \quad (2.146)$$

$$-1 \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 | \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle^{-1} \quad (2.143) \quad \langle \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ 0 | \hat{a}_{\vec{x}_1}^- \hat{a}_{\vec{x}_2}^- 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{\vec{x}_2}^- \hat{a}_{\vec{x}_1}^- \hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ 0 \rangle$$

$$(2.144) \quad \langle 0 | \hat{a}_{\vec{x}_2}^- (-\hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_1}^- + \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)) \hat{a}_{\vec{x}_2}^+ | 0 \rangle \quad (2.144), (2.145) \quad \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \cdot$$

$$\cdot \langle 0 | (-\hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_2}^- + \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)) | 0 \rangle - \langle 0 | (-\hat{a}_{\vec{x}_1}^+ \hat{a}_{\vec{x}_2}^- + \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)) (-\hat{a}_{\vec{x}_2}^+ \hat{a}_{\vec{x}_1}^- + \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)) | 0 \rangle$$

$$(2.145) \quad \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) - \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = \delta^{-1}(\vec{x}_1, \vec{x}_2; \vec{x}_3, \vec{x}_4) \quad (2.147)$$

da zwei lokale Erzeugungsoperatoren  $\hat{a}_{\vec{x}}^+$  und  $\hat{a}_{\vec{x}}^-$  nach (2.144) antikommutieren, verdrängt insbesondere das Quadrat des lokalen Erzeugungsoperators  $\hat{a}_{\vec{x}}^{\pm}$ :  $(\hat{a}_{\vec{x}}^{\pm})^2 = 0$  (2.148)

Für den antisymmetrischen Vierteilchenanstand (2.143) bedeutet dies, daß er verdrängt, falls zwei Orte  $\vec{x}_i$  und  $\vec{x}_j$  für  $i \neq j$  zusammenfallen:

$$|\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\rangle^{-2} = 0 \quad \text{falls } \vec{x}_i = \vec{x}_j \text{ für } i \neq j \quad (2.149)$$

Damit beinhaltet die Antikommutatoren (2.144) automatisch das Pauli-Prinzip, wonach sich zweiterionen nicht am selben Ort aufhalten dürfen. Die Eigenschaften (2.143) und (2.144) sind ausreichend, um mit dem zweitquantisierten Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3x \hat{a}_{\vec{x}}^+ \left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta + V_1(\vec{x}, t) \right\} \hat{a}_{\vec{x}}^- + \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \hat{a}_{\vec{x}}^+ \hat{a}_{\vec{x}'}^+ V_2(\vec{x} - \vec{x}'; t) \hat{a}_{\vec{x}'}^- \hat{a}_{\vec{x}}^- \quad (2.150)$$

eine zweitquantisierte Schrödinger-Gleichung für einen fermionischen Vierteilchenanstand  $|\Psi(t)\rangle$  zu formulieren:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle \quad (2.151)$$

Projiziert man sie auf den antisymmetrischen Basisanstand (2.143), so ergibt sich tatsächlich die  $n$ -Teilchen-Schrödinger-Gleichung (2.13), (2.15) für  $n$ -Teilchen-Wellenfunktion  $\Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; t) = -^2 \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n | \Psi(t) \rangle$  (2.152)

Gehst man vom Schrödinger-Bild in das Heisenberg-Bild über, so genügen die Feldoperatoren

$$\hat{\psi}(\vec{x}, t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{a}_{\vec{x}} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}, \quad \hat{\psi}^+(\vec{x}, t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{a}_{\vec{x}}^+ e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \quad (2.153)$$

den gleichzeitigen Antikommutationssrelationen

$$[\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}(\vec{x}', t)]_+ = [\hat{\psi}^+(\vec{x}, t), \hat{\psi}^+(\vec{x}', t)]_+ = 0, \quad [\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}^+(\vec{x}', t)]_+ = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.154)$$

sowohl der Hamilton-Operator im Heisenberg-Bild

$$\hat{H}_H(t) = \int d^3x \left\{ \hat{\psi}^+(\vec{x}, t) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_1(\vec{x}) \right] \hat{\psi}(\vec{x}, t) + \frac{1}{2} \int d^3x' \int d^3x'' \hat{\psi}^+(\vec{x}, t) \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) V_2(\vec{x} - \vec{x}') \hat{\psi}(\vec{x}'') \hat{\psi}(\vec{x}'') \right\} \quad (2.155)$$

als auch die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen der Feldoperatoren

$$i\hbar \frac{d\hat{\psi}(\vec{x}, t)}{dt} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_1(\vec{x}) \right\} \hat{\psi}(\vec{x}) + \int d^3x' V_2(\vec{x} - \vec{x}') \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \hat{\psi}(\vec{x}, t) \quad (2.156)$$

$$-i\hbar \frac{d\hat{\psi}^+(\vec{x}, t)}{dt} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_1(\vec{x}) \right\} \hat{\psi}^+(\vec{x}) + \hat{\psi}^+(\vec{x}, t) \int d^3x' V_2(\vec{x} - \vec{x}') \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \hat{\psi}(\vec{x}, t) \quad (2.157)$$

besitzen dieselbe Form wie im kōnischen Fall (2.133), (2.140) und (2.142).

## 2.8 Besetzungszahldarstellung:

Liegen nicht wechselseitwirkende Identische Teilden vor, so lassen sich diese im Rahmen der Besetzungszahldarstellung behandeln. Hierzu gehen wir vom zweitquantisierten Hamilton-Operator im Schrödinger-Bild für nicht wechselseitwirkende identische Teilden aus

$$\hat{H} = \int d^3x \hat{a}_{\vec{x}}^+ h(\vec{x}) \hat{a}_{\vec{x}} \quad (2.158)$$

wobei der erste quantisierte Hamilton-Operator gegeben ist durch

$$h(\vec{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x}) \quad (2.159)$$

Für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperationen  $\hat{a}_{\vec{x}}^+$  und  $\hat{a}_{\vec{x}}$  sollen entweder die kanonischen Kommutator- oder Antikommutationssrelationen gelten:

Geht man vom Schrödinger-Bild in das Zeisenberg-Bild über, so ergibt die Feldoperatoren

$$\hat{\psi}(\vec{x}, t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{a}_x e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}, \quad \hat{\psi}^+(\vec{x}, t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{a}_x^+ e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \quad (2.153)$$

den gleichzeitigen Antikommutationsrelationen

$$[\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}(\vec{x}', t)]_+ = [\hat{\psi}^+(\vec{x}, t), \hat{\psi}^+(\vec{x}', t)]_+ = 0, \quad [\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}^+(\vec{x}', t)]_+ = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.154)$$

Sowohl der Hamilton-Operator im Zeisenberg-Bild

$$\hat{H}_A(t) = \int d^3x \left\{ \hat{\psi}^+(\vec{x}, t) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_A(\vec{x}) \right] \hat{\psi}(\vec{x}, t) + \frac{1}{2} \int d^3x' \int d^3x'' \hat{\psi}^+(\vec{x}, t) \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) V_2(\vec{x} - \vec{x}') \hat{\psi}(\vec{x}'') \hat{\psi}(\vec{x}) \right\} \quad (2.155)$$

als auch die Zeisenberg'schen Bewegungsgleichungen der Feldoperatoren

$$i\hbar \frac{d\hat{\psi}(\vec{x}, t)}{dt} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_A(\vec{x}) \right\} \hat{\psi}(\vec{x}) + \int d^3x' V_2(\vec{x} - \vec{x}') \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \hat{\psi}(\vec{x}, t) \hat{\psi}(\vec{x}, t) \quad (2.156)$$

$$-i\hbar \frac{d\hat{\psi}^+(\vec{x}, t)}{dt} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_A(\vec{x}) \right\} \hat{\psi}^+(\vec{x}) + \hat{\psi}^+(\vec{x}, t) \int d^3x' V_2(\vec{x} - \vec{x}') \hat{\psi}^+(\vec{x}', t) \hat{\psi}(\vec{x}, t) \quad (2.157)$$

haben dieselbe Form wie im vorherigen Fall (2.133), (2.140) und (2.142).

## 2.8 Besetzungsadddarstellung:

Liegen nicht wechselwirkende identische Teileilen vor, so lassen sich diese im Rahmen der Besetzungsadddarstellung behandeln. Hierzu gehen wir vom zweitquantisierten Hamilton-Operator im Schrödinger-Bild für nicht wechselwirkende identische Teileilen aus

$$\hat{H} = \int d^3x \hat{a}_x^+ h(\vec{x}) \hat{a}_x \quad (2.158)$$

wobei der erste quantisierte Hamilton-Operator gegeben ist durch

$$h(\vec{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x}) \quad (2.159)$$

Für die Erzeugungs- und Verzerrungsgeneratoren  $\hat{a}_x^+$  und  $\hat{a}_x$  sollen entweder die kanonischen Kommutator- oder Antikommutationsrelationen gelten:

$$[\hat{a}_x, \hat{a}_{x'}]_+ = [\hat{a}_x^+, \hat{a}_{x'}^+]_+ = 0, \quad [\hat{a}_x, \hat{a}_{x'}]_- = \delta(x - x') \quad (2.160)$$

Wir nehmen nun an, daß das Eigenwertproblem des eingeschränkten La-Milton-Operators (2.159) gelöst ist:

$$h(x)\psi_k(x) = E_k \psi_k(x) \quad (2.161)$$

wobei die 1-Teilchen-Wellenfunktionen  $\psi_k(x)$  den Orthonormalitätsrelationen

$$\int d^3x \psi_k^*(x) \psi_{k'}(x) = \delta_{kk'} \quad (2.162)$$

und den Vollständigkeitsrelationen

$$\sum_k \psi_k^*(x) \psi_k(x) = \delta(x - x') \quad (2.163)$$

erfüllen. Hierbei steht die Abkürzung  $\delta$  für alle Quantenzahlen, die den Zustand eines einzelnen Teilchens charakterisieren. Aufgrund der Vollständigkeitsrelation (2.163) lassen sich die Erzeugungs- und Vernichtungssoperationen  $\hat{a}_x$  und  $\hat{a}_x^+$  nach über 1-Teilchen-Wellenfunktionen  $\psi_k(x)$  entwickeln:

$$\hat{a}_x = \sum_k \hat{a}_k \psi_k(x) \quad (2.164) \quad \hat{a}_x^+ = \sum_k \hat{a}_k^+ \psi_k^*(x) \quad (2.165)$$

Diese beiden Entwicklungen lassen sich mit Hilfe der Orthonormalitätsrelationen (2.162) invertieren:

$$\int d^3x \hat{a}_x^+ \psi_k^*(x) \xrightarrow{(2.164)} \sum_{k'} \hat{a}_{k'} \int d^3x \psi_k^*(x) \psi_{k'}(x) \xrightarrow{(2.162)} \hat{a}_{k'} \quad (2.166)$$

$$\int d^3x \hat{a}_x^+ \psi_k(x) \xrightarrow{(2.166)} \sum_{k'} \hat{a}_{k'}^+ \int d^3x \psi_k(x) \psi_{k'}(x) \xrightarrow{(2.162)} \hat{a}_{k'}^+ \quad (2.167)$$

Damit lassen sich die Kommutatoren - bzw. Antikommutatoren - der Operatoren  $\hat{a}_x$  und  $\hat{a}_x^+$  bestimmen:

$$[\hat{a}_x, \hat{a}_{k'}]_+ = \underbrace{\int d^3x \int d^3x' \psi_k^*(x) \psi_{k'}^*(x')} [\hat{a}_x, \hat{a}_{k'}]_+ \xrightarrow{(2.160)} 0 \quad (2.168)$$

$$[\hat{a}_x^+, \hat{a}_{k'}^+]_+ = \underbrace{\int d^3x \int d^3x' \psi_k(x) \psi_{k'}(x')} [\hat{a}_x^+, \hat{a}_{k'}^+]_+ \xrightarrow{(2.160)} 0 \quad (2.169)$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \frac{(2.166), (2.167)}{\int d^3x \int d^3x' \psi_k^*(\vec{x}) \psi_{k'}(\vec{x}') [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger]} = \frac{(2.160)}{\int d^3x \psi_k^*(\vec{x}) \psi_{k'}(\vec{x})} \frac{(2.162)}{J_{kk'}(2.170)}$$

Setzt man die Entwicklungen (2.164) und (2.165) der Erzeugungs- und Verbindungsoperatoren in den zweitquantisierten Hamilton-Operator (2.158) ein, so kann man dies in die Operatoren  $\hat{a}_k$  und  $\hat{a}_k^\dagger$  ausdrücken:

$$\hat{H} \stackrel{(2.158), (2.164), (2.165)}{=} \sum_k \sum_{k'} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \int d^3x \psi_k^*(\vec{x}) h(\vec{x}) \psi_{k'}(\vec{x}) \stackrel{(2.161), (2.162)}{=} \sum_k E_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \quad (2.171)$$

Führt man den Teilchenzahloperator  $\hat{n}_k$  für den Zustand  $k$  ein

$$\hat{n}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \quad (2.172)$$

so läuft sich der zweitquantisierte Hamilton-Operator (2.171) auch schreiben als

$$\hat{H} = \sum_k E_k \hat{n}_k \quad (2.173)$$

Es läuft sich nun mit der zutreffenden Reduzierregel

$$[\hat{A}, \hat{B} \hat{C}]_L = [\hat{A}, \hat{B}] + \hat{C} \pm \hat{B} [\hat{A}, \hat{C}]_I \quad (2.174)$$

zeigen, dass zwei Teilchenzahloperatoren  $\hat{n}_k$  und  $\hat{n}_{k'}$  für zwei Zustände  $k$  und  $k'$  miteinander kommutieren:

$$[\hat{n}_k, \hat{n}_{k'}] = \frac{(2.172)}{[\hat{n}_k, \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k]} = \frac{(2.174)}{[\hat{n}_k, \hat{a}_k^\dagger]} - \hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k^\dagger [\hat{n}_k, \hat{a}_k] - \frac{(2.172)}{[\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k]} - [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k] \hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k^\dagger [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_k \hat{a}_k] - \frac{(2.174)}{([\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_k^\dagger] + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_k]) \hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k^\dagger ([\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_k] + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_k])} = 0 \quad (2.175)$$

Daraus folgt, dass die Teilchenzahloperatoren  $\hat{n}_k$  im Zustand  $k$  auch mit dem zweitquantisierten Hamilton-Operator (2.173) kommutieren:

$$[\hat{n}_k, \hat{H}] = \frac{(2.173)}{\sum_k E_k [\hat{n}_k, \hat{n}_k]} = \frac{(2.175)}{0} = 0 \quad (2.176)$$

So nach (2.175) alle Teilchenzahloperatoren  $\hat{n}_k$  im Zustand  $k$  miteinander kommutieren, gibt es einen Satz von Eigenzuständen für all diese Teilchenzahl opera-

tonen ist im Zustand  $\mathbf{x}$ . Diese Eigenzustände lassen sich durch die Eigenwerte von den Tildensubtraktoren  $\tilde{\mathbf{x}}$  darstellen:

$$\hat{u}_k |u_1, u_2, \dots, u_k, \dots \rangle = u_k |u_1, u_2, \dots, u_k, \dots \rangle \quad (2.177)$$

Die Eigenwerte  $\{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$  sind dann auch Eigenwerte des zweit-quantisierten Hamilton-Operators (2.173)

$$\hat{H}|n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle = E|n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle \quad (2.178)$$

wobei der Energiedienst gegeben ist durch

$$E = \sum E_k e^{-\mu_k T}$$

die Asymmetrien in der Teilchenausallokationen int können für Börsen beliebig groß werden: (2.180)

Kaszen:  $n_k = 0, 1, 2, \dots$

Basisen:  $n_k = 0, 1, 2, \dots$   
 Bei Fermionen sind dagegen die Erfüllung der Tiefdruckakkommodationen  $\hat{n}_k$  eine wesentliche Einräumung unterwölgen. Sie ergibt sich aus einer Identität einer Tiefdruckakkommodationen  $\hat{n}_k$ :

(2.172) ǟkäkäkäk (2.170) ǟk ǟk-ǟkäkäk (2.168)(2.169) ǟkäk (2.172) ng (2.181)

wendet man nämlich auf (2.181) die Eignungstände  $\{m_1, m_2, \dots, m_k, \dots\} \rightarrow \alpha_n$ , so folgt aus dem Eignungstproblem (2.177):

$$u_k^2 = u_k$$

d.h. es geht

$$n_k = 0, 1 \quad (2.183)$$

Erläuterung: Der Zustand mit der Quantenzahl  $k$  kann dernoch höchstens mit einem einzigen Fermion besetzt sein. Dies ist ein Hinweis für das bei Fermionen gültig Pauli'sche Ausschlussprinzip.

## 2.9 Ideales Fermi-Gas:

Ein nichtwechselwirkendes Gas von Fermionen stellt zu aller sinnlichem Modellsystem dar. Beispielsweise werden die Valenzelektronen in Metallen im Rahmen des Sommerfeld-Modells näherungsweise als ein solches ideales Fermi-Gas aufgefasst. Bei solchen Systemen sind die typischen Erzeugungssenergien größer als die mittlere thermische Energie bei Raumtemperatur, die  $1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot 273 \text{ K} \approx (1/42.5) \text{ eV}$  beträgt. Deshalb ist ein Elektronengas bei Raumtemperatur in etwa gleichbedeutend mit dem Solltemperaturlimes  $T \downarrow 0$  des idealen Fermi-Gases.

Bei freien, nichtwechselwirkenden identischen Fermionen verschwindet das 1-Zeillochpotential  $V_1(\vec{r})$ , so dass sich der erst quantisierte Hamilton-Operator (2.159) reduziert auf

$$h(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \quad (2.184)$$

Der zu Eigenwertproblem (2.161) wird offensichtlich durch ebene Wellen im Volumen V bestimmt Funktionen

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (2.185)$$

und durch die Eigenwerte

$$E_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (2.186)$$

gelöst. Fordern wir für das würffelförmige Volumen  $V = L^3$  mit der Abmessung L periodische Randbedingungen für die Wellenfunktionen (2.185), so werden die möglichen Werte des Wellenzektors  $\vec{k}$  auf die diskreten Werte

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L} (n_x, n_y, n_z); \quad n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z} \quad (2.187)$$

eingeschränkt. Die Eigenfunktionen (2.185) erfüllend kann offenbar die folgende Orthonormalitätsrelation

$$\int d^3x \psi_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \psi_{\vec{k}'}(\vec{r}) = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} V \quad (2.188)$$

Bestimmen wir ein ideales Gas von Spin 1/2-Fermionen im Rahmen der zweiten Quantisierung, müssen wir Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren  $a_{\vec{k}}^+$  und

$\hat{a}_{\vec{x}G}$  mit den zu (2.158) analogen Antikommutatoren einführen:

$$[\hat{a}_{\vec{x}G}, \hat{a}_{\vec{x}'G'}]_+ = [\hat{a}_{\vec{x}G}^+, \hat{a}_{\vec{x}'G'}^+]_+ = 0, \quad [\hat{a}_{\vec{x}G}, \hat{a}_{\vec{x}'G'}^+]_+ = \delta_{GG'} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.189)$$

dabei charakterisiert die Spinquantenzahl  $G = \pm 1/2$  bzw.  $G = \uparrow, \downarrow$ , ob der Spin des erzeugten bzw. vernichteten Fermions nach oben oder unten zeigt. Damit lassen sich dann wie in (2.93) der Teilchenzahloperator

$$\hat{N} = \sum_G \int d^3x \hat{a}_{\vec{x}G}^+ \hat{a}_{\vec{x}G} \quad (2.190)$$

und wie in (2.158) der Hamilton-Operator formulieren:

$$\hat{H} = \sum_G \int d^3x \hat{a}_{\vec{x}G}^+ h(\vec{x}) \hat{a}_{\vec{x}G} \quad (2.191)$$

Führt man analog zu (2.164), (2.165) eine Entwicklung nach den Eigenfunktionalen (2.185) durch

$$\hat{a}_{\vec{x}G} = \sum_k \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{kG}, \quad \hat{a}_{\vec{x}G}^+ = \sum_k \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{kG}^+ \quad (2.192)$$

so läuft sich dies mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen (2.188) vereinfachen:

$$\hat{a}_{\vec{x}G} = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{kG}, \quad \hat{a}_{\vec{x}G}^+ = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^3k e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \hat{a}_{kG}^+ \quad (2.193)$$

die Operatoren  $\hat{a}_{kG}$  und  $\hat{a}_{kG}^+$  genügen dann aufgrund von (2.189) ebenfalls den zu (2.166) - (2.170) analogen Antikommutatorrelationen

$$[\hat{a}_{kG}, \hat{a}_{k'G'}]_+ = [\hat{a}_{kG}^+, \hat{a}_{k'G'}^+]_+ = 0, \quad [\hat{a}_{kG}, \hat{a}_{k'G'}^+]_+ = \delta_{GG'} \delta_{kk'} \quad (2.194)$$

Denn nach Beobachtung  $\hat{a}_{kG}^+$  und  $\hat{a}_{kG}$  die Erzeugung und Vernichtung eines Spins  $1/2$ -Fermions mit Wellenvektor  $\vec{k}$  und Spinquantenzahl  $G$ . Einsetzen von (2.192) in (2.190) und (2.191) führt mit Hilfe von (2.188) auf die Fourier-Darstellung von Teilchenzahloperator

$$\hat{N} = \sum_G \sum_k \hat{a}_{kG}^+ \hat{a}_{kG} \quad (2.195)$$

und Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \sum_G \sum_k E_k \hat{a}_{kG}^+ \hat{a}_{kG} \quad (2.196)$$

Nun wollen wir den Grundzustand eines idealen Gases von  $N$  freien Spin  $\frac{1}{2}$ -Fermionen bestimmen. Hierbei besagt (2.196) in Verbindung mit den Antikommutatorrelationen (2.194), daß die Besetzung eines einzelnen  $\vec{k}$ -Zustandes mit  $\vec{\alpha}^\dagger$  - weils den beiden Spinzuständen  $g = \pm \frac{1}{2}$  bzw.  $g = \uparrow, \downarrow$  möglich ist. Außerdem ist zu beachten, daß die vorhandenen Zustände so besetzt werden, daß die Gesamtenergie minimiert wird. Hieraus folgt dann zwangsläufig, daß im  $\vec{k}$ -Raum alle 1-Zeilen-Zustände innerhalb der sogenannten Fermi-Kugel, die den Radius  $k_F$  besitzt, besetzt sind. Der Grundzustand lautet damit:

$$|\Psi_F\rangle = \prod_{|\vec{k}| < k_F} \hat{a}_{\vec{k}G}^\dagger |0\rangle \quad (2.197)$$

wobei der Vakuumzustand  $|0\rangle$  wie üblich definiert ist durch

$$\hat{a}_{\vec{k}G} |0\rangle = 0, \quad \langle 0 | \hat{a}_{\vec{k}G}^\dagger = 0 \quad (2.198)$$

Hieraus folgt, daß der Erwartungswert des Teilchenzahloperators im  $\vec{k}$ -Raum gegeben ist durch

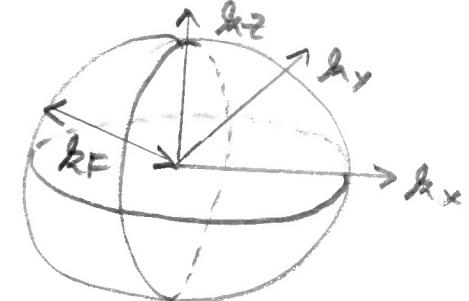
$$\bar{n}_{\vec{k}G} = \langle \Psi_F | \hat{a}_{\vec{k}G}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}G} | \Psi_F \rangle = \Theta(k_F - |\vec{k}|) = \begin{cases} 1 & ; |\vec{k}| < k_F \\ 0 & ; |\vec{k}| > k_F \end{cases} \quad (2.199)$$

Aus (2.195) und (2.199) ergibt sich dann die gesuchte Teilchenzahl  $N$  zu

$$N = \langle \Psi_F | \hat{N} | \Psi_F \rangle = \sum_G \sum_{\vec{k}} \bar{n}_{\vec{k}G} = 2 \sum_{\vec{k}} \Theta(k_F - |\vec{k}|) \quad (2.200)$$

In einem großen Volumen  $V = L^3$  nähern die diskreten Werte (2.187) der erlaubten Wellenzvektoren  $\vec{k}$  immer näher zueinander, so daß die Summe über die diskreten  $\vec{k}$  näherungsweise in ein kontinuierliches Integral übergeht:

$$\sum_{\vec{k}} \xrightarrow[V \rightarrow \infty]{} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k \quad (2.201)$$



Verwendet man diese Näherung in (2.200), so lässt sich damit eine grundlegende Beziehung zwischen der mittleren Teilchenzahl  $n = N/V$  und der Fermi-Energie

$$E_F = \frac{\pi^2 \hbar^2 E}{2m} \quad (2.202)$$

herstellen:

$$N = \frac{2V}{(2\pi)^3} \int d^3 k \otimes (k_F - |\vec{k}|) = \frac{2V}{8\pi^3} 4\pi^2 \int_0^{k_F} dk k^2 = \frac{V}{\pi} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{n^2}{3} \xrightarrow{n = \frac{N}{V}} k_F = (3\pi n)^{1/3} \quad (2.203)$$

In entsprechender Weise lässt sich nun auch die Grundzustandsenergie bestimmen:

$$E_F = \langle \Psi_F | \hat{H} | \Psi_F \rangle \xrightarrow{(2.196), (2.199)} \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma} E_{\vec{k}} n_{\vec{k}\sigma} = 2 \sum_{\vec{k}} E_{\vec{k}} \otimes (k_F - |\vec{k}|) \quad (2.204)$$

Der Kontinuumssatz (2.201) führt (2.204) unter Berücksichtigung von (2.186)

in

$$\frac{2V}{(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{\pi^2 \hbar^2 E}{2m} \otimes (k_F - |\vec{k}|) = \frac{2V}{8\pi^3} 4\pi \frac{\pi^2}{2m} \int_0^{k_F} dk k^4 = \frac{V}{\pi} \frac{\pi^2}{2m} \frac{\hbar^2}{5} = \frac{V}{5\pi} \frac{\hbar^2 E_F^2}{2m} k_F^3 \quad (2.205)$$

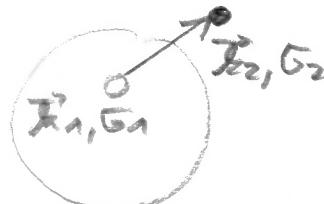
~~(2.202), (2.203)~~

$$\frac{V}{5\pi} E_F 3\pi \frac{4}{5} = \frac{3}{5} E_F N$$

Im Mittel besteht also jedes Spin-1/2-Fermioneninverhältnis der Fermi-Kugel die Energie  $3E_F/5$ .

Abschließend wollen wir noch die wegen des entarteten Elektronengases verdrängten, das an absoluten Temperatur nullpunkt aus einer vollbesetzten Fermi-Kugel besteht. Entfernen wir ein Elektron im Zustand  $\vec{k}_1, \sigma_1$  aus der Fermi-Kugel und bringen es in einen Zustand  $\vec{k}_2, \sigma_2$  außerhalb der Fermi-Kugel, so wird ein Teilchen-Lust-Paar entstehen  $\vec{k}_1, \sigma_1$  auf Verlust der Fermi-Kugel, und wird ein Teilchen-Lust-Paar  $\vec{k}_2, \sigma_2$  auf Verlust der Fermi-Kugel, und werden die Fermionen erzeugt. Wir verallgemeinern nun diese Übergang und führen die Fermionen-Operator (2.196) die  $\hat{c}_{\vec{k}\sigma}$ -Zähler-Darstellung ein. Hierzu spalten wir im Hamilton-Operator (2.206) die Fermionen in einen Beitrag innerhalb und einen Beitrag außerhalb der Fermi-Kugel:

$$\hat{H} = \sum_{|\vec{k}| < k_F} \sum_{\sigma} E_{\vec{k}} \hat{c}_{\vec{k}\sigma} \hat{c}_{\vec{k}\sigma}^\dagger + \sum_{|\vec{k}| > k_F} \sum_{\sigma} \hat{c}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \hat{c}_{\vec{k}\sigma} \quad (2.206)$$



Ansließend führen wir Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren  $\hat{b}_{\vec{k}G}^+$  und  $\hat{b}_{\vec{k}G}$  von Quasiteilchen ein. Für  $|\vec{k}| > k_F$  verhalten sie wie freie Elektronen, d.h.

$$\hat{b}_{\vec{k}G}^+ = \hat{a}_{\vec{k}G}^+, \quad \hat{b}_{\vec{k}G}^- = \hat{a}_{\vec{k}G}; \quad |\vec{k}| > k_F \quad (2.207)$$

Für  $|\vec{k}| < k_F$  dagegen verhalten sie sich wie Röhre in der Fermi-Zone:

$$\hat{b}_{\vec{k}G}^+ = \hat{a}_{-\vec{k}-G}, \quad \hat{b}_{\vec{k}G}^- = \hat{a}_{-\vec{k}-G}; \quad |\vec{k}| < k_F \quad (2.208)$$

Dabei entspricht die Erzeugung (Vernichtung) eines Loches mit Wellenvektor  $\vec{k}$  der Vernichtung (Erzeugung) eines Elektrons mit Wellenvektor  $-\vec{k}$ . Die Quasiteilchenergiedifferenz ist offenbar durch alle Antikommutatorrelationen (2.194):

$$[\hat{b}_{\vec{k}G}, \hat{b}_{\vec{k}'G'}^\dagger]_+ = [\hat{b}_{\vec{k}G}, \hat{b}_{\vec{k}''G''}^\dagger]_+ = 0, \quad [\hat{b}_{\vec{k}G}, \hat{b}_{\vec{k}''G'}^\dagger] = \delta_{GG'} \delta_{\vec{k}\vec{k}''} \quad (2.209)$$

Mit (2.207) und (2.208) folgt mit Hilfe von

$$E_{-\vec{k}} \xrightarrow{(2.186)} E_{\vec{k}} \quad (2.210)$$

aus (2.206) zunächst

$$\hat{H} = \sum_{\substack{\vec{k} < k_F \\ |\vec{k}| < k_F}} \sum_G E_{\vec{k}} \hat{b}_{\vec{k}G}^+ \hat{b}_{\vec{k}G}^- + \sum_{\substack{\vec{k} > k_F \\ |\vec{k}| > k_F}} \sum_G E_{\vec{k}} \hat{b}_{\vec{k}G}^+ \hat{b}_{\vec{k}G}^- \quad (2.211)$$

Wendet man die Antikommutatorrelation (2.209) an, so folgt

$$\hat{H} = - \sum_{\substack{\vec{k} < k_F \\ |\vec{k}| < k_F}} \sum_G E_{\vec{k}} \hat{b}_{\vec{k}G}^+ \hat{b}_{\vec{k}G}^- + \sum_{\substack{\vec{k} > k_F \\ |\vec{k}| > k_F}} \sum_G E_{\vec{k}} \hat{b}_{\vec{k}G}^+ \hat{b}_{\vec{k}G}^- + \sum_{\substack{\vec{k} < k_F \\ |\vec{k}| > k_F}} \sum_G E_{\vec{k}} \quad (2.212)$$

Verschiebt man den Energie Nullpunkt gerade um die Grundzustandsenergie (2.204)

$$\hat{H}' = \hat{H} - \sum_{\substack{\vec{k} < k_F \\ |\vec{k}| < k_F}} \sum_G E_{\vec{k}} \quad (2.213)$$

so ergibt sich ein zweitquantierter Hamilton-Operator, bei dem die Energiediffer-

Elektronen positiv und die der Löcher negativ gewendet wird:

$$\hat{H}' = - \sum_{|\vec{k}| < k_F} \sum_{\sigma} E_{\vec{k}} b_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} b_{\vec{k}\sigma} + \sum_{|\vec{k}| > k_F} \sum_{\sigma} E_{\vec{k}} \hat{b}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} \hat{b}_{\vec{k}\sigma} \quad (2.214)$$

In entsprechender Weise erhält man für den Operator, der die Zahl der Aussteildendenzugungen bestimmt

$$\hat{N}' = \hat{N} - \sum_{|\vec{k}| < k_F} \sum_{\sigma} 1 \quad (2.215)$$

den Ausdruck

$$\hat{N}' = - \sum_{|\vec{k}| < k_F} \sum_{\sigma} \hat{b}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} b_{\vec{k}\sigma} + \sum_{|\vec{k}| > k_F} \sum_{\sigma} \hat{b}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} \hat{b}_{\vec{k}\sigma} \quad (2.216)$$

Auch hier werden die Elektronen positiv und die Löcher negativ gewendet. Also färbtweise läuft sich dadurch interpretieren, daß man den Ladungsausdruck

$$Q' = -e \hat{N}' \quad (2.216) - e \left\{ - \sum_{|\vec{k}| < k_F} \sum_{\sigma} \hat{b}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} b_{\vec{k}\sigma} + \sum_{|\vec{k}| > k_F} \sum_{\sigma} \hat{b}_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} \hat{b}_{\vec{k}\sigma} \right\} \quad (2.217)$$

einführt. Während Elektronen die Ladung  $-e$  besitzen, wirken Löcher die Ladung  $+e$  auf. Der Kontraktionsatz der Operatoren (2.214) und (2.217) die Eigenschaft, daß deren Erwartungswert im Grundzustand (2.197) verschwindet:

$$\langle \Psi_F | \hat{H}' | \Psi_F \rangle = 0, \quad \langle \Psi_F | Q' | \Psi_F \rangle = 0 \quad (2.218)$$

Diese Eigenschaft sieht man auch folgendermaßen ein. Der Grundzustand (2.197) verzerrt offenbar den Erhaltungen

$$\hat{a}_{\vec{k}G}^{\dagger} | \Psi_F \rangle = 0, \quad |\vec{k}| > k_F; \quad \hat{a}_{\vec{k}G}^{\dagger} | \Psi_F \rangle = 0, \quad |\vec{k}| < k_F \quad (2.219)$$

so daß für die Quantenzahlen-Ortsketten (2.207), (2.208) unmittelbar folgt

$$\hat{b}_{\vec{k}G}^{\dagger} | \Psi_F \rangle = 0 \quad (2.220)$$

Deshalb ergibt sich die Eignungsdahl (2.218) auch aus (2.214), (2.217) und (2.220). Somit besagt (2.220), daß man den Grundzustand (2.197) einer vollständigen Fermi-Zugel auch als neuen Verkettungszustand beschreibt der Quaddelchen-Symmetrien annehmen kann.

## 2.10 Molekularefeldtheorie der Supraleitung:

Am Ende von diesem Kapitel behandeln wir die mikroskopische Theorie der Supraleitung, die 1957 von Bardeen, Cooper und Schrieffer vervollständigt wurde und die 1972 mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet wurde. Diese BCS-Theorie ist ein schönes Beispiel für die Modellbildung in der Theorie des Festkörperzweiges. Anzuhängen von der Elektron-Doppler-Wedelwirkung leitet man durch Reziprozität die Elimination der Doppleren eine effektiv attraktive Elektron-Elektron-Wedelwirkung her. Diese wird dann stark vereinfacht, indem die  $\alpha$ -Abhängigkeit verschwindet und nur noch die Wedelwirkung zwischen Elektronen mit entzerrtem Wellenzahl und Spin betrachtet wird. Das daraus resultierende gefundene statische Wellenzahl und Spin betrachtet wird. Das daraus resultierende reduzierte BCS-Modell kann nur approximativ behandelt werden. Insbesondere kann der beobachtete Effekt berücksichtigen werden, so daß man das nicht allzu wesentlich verstanden hat.

Ausgangspunkt für die BCS-Theorie ist der BCS-Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \sum_G \epsilon_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}G}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{k}G} - g \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \hat{a}_{\vec{k}'\uparrow}^{\dagger} \hat{a}_{-\vec{k}'\downarrow}^{\dagger} \hat{a}_{-\vec{k}\downarrow} \hat{a}_{\vec{k}\uparrow} \quad (2.221)$$

Der erste Term beschreibt die freien Elektronen mit der Dispersionrelation

$$\epsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \quad (2.222)$$

Dabei wurde das diskrete Potentiel eingeführt, da wir die Bedeutung einzufangen in dem Ensemble durchführen. Der zweite Term beschreibt das durch die

Elektron-Positron-Wedelsverlängerung vermittelt attraktive Wedelsverlängerung zwischen Elektroonen von entgegengesetztem Wellenvektor und  $\gamma$ -lin. Daß diese Wedelsverlängerung durch Positronen vermittelt wird, geht dadurch in die Bedeckung (2.721) ein, daß die dortige  $\vec{k}$ -Summe sich nur über solche Wellenvektoren erstreckt, bei denen gilt

$$|E_2| < t_{\text{FWD}} \quad (2.223)$$

wobei wir die maximale Eigenfrequenz bezeichnet, die auch als Deufg-Fre-  
quenz bekannt ist. Dabei ist berücksichtigt, dass die Energien  $E_k$  gemäß (7.222)  
von der Fermi-Energie bzw. dem thermischen Potential abhängen werden.

In der asymptotischen BCS-Theorie wird der BCS-Lamilton-Operator (2.22) mit Hilfe eines Variationsansatzes behandelt. Hier verwenden wir statt dessen eine alternative der äquivalente Methode, nämlich die der Bogoliubov-Transformations, die auch in anderen Theorien der Theoretischen Physik, wie z.B. der Be- matik, die auch in anderen Theorien der Theoretischen Physik, wie z.B. der Be- matik, die auch in anderen Theorien der Theoretischen Physik, wie z.B. der Be- matik, die auch in anderen Theorien der Theoretischen Physik, wie z.B. der Be- matik, die auch in anderen Theorien der Theoretischen Physik, wie z.B. der Be-

$$\hat{a}_{\text{R}1}^+ \hat{a}_{\text{R}1}^+ \hat{a}_{\text{R}2}^- \hat{a}_{\text{R}2}^- \approx \begin{cases} \langle \hat{a}_{\text{R}1}^+ \hat{a}_{\text{R}1}^+ \rangle \hat{a}_{\text{R}2}^- \hat{a}_{\text{R}2}^- + \hat{a}_{\text{R}1}^+ \hat{a}_{\text{R}2}^- \langle \hat{a}_{\text{R}1}^+ \hat{a}_{\text{R}2}^- \rangle & \text{latres-kanal} \\ - \langle \hat{a}_{\text{R}1}^+ \hat{a}_{\text{R}2}^- \rangle \hat{a}_{\text{R}1}^+ \hat{a}_{\text{R}2}^- - \hat{a}_{\text{R}1}^+ \hat{a}_{\text{R}1}^+ \langle \hat{a}_{\text{R}1}^+ \hat{a}_{\text{R}2}^- \rangle & \text{Fad-kanal} \\ \langle \hat{a}_{\text{R}1}^+ \hat{a}_{\text{R}2}^- \rangle \hat{a}_{\text{R}1}^+ \hat{a}_{\text{R}2}^- + \hat{a}_{\text{R}1}^+ \hat{a}_{\text{R}1}^+ \langle \hat{a}_{\text{R}1}^+ \hat{a}_{\text{R}2}^- \rangle & \text{rozstřikov-kanal} \end{cases} \quad (2.224)$$

Die physikalische Motivation, sich nur auf den Bogoliubow-Kanal fokussieren, beruht auf der Darstellung von der Bildung von Cooper-Paaren. Dadurch erweitern wir den ursprünglichen BCS-Landau-Operator (2.221) näherungsweise durch

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \sum_k \sum_G \epsilon_k^G \hat{a}_{kG}^\dagger \hat{a}_{kG} - g \sum_k \sum_{k'} (\langle \hat{a}_{k''}^\dagger \hat{a}_{k''}^\dagger \rangle \hat{a}_{-k'}^\dagger \hat{a}_{k'}^\dagger + \hat{a}_{k''}^\dagger \hat{a}_{k''}^\dagger \langle \hat{a}_{-k'} \hat{a}_{k'} \rangle) \\ + g \sum_k \sum_{k'} \langle \hat{a}_{k''}^\dagger \hat{a}_{k''}^\dagger \rangle \langle \hat{a}_{-k'} \hat{a}_{k'} \rangle \quad (2.225)$$

Der letzte Term wird dabei linear aufgelöst, um Überschätzungen zu kompensieren.  
Wir führen nun die Abkürzungen

$$\Delta^* = g \sum_{k''} \langle \hat{a}_{k''}^\dagger \hat{a}_{k''}^\dagger \rangle, \quad \Delta = g \sum_{k''} \langle \hat{a}_{-k''} \hat{a}_{k''} \rangle \quad (2.226)$$

als Summen über alle Raumverantwortschaften ein. Es wird sich später herausstellen, dass (2.226) den Aufzählparsameter darstellt, der die supraleitende Phase charakterisiert. Mit (2.226) lautet (2.225):

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \sum_k \sum_G \epsilon_k^G \hat{a}_{kG}^\dagger \hat{a}_{kG} - \Delta^* \sum_{k''} \hat{a}_{-k''} \hat{a}_{k''}^\dagger - \Delta \sum_{k''} \hat{a}_{k''}^\dagger \hat{a}_{-k''} + \frac{\Delta \Delta^*}{g} \quad (2.227)$$

Es stellt sich die Frage, welche Erwartungswerte in (2.226) eigentlich zu verwenden ist. Hierzu definiieren wir die in (2.227) vorkommende großkanonische Zustandssumme

$$Z = \text{Tr } e^{-\beta \hat{H}_{\text{eff}}} \quad (2.228)$$

und die entsprechende großkanonische freie Energie

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z \quad (2.229)$$

Aus (2.227) – (2.229) lesen wir mit Hilfe von (2.228) die Elektrograuenthalpia ab:

$$N = -\frac{\partial F}{\partial \mu} = \sum_k \sum_G \langle \hat{a}_{kG}^\dagger \hat{a}_{kG} \rangle \quad (2.230)$$

Zieht man den Erwartungswert  $\langle \cdot \rangle$  der (2.229) Erwartungswert mit dem effektiven Hamilton-Operator (2.227)

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr} (\cdot e^{-\beta \hat{H}_{\text{eff}}}) \quad (2.231)$$

Da die Erwartungswerte  $\Delta, \Delta^*$  nach (2.227) im  $\hat{H}_{\text{eff}}$  auftreten, hängt auch die großkanonische freie Energie (2.229) davon ab:

$$F = F(\Delta, \Delta^*) \quad (2.232)$$

Andererseits wissen wir, dass der ursprüngliche EGS-Hamilton-Operator (2.221) nicht von  $\Delta$ ,  $\Delta^*$  abhängt. Man kann den entsprechenden Erweiterungsparameter  $\Delta$ ,  $\Delta^*$  daher als Variationsparameter auffassen. Nach dem Prinzip der minimalen Variabilität ist (2.232) gleichförmig  $\Delta$ ,  $\Delta^*$  zu extremalisieren:

$$\frac{\partial F(\Delta, \Delta^*)}{\partial \Delta^*} = 0, \quad \frac{\partial F(\Delta, \Delta^*)}{\partial \Delta} = 0 \quad (2.233)$$

Einsetzen von (2.227)-(2.230) in (2.233) zeigt, dass (2.233) mit (2.226) übereinstimmt, wenn der Erwartungswert gemäß (2.231) definiert ist. Man kann (2.231) daher als Selbstkonsistenzbedingung ansehen, da  $\Delta$ ,  $\Delta^*$  nicht nur auf der linken Seite sondern wegen (2.227) und (2.231) auch auf der linken Seite auftreten.

### 2.11 Bogoliubov-Transformationen:

Der effektive Hamilton-Operator (2.227) enthält zwei ungewöhnliche Terme, bei denen zwei Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren hintereinander auftreten. Deshalb verändert der effektive Hamilton-Operator (2.227) nicht mit dem Teilchenzahloperator, so dass die Teilchenzahl nicht erhalten ist. Da wir hier aber eine graphische Rechnung der Schrödinger- und Quantenmechanischen Kinos betrachten, spielt dies keine Rolle.

Wir wollen nun den effektiven Hamilton-Operator (2.227) in die übliche kanonische Form überführen, in der immer ein Erzeugungs- und ein Vernichtungsoperator hintereinander auftreten. Hierzu führen wir eine Bogoliubov-Transformation von den ursprünglichen Operatoren  $\hat{a}_{\vec{k}}^{\pm}$ ,  $\hat{a}_{-\vec{k}}^{\pm}$  mit den kanonischen Antitomutatorrelationen (2.194) zu neuen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren durch gemäß

$$\begin{aligned} \hat{x}_{\vec{k}} &= U_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}\uparrow} - V_{\vec{k}} \hat{a}_{-\vec{k}\downarrow}^*, & \hat{x}_{\vec{k}}^* &= U_{\vec{k}}^* \hat{a}_{\vec{k}\uparrow}^* - V_{\vec{k}}^* \hat{a}_{-\vec{k}\downarrow}, \\ \hat{\beta}_{\vec{k}} &= U_{\vec{k}} \hat{a}_{-\vec{k}\downarrow} + V_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}\uparrow}^*, & \hat{\beta}_{\vec{k}}^* &= U_{\vec{k}}^* \hat{a}_{-\vec{k}\downarrow}^* + V_{\vec{k}}^* \hat{a}_{\vec{k}\uparrow} \end{aligned} \quad (2.234)$$

Die bemerkenswerte dieser Bogoliubov-Transformation besteht darin, dass Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren mit unterschiedenen Wellenvektoren

und Spins gemischt werden. Wir berechnen nun die Antikommutatoren der neuen Operatoren:

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{p}_{\vec{k}'}^\dagger]_+ = u_{\vec{k}}^* v_{\vec{k}'} ([\hat{a}_{-\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger]_+ - [\hat{a}_{\vec{k}'}, \hat{a}_{-\vec{k}'}^\dagger]_+) = 0, [\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{p}_{\vec{k}'}^\dagger]_+ = 0 \quad (2.235)$$

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{p}_{\vec{k}'}^\dagger]_+ = 0 = [\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{p}_{\vec{k}'}^\dagger]_+ \quad (2.236)$$

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger]_+ = u_{\vec{k}}^* v_{\vec{k}'}^* [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger]_+ + v_{\vec{k}}^* v_{\vec{k}'}^* [\hat{a}_{-\vec{k}}, \hat{a}_{-\vec{k}'}^\dagger]_+ = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} (|u_{\vec{k}}|^2 + |v_{\vec{k}'}|^2) \quad (2.237)$$

$$[\hat{p}_{\vec{k}}, \hat{p}_{\vec{k}'}^\dagger]_+ = u_{\vec{k}}^* v_{\vec{k}'}^* [\hat{a}_{-\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger]_+ + v_{\vec{k}}^* v_{\vec{k}'}^* [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger]_+ = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} (|u_{\vec{k}}|^2 + |v_{\vec{k}'}|^2) \quad (2.238)$$

Damit sind die Operatoren  $\hat{a}_{\vec{k}}$ ,  $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$ ,  $\hat{p}_{\vec{k}}$ ,  $\hat{p}_{\vec{k}}^\dagger$  Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, falls die Bedingung

$$u_{\vec{k}}^* u_{\vec{k}'}^* + v_{\vec{k}}^* v_{\vec{k}'}^* = 1 \quad (2.239)$$

erfüllt ist. Wir wollen nun die Beziehung (2.234) invertieren. Hierzu führen wir die Matrixnotation ein

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{\vec{k}} \\ \hat{p}_{\vec{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\vec{k}} & -v_{\vec{k}} \\ v_{\vec{k}} & u_{\vec{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \\ \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger \end{pmatrix} \quad (2.240)$$

und erhalten wegen der Bedingung (2.239)

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger \\ \hat{a}_{-\vec{k}'}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\vec{k}'}^* & v_{\vec{k}'} \\ -v_{\vec{k}'}^* & u_{\vec{k}'}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{\vec{k}} \\ \hat{p}_{\vec{k}} \end{pmatrix} \quad (2.241)$$

Daraus lesen wir ab:

$$\hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger = u_{\vec{k}'}^* \hat{a}_{\vec{k}} + v_{\vec{k}'} \hat{p}_{\vec{k}}^\dagger, \quad \hat{a}_{-\vec{k}'}^\dagger = u_{\vec{k}'}^* \hat{a}_{\vec{k}} + v_{\vec{k}'}^* \hat{p}_{\vec{k}}^\dagger \quad (2.242)$$

$$\hat{a}_{-\vec{k}'}^\dagger = -v_{\vec{k}'}^* \hat{a}_{\vec{k}} + u_{\vec{k}'}^* \hat{p}_{\vec{k}}^\dagger, \quad \hat{a}_{\vec{k}'} = -v_{\vec{k}'} \hat{a}_{\vec{k}} + u_{\vec{k}'}^* \hat{p}_{\vec{k}}$$

Damit lassen sich die einzelnen Terme in (2.22) auf die neuen Fermi-Operatoren umschreiben:

$$\begin{aligned}
1.) \hat{a}_{\vec{k}\downarrow}^+ \hat{a}_{\vec{k}\downarrow}^{(2.242)} & (U_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^+ + V_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}})(U_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} + V_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}}) \\
& = U_{\vec{k}} U_{\vec{k}}^* \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} + U_{\vec{k}} V_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} + U_{\vec{k}} V_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}} + V_{\vec{k}} V_{\vec{k}}^* \hat{p}_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}} \\
& (2.235)-(2.239) U_{\vec{k}} U_{\vec{k}}^* \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} - U_{\vec{k}} V_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}} + U_{\vec{k}} V_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{p}_{\vec{k}} - V_{\vec{k}} V_{\vec{k}}^* \hat{p}_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}} + V_{\vec{k}} V_{\vec{k}}^* (2.243) \\
2.) \hat{a}_{\vec{k}\downarrow}^+ \hat{a}_{\vec{k}\downarrow}^{(2.242)} & (-V_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} + U_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}}^+) (-V_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^+ + U_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}}) \\
& = V_{\vec{k}} V_{\vec{k}}^* \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^+ - U_{\vec{k}} V_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^+ - V_{\vec{k}} U_{\vec{k}}^* \hat{a}_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}} + U_{\vec{k}} U_{\vec{k}}^* \hat{p}_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}} \\
& (2.235)-(2.239) -V_{\vec{k}} V_{\vec{k}}^* \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^+ + U_{\vec{k}} V_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{p}_{\vec{k}} - V_{\vec{k}} U_{\vec{k}}^* \hat{a}_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}} + U_{\vec{k}} U_{\vec{k}}^* \hat{p}_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}} + V_{\vec{k}} V_{\vec{k}}^* (2.244) \\
3.) \hat{a}_{\vec{k}\downarrow} \hat{a}_{\vec{k}\downarrow}^{(2.242)} & (-V_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} + U_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}})(U_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} + V_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}}^+) \\
& = -U_{\vec{k}}^* V_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} + U_{\vec{k}}^* V_{\vec{k}}^* \hat{p}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} - V_{\vec{k}}^* \hat{a}_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}}^+ + U_{\vec{k}} V_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}} \\
& (2.235)-(2.239) -U_{\vec{k}}^* V_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} - U_{\vec{k}}^* \hat{a}_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}}^+ - V_{\vec{k}}^* \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} - U_{\vec{k}} V_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}} + U_{\vec{k}} V_{\vec{k}} (2.245) \\
4.) \hat{a}_{\vec{k}\downarrow}^+ \hat{a}_{\vec{k}\downarrow}^{(2.242)} & (U_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^+ + V_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}})(-V_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} + U_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}}^+) \\
& = -U_{\vec{k}} V_{\vec{k}}^* \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^+ - V_{\vec{k}}^* \hat{p}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} + U_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} + U_{\vec{k}} V_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}} \\
& (2.235)-(2.239) -U_{\vec{k}} V_{\vec{k}}^* \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^+ + V_{\vec{k}}^* \hat{a}_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}}^+ + U_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} - U_{\vec{k}} V_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}} + U_{\vec{k}} V_{\vec{k}}^* (2.246)
\end{aligned}$$

Einsetzen von (2.243) - (2.246) in den Hamilton-Operator (2.227) führt dann auf

$$\begin{aligned}
H_{\text{eff}} = \frac{\hbar}{k} \{ & [E(\vec{k})(U_{\vec{k}} U_{\vec{k}}^* - V_{\vec{k}} V_{\vec{k}}^*) + \Delta^* U_{\vec{k}}^* V_{\vec{k}} + \Delta U_{\vec{k}} V_{\vec{k}}^*] (\hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} + \hat{p}_{\vec{k}}^+ \hat{p}_{\vec{k}}) \\
& + [-2\epsilon(\vec{k}) U_{\vec{k}}^* V_{\vec{k}} + \Delta U_{\vec{k}}^2 - \Delta V_{\vec{k}}^2] \hat{a}_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}}^+ + [-2\epsilon(\vec{k}) U_{\vec{k}} V_{\vec{k}} + \Delta V_{\vec{k}}^2 - \Delta U_{\vec{k}}^2] \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{p}_{\vec{k}} \\
& + \frac{\Delta \Delta^*}{8} + \frac{\epsilon}{k} [2\epsilon(\vec{k}) V_{\vec{k}} V_{\vec{k}}^* - \Delta^* U_{\vec{k}}^* V_{\vec{k}} - \Delta U_{\vec{k}} V_{\vec{k}}^*] \} (2.247)
\end{aligned}$$

Er ist in der Standardform

$$H_{\text{eff}} = \sum_k E(\vec{k}) (\hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} + \hat{p}_{\vec{k}}^+ \hat{p}_{\vec{k}}) + C \quad (2.248)$$

mit der Dispersionrelation

$$E(\vec{k}) = \epsilon(\vec{k}) [u_{\vec{k}}^* u_{\vec{k}} - v_{\vec{k}}^* v_{\vec{k}}] + \Delta^* u_{\vec{k}}^* v_{\vec{k}} + \Delta u_{\vec{k}} v_{\vec{k}}^* \quad (2.249)$$

und der konstanten Energieverdriftung

$$C = \frac{\Delta \Delta^*}{g} + \sum_{\vec{k}} [2\epsilon(\vec{k}) v_{\vec{k}}^* v_{\vec{k}} - \Delta^* u_{\vec{k}}^* v_{\vec{k}} - \Delta u_{\vec{k}} v_{\vec{k}}^*] \quad (2.250)$$

Falls die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$2\epsilon(\vec{k}) u_{\vec{k}}^* v_{\vec{k}} - \Delta^* u_{\vec{k}}^{*2} + \Delta v_{\vec{k}}^{*2} = 0 \quad (2.251)$$

Dann sind die noch unbekannten komplexen Bogoliubov-Parameter  $u_{\vec{k}}, v_{\vec{k}}$  durch die beiden Bedingungen (2.239) und (2.251) festgelegt. Wir zerlegen die jeweiligen Größen nach Betrag und Phase

$$u_{\vec{k}} = |u_{\vec{k}}| e^{i\varphi_u}, \quad v_{\vec{k}} = |v_{\vec{k}}| e^{i\varphi_v}, \quad \Delta = |\Delta| e^{i\varphi_\Delta} \quad (2.252)$$

Dann ist (2.251) von der Phase hier erfüllt, falls

$$\varphi_{u_{\vec{k}}} = \varphi_u, \quad \varphi_{v_{\vec{k}}} = \varphi_v, \quad \varphi_v - \varphi_u = \varphi_\Delta \quad (2.253)$$

Für die Beträge der Bogoliubov-Parameter gilt nach (2.239) und (2.251)

$$|u_{\vec{k}}|^2 + |v_{\vec{k}}|^2 = 1 \quad (2.254)$$

$$2\epsilon(\vec{k}) |u_{\vec{k}}| |v_{\vec{k}}| = |\Delta| (|u_{\vec{k}}|^2 - |v_{\vec{k}}|^2) \quad (2.255)$$

Mit dem Lösungsansatz

$$|v_{\vec{k}}| = \cos \beta_{\vec{k}}, \quad |u_{\vec{k}}| = \sin \beta_{\vec{k}} \quad (2.256)$$

Ist offenbar die Bedingung (2.254) identisch erfüllt. Aus (2.255) folgt dann

$$\epsilon(\vec{k}) 2 \sin \beta_{\vec{k}} \cos \beta_{\vec{k}} = |\Delta| (\cos^2 \beta_{\vec{k}} - \sin^2 \beta_{\vec{k}}) \Rightarrow \epsilon(\vec{k}) \sin 2\beta_{\vec{k}} = |\Delta| \cos 2\beta_{\vec{k}}$$

$$\Rightarrow \tan 2\beta_{\vec{k}} = \frac{|\Delta|}{\epsilon(\vec{k})} \quad (2.257)$$

Daraus lassen sich die gesuchten Bogoliubov-Parameter mit Hilfe trigonometrischer Umformungen bestimmen:

$$1.) \tan 2\beta_R = \frac{\sin 2\beta_R}{\cos 2\beta_R} = \frac{1 - \cos^2 2\beta_R}{\cos 2\beta_R} \Rightarrow \cos^2 2\beta_R \tan^2 2\beta_R = 1 - \cos^2 2\beta_R$$

$$\Rightarrow \cos 2\beta_R = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\beta_R}} \stackrel{(2.257)}{=} \frac{\epsilon_R}{\sqrt{\epsilon_R^2 + \Delta^2}} \quad (2.258)$$

$$2.) \cos 2\beta_R = \cos^2 \beta_R - \sin^2 \beta_R = 1 - 2 \sin^2 \beta_R = 2 \cos^2 \beta_R - 1$$

$$|U_R| \stackrel{(2.256)}{=} |\cos \beta_R| = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 2\beta_R)} \stackrel{(2.258)}{=} \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\epsilon_R^2}{\epsilon_R^2 + \Delta^2}\right)} \quad (2.259)$$

$$|V_R| \stackrel{(2.256)}{=} |\sin \beta_R| = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 2\beta_R)} \stackrel{(2.258)}{=} \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\epsilon_R^2}{\epsilon_R^2 + \Delta^2}\right)} \quad (2.260)$$

Setzt man die so bestimmten Bogoliubov-Parameter (2.252), (2.253), (2.259), (2.260) in (2.249) ein, so folgt hieraus die Bogoliubov-Dispersion

$$\begin{aligned} E(R) &= E(R)(|U_R|^2 - |V_R|^2) + 2|\Delta| |U_R| |V_R| = E(R)\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\epsilon_R^2}{\epsilon_R^2 + \Delta^2}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\epsilon_R^2}{\epsilon_R^2 + \Delta^2}\right)\right] \\ &+ 2|\Delta| \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{\epsilon_R^2}{\epsilon_R^2 + \Delta^2}} = 2 \frac{1}{2} \frac{\epsilon_R^2}{\epsilon_R^2 + \Delta^2} + |\Delta| \frac{1}{\sqrt{\epsilon_R^2 + \Delta^2}} = \frac{\epsilon_R^2}{\epsilon_R^2 + \Delta^2} \end{aligned} \quad (2.261)$$

Entsprechend ergibt sich die Energiedverteilung (2.250) zu

$$\begin{aligned} C &= \frac{|\Delta|^2}{g} + \frac{\pi^2}{2} [2E(R)|V_R|^2 - 2|\Delta||U_R||V_R|] = \frac{|\Delta|^2}{g} + \frac{\pi^2}{2} \left[2E(R)\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\epsilon_R^2}{\epsilon_R^2 + \Delta^2}\right) \right. \\ &\left. - 2|\Delta|\frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{\epsilon_R^2}{\epsilon_R^2 + \Delta^2}}\right] = \frac{|\Delta|^2}{g} + \frac{\pi^2}{2} \left[\epsilon_R^2 - \frac{\epsilon_R^2}{\epsilon_R^2 + \Delta^2} - \frac{|\Delta|^2}{\epsilon_R^2 + \Delta^2}\right] = \frac{|\Delta|^2}{g} + \frac{\pi^2}{2} (\epsilon_R^2 - E^2) \end{aligned} \quad (2.262)$$

Dabei ist zu beachten, dass (2.261) und (2.262) vom supraleitenden Ordnungsparameter nur abhängt

$$|\Delta|^2 = \Delta^2 \Delta \quad (2.263)$$

abhängt. Wir halten abschließend fest, dass der effektive Hamilton-Operator (2.248) diagonal in den neuen Fermi-Operatoren ist, die formal unbeeinträchtigende Fermionen beschreiben. Diese Quantitäten haben keine physikalische Interpretation. Insofern entsprechen sie nicht den Cooper-Paaren, die ja Bosonen sein müssen, während die hier eingeführten Quantitäten Fermionen sind.

## 2.12 BCS-Selbstkonsistenzgleichung:

Wir berechnen nun die zum effektiven Hamilton-Operator (2.248) gehörende großkanonische Zustandssumme

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}_{\text{eff}}} = e^{-\beta C} \text{Tr} e^{-\beta \sum_{\vec{k}} E(\vec{k}) (\hat{\alpha}_{\vec{k}}^\dagger \hat{\alpha}_{\vec{k}} + \hat{\beta}_{\vec{k}}^\dagger \hat{\beta}_{\vec{k}})} \quad (2.264)$$

die Auswertung von (2.264) ergibt

$$Z = e^{-\beta C} \prod_{\vec{k}} [1 + e^{-\beta E(\vec{k})}]^2 \quad (2.265)$$

so dass die großkanonische freie Energie (2.229) gegeben ist durch

$$F = -\frac{2}{\beta} \sum_{\vec{k}} \ln [1 + e^{-\beta E(\vec{k})}] \quad (2.262), (2.263) \quad \frac{\Delta^*}{g} + \sum_{\vec{k}} (E_{\vec{k}} - E_{\vec{k}}^*) - \frac{2}{\beta} \sum_{\vec{k}} \ln [1 + e^{-\beta E(\vec{k})}] \quad (2.266)$$

daher ist die Bogoliubov-Dispersion (2.261) mit (2.263) gekennzeichnet

$$E(\vec{k}) = \sqrt{E_{\vec{k}}^* + \Delta^*} \quad (2.267)$$

daher ist (2.266) mit (2.267) tatsächlich von der Form (2.232). Die BCS-Selbstkonsistenzgleichung (2.233) reduziert sich mit

$$\frac{\partial E(\vec{k})}{\partial \Delta^*} \quad (2.267) \quad \frac{\Delta}{2E(\vec{k})} \quad (2.268)$$

auf den Ausdruck

$$\frac{\partial F}{\partial \Delta^*} = \frac{\Delta}{g} - \frac{\Delta}{\vec{k}} \frac{1}{2E(\vec{k})} - \frac{2}{\beta} \sum_{\vec{k}} \frac{e^{-\beta E(\vec{k})}}{1 + e^{-\beta E(\vec{k})}} (-\beta) \frac{\Delta}{2E(\vec{k})} = 0 \quad (2.269)$$

$$\Rightarrow \Delta \left\{ \frac{2}{g} - \frac{\Delta}{\vec{k}} \frac{1}{E(\vec{k})} \left[ 1 - \frac{2}{e^{\beta E(\vec{k})} + 1} \right] \right\} = \Delta \left\{ \frac{2}{g} - \sum_{\vec{k}} \frac{\tanh \beta E(\vec{k})/2}{E(\vec{k})} \right\} = 0 \quad (2.270)$$

sie BCS-Selbstkonsistenzgleichung hat zwei Lösungen. Die triviale Lösung  $\Delta = 0$  entspricht dem normalen Metall, die nichttriviale Lösung  $\Delta \neq 0$  dem supermagnetischen Zustand. Aus  $\Delta \neq 0$  folgt aus (2.270) mit (2.267)

$$1 = \frac{g}{2} \sum_{\vec{k}} \frac{\tanh \beta E(\vec{k}) + |\Delta|^2/2}{\sqrt{E(\vec{k})^2 + |\Delta|^2}} \quad (2.271)$$

Im Kontinuumlimit geht die  $\vec{k}$ -Summe gemäß (2.201) in ein Integral über

$$\frac{2}{g} = \frac{V}{8\pi^3} \int_{E_F - \Delta/2}^{E_F + \Delta/2} dk \frac{\tanh \beta \sqrt{E_F^2 + |k|^2}/2}{\sqrt{E_F^2 + |k|^2}} \quad (2.272)$$

Dabei wurde gemäß (2.223) berücksichtigt, dass die attraktive Wellenfunktion nur zur Zustandsdichte

$$g(E) dE = 2 \frac{4\pi k^2}{(2\pi)^3} dk \Rightarrow g(E) = \frac{1}{\pi^2} k^2 \frac{dk}{dE} \quad (2.222) \quad \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E} \quad (2.273)$$

ergibt (2.272) über ein

$$\frac{2}{gV} = \int_{\mu - \Delta/2}^{\mu + \Delta/2} dE g(E) \frac{\tanh \beta \sqrt{(E-\mu)^2 + |\Delta|^2}/2}{\sqrt{(E-\mu)^2 + |\Delta|^2}} \quad (2.274)$$

Aufgrund der Großenwertapproximation  $\mu \gg \Delta$  lässt sich (2.274) approximieren durch

$$\frac{1}{gV} = g(\mu) \int_0^{\Delta/2} dE \frac{\tanh \beta \sqrt{E^2 + |\Delta|^2}/2}{\sqrt{E^2 + |\Delta|^2}} \quad (2.275)$$

Dies eröffnet für hinreichend tiefe Temperaturen immer eine Lösung. Im Limes  $T \downarrow 0$  gilt  $\tanh \beta \sqrt{E^2 + |\Delta|^2}/2 \rightarrow 1$ , so dass sich (2.275) reduziert auf

$$\frac{1}{gV} = g(E_F) \int_0^{\Delta/2} dE \frac{1}{\sqrt{E^2 + |\Delta|^2}} \quad (2.276)$$

Er handelt sich wiederum um ein elementares Integral, das sich unmittelbar lösen lässt:

$$\frac{1}{gV} = g(E_F) \left[ \operatorname{arinh} \frac{E}{|\Delta|} \right]_0^{\Delta/2} = g(E_F) \operatorname{arinh} \frac{\Delta/2}{|\Delta|} \Rightarrow \frac{\Delta/2}{|\Delta|} = \operatorname{sinh} \frac{1}{gV S(E_F)} \\ \Rightarrow |\Delta| = \frac{\Delta/2}{\operatorname{sinh} \frac{1}{gV S(E_F)}} \xrightarrow{gV S(E_F) \ll 1} |\Delta| \approx 2 \Delta/2 e^{-1/gV S(E_F)} \quad (2.277)$$

Zertritt eine nicht-analytische Abhängigkeit von der Elektron-Wellenfunktionenstärke  $S$  auf. Umgekehrt gilt für große Temperaturn  $T \uparrow \infty$ , dass  $\tanh \beta \sqrt{E^2 + |\Delta|^2}/2 \downarrow 0$  geht. Damit folgt aus (2.275), dass für hohe Temperatur-

toren keine nichttriviale Lösung für den Ordnungsparameter gibt. Es muss also eine kritische Temperatur  $T_c$  geben, bei der der Ordnungsparameter gerade verschwindet:

$$\Delta(T_c) = 0 \quad (2.278)$$

Damit ergibt sich aus (2.275) und (2.278)

$$\frac{1}{gVSEF} = \int_0^{t_{\text{WD}}} dE \frac{\tanh E/2k_B T_c}{E} \times(E) = \frac{E/2k_B T_c}{2k_B T_c} \int_0^{t_{\text{WD}}} dx \frac{\tanh x}{x} \quad (2.279)$$

Wir berücksichtigen nun die Größenordnung  $T_D = 300\text{ K}$  und  $T_c = 10\text{ K}$ , so dass  $t_{\text{WD}}/2k_B T_c \gg 1$  ist. Eine partielle Integration in (2.279) ergibt zunächst

$$\frac{1}{gVSEF} = \ln \frac{t_{\text{WD}}}{2k_B T_c} \tanh \frac{t_{\text{WD}}}{2k_B T_c} - \int_0^{t_{\text{WD}}} \frac{dx}{2k_B T_c} \ln x \frac{1}{\cosh^2 x} \quad (2.280)$$

Wegen  $t_{\text{WD}}/2k_B T_c \rightarrow \infty$  geht (2.280) näherungsweise über in

$$\frac{1}{gVSEF} = \ln \frac{t_{\text{WD}}}{2k_B T_c} - \int_0^\infty dx \frac{\ln x}{\cosh^2 x} \quad (2.281)$$

In (2.281) aufstehende Integral lässt sich analog berechnen

$$\int_0^\infty dx \frac{\ln x}{\cosh^2 x} = \ln \frac{\pi}{4e^\gamma}, \quad \gamma = 0.5772\dots \text{ (Euler-Zahl)} \quad (2.282)$$

Aus (2.281) und (2.282) lässt sich dann  $T_c$  berechnen:

$$\frac{1}{gVSEF} = \ln \left( \frac{t_{\text{WD}}}{2k_B T_c} \cdot \frac{4e^\gamma}{\pi} \right) = \ln \frac{2t_{\text{WD}} e^\gamma}{\pi k_B T_c} \Rightarrow T_c = 2t_{\text{WD}} \frac{e^\gamma}{\pi} e^{-\frac{1}{gVSEF}} \quad (2.283)$$

Dies ist die kritische Temperatur, unterhalb der eine effektiv ausgebildete Elektron-Elektron-Wabellösung zur Cooper-Pair-Bildung und damit zur Supraleitung führt:

- $T_c$  ist direkt proportional zur Debye-Frequenz  $\omega_0$  der Ionenwln. Da Debyefrequenzen umgekehrt proportional zur Wurzel der Ionenmasse ist, gilt der Isotopeneffekt

$$T_c \sim \frac{1}{\sqrt{m}} \quad (2.284)$$

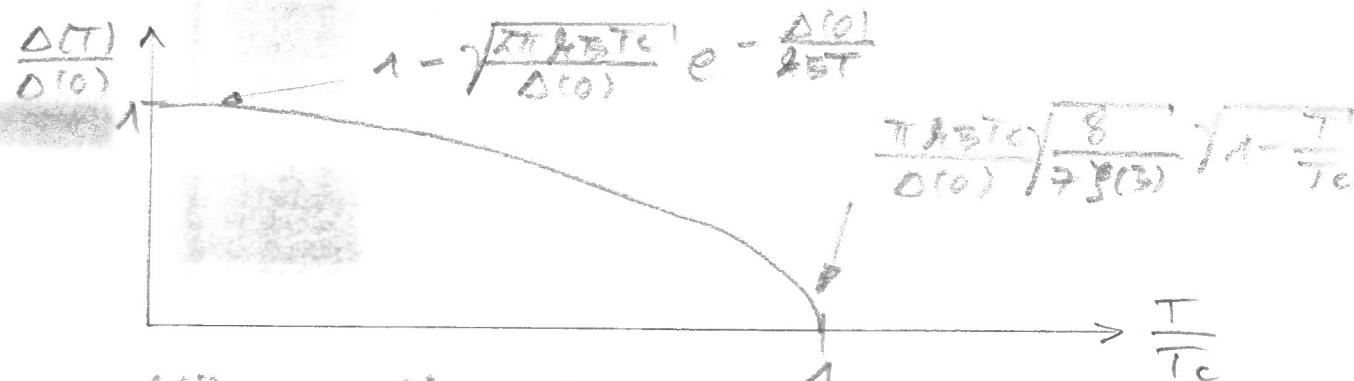
Das war der erste experimentelle Hinweis darauf, daß die Gitterschwingungen für die Supraleitung relevant sind.

- Die BCS-Theorie sagt für das Verhältnis von Ordnungsparameter bei  $T=0$  und der bei der Temperatur ein universelles Verhältnis voran:

$$\frac{\Delta(0)}{k_B T_c} = \frac{e^2}{\pi} \approx 1.76 \quad (2.285)$$

Dies stimmt bei den konventionellen Supraleitern, nicht aber bei den Hochtemperatursupraleitern.

- Für Temperaturen  $0 < T < T_c$  muß die Gitterkonstanzgleichung (2.275) verwendet werden. Dabei läßt sich das Verhältnis der Wellenlängen in der Nähe von  $T=0$  und  $T=T_c$  noch analytisch abschätzen:



Das wellenförmige Einmünden des Ordnungsparameters ist typisch für die molekulare Mechanik eines Phasenübergangs.

- Die Kurve  $\Delta(T)/\Delta(0)$  über  $T/T_c$  ist universell und wurde durch ca. 1000 Superleiter bestätigt.

### 3. Harmonische Feldquantisierung:

Die algebraischen Kommutatorrelationen (2.128) - (2.130) der Feldoperatoren  $\hat{\psi}(\vec{z}, t)$  und  $\hat{\psi}^*(\vec{z}, t)$  wurden bisher mit physikalischer Intuition eingeführt, um ein nichtrelativistisches Verteilungsgesetz zu erhalten. Im folgenden wird gezeigt, daß sie sich auch aus dem Formalismus der kanonischen Feldquantisierung ableiten lassen, bei dem die Quantisierung erheblich vieler karterischer Freiheitsgrade auf ein Kontinuum von Freiheitsgraden erweitert wird. Hierzu ist es zunächst erforderlich, die klassische Feldtheorie der nichtrelativistischen Quantenmechanik zu entwickeln.

#### 3.1 Wirkung des Schrödinger-Feldes:

Wir betrachten das nichtrelativistische Schrödinger-Feld  $\psi(\vec{z}, t)$  und dessen Adjektum  $\psi^*(\vec{z}, t)$  als voneinander unabhängige Felder und leiten ausgehend von den Energiegleichungen

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{z}, t) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta + V(\vec{z}, t) \right\} \psi(\vec{z}, t) \quad (3.1)$$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(\vec{z}, t) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta + V(\vec{z}, t) \right\} \psi^*(\vec{z}, t) \quad (3.2)$$

das zugrunde liegende Variationsverfahren ab. Multipliziert man (3.1) mit  $\delta\psi^*(\vec{z}, t)$  und (3.2) mit  $\delta\psi(\vec{z}, t)$  und addiert man beide Gleichungen, so führt eine Integration über die Raum-Zeit-Koordinaten auf

$$\int d\tau \int d^3x \left\{ i\hbar \left[ \delta\psi^*(\vec{z}, t) \frac{\partial \psi(\vec{z}, t)}{\partial t} - \delta\psi(\vec{z}, t) \frac{\partial \psi^*(\vec{z}, t)}{\partial t} \right] + \frac{\hbar^2}{2M} \left[ \delta\psi^*(\vec{z}, t) \Delta \psi(\vec{z}, t) + \delta\psi(\vec{z}, t) \Delta \psi^*(\vec{z}, t) \right] - V(\vec{z}) \delta[\psi^*(\vec{z}, t) \psi(\vec{z}, t)] \right\} = 0 \quad (3.3)$$

Die beiden Terme mit den zeitlichen und räumlichen partiellen Ableitungen werden nun durch geeignete partielle Integrationen angeformt. Sie dabei entstehenden Randterme tragen nicht bei, da die Variationen der Felder  $\delta\psi(\vec{z}, t)$  und  $\delta\psi^*(\vec{z}, t)$  an den Rändern verschwinden sollen. Außerdem wird die Randanregel verwor-

det, daß die Variation und die partielle Ableitung eines Feldes miteinander vertauschen:

$$1.) \int dt \int d^3x i\hbar \left\{ \delta \psi^*(\vec{x},t) \frac{\partial \psi(\vec{x},t)}{\partial t} - \psi(\vec{x},t) \frac{\partial \psi^*(\vec{x},t)}{\partial t} \right\} = \int dt \int d^3x i\hbar \left\{ \delta \psi^*(\vec{x},t) \frac{\partial \psi(\vec{x},t)}{\partial t} + \psi^*(\vec{x},t) \frac{\partial \delta \psi(\vec{x},t)}{\partial t} \right\}$$

$$= \int dt \int d^3x i\hbar \left\{ \delta \psi^*(\vec{x},t) \frac{\partial \psi(\vec{x},t)}{\partial t} + \psi^*(\vec{x},t) \delta \frac{\partial \psi(\vec{x},t)}{\partial t} \right\} = \delta \int dt \int d^3x i\hbar \psi^*(\vec{x},t) \frac{\partial \psi(\vec{x},t)}{\partial t} \quad (3.4)$$

$$2.) \int dt \int d^3x \frac{i\hbar^2}{2m} \left\{ \delta \psi^*(\vec{x},t) \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x},t) + \psi(\vec{x},t) \vec{\nabla}^2 \psi^*(\vec{x},t) \right\} = \int dt \int d^3x \frac{-i\hbar^2}{2m} \left\{ \vec{\nabla} \delta \psi^*(\vec{x},t) \vec{\nabla} \psi(\vec{x},t) + \vec{\nabla} \psi(\vec{x},t) \vec{\nabla} \psi^*(\vec{x},t) \right\}$$

$$= \int dt \int d^3x \left\{ \delta \vec{\nabla} \psi^*(\vec{x},t) \vec{\nabla} \psi(\vec{x},t) + \vec{\nabla} \psi(\vec{x},t) \vec{\nabla} \psi^*(\vec{x},t) \right\} = \delta \int dt \int d^3x \frac{-i\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \psi^*(\vec{x},t) \vec{\nabla} \psi(\vec{x},t) \quad (3.5)$$

Setzt man (3.4) und (3.5) in (3.3) ein, so erhält man ein Variationsverfahren der Form

$$\delta A[\psi(\cdot, \cdot); \psi^*(\cdot, \cdot)] = 0 \quad (3.6)$$

Hier ist die Wirkung  $A$  als zeitliches Integral einer Lagrange-Funktion  $L$  definiert

$$A = \int dt L \left[ \psi(\cdot, t), \frac{\partial \psi(\cdot, t)}{\partial t}; \psi^*(\cdot, t), \frac{\partial \psi^*(\cdot, t)}{\partial t} \right] \quad (3.7)$$

während die Lagrange-Funktion  $L$  das räumliche Integral einer Lagrange-Sidite  $\mathcal{L}$  darstellt:

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \left( \psi(\vec{x}, t), \vec{\nabla} \psi(\vec{x}, t), \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t}; \psi^*(\vec{x}, t), \vec{\nabla} \psi^*(\vec{x}, t), \frac{\partial \psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t} \right) \quad (3.8)$$

die Lagrange-Sidite  $\mathcal{L}$  des Schrödinger-Feldes lautet:

$$\mathcal{L} = i\hbar \psi^*(\vec{x}, t) \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \psi^*(\vec{x}, t) \vec{\nabla} \psi(\vec{x}, t) - V(\vec{x}) \psi^*(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t) \quad (3.9)$$

Ist umgekehrt das Variationsprinzip (3.6) mit der Wirkung (3.7) – (3.9) gegeben, so lassen sich die ursprünglichen Bewegungsgleichungen (3.1) und (3.2) rekonstruieren. Da hierbei ausführlich vom Begriff der funktionalableitung  $\delta f$  gesprochen wird, soll dieser ohne mathematische Strenge kurz eingeführt werden.

### 3.2 Funktionalableitung:

wir betrachten zunächst eine Funktion  $f$  endlicher vieler Variablen  $q_1, \dots, q_N$ :

$$f = f(q_1, \dots, q_N) \quad (3.10)$$

die partielle Ableitung von  $f$  nach der Variable  $q_i$ :

$$\frac{\partial f}{\partial q_i}(q_1, \dots, q_N) \quad (3.11)$$

gibt dann die Änderung dieser Funktion an, wenn nur die Variable  $q_i$  verändert wird und alle anderen Variablen  $q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_N$  konstant gehalten werden. Die Gesamtänderung der Funktion

$$\delta f(q_1, \dots, q_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f(q_1, \dots, q_N)}{\partial q_i} \delta q_i \quad (3.12)$$

setzt sich dann additiv aus allen möglichen Veränderungen der Funktion zusammen, wenn eine Variable verändert wird und alle anderen Variablen konstant gehalten werden. Wir verallgemeinern nun alle Begriffe von endlicher vielen Variablen zu einem kontinuierlichen Raum und erhalten ein Funktional aus einem Kontinuum von Variablen. Dafür betrachten wir ein Funktional

$$F = F[\phi(\cdot)] \quad (3.13)$$

also die Abbildung eines Feldes  $\phi(x)$  auf eine reelle bzw. komplexe Zahl. Die Funktionalableitung

$$\frac{\delta F[\phi(\cdot)]}{\delta \phi(x)} \quad (3.14)$$

soll dann angeben, wie sich der Wert des Funktionals ändert, wenn man das Feld  $\phi(x)$  nur am Orte  $x$  variiert. Damit ist die Funktionalableitung also wieder eine gewöhnliche, von der Variablen  $x$  abhängige Funktion. Die Gesamtänderung des Funktionals  $F$

$$\delta F[\phi(\cdot)] = \int dx \frac{\delta F[\phi(\cdot)]}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x) \quad (3.15)$$

setzt sich dann additiv aus allen lokalen Veränderungen zusammen, die bei der Variation des Feldes  $\phi(x)$  am Orte  $x$  entstehen. Wie die partielle Ableitung lässt sich auch die Funktionalableitung als Grenzfall einer Differenzengradientendarstellen. Dazu betrachten wir eine lokale Störung des Feldes  $\phi(x)$  am Orte  $y$  mit der Stärke  $\epsilon$

$$\delta\phi(x) = \epsilon \delta(x-y) \quad (3.16)$$

und erhalten aus (3.15)

$$F[\phi(\cdot) + \epsilon \delta(\cdot-y)] - F[\phi(\cdot)] = \delta F[\phi(\cdot)] \xrightarrow{(3.15)} \int dx \frac{\delta F[\phi(\cdot)]}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x) \xrightarrow{(3.16)} \frac{\delta F[\phi(\cdot)]}{\delta \phi(y)} \epsilon \quad (3.17)$$

In Grenzübergang  $\epsilon \rightarrow 0$  folgt dann

$$\frac{\delta F[\phi(\cdot)]}{\delta \phi(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[\phi(\cdot) + \epsilon \delta(\cdot-y)] - F[\phi(\cdot)]}{\epsilon} \quad (3.18)$$

In dieser Definition der Funktionalableitung abhängt ein Quotienten darunter, dass man nicht die Bedienregeln ableiten:

1. Produktregel:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \phi(y)} \{ F[\phi(\cdot)] G[\phi(\cdot)] \} &\xrightarrow{(3.18)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[\phi(\cdot) + \epsilon \delta(\cdot-y)] G[\phi(\cdot) + \epsilon \delta(\cdot-y)] - F[\phi(\cdot)] G[\phi(\cdot)]}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{F[\phi(\cdot) + \epsilon \delta(\cdot-y)] - F[\phi(\cdot)]}{\epsilon} G[\phi(\cdot) + \epsilon \delta(\cdot-y)] + G[\phi(\cdot) + \epsilon \delta(\cdot-y)] - G[\phi(\cdot)] \right\} F[\phi(\cdot)] \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\frac{\delta F[\phi(\cdot)]}{\delta \phi(y)} G[\phi(\cdot)] + F[\phi(\cdot)] \frac{\delta G[\phi(\cdot)]}{\delta \phi(y)}$$

2. Partielles Funktional:

$$\frac{\delta}{\delta \phi(y)} \phi(x) \xrightarrow{(3.18)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\phi(x) + \epsilon \delta(x-y) - \phi(x)}{\epsilon} = \delta(x-y) \quad (3.20)$$

3. Kettenregel:

$$\frac{\delta}{\delta \phi(y)} g(\phi(x)) \xrightarrow{(3.18)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{g(\phi(x) + \epsilon \delta(x-y)) - g(\phi(x))}{\epsilon} = \frac{\partial g(\phi(x))}{\partial \phi(x)} \delta(x-y) \xrightarrow{(3.20)} \frac{\partial g(\phi(x))}{\partial \phi(x)} \frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(y)} \quad (3.21)$$

Als Beispiel für eine nichttriviale Anwendung der Funktionalableitung betrachten wir den Kommutator (2.11a):

$$[\hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1}, \hat{a}_{\vec{x}}^+] - \underset{(2.11a)}{\sum_{n=1}^m} \delta(\vec{x} - \vec{x}_n) \hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_{n+1}} \hat{a}_{\vec{x}_n} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1} = \frac{\delta}{\delta \hat{a}_{\vec{x}}} \hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1} \quad (3.22)$$

Es sei nun  $F[\hat{a}_\cdot]$  ein Funktional des Verschiebungsgenerator  $\hat{a}_{\vec{x}}$ :

$$F[\hat{a}_\cdot] = \sum_{n=1}^{\infty} \{ d^3 x_n \cdots d^3 x_m F_n(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1} \} \quad (3.23)$$

Dann lässt sich der Kommutator dieses Funktionals  $F[\hat{a}_\cdot]$  mit dem Erzeugungsoperator  $\hat{a}_{\vec{x}}^+$  mit Hilfe der Funktionalableitung effizient berechnen:

$$\begin{aligned} [F[\hat{a}_\cdot], \hat{a}_{\vec{x}}^+] & - \underset{(3.23)}{\sum_{n=1}^{\infty} \{ d^3 x_n \cdots d^3 x_m F_n(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) [\hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1}, \hat{a}_{\vec{x}}^+] \}} - \\ & \underset{(3.22)}{\sum_{n=1}^{\infty} \{ d^3 x_n \cdots d^3 x_m F_n(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \frac{\delta}{\delta \hat{a}_{\vec{x}}} \hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1} \}} = \frac{\delta}{\delta \hat{a}_{\vec{x}}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \{ d^3 x_n \cdots d^3 x_m \right. \\ & \left. F_n(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \hat{a}_{\vec{x}_m} \cdots \hat{a}_{\vec{x}_1} \} \right\} \frac{\delta}{\delta \hat{a}_{\vec{x}}} F[\hat{a}_\cdot] \end{aligned} \quad (3.24)$$

Genaus entsprechend erhält man

$$[\hat{a}_{\vec{x}}, F[\hat{a}_\cdot^+]]_- = \frac{\delta}{\delta \hat{a}_{\vec{x}}^+} F[\hat{a}_\cdot^+] \quad (3.25)$$

In besondere die Kommutatoren (2.92) lassen sich mit den Rechenregeln (3.24) und (3.25) reproduzieren:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\vec{x}}, \hat{a}_{\vec{x}'}] & \underset{(3.25)}{=} \frac{\delta}{\delta \hat{a}_{\vec{x}}^+} \hat{a}_{\vec{x}'} = 0, \quad [\hat{a}_{\vec{x}}^+, \hat{a}_{\vec{x}'}^+]_- \underset{(3.24)}{=} \frac{\delta}{\delta \hat{a}_{\vec{x}'}} \hat{a}_{\vec{x}}^+ = 0 \\ [\hat{a}_{\vec{x}}, \hat{a}_{\vec{x}'}^+]_- & \underset{(3.24)}{=} \frac{\delta}{\delta \hat{a}_{\vec{x}'}^+} \hat{a}_{\vec{x}} \underset{(3.25)}{=} \frac{\delta}{\delta \hat{a}_{\vec{x}}^+} \hat{a}_{\vec{x}'}^+ = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned} \quad (3.26)$$

Die beiden Rechenregeln (3.24), (3.25) lassen sich auch auf Funktionale erweitern, die sowohl Erzeugungs- als auch Verschiebungsgeneratoren im

Normalordnung beinhaltet:

$$[F[\hat{a}_-, \hat{a}_+], \hat{a}_x^+]_- = F[\hat{a}_-, \hat{a}_+] \frac{\delta}{\delta \hat{a}_x}, [ \hat{a}_x, F[\hat{a}_-, \hat{a}_+]]_- = \frac{\delta}{\delta \hat{a}_x} F[\hat{a}_-, \hat{a}_+] \quad (3.27)$$

Hierbei deuten die Teile auf den Funktionalableitungen an, von welchen hier das normalgeordnete Funktional von Erzeugungs- und Zerstörungsoptatoren zu differenzieren ist. Außerdem lassen sich die Reduktionsoperatoren auf das Zeisenberg-Bild übertragen:

$$[F[\hat{\psi}(\cdot, \cdot), \hat{\psi}^+(\cdot, \cdot), \hat{\psi}^+(\vec{x}, t)] = F[\hat{\psi}(\cdot, \cdot), \hat{\psi}^+(\cdot, \cdot)] \frac{\delta}{\delta \hat{\psi}(\vec{x}, t)}, [\hat{\psi}(\vec{x}, t), F[\hat{\psi}(\cdot, \cdot), \hat{\psi}^+(\cdot, \cdot)]] = \frac{\delta}{\delta \hat{\psi}^+(\vec{x}, t)} F[\hat{\psi}(\cdot, \cdot), \hat{\psi}^+(\cdot, \cdot)] \quad (3.28)$$

Die Zeisenbergschen Bewegungsgleichungen (2.126) der Feldoperatorn  $\hat{\psi}(\vec{x}, t)$  und  $\hat{\psi}^+(\vec{x}, t)$  lassen sich dann nach mit Hilfe von Funktionalableitungen formulieren:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(\vec{x}, t) \xrightarrow{(2.126)} [\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{H}_H(t)]_- \xrightarrow{(3.28)} \frac{\delta}{\delta \hat{\psi}^+(\vec{x}, t)} \hat{H}_H(t) \xrightarrow{(2.133)} (2.140) \quad (3.29)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}^+(\vec{x}, t) \xrightarrow{(2.126)} [\hat{\psi}^+(\vec{x}, t), \hat{H}_H(t)]_- \xrightarrow{(3.28)} -\hat{H}_H(t) \frac{\delta}{\delta \hat{\psi}(\vec{x}, t)} \xrightarrow{(2.133)} (2.142) \quad (3.30)$$

### 3.3 Euler-Lagrange-Gleichungen:

Nun verwenden wir den Begriff der Funktionalableitung, um aus den Variationsverfahren (3.6) die dazugehörigen Bewegungsgleichungen abzuleiten. Übertragen wir (3.15) auf (3.6), so folgt zunächst

$$\delta A = \int dt \int d^3x \left\{ \frac{\delta A}{\delta \hat{\psi}(\vec{x}, t)} \delta \hat{\psi}(\vec{x}, t) + \frac{\delta A}{\delta \hat{\psi}^*(\vec{x}, t)} \delta \hat{\psi}^*(\vec{x}, t) \right\} = 0 \quad (3.31)$$

Da die Variationen der Felder  $\delta \hat{\psi}(\vec{x}, t)$  und  $\delta \hat{\psi}^*(\vec{x}, t)$  unabhängig voneinander durchgeführt werden, resultieren aus (3.31) die beiden Gleichungen

$$\frac{\delta A}{\delta \psi(\vec{x}, t)} = 0, \quad \frac{\delta A}{\delta \psi^*(\vec{x}, t)} = 0 \quad (3.32)$$

Nun werden die Funktionalableitungen der Widdaltung nach den Feldern  $\psi(\vec{x}, t)$  und  $\psi^*(\vec{x}, t)$  mit Hilfe von (3.7) berechnet. Dabei werden Funktionalableitung und partielle Ableitung miteinander vertauscht und Randterme bei der partiellem Integration weglassen:

$$\begin{aligned} \frac{\delta A}{\delta \psi(\vec{x}, t)} &\stackrel{(3.7)}{=} \int dt' \left\{ \frac{\delta L}{\delta \psi(\vec{x}, t')} \frac{\delta \psi(\vec{x}, t')}{\delta \psi(\vec{x}, t)} + \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}(\vec{x}, t')} \right. \\ &= \int dt' \left\{ \frac{\delta L}{\delta \psi(\vec{x}, t')} - \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}(\vec{x}, t')} \right\} \delta(t-t') = \frac{\delta L}{\delta \psi(\vec{x}, t)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}(\vec{x}, t)} \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta A}{\delta \psi^*(\vec{x}, t)} &\stackrel{(3.7)}{=} \int dt' \left\{ \frac{\delta L}{\delta \psi^*(\vec{x}, t')} \frac{\delta \psi^*(\vec{x}, t')}{\delta \psi^*(\vec{x}, t)} + \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}^*(\vec{x}, t')} \right. \\ &= \int dt' \left\{ \frac{\delta L}{\delta \psi^*(\vec{x}, t')} - \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}^*(\vec{x}, t')} \right\} \delta(t-t') = \frac{\delta L}{\delta \psi^*(\vec{x}, t)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}^*(\vec{x}, t)} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen (3.32) - (3.34) sind analog zu denjenigen, die bei einem System mit endlich vielen Freiheitsgraden auftreten. Entsprechend werden die Funktionalableitungen der Lagrange-Funktion mit Hilfe von (3.8) berechnet:

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}(\vec{x}, t)} = \int d^3x' \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}(\vec{x}', t)} \frac{\delta \dot{\psi}(\vec{x}', t)}{\delta \dot{\psi}(\vec{x}, t)} = \int d^3x' \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}(\vec{x}', t)} \frac{\partial}{\partial t} \delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}(\vec{x}, t)} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta \psi(\vec{x}, t)} &= \int d^3x' \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi(\vec{x}', t)} \frac{\partial \psi(\vec{x}', t)}{\partial \psi(\vec{x}, t)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}(\vec{x}', t)} \right. \\ &= \int d^3x' \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi(\vec{x}', t)} - \vec{\nabla}' \frac{\partial L}{\partial \vec{\psi}(\vec{x}', t)} \right\} \delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{\partial L}{\partial \psi(\vec{x}, t)} - \vec{\nabla} \frac{\partial L}{\partial \vec{\psi}(\vec{x}, t)} \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{x}^*(\vec{x}, t)} = \int d^3x' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^*(\vec{x}', t)} \quad \frac{\delta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}{\delta \dot{x}^*(\vec{x}, t)} = \int d^3x' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^*(\vec{x}', t)} \quad \delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^*(\vec{x}, t)} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta x^*(\vec{x}, t)} &= \int d^3x' \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^*(\vec{x}', t)} \frac{\delta x^*(\vec{x}', t)}{\delta x^*(\vec{x}, t)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^*(\vec{x}', t)} \frac{\delta \dot{x}^*(\vec{x}', t)}{\delta x^*(\vec{x}, t)} \right] = \int d^3x' \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^*(\vec{x}', t)} - \vec{p}' \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^*(\vec{x}', t)} \right] \frac{\delta x^*(\vec{x}', t)}{\delta x^*(\vec{x}, t)} \\ &= \int d^3x' \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^*(\vec{x}', t)} - \vec{p}' \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^*(\vec{x}', t)} \right] \delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^*(\vec{x}, t)} - \vec{p}' \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^*(\vec{x}, t)} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Setzt man (3.35) – (3.38) in (3.32) – (3.34) ein, so ergeben sich die Euler-Lagrange-Gleichungen der klassischen Feldtheorie

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^*(\vec{x}, t)} - \vec{p}' \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^*(\vec{x}, t)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^*(\vec{x}, t)} = 0 \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^*(\vec{x}, t)} - \vec{p}' \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^*(\vec{x}, t)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^*(\vec{x}, t)} = 0 \quad (3.40)$$

Viele Feldgleichungen lassen sich statt in zwei Dimensionen auch in einem einzigen Raumzeitdurchmesser (3.32) breiten, wenn man die Wirkung  $A$  gemäß (3.7) und (3.8) als ein raumzeitliches Integral der Lagrange-Dichte darstellt:

$$A[\psi(\cdot, \cdot); \psi^*(\cdot, \cdot)] = \int dt \int d^3x \mathcal{L} \left( \psi(\vec{x}, t), \vec{p}^*(\vec{x}, t), \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t}; \psi^*(\vec{x}, t), \vec{p}^*(\vec{x}, t), \frac{\partial \psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t} \right) \quad (3.41)$$

Die Lagrange-Dichte des Schrödinger-Feldes (3.9) führt auf die folgenden zu erfüllenden Ableitungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi(\vec{x}, t)} = -V(\vec{x}) \psi^*(\vec{x}, t), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*(\vec{x}, t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{p}^*(\vec{x}, t), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = i\hbar \psi^*(\vec{x}, t) \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*(\vec{x}, t)} = -V(\vec{x}) \psi(\vec{x}, t) + i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}(\vec{x}, t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{p}(\vec{x}, t), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad (3.43)$$

Setzt man die Viererableitungen (3.42) und (3.43) in die Euler-Lagrange-Gleichungen (3.39) und (3.40) ein, so führen sie tatsächlich auf die beiden Bewegungsgleichungen (3.1) und (3.2).

### 3.4 Hamiltonsche Feldtheorie:

geht man von der Lagrange'schen zur Hamilton'schen Formulierung der klassischen Feldtheorie über, benötigt man kanonisch konjugierte Impulsfelder. In Analogie zu einem System mit endlich vielen Freiheitsgraden erhalten wir

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\delta L}{\delta \dot{q}^*(\vec{x}, t)} \quad (3.35) \quad \frac{\partial L}{\partial q^*(\vec{x}, t)} \quad (3.42) \quad i\hbar \dot{q}^*(\vec{x}, t), \quad \pi^*(\vec{x}, t) = \frac{\delta L}{\delta \dot{q}^*(\vec{x}, t)} \quad (3.37) \quad \frac{\partial L}{\partial q^*(\vec{x}, t)} \quad (3.43) \quad 0 \quad (3.44)$$

dennach hat  $\dot{q}^*(\vec{x}, t)$  die Bedeutung des zu  $q^*(\vec{x}, t)$  kanonisch konjugierten Impulsfeldes. Sie Hamilton-Funktion ergibt man durch eine Legendre-Transformation aus der Lagrange-Funktion:

$$H = \int d^3x \left\{ \pi(\vec{x}, t) \frac{\partial \dot{q}^*(\vec{x}, t)}{\partial t} + \pi^*(\vec{x}, t) \frac{\partial q^*(\vec{x}, t)}{\partial t} \right\} - L \quad (3.45)$$

Setzt man (3.8), (3.9) und (3.44) in (3.45) ein, so lautet die Hamilton-Funktion

$$H = \int d^3x \left\{ i\hbar \dot{q}^*(\vec{x}, t) \frac{\partial \dot{q}^*(\vec{x}, t)}{\partial t} - i\hbar \dot{q}^*(\vec{x}, t) \frac{\partial q^*(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^* \cdot \nabla q^*(\vec{x}, t) + V(\vec{x}) q^*(\vec{x}, t) \right\} \quad (3.46)$$

was sich durch eine partielle Integration auf die bekannte Form

$$H = \int d^3x \Psi^*(\vec{x}, t) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x}) \right\} \Psi(\vec{x}, t) \quad (3.47)$$

bringen lässt. Hierbei wurde der Einfachheit halber gemäß (3.44) statt des kanonisch konjugierten Impulsfeldes  $\pi(\vec{x}, t)$  das konjugierte Feld  $\Psi^*(\vec{x}, t)$  verwendet. Und die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen lassen sich in Analogie zur Punktmechanik ableiten. Dazu setzt man die Wirkung  $S$  als Funktion der Felder  $\pi(\vec{x}, t)$  und  $\Psi(\vec{x}, t)$  auf, so daß das Hamilton'sche Prinzip

$$\delta S [\pi(\cdot, \cdot), \Psi(\cdot, \cdot)] = 0 \quad (3.48)$$

auf die beiden Beziehungen

$$\frac{\delta S}{\delta \pi(\vec{x}, t)} = 0, \quad \frac{\delta S}{\delta \Psi(\vec{x}, t)} = 0 \quad (3.49)$$

Führt. Gemäß (3.7) und (3.45) hängt die Wirkung  $A$  wie folgt von der Hamilton-Funktion  $H$  ab:

$$A = \int dt \int d^3x \pi(\vec{x}, t) \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} - \int dt \in H[\psi(\cdot, t); \pi(\cdot, t)] \quad (3.50)$$

Demnach erhält man durch Funktionalableitungen der Wirkung die Hamiltonischen Bewegungsgleichungen der klassischen Feldtheorie:

$$\frac{\delta A}{\delta \psi(\vec{x}, t)} \stackrel{(3.50)}{=} -\frac{\partial \pi(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{\delta H}{\delta \psi(\vec{x}, t)} \stackrel{(3.49)}{=} 0, \quad \frac{\delta A}{\delta \pi(\vec{x}, t)} \stackrel{(3.50)}{=} \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{\delta H}{\delta \pi(\vec{x}, t)} \stackrel{(3.49)}{=} 0 \quad (3.51)$$

Wenn sich die Hamilton-Funktion wie in (3.46) als räumliches Integral einer Hamilton-Aktion schreiben lässt

$$H = \int d^3x \mathcal{L}(\psi(\vec{x}, t), \vec{\partial} \psi(\vec{x}, t); \pi(\vec{x}, t), \vec{\nabla} \pi(\vec{x}, t)) \quad (3.52)$$

Passen sich die Funktionalableitungen der Hamilton-Funktion berechnen:

$$\frac{\delta H}{\delta \psi(\vec{x}, t)} \stackrel{(3.52)}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi(\vec{x}, t)} - \vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\partial} \psi(\vec{x}, t)}, \quad \frac{\delta H}{\delta \pi(\vec{x}, t)} \stackrel{(3.52)}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi(\vec{x}, t)} - \vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} \pi(\vec{x}, t)} \quad (3.53)$$

Setzt man (3.53) in (3.51) ein, so resultieren die Hamiltonischen Bewegungsgleichungen der Feldtheorie in der Form

$$\frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi(\vec{x}, t)} - \vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} \pi(\vec{x}, t)}, \quad \frac{\partial \pi(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi(\vec{x}, t)} + \vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\partial} \psi(\vec{x}, t)} \quad (3.54)$$

### 3.5 Poisson-Klammer in der Feldtheorie:

Schließlich untersuchen wir noch die Rolle der Poisson-Klammer in der klassischen Feldtheorie. Für zwei Funktionale  $F = F[\psi(\cdot, \cdot); \pi(\cdot, \cdot)]$  und  $G = G[\psi(\cdot, \cdot); \pi(\cdot, \cdot)]$  definieren wir die Poisson-Klammer

$$\{F, G\}_- = \int d^3x \left( \frac{\delta F}{\delta \psi(\vec{x}, t)} \frac{\delta G}{\delta \pi(\vec{x}, t)} - \frac{\delta F}{\delta \pi(\vec{x}, t)} \frac{\delta G}{\delta \psi(\vec{x}, t)} \right) \quad (3.55)$$

so daß sich die Hamilton-Gleichungen (3.51) durch die Poisson-Klammer ausdrücken lassen:

$$\{ \dot{\psi}(\vec{x}, t), H \} \stackrel{(3.55)}{=} \int d^3x' \left( \frac{\delta \psi(\vec{x}', t)}{\delta \psi(\vec{x}'', t)} \frac{\delta H}{\delta \pi(\vec{x}'', t)} - \frac{\delta \psi(\vec{x}, t)}{\delta \pi(\vec{x}'', t)} \frac{\delta H}{\delta \psi(\vec{x}'', t)} \right) = \frac{\delta H}{\delta \pi(\vec{x}, t)} \stackrel{(3.51)}{=} \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (3.56)$$

$$\{ \dot{\pi}(\vec{x}, t), H \} \stackrel{(3.55)}{=} \int d^3x' \left( \frac{\delta \pi(\vec{x}, t)}{\delta \psi(\vec{x}'', t)} \frac{\delta H}{\delta \psi(\vec{x}'', t)} - \frac{\delta \pi(\vec{x}'', t)}{\delta \psi(\vec{x}'', t)} \frac{\delta H}{\delta \pi(\vec{x}, t)} \right) = - \frac{\delta H}{\delta \psi(\vec{x}, t)} \stackrel{(3.51)}{=} \frac{\partial \pi(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (3.57)$$

Auch die zeitliche Änderung des Funktionals  $F = F[\psi(\cdot, t); \pi(\cdot, t)]$  läßt sich unter Verwendung der Hamiltonischen Bewegungsgleichungen (3.51) mit Hilfe der Poisson-Klammer formulieren:

$$\frac{\partial}{\partial t} F \stackrel{\text{rechten-}}{=} \int d^3x \left( \frac{\partial \pi(\vec{x}, t)}{\partial t} \frac{\delta F}{\delta \pi(\vec{x}, t)} + \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} \frac{\delta F}{\delta \psi(\vec{x}, t)} \right) \stackrel{(3.51)}{=} \int d^3x \left( - \frac{\delta H}{\delta \psi(\vec{x}, t)} \frac{\delta F}{\delta \pi(\vec{x}, t)} + \frac{\delta H}{\delta \pi(\vec{x}, t)} \frac{\delta F}{\delta \psi(\vec{x}, t)} \right)$$

(3.55)  $\frac{\partial}{\partial t} F = \{ F, H \}$  (3.58)

Erneut erhalten wir für die fundamentalen Poisson-Klammer:

$$\{ \psi(\vec{x}, t), \psi(\vec{x}'', t) \} \stackrel{(3.55)}{=} \int d^3x'' \left( \frac{\delta \psi(\vec{x}, t)}{\delta \psi(\vec{x}'', t)} \frac{\delta \psi(\vec{x}'', t)}{\delta \pi(\vec{x}'', t)} - \frac{\delta \psi(\vec{x}, t)}{\delta \pi(\vec{x}'', t)} \frac{\delta \psi(\vec{x}'', t)}{\delta \psi(\vec{x}'', t)} \right) = 0 \quad (3.59)$$

$$\{ \pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}'', t) \} \stackrel{(3.55)}{=} \int d^3x'' \left( \frac{\delta \pi(\vec{x}, t)}{\delta \psi(\vec{x}'', t)} \frac{\delta \pi(\vec{x}'', t)}{\delta \pi(\vec{x}'', t)} - \frac{\delta \pi(\vec{x}, t)}{\delta \pi(\vec{x}'', t)} \frac{\delta \pi(\vec{x}'', t)}{\delta \psi(\vec{x}'', t)} \right) = 0 \quad (3.60)$$

$$\{ \psi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}'', t) \} \stackrel{(3.55)}{=} \int d^3x'' \left( \frac{\delta \psi(\vec{x}, t)}{\delta \psi(\vec{x}'', t)} \frac{\delta \pi(\vec{x}'', t)}{\delta \pi(\vec{x}'', t)} - \frac{\delta \psi(\vec{x}, t)}{\delta \pi(\vec{x}'', t)} \frac{\delta \pi(\vec{x}'', t)}{\delta \psi(\vec{x}'', t)} \right) = \delta(\vec{x} - \vec{x}'') \quad (3.61)$$

### 3.6 Kanonische Feldquantisierung des Schrödinger-Feldes

Bei der kanonischen Feldquantisierung im Heisenberg-Bild geht man vom klassischen Feld  $\psi(\vec{x}, t)$  und vom dazu konjugierten Impulsfeld  $\pi(\vec{x}, t)$  zu Feldoperatoren  $\hat{\psi}(\vec{x}, t)$  und  $\hat{\pi}(\vec{x}, t)$  über, wobei die Poisson-Klammer in Analogie zur Quantumechanik durch folgendes Postulat in einem Quantenzirkulator abgetragen:

$$\{A, B\}_- \Rightarrow \frac{1}{i\hbar} [A, B]_- \quad (3.62)$$

Daraus folgen die fundamentalen Booleschen Klammern (3.59)-(3.61) in die gleichzeitigen Kommutationsrelationen

$$[\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\psi}^*(\vec{x}', t')] = [\hat{\pi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}^*(\vec{x}', t')] = 0, \quad [\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{x}', t')] = i\hbar \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (3.63)$$

Über. Setzt man (3.44) in (3.63) ein, so erhält man wie angekündigt die gleichzeitigen Momentumrelationen (2.128) - (2.130) der Feldoperatoren  $\hat{q}(x, t)$  und  $\hat{p}(x, t)$ . Außerdem führt das Postulat (3.62) die Hamiltonischen Bewegungsgleichungen (3.56), (3.57) über in

$$\text{ith } \frac{\partial \hat{\pi}(\vec{x}, t)}{\partial t} = [\hat{\pi}(\vec{x}, t), \hat{H}]_-, \text{ ith } \frac{\partial \hat{\pi}(\vec{x}, t)}{\partial t} = [\hat{\pi}(\vec{x}, t), \hat{H}]_- \quad (3.64)$$

die wegen (3.44) gerade mit den Zeisenberg'schen Bewegungsgleichungen des Feld-  
operators  $\hat{\Psi}(x, t)$  und  $\hat{D}(x, t)$  im Zeisenberg-Bild (2.126) übereinstimmen. Im  
Feld-Feld-Kontext (3.47) im Rahmen der Langmard'schen Feld-  
theorie geht die Hamilton-Funktionalen (3.47) im Rahmen der Langmard'schen Feld-  
theorie in den Hamilton-Operator (2.133) im Zeisenberg-Bild ohne die  
Quantisierung in den Hamilton-Operator (2.133) im Zeisenberg-Bild über.  
2 - Teilchen - Wechselwirkung über.

2-Telleran-  
droschließend bemerken wir, daß auch die gleichzeitigen Antikommutatorrela-  
tionen (z. 154) der gewöhnlichen Feldoperatorn  $\hat{\psi}(x)$  und  $\hat{\psi}^\dagger(x)$  wie bei den  
Bosonen im Rahmen einer kanonischen Feldquantisierung abgeleitet wer-  
den können. Dies werden wir aber hier aus Zeitgründen nicht näher ausführen,  
da man hierzu antikommutierende Grassmann-Felder einführen muß. Sie  
beruhen auf dem Konzept der antikommutierenden Grassmann-Zahlen, das  
schon in der Mitte des 19. Jahrhunderts vom Mathematiker Hermann Grass-  
mann eingeführt wurde.

man erreichbar ist. Stattdessen werden wir im folgenden zeigen, wie man das Konzept der kanonischen Quantisierung zur Quantisierung der Elektroenzephalographie verarbeiten kann.

wenden kann. Dies führt auf die Einführung von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren von Photonen, den Quanten des Maxwell-Feldes, und stellt damit die Grundlage der Quantenoptik dar.

### 3.7 Elektromagnetisches Feld:

die Kraftwirkungen des elektromagnetischen Feldes auf ruhende bzw. bewegte elektrische Ladungen werden durch die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  und die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  vermittelt. Im SI-Einheitensystem lauten die Maxwell-Gleichungen für die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  und die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  bei vorgegebener Ladungsdichte  $s$  und Stromdichte  $\vec{s}$ :

	elektrisches Feld	magnetisches Feld
homogene Maxwell-Gleichungen	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.65)$	$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (3.66)$
inhomogene Maxwell-Gleichungen	$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} s \quad (3.67)$	$\text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{s} \quad (3.68)$

Die Lichtgeschwindigkeit  $c$  setzt sich dabei aus den relativen Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_0$  und der relativen Permeabilitätskonstanten  $\mu_0$  zusammen:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (3.69)$$

Aus (3.67) und div (4) ergibt sich die Konsistenzbedingung, dass die Ladungsdichte  $s$  und die Stromdichte  $\vec{s}$  der Kontinuitätsgleichung genügen:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \text{div } \vec{s} = 0 \quad (3.70)$$

### 3.8 Potentiale:

Aus den homogenen Maxwell-Gleichungen (3.65) und (3.66) folgt, dass die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  und die magnetische Feldstärke  $\vec{B}$  durch Differentiation aus

einem skalaren Potential  $\varphi$  und einem Vektorpotential  $\vec{A}$  ableitbar sind:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (3.71)$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3.72)$$

Aus den inhomogenen Maxwell-Gleichungen (3.67) und (3.68) sowie aus (3.71) und (3.72) resultieren dann mit (3.69) gekoppelte Bewegungsgleichungen für das skalare Potential  $\varphi$  und das Vektorpotential  $\vec{A}$ :

$$-\Delta \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{S} \quad (3.73)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} + \text{grad} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \vec{A} \right) = \mu_0 \vec{J} \quad (3.74)$$

Die Gleichungen (3.71) – (3.74) sind invariant unter lokalen Eichtransformationen mit einer beliebig gewählten Eichfunktion  $x$ :

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial x}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } x \quad (3.75)$$

Auch die Wahl einer speziellen Eichung lassen sich die gekoppelten Bewegungsgleichungen (3.73) und (3.74) entkoppeln. Gebräuchliche Eichungen sind:

1. die Lorentz-Eichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \vec{A} = 0 \quad (3.76)$$

Bei der (3.73) und (3.74) in entkoppelte Wellengleichungen übergehen

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{S} \quad (3.77)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad (3.78)$$

Die Lorentz-Eichung (3.76) hat den Vorteil, daß sowohl sie als auch die Bewegungsgleichungen (3.77) und (3.78) manifest Lorentz-invariant sind.

2. die Coulomb-Eichung

$$\text{div } \vec{A} = 0 \quad (3.79)$$

bei der der longitudinale Anteil des Vektorpotentials  $\vec{A}$  verschwindet und bei der sich die Bewegungsgleichungen (3.73) und (3.74) reduzieren auf

$$-\Delta \varphi = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{s} \quad (3.80)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{s}_\perp \quad (3.81)$$

die transversale Stromdichte

$$\vec{s}_\perp = \vec{s} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi \quad (3.82)$$

erfüllt außerdem von (3.70) und (3.80) die Transversalitätsbedingung

$$\operatorname{div} \vec{s}_\perp = 0 \quad (3.83)$$

die Transversalität (3.83) des Stromterms in (3.81) hat zur Folge, daß das Vektorpotential  $\vec{A}$  gemäß (3.79) zu allen Zeiten transversal ist, wenn es zu einem Zeitpunkt transversal ist. Da das skalare Potential  $\varphi$  der Poissons-Gleichung (3.80) genügt, läßt es sich zu jedem Zeitpunkt direkt aus der Ladungsdichte  $\vec{s}$  bestimmen. Im Falle von Dirichlet-Randbedingungen, daß das skalare Potential  $\varphi$  im Unendlichen verschwinden soll, folgt aus (3.80) unmittelbar

$$\varphi(\vec{x}, t) = \int d^3x' \frac{s(\vec{x}', t)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.84)$$

Dies bedeutet, daß das skalare Potential keinen dynamischen Freiheitsgrad darstellt - dessen Dynamik wird durch die vorgegebene Dynamik der Ladungsdichten bestimmt. Von den ursprünglich vier Feldern  $\varphi$  und  $\vec{A}$  kommen wegen (3.79) und (3.84) effektiv nur zweien die Bedeutung eines dynamischen Modells zu. Die Quantisierung des elektromagnetischen Modells führt nur zu zwei Ionenarten führen. Der Vorteil der Coulomb-Erfahrung besteht darin, daß sich die zwei dynamischen Freiheitsgrade des elektromagnetischen Modells in Form der beiden transversalen Teil-

heitsgrade des Vektorpotentials  $\vec{A}$  interpretieren lassen. Der Nachteil der Coulomb-Erfahrung besteht darin, dass sie nicht manifest Lorentz-invariant ist. Die Coulomb-Erfahrung gilt daher nur in einem ausgelaufenen Inertialsystem.

Außerdem wollen wir noch einen formalen Ansatz herarbeiten, der für die abdifferenzende fieldtheoretische Behandlung der Elektrodynamik von grundlegender Bedeutung ist. Man kann eine lineare Abbildung zwischen der Stromdichte  $\vec{j}$  und der transversalen Stromdichte  $\vec{j}_\perp$  wie folgt einführen. Einsetzen von (3.84) in (3.82) führt zunächst auf

$$\vec{j}_\perp(\vec{x}, t) = \vec{j}(\vec{x}, t) - \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\partial \delta(\vec{x}', t)}{\partial t} \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.85)$$

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (3.70) reduziert sich das auf

$$\vec{j}_\perp(\vec{x}, t) = \vec{j}(\vec{x}, t) + \frac{1}{4\pi} \int d^3x' [\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}', t)] \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.86)$$

Aufgrund der Identität

$$\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = - \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.87)$$

und einer partiellen Integration geht (3.86) über in

$$\vec{j}_\perp i(\vec{x}, t) = j_i(\vec{x}, t) + \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \sum_{j=1}^3 j_j(\vec{x}', t) \frac{\partial^2}{\partial x'_j \partial x'_i} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.88)$$

Damit ist eine lineare Abbildung zwischen  $\vec{j}$  und  $\vec{j}_\perp$  gegeben durch

$$j_{\perp i}(\vec{x}, t) = \int d^3x' \sum_{j=1}^3 \delta_{ij}^\perp(\vec{x} - \vec{x}') j_j(\vec{x}', t) \quad (3.89)$$

wobei die transversale  $\delta$ -Funktion

$$\delta_{ij}^\perp(\vec{x} - \vec{x}') = \delta_{ij} \delta(\vec{x} - \vec{x}') + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x'_j \partial x'_i} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.90)$$

eingeführt wurde. Eine sorgfältige Auswertung der zweiten partiellen Ablei-

tung führt auf das explizite Resultat

$$\delta_{ij}^+(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta(\vec{x} - \vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\delta_{ij}}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} - \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^5} \right\} \quad (3.91)$$

Die transversale  $\delta$ -Funktion wirkt wie die gewöhnliche  $\delta$ -Funktion auf solche Vektorfelder, die schon transversal sind. Sie kann daher als "Einheitsoperator im Raum der transversalen Vektorfelder" aufgefasst werden.

### 3.9 Lagrange-Formalismus der Maxwell-Theorie:

Es soll nun ein Variationsverfahren ausgegraben werden, dessen Euler-Lagrange-Gleichungen mit den Maxwell-Gleichungen übereinstimmen. Dafür soll der Standpunkt angenommen werden, daß die primär dynamischen Variablen das skalare Potential  $\varphi$  und das Vektorpotential  $\vec{A}$  darstellen. Da durch (3.71) und (3.72) die homogenen Maxwell-Gleichungen (3.65) und (3.66) schon automatisch erfüllt sind, hat dieses Variationsverfahren nur noch die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (3.67) und (3.68) zu reproduzieren.

Die Wirkung  $\mathcal{A} = \mathcal{A}[\varphi, \vec{A}]$  als Funktional der Potentiale  $\varphi$  und  $\vec{A}$  wird als Raum-Zeit-Integral einer Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}$  angesetzt:

$$\mathcal{A} = \int dt \int d^3x \mathcal{L} \quad (3.92)$$

Da die Bewegungsgleichungen (3.73) und (3.75) von zweiter Ordnung in den partiellen Ableitungen der Potentiale sind, kann die Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}$  höchstens erste partielle Ableitungen beinhalten:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}; \vec{A}, \frac{\partial \vec{A}_i}{\partial t}, \frac{\partial \vec{A}_i}{\partial x_i}\right) \quad (3.93)$$

Das Hamiltonsche Prinzip besagt, daß die Variation der Wirkung verschwinden soll

$$\delta \mathcal{A}[\varphi, \vec{A}] = 0 \quad (3.94)$$

wobei nur solche Variationen  $\delta \varphi, \delta \vec{A}$  der Potentiale zugelassen sind, die im

Unendlichen verschwinden. Diese Aussage ist äquivalent dazu, daß die jeweiligen Variationsableitungen verschwinden müssen:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi(\vec{x}, t)} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \vec{A}(\vec{x}, t)} = 0 \quad (3.95)$$

Einsetzen von (3.92) mit (3.93) in (3.95) führt auf die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(\vec{x}, t)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \varphi(\vec{x}, t)}{\partial t})} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \varphi(\vec{x}, t)}{\partial x_i})} = 0 \quad (3.96)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3(\vec{x}, t)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial A_3(\vec{x}, t)}{\partial t})} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial A_3(\vec{x}, t)}{\partial x_i})} = 0 \quad (3.97)$$

Die Lagrange-Gleichung des elektromagnetischen Feldes lautet nun

$$\mathcal{L} = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{grad } \varphi \right)^2 - \frac{1}{2\mu_0} (\text{rot } \vec{H})^2 - \varphi \mathcal{S} + \vec{J} \cdot \vec{H} \quad (3.98)$$

In der Tat führt (3.98) auf die zatiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -\mathcal{S}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \varphi}{\partial t})} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \varphi}{\partial x_i})} = \epsilon_0 \frac{\partial H_i}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (3.99)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} = \mathcal{S}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial A_3}{\partial t})} = \epsilon_0 \frac{\partial H_3}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial A_3}{\partial x_i})} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial H_3}{\partial x_i} - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial H_i}{\partial x_3} \quad (3.100)$$

so daß die Euler-Lagrange-Gleichungen (3.96) und (3.97) in die Bewegungsgleichungen (3.73) und (3.74) übergehen, die zu den inhomogenen Maxwell-Gleichungen (3.67) und (3.68) äquivalent sind.

Wir untersuchen nun, wie sich die Wirkung (3.98) unter einer Eichtransformation (3.75) verändert:

$$\mathcal{L}' = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} + \text{grad } \varphi' \right)^2 - \frac{1}{2\mu_0} (\text{rot } \vec{H}')^2 - \varphi' \mathcal{S} + \vec{J}' \cdot \vec{H}' + \Delta \mathcal{L} \quad (3.101)$$

dabei verändert der Zusatzterm

$$\Delta \mathcal{L} = g \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \vec{s} \cdot \text{grad } \mathbf{x} \quad (3.102)$$

aber nicht die Wirkung. Durch partielle Integration und der Annahme, daß Ladungs- und Graviddichte im Unendlichen verschwinden, folgt nämlich aufgrund der Kontinuitätsbedingung

$$\Delta \mathcal{A} = \int dt \int d^3x \Delta \mathcal{L} \stackrel{(3.102)}{=} - \int dt \int d^3x \mathbf{x} \left( \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} + \text{div} \vec{s} \right) \stackrel{(3.70)}{=} 0 \quad (3.103)$$

Damit ist die Einvarianz eng mit der Ladungserhaltung verknüpft. Dieser Zusammenhang kann im Rahmen des Noether-Theorems weiter präzisiert werden.

und die Coulomb-Energie (3.79) vereinfacht sich die Lagrange-Dichte (3.98):

1.) Der efmittl. Term

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \text{grad } \varphi = \text{div} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \varphi \right) - \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{E} \quad (3.104)$$

verschwindet. Der erste Term in (3.104) führt auf einen Oberflächenterm und verschwindet. Der zweite Term verschwindet wegen (3.79).

2.) Der in  $\varphi$  quadratische Term

$$\text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \varphi = \text{div} (\varphi \text{grad } \varphi) - \varphi \Delta \varphi \quad (3.105)$$

vereinfacht sich wie folgt. Der erste Term in (3.105) führt auf einen Oberflächenterm und beim zweiten Term läßt sich die Poisson-Gleichung (3.80) verwenden. Dadurch entsteht in der Lagrange-Dichte (3.98) ein Term  $\frac{1}{2} \varphi^2$ , der mit dem zweiten Term  $-\frac{1}{2} \varphi^2$  auf die Coulomb-Energie dichtet

$$v_c(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \varphi(\vec{x}, t) \varphi(\vec{x}, t) \stackrel{(3.84)}{=} \frac{1}{2} g(\vec{x}, t) \int d^3x' \frac{g(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.106)$$

Dazu in der Lagrange-Funktion auf die Coulomb-Energie führt:

$$V_c(t) = \int d^3x \, v_c(\vec{x}, t) \quad (3.106) \quad \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \frac{\epsilon(\vec{x}, t) \epsilon(\vec{x}', t)}{4\pi \epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.107)$$

somit lautet die Lagrange-Dichte in der Coulomb-Eichung

$$\mathcal{L} = -v_c + \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2\mu_0} (\text{rot } \vec{A})^2 + \vec{j} \cdot \vec{A} \quad (3.108)$$

die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} = \vec{j}_i, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)} = \epsilon_0 \frac{\partial A_i}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right)} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \quad (3.109)$$

Führen aber mit der Euler-Lagrange-Gleichung (3.97) unter Vernachlässigung der Coulomb-Eichung (3.79) auf die falsche Bewegungsgleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (3.110)$$

Während in (3.81) die transversale Stromdichte (3.82) bzw. (3.85) auftritt, taucht in (3.110) die gesamte Stromdichte  $\vec{j}$  auf. Dieser Fehler entstand offenbar dadurch, daß wir im Variationverfahren nicht explizit berücksichtigt haben, daß das totale Potenzial  $\vec{A}$  gemäß (3.79) transversal ist. Diesen Fehler wollen wir nun durch korrigieren, daß wir in der Lagrange-Dichte (3.108) statt des Vektors  $\vec{A}$  durch  $\vec{A}$  ein transversales Vektorpotential  $\vec{A}_\perp$  verwenden:

$$\mathcal{L}_\perp = -v_c + \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{\partial \vec{A}_\perp}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2\mu_0} (\text{rot } \vec{A}_\perp)^2 + \vec{j}_\perp \cdot \vec{A}_\perp \quad (3.111)$$

Dabei konstruieren wir eine lineare Abbildung zwischen  $\vec{A}$  und  $\vec{A}_\perp$  wie folgt. Es sei  $\vec{A}$  ein beliebiges Vektorpotential, dessen Divergenz nicht verschwindet. Dann können wir eine Eichtransformation (3.75) so durchführen, daß die Divergenz des transformierten Vektorpotentials verschwindet:

$$\text{div } \vec{A}' \quad (3.75) \quad \text{div } \vec{A} + \Delta \chi \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \Delta \chi = -\text{div } \vec{A}' \quad (3.112)$$

Die Lösung von (3.112) mit den obigen Randbedingungen lautet

$$\chi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{A}' \cdot \vec{A}'(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.113)$$

Wir identifizieren das transformierte Vektorspotential  $\vec{A}'$  mit dem gesuchten transversalen Vektorspotential:

$$\vec{A}_L(\vec{x}, t) = \vec{A}'(\vec{x}, t) \xrightarrow{(3.75), (3.113)} \vec{A}(\vec{x}, t) + \frac{1}{4\pi} [d^3x' [\vec{\delta} \cdot \vec{A}'(\vec{x}', t)]] \vec{\delta} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.114)$$

Infolgedessen der Identität (3.87) und einer partiellen Integration reduziert sich (3.114) mit der transversalen  $\delta$ -Funktion (3.90) bzw. (3.91) auf

$$A_{Lj}(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^3 \int d^3x' \delta_{ij}(\vec{x} - \vec{x}') A_i(\vec{x}', t) \quad (3.115)$$

Das Hamiltonsche Prinzip

$$\frac{\delta A_L}{\delta F_{ij}(\vec{x}, t)} = 0 \quad (3.116)$$

Führt nun mit Hilfe der Kettenregel auf das Endresultat

$$\int d^3x' \int dt' \sum_{i=1}^3 \frac{\delta A_L}{\delta F_{Lj}(\vec{x}', t')} \frac{\delta F_{Lj}(\vec{x}', t')}{\delta F_{ij}(\vec{x}, t)} \quad (3.117)$$

Infolgedessen der Funktionalableitung

$$\frac{\delta A_{Lj}(\vec{x}', t')}{\delta F_{ij}(\vec{x}, t)} \xrightarrow{(3.115)} \delta_{ij}^+(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t') \quad (3.118)$$

reduziert sich dies auf die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\int d^3x' \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_L}{\partial F_{Lj}(\vec{x}', t)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}_L}{\partial (\partial F_{Lj}(\vec{x}', t))} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x'^k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial F_{Lj}}{\partial x'^k})} \right\} \delta_{ij}^+(\vec{x} - \vec{x}') = 0 \quad (3.119)$$

Mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}_L}{\partial F_{Lj}} = j_j, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial F_{Lj}}{\partial t})} = \epsilon_0 \frac{\partial F_{Lj}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial F_{Lj}}{\partial x'^k})} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial F_{Lj}}{\partial x'^k} - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial F_{Lj}}{\partial x'^k} \quad (3.120)$$

geht (3.119) über in

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_L}{\partial t^2} - \nabla \vec{A}_L = \mu_0 \vec{j}_T \quad (3.121)$$

Dabei wurde die transversale Stromdichte  $\vec{j}_T$  aus (3.89) verwendet und die

rückt rückt, daß die Divergenz der transversalen Vektorfelder verschwindet:

$$\operatorname{div} \vec{F}_\perp \xrightarrow{(3.115)} 0 \quad (3.122)$$

### 3.10 Hamilton-Formalismus der Maxwell-Theorie:

geht man von der Lagrange-Gleichung zur Hamiltonschen Formulierung der klassischen Feldtheorie über, benötigt man die kanonisch konjugierten Impulsfelder. In Analogie zu einem System mit endlich vielen Freiheitsgraden erhalten wir

$$\pi_i(\vec{x}, t) = \frac{\delta S}{\delta \left( \frac{\partial \vec{r}_i(\vec{x}, t)}{\partial t} \right)} = \int d^3x' \int d\epsilon' \sum_{j=1}^3 \frac{\delta \epsilon_\perp}{\delta \left( \frac{\partial F_{j\perp i}(\vec{x}', t')}{\partial t'} \right)} \frac{\delta \left( \frac{\partial F_{j\perp i}(\vec{x}', t')}{\partial t'} \right)}{\delta \left( \frac{\partial \vec{r}_i(\vec{x}, t)}{\partial t} \right)} \xrightarrow{(3.118)} \int d^3x' \sum_{j=1}^3 \frac{\delta \epsilon_\perp}{\delta \left( \frac{\partial F_{j\perp i}(\vec{x}', t')}{\partial t'} \right)}$$

$$= \delta_{ij}^\perp(\vec{x} - \vec{x}') \xrightarrow{(3.120)} \epsilon_0 \int d^3x' \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F_{j\perp i}(\vec{x}', t)}{\partial t} \delta_{ij}^\perp(\vec{x} - \vec{x}')$$

da die transversale  $\delta$ -Funktion den Einheitsoperator im Raum der transversalen Vektorfelder darstellt

$$\int d^3x' \sum_{j=1}^3 F_{j\perp i}(\vec{x}', t) \delta_{ij}^\perp(\vec{x} - \vec{x}') \xrightarrow{(3.90), (3.115)} F_{\perp i}(\vec{x}, t) \quad (3.124)$$

reduziert sich (3.123) schließlich auf

$$\bar{\pi}(\vec{x}, t) = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{F}_\perp(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (3.125)$$

Dieses Ergebnis für das zu  $\vec{F}$  kanonisch konjugierte Impulsfeld läßt sich so interpretieren, daß die relative Dielektrizität konstante  $\epsilon_0$  des Körpers und  $\vec{F}_\perp$  die Exzitierbarkeit des Feldes  $\vec{F}$  entspricht. Eine Legendre-Transformation führt dann von der Lagrange-Dichte  $L_\perp$  auf die Hamilton-Dichte

$$L_\perp = \bar{\pi}(\vec{x}, t) \cdot \frac{\partial \vec{F}_\perp(\vec{x}, t)}{\partial t} - L_\perp \quad (3.126)$$

da das Impulsfeld (3.125) gemäß (3.115) schon die transversale  $\delta$ -Funktional als Projektor in den Raum der transversalen Vektorfelder mit der Eigenschaft

$$\int d^3x'' \sum_i \delta_{i\vec{x}}^\perp (\vec{x} - \vec{x}'') \delta_{\vec{x}'}^\perp (\vec{x}'' - \vec{x}') \quad (3.90) \quad \delta_{i\vec{x}}^\perp (\vec{x} - \vec{x}')$$

(3.127)

beinhaltet, kann (3.126) auch aufgefasst werden als

$$\mathcal{L}_\perp = \vec{\pi}(\vec{x}, t) \cdot \frac{\partial \vec{F}_\perp(\vec{x}, t)}{\partial t} - \mathcal{H}_\perp \quad (3.128)$$

Einsetzen von (3.111) und (3.125) ergibt dann die Hamilton-Richtlinie

$$\mathcal{H}_\perp = \frac{1}{2\epsilon_0} \vec{\nabla}^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\text{rot } \vec{H}_\perp)^2 + \vartheta_c - \vec{\jmath} \cdot \vec{H}_\perp \quad (3.129)$$

Eine räumliche Integration der Hamilton-Richtlinie führt auf die Hamilton-Funktion

$$H_\perp = \int d^3x \mathcal{H}_\perp \quad (3.130)$$

die der Energie des elektromagnetischen Feldes entspricht. Die Wirkung (3.92) wird gemäß (3.128) zu einem Funktional der Felder  $\vec{H}$  und  $\vec{\pi}$ :

$$A_\perp[\vec{H}, \vec{\pi}] = \int dt \left[ \int d^3x \vec{\pi}(\vec{x}, t) \cdot \frac{\partial \vec{F}_\perp(\vec{x}, t)}{\partial t} - \int dt H_\perp[\vec{H}(\cdot, t), \vec{\pi}(\cdot, t)] \right] \quad (3.131)$$

Das Hamiltonsche Prinzip führt dann auf die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen der klassischen Feldtheorie. Für das Impulsfeld erhalten wir zunächst

$$\frac{\delta A_\perp}{\delta \pi_i(\vec{x}, t)} \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.131) \quad \frac{\partial F_{\perp i}(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{\delta H_\perp}{\delta \pi_i(\vec{x}, t)} \quad (3.132)$$

Dabei ist die Funktionalableitung  $\delta/\delta \pi_i(\vec{x}, t)$  so zu verstehen, daß nur nach der räumlichen Abhängigkeit des Impulsfeldes bei konstantem Zeitargument differenziert wird. Aus (3.130) und (3.132) folgt dann

$$\frac{\partial F_{\perp i}(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}_\perp}{\partial \pi_i(\vec{x}, t)} - \sum_{s=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial \mathcal{H}_\perp}{\partial \left( \frac{\partial \pi_i(\vec{x}, t)}{\partial x_s} \right)} \quad (3.129) \quad \frac{1}{\epsilon_0} \pi_i(\vec{x}, t) \stackrel{!}{=} (3.125) \quad (3.133)$$

Entsprechend erhalten wir für das Verktorpotential

$$\frac{\delta A_\perp}{\delta R_i(\vec{x}, t)} \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.134)$$

was sich aufgrund von (3.118) und (3.131) reduziert auf

$$-\int d\vec{x}' \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \pi_j(\vec{x}', t)}{\partial t} \delta_{ij}^{\perp}(\vec{x} - \vec{x}') - \frac{\delta H_{\perp}}{\delta F_i(\vec{x}, t)} = 0 \quad (3.135)$$

Auch hier ist die Funktionalableitung  $\delta/\delta F_i(\vec{x}, t)$  so zu verstehen, dass nur nach der räumlichen Abhängigkeit des Rektionspotentials bei festem Zeitargument differenziert wird. Da das Impulsfeld gemäß (3.133) schon transversal ist, erhalten wir mit (3.127) aus (3.135)

$$\frac{\partial \pi_i(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\delta H_{\perp}}{\delta F_i(\vec{x}, t)} \quad (3.136)$$

mit Hilfe von (3.118) und (3.130) folgt dann aus (3.136)

$$\frac{\partial \pi_i(\vec{x}, t)}{\partial t} = \int d\vec{x}' \sum_{j=1}^3 \left\{ -\frac{\partial \mathcal{L}_{\perp}}{\partial F_{j\perp}(\vec{x}', t)} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (F_{k\perp}(\vec{x}', t))} \right\} \delta_{ij}^{\perp}(\vec{x} - \vec{x}') \quad (3.137)$$

sind die kartesischen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\perp}}{\partial F_{j\perp}(\vec{x}', t)} \stackrel{(3.129)}{=} -\delta_j(\vec{x}', t), \frac{\partial \mathcal{L}_{\perp}}{\partial (\frac{1}{m} \frac{\partial F_{k\perp}(\vec{x}', t)}{\partial x_k^j})} \stackrel{(3.129)}{=} \frac{1}{m} \frac{\partial F_{k\perp}(\vec{x}', t)}{\partial x_k^j} - \frac{1}{m} \frac{\partial F_{k\perp}(\vec{x}', t)}{\partial x_k^j} \quad (3.138)$$

geht (3.137) über in

$$\frac{\partial \pi_i(\vec{x}, t)}{\partial t} = \int d\vec{x}' \sum_{j=1}^3 \left\{ \dot{\delta}_j(\vec{x}', t) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k^j} \left[ \frac{1}{m} \frac{\partial F_{k\perp}(\vec{x}', t)}{\partial x_k^j} - \frac{1}{m} \frac{\partial F_{k\perp}(\vec{x}', t)}{\partial x_k^j} \right] \right\} \delta_{ij}^{\perp}(\vec{x} - \vec{x}') \quad (3.139)$$

Aufgrund von (3.127) fällt der letzte Term in (3.139) weg. Mit der transversalen Stromdichte (3.89) und (3.124) erhalten wir schließlich

$$\frac{\partial \vec{\pi}(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{1}{m} \Delta \vec{A}_{\perp}(\vec{x}, t) + \vec{j}_{\perp}(\vec{x}, t) \quad (3.140)$$

Offenbar sind die Lammillorischen Bewegungsgleichungen (3.133) und (3.140) zur Euler-Lagrange-Gleichung (3.121) äquivalent.

Es liegt nun zu prüfen, ob die Rolle von Poisson-Klammern in der Feldtheorie gleich unterliegen wie nach die Rolle von Poisson-Klammern in der Elektrodynamik. Für zwei Funktionale  $F = F[\vec{A}, \vec{\pi}]$  und

$G = G[\vec{F}, \vec{\pi}]$  definieren wird die Poisson-Klammer durch

$$\{F, G\} = \int d^3x'' \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\delta F}{\delta A_j(x'', t)} \frac{\delta G}{\delta \pi_j(x'', t)} - \frac{\delta F}{\delta \pi_j(x'', t)} \frac{\delta G}{\delta A_j(x'', t)} \right) \quad (3.141)$$

Beiden jeweiligen Funktionalableitungen wird nur nach den räumlichen Abhängigkeiten bei festem Zeitargument differenziert. Die Hamilton-Gleichungen (3.132) und (3.136) lassen sich dann durch Poisson-Klammer ausdrücken:

$$\{\pi_i(\vec{x}, t), H_L\} \xrightarrow{(3.141)} -\frac{\delta H_L}{\delta A_i(\vec{x}, t)} \xrightarrow{(3.136)} \frac{\partial \pi_i(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (3.142)$$

$$\{A_i(\vec{x}, t), H_L\} \xrightarrow{(3.141)} \frac{\delta H_L}{\delta \pi_i(\vec{x}, t)} \xrightarrow{(3.132)} \frac{\partial A_i(\vec{x}, t)}{\partial t}$$

$$\xrightarrow{(3.118), (3.124)} \{A_{Lj}(\vec{x}, t), H_L\} = \frac{\partial A_{Lj}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (3.143)$$

Ferner erhalten wir für die fundamentalen Poisson-Klammern

$$\{\pi_L(\vec{x}, t), \pi_L(\vec{x}', t)\} \xrightarrow{(3.141)} 0 \quad (3.144)$$

$$\{A_{Lk}(\vec{x}, t), A_{Ll}(\vec{x}', t)\} \xrightarrow{(3.141)} 0 \quad (3.145)$$

$$\{A_{Lk}(\vec{x}, t), \pi_L(\vec{x}', t)\} \xrightarrow{(3.118), (3.141)} \delta_{kL}^\perp(\vec{x} - \vec{x}') \quad (3.146)$$

### 3.11 Freies elektromagnetisches Feld:

Wir spezialisieren nun auf das freie elektromagnetische Feld, wo keine elektrischen Ladungen und auch keine Ströme vorhanden sind:

$$S(\vec{x}, t) = 0, \quad \vec{j}(\vec{x}, t) = \vec{0} \quad (3.147)$$

In der Coulomb-Eichung (3.79) verschwindet dann aufgrund von (3.84) das skalare Potential

$$\varphi(\vec{x}, t) = 0 \quad (3.148)$$

Man bezeichnet (3.79) zusammen mit (3.148) auch als Strahlungseichung. Aus

(3.121) und (3.147) folgt, daß das transversale Vektorpotential  $\vec{A}_\perp$  der Wellengleichung genügt:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}_\perp(\vec{x}, t) - \Delta \vec{A}_\perp(\vec{x}, t) = \vec{0} \quad (3.149)$$

In der Strahlungsleidung (3.79) und (3.148) lassen sich die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  und die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  gemäß (3.71) und (3.72) durch Differentiation aus dem transversalen Vektorpotential  $\vec{A}_\perp$  berechnen:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}_\perp \quad (3.150)$$

$$\vec{E} = - \frac{\partial \vec{A}_\perp}{\partial t} \quad (3.151)$$

die Damiton-Funktion des freien elektromagnetischen Feldes ergibt sich aus (3.106), (3.129), (3.130) und (3.147) zu

$$H_\perp = \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\pi}(\vec{x}, t)^2 + \frac{1}{\mu_0} (\text{rot } \vec{A}_\perp)^2 \right\} \quad (3.152)$$

mit der Nebenbedingung

$$(\text{rot } \vec{A}_\perp)^2 = \epsilon_0 \delta_{kl} \partial_k A_{l\perp} \epsilon_{ijkn} \partial_m A_{jn\perp} = (\delta_{km} \delta_{ln} - \delta_{kn} \delta_{lm}) \partial_k A_{l\perp} \epsilon_{ijn} \partial_m A_{jn\perp}$$

$$= \partial_k A_{l\perp} \partial_l A_{k\perp} - \partial_k A_{l\perp} \partial_l A_{k\perp} = \partial_k A_{l\perp} \partial_k A_{l\perp} - \partial_k (A_{l\perp} \partial_k A_{l\perp}) + A_{l\perp} \partial_k \partial_k A_{l\perp} \quad (3.153)$$

wo die Einstein-Summenkonvention verwendet wird, läßt sich die Damiton-Funktion (3.152) vereinfachen. Der zweite Term in (3.153) verschwindet durch Anwendung des Leibnizschen Satzes, der dritte Term aufgrund der Transversalitätsbedingung (3.122):

$$H_\perp = \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\pi}_i(\vec{x}, t) \vec{\pi}_i(\vec{x}, t) + \frac{1}{\mu_0} \partial_k A_{l\perp}(\vec{x}, t) \partial_k A_{l\perp}(\vec{x}, t) \right\} \quad (3.154)$$

### 3.12 Kanonische Feldquantisierung des Maxwell-Feldes:

Bei der kanonischen Feldquantisierung im Heisenberg-Bild geht man vom klassischen Feld  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  und vom dazu konjugierten Impulsfeld  $\vec{\pi}(\vec{x}, t)$  zu Feldoperatoren  $\hat{\vec{A}}(\vec{x}, t)$  und  $\hat{\vec{\pi}}(\vec{x}, t)$  über. In Analogie zur Quantmekanik gilt dabei gemäß (3.62) die Poisson-Klammer in einem Raummittelpunkt über. Dem-

nach gehen die fundamentalen Poisson-Klammereln (3.144) - (3.146) in die folgenden gleichzeitigen Kommutatorrelativen über:

$$[\hat{\pi}_k(\vec{x}, t), \hat{\pi}_e(\vec{x}', t)]_- = 0 \quad (3.155)$$

$$[\hat{A}_{\perp k}(\vec{x}, t), \hat{A}_{\perp e}(\vec{x}', t)]_- = 0 \quad (3.156)$$

$$[\hat{A}_{\perp k}(\vec{x}, t), \hat{\pi}_e(\vec{x}', t)]_- = i\hbar \delta_{ke}^{\perp} (\vec{x} - \vec{x}') \quad (3.157)$$

die Quantisierungsvorschrift (3.157) ist dabei so gewählt, daß sie mit der quantisierten Version der Inkonsistenzbedingung (3.122)

$$\partial_3 \hat{A}_{\perp k}(\vec{x}, t) = 0 \quad (3.158)$$

vereinbarlich ist:

$$\begin{aligned} \partial_k [\hat{A}_{\perp k}(\vec{x}, t), \hat{\pi}_e(\vec{x}', t)]_- &\stackrel{(3.157)}{=} i\hbar \partial_k \delta_{ke}^{\perp} (\vec{x} - \vec{x}') \stackrel{(3.90)}{=} i\hbar \left\{ \delta_{ke} \partial_k \delta(\vec{x} - \vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \partial_e \partial_k \partial_k^{\perp} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \right\} \\ &= i\hbar \left\{ \partial_e \delta(\vec{x} - \vec{x}') + \partial_e^{\perp} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \right\} \equiv 0 \end{aligned} \quad (3.159)$$

Der Hamilton-Operator des elektromagnetischen Feldes lautet wegen (3.154)

$$\hat{H}_{\perp} = \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ \frac{1}{\epsilon_0} \hat{\pi}_k(\vec{x}, t) \hat{\pi}_k(\vec{x}', t) + \frac{1}{\mu_0} \partial_k \hat{A}_{\perp e}(\vec{x}, t) \partial_k^{\perp} \hat{A}_{\perp e}(\vec{x}', t) \right\} \quad (3.160)$$

Im folgenden untersuchen wir die Zeisenberg'schen Bewegungsgleichungen der Feldoperatoren. Sie ergeben sich dadurch, daß man die Hamilton-Gleichungen mit Poisson-Klammereln gemäß der Vorschrift (3.62) substituiert. Die Zeisenberg'sche Bewegungsgleichung für den Impulsoperator folgt demnach aus (3.142) und (3.62):

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\pi}_i(\vec{x}, t)}{\partial t} = [\hat{\pi}_i(\vec{x}, t), \hat{H}_{\perp}]_- \quad (3.161)$$

Einsetzen von (3.160) in (3.161) führt auf

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\pi}_i(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ \frac{1}{\epsilon_0} [\hat{\pi}_i(\vec{x}, t), \hat{\pi}_k(\vec{x}', t)]_- \hat{\pi}_k(\vec{x}', t) + \frac{1}{\mu_0} [\hat{\pi}_i(\vec{x}, t), \partial_k \hat{A}_{\perp e}(\vec{x}', t)]_- \partial_k^{\perp} \hat{A}_{\perp e}(\vec{x}', t) \right\} \quad (3.162)$$

Aufgrund der Operatoridentität (2.109) reduziert sich (3.162) auf

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\pi}_i(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ \frac{1}{\epsilon_0} [\hat{\pi}_i(\vec{x}, t), \hat{\pi}_k(\vec{x}', t)]_- \hat{\pi}_k(\vec{x}', t) + \frac{1}{\epsilon_0} \hat{\pi}_k(\vec{x}', t) [\hat{\pi}_i(\vec{x}, t), \hat{\pi}_k(\vec{x}', t)]_- \right\}$$

$$+ \frac{1}{\mu_0} [\hat{\pi}_i(\vec{x}, t), \partial_k \hat{A}_{\perp e}(\vec{x}', t)] - \partial_k \hat{A}_{\perp e}(\vec{x}', t) + \frac{1}{\mu_0} \partial_k \hat{A}_{\perp e}(\vec{x}', t) [\hat{\pi}_i(\vec{x}, t), \partial_k \hat{A}_{\perp e}(\vec{x}', t)]_- \} \quad (3.163)$$

mit Hilfe der kanonischen Veränderungsrelationen (3.155) und (3.157) vereinfacht sich dies zu

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\pi}_i(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2\mu_0} 2 \int d^3x' \partial_k \hat{A}_{\perp e}(\vec{x}', t) \partial_k \delta_{ik}^\perp e(\vec{x} - \vec{x}') \quad (3.164)$$

durch die explizite Darstellung der transversalen  $\delta$ -Funktion (3.90) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\pi}_i(\vec{x}, t)}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu_0} \int d^3x' \partial_k \hat{A}_{\perp e}(\vec{x}', t) \partial_k \left\{ \delta_{ik} \delta(\vec{x} - \vec{x}') + \frac{1}{4\pi} \partial_i \partial_k \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left\{ \Delta \hat{A}_{\perp i}(\vec{x}, t) + \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \partial_k \hat{A}_{\perp e}(\vec{x}', t) \partial_i \partial_k \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\} \frac{(3.158)}{\mu_0} \frac{1}{\mu_0} \Delta \hat{A}_{\perp i}(\vec{x}, t) \quad (3.165) \end{aligned}$$

Die entsprechende zeitabhängige Bewegungsgleichung für den Operator des transversalen Vektorpotentials folgt aus (3.143) und (3.62):

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \hat{A}_{\perp i}(\vec{x}, t)}{\partial t} &= [\hat{A}_{\perp i}(\vec{x}, t), \hat{H}_\perp]_- \frac{(3.160)}{\frac{1}{2} \int d^3x' \left\{ \frac{1}{\epsilon_0} [\hat{A}_{\perp i}(\vec{x}, t), \hat{\pi}_k(\vec{x}', t)]_- \hat{\pi}_k(\vec{x}', t) \right.} \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu_0} [\hat{A}_{\perp i}(\vec{x}, t), \partial_k \hat{A}_{\perp e}(\vec{x}', t)]_- \right\}} \frac{(3.109)}{\frac{1}{2} \int d^3x' \left\{ \frac{1}{\epsilon_0} [\hat{A}_{\perp i}(\vec{x}, t), \hat{\pi}_k(\vec{x}', t)]_- \hat{\pi}_k(\vec{x}', t) \right.} \\ &\quad \left. + \frac{1}{\epsilon_0} \hat{\pi}_k(\vec{x}', t) [\hat{A}_{\perp i}(\vec{x}, t), \hat{\pi}_k(\vec{x}', t)]_- + \frac{1}{\mu_0} [\hat{A}_{\perp i}(\vec{x}, t), \partial_k \hat{A}_{\perp e}(\vec{x}', t)]_- \partial_k \hat{A}_{\perp e}(\vec{x}', t) \right.} \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu_0} \partial_k \hat{A}_{\perp e}(\vec{x}', t) [\hat{A}_{\perp i}(\vec{x}, t), \partial_k \hat{A}_{\perp e}(\vec{x}', t)]_- \right\} \frac{(3.156), (3.157)}{\frac{1}{2\epsilon_0} 2i\hbar \int d^3x' \delta_{ik}^\perp (\vec{x} - \vec{x}') \hat{\pi}_k(\vec{x}', t)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{i\hbar}{\mu_0} \int d^3x' \left\{ \delta_{ik} \delta(\vec{x} - \vec{x}') + \frac{1}{4\pi} \partial_i \partial_k \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right\} \hat{\pi}_k(\vec{x}', t) = \frac{i\hbar}{\epsilon_0} \left\{ \hat{\pi}_i(\vec{x}, t) - \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \partial_i \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \partial_k \hat{\pi}_k(\vec{x}', t) \right\} \right\} \quad (3.90) \end{aligned}$$

Die Quantisierungsergebnist (3.157) ist auch verträglich damit, dass der Impulsoperator transversal ist:

$$\partial_k \frac{1}{\epsilon_0} \hat{\pi}_k(\vec{x}, t) = 0 \quad (3.167)$$

Daher zu (3.159) gilt nämlich

$$\begin{aligned} \partial_0 [\hat{A}_{\perp k}(\vec{x}, t), \hat{\pi}_e(\vec{x}', t)]_- \frac{(3.157)}{= i\hbar \partial_0 \delta_{ke}(\vec{x} - \vec{x}')} \frac{(3.90)}{i\hbar \{ \partial_k \partial_0 \partial_e \delta(\vec{x} - \vec{x}') + \frac{1}{4\pi} \partial_k \partial_0 \partial_e \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \}} \\ = i\hbar \{ \partial_k \delta(\vec{x} - \vec{x}') - \partial'_k \delta(\vec{x} - \vec{x}') \} = 0 \quad (3.168) \end{aligned}$$

daher folgt aus (3.166) und (3.167)

$$\frac{\partial \hat{A}_{\perp}(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \hat{\pi}_{\perp}(\vec{x}, t) \quad (3.169)$$

Zieht man (3.165) und (3.169) die quantisierte Version von (3.125) bzw. (3.133) und (3.140) mit (3.147) dar. Aus (3.69), (3.165) und (3.169) folgt, daß der Operator des transversalen Vektorpotentials der Wellengleichung (3.149) ergibt:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{A}_{\perp}(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \Delta \hat{A}_{\perp}(\vec{x}, t) = \vec{0} \quad (3.170)$$

### 3.13 Entwicklung nach ebenen Wellen:

Die Wellengleichung (3.170) läßt sich mit Hilfe einer Fourier-Entwicklung nach ebenen Wellen lösen:

$$\hat{A}_{\perp}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \hat{A}_{\perp}(\vec{k}, t) e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (3.171)$$

Setzt man den Ansatz (3.171) in die Wellengleichung (3.170) ein, so ergibt sich für die Entwicklungskoeffizienten  $\hat{A}_{\perp}(\vec{k}, t)$  die Oszillatorgleichung

$$\frac{\partial^2 \hat{A}_{\perp}(\vec{k}, t)}{\partial t^2} + w_{\vec{k}}^2 \hat{A}_{\perp}(\vec{k}, t) = 0 \quad (3.172)$$

wobei die Dispersionsrelation gegeben ist durch

$$w_{\vec{k}} = c |\vec{k}| \quad (3.173)$$

Die allgemeine Lösung von (3.172) lautet dann

$$\hat{A}_{\perp}(\vec{k}, t) = \hat{A}_{\perp}^{(1)}(\vec{k}) e^{-i w_{\vec{k}} t} + \hat{A}_{\perp}^{(2)}(\vec{k}) e^{i w_{\vec{k}} t} \quad (3.174)$$

so daß der Feldoperator (3.171) gegeben ist durch

$$\hat{A}_{\perp}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ \hat{A}_{\perp}^{(1)}(\vec{k}) e^{i (\vec{k} \cdot \vec{x} - w_{\vec{k}} t)} + \hat{A}_{\perp}^{(2)}(\vec{k}) e^{i (\vec{k} \cdot \vec{x} + w_{\vec{k}} t)} \right\} \quad (3.175)$$

Der erste (zweite) Term entspricht dabei einer nach rechts (links) laufenden ebenen Welle. Im zweiten Integral wird die Substitution  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$  durchgeführt und die Symmetrie der Dispersionsrelation (3.173)

$$w_{\vec{k}} = w - \vec{k}$$

(3.176)

verwendet:

$$\hat{A}_{\perp}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ \hat{A}^{(1)}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - w_{\vec{k}} t)} + \hat{A}^{(2)}(-\vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - w_{\vec{k}} t)} \right\} \quad (3.177)$$

Der zu (3.177) adjungierte Feldoperator lautet dann

$$\hat{A}_{\perp}^{\dagger}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ \hat{A}^{(1)\dagger}(\vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - w_{\vec{k}} t)} + \hat{A}^{(2)\dagger}(-\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - w_{\vec{k}} t)} \right\} \quad (3.178)$$

Fordert man, daß der Feldoperator selbstadjungiert ist

$$\hat{A}_{\perp}(\vec{x}, t) = \hat{A}_{\perp}^{\dagger}(\vec{x}, t) \quad (3.179)$$

so folgt aus dem Vergleich von (3.177) mit (3.178)

$$\hat{A}(\vec{k}) = \hat{A}^{(1)}(\vec{k}), \quad \hat{A}^{\dagger}(\vec{k}) = \hat{A}^{(2)}(-\vec{k}) \quad (3.180)$$

Setzt man (3.180) in (3.177) ein, dann ergibt sich die Fourier-Entwicklung des Feldoperators zu

$$\hat{A}_{\perp}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ \hat{A}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - w_{\vec{k}} t)} + \hat{A}^{\dagger}(\vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - w_{\vec{k}} t)} \right\} \quad (3.181)$$

### 3.14 Konstruktion der Polarisationsvektoren:

Es seien  $\vec{A}_1(\vec{x}, t)$  und  $\vec{A}_2(\vec{x}, t)$  zwei linear polarisierte ebene Wellen mit dem Wellenvektor  $\vec{k}$  und der Kreisfrequenz (3.173):

$$\vec{A}_1(\vec{x}, t) = \vec{\epsilon}_1 A_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - w_{\vec{k}} t)}, \quad \vec{A}_2(\vec{x}, t) = \vec{\epsilon}_2 A_2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - w_{\vec{k}} t)} \quad (3.182)$$

Liegebeidezedimmen  $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2$  zwei zueinander orthogonale Polarisationsvektoren

$$\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_1^* = \vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{\epsilon}_2^* = 1, \quad \vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2^* = \vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{\epsilon}_1^* = 0 \quad (3.183)$$

und  $A_1, A_2$  die komplexen Amplituden. Es wird nun die Summe dieser beiden linear polarisierten ebenen Wellen betrachtet:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}_1(\vec{x}, t) + \vec{A}_2(\vec{x}, t) = (\vec{\epsilon}_1 A_1 + \vec{\epsilon}_2 A_2) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - w_{\vec{k}} t)} \quad (3.184)$$

Berücksichtigt man die komplexen Amplituden  $A_1$  und  $A_2$  dieselbe Phase, die wir ohne Be-

Schwächung der Allgemeinheit zu Null wählen, ist auch  $\vec{F}(\vec{x}, t)$  linear polarisiert. Der resultierende Polarisationsvektor  $\vec{\epsilon}$  hat den Winkel  $\vartheta = \arctan F_2/F_1$  mit  $\vec{\epsilon}_1$ , während die Amplitude durch  $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$  gegeben ist:

$$\vec{F}(\vec{x}, t) = \vec{\epsilon} F e^{i(k\vec{x} - \omega t)}$$

Gibt dagegen die Ionen von  $F_1$  und  $F_2$  verschieden, dann erdmeldet  $\vec{F}(\vec{x}, t)$  eine im allgemeinen elliptisch polarisierte ebene Welle. Dies lässt sich am einfachsten im Falle einer zirkular polarisierten ebenen Welle illustrieren, die vorliegt, wenn  $F_1$  und  $F_2$  denselben Betrag besitzen und sich ihre Phasen um  $90^\circ$  voneinander unterscheiden:

$$F_1 = \frac{F}{\sqrt{2}}, \quad F_2 = \pm i \frac{F}{\sqrt{2}} \quad (3.186)$$

Setzt man (3.186) in (3.184) ein, so führt dies auf

$$\vec{F}(\vec{x}, t) = \frac{F}{\sqrt{2}} (\vec{\epsilon}_1 \pm i \vec{\epsilon}_2) e^{i(k\vec{x} - \omega t)} \quad (3.187)$$

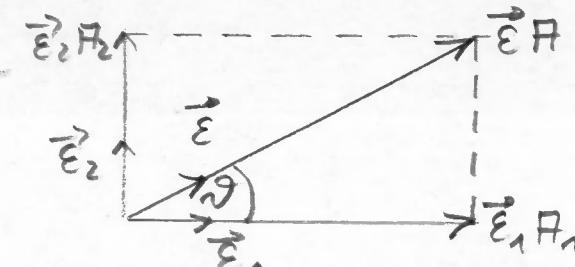
Wir denken uns nun die Koordinatenachsen so gewählt, dass sich die Ebene Welle in  $z$ -Richtung ausbreite, während die Polarisationsvektoren  $\vec{\epsilon}_1$  und  $\vec{\epsilon}_2$  in Richtung der  $x$ - und  $y$ -Achse zeigen:

$$\vec{k} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\epsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\epsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.187) \Rightarrow \vec{F}(\vec{x}, t) = \frac{F}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(k\vec{x} - \omega t)} \quad (3.188)$$

Bei rotationssymmetrischen Realteilen des Vektorpotentials  $\vec{F}(\vec{x}, t)$  an einem festen Raumpunkt  $\vec{x}$ , so ist der Vektor zwar dem Betrag nach konstant, er dreht sich aber auf einem Kreis mit der Kreisfrequenz  $\omega_{\vec{x}}$ :

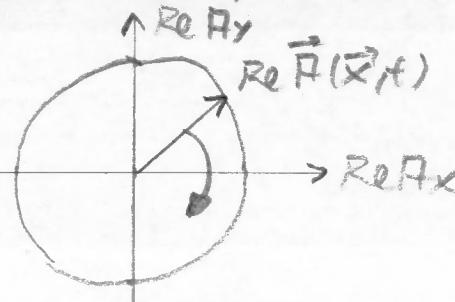
$$\operatorname{Re} F_x(\vec{x}, t) = \frac{F}{\sqrt{2}} \cos(kz - \omega_{\vec{x}} t), \quad \operatorname{Re} F_y(\vec{x}, t) = \frac{F}{\sqrt{2}} \sin(kz - \omega_{\vec{x}} t), \quad \operatorname{Re} F_z(\vec{x}, t) = 0 \quad (3.189)$$

Ein das Ebene (anterne) Vorzeichen verläuft die Drehung entgegen (mit) dem Uhrzeigersinn, wenn der Beobachter in den entgegen Komponenten liegenden Raumabschnitt schaut. Diese Welle wird in der Optik linear polarisiert (nicht linear polarisiert).



$$(3.185)$$

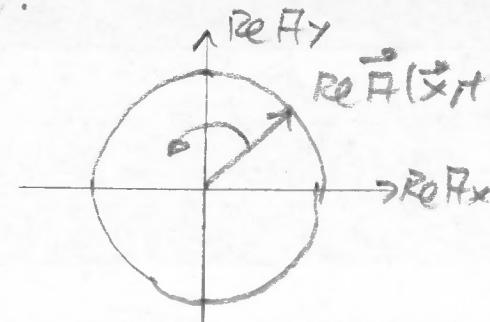
resiert genannt, während man in der Elementarfeldtheorie sagt, daß eine solche Welle positive (negative) Polarisat. hat:



$$Re A_x(\vec{r}, t) = \frac{R}{\sqrt{2}} \cos(\omega_r t)$$

$$Re A_y(\vec{r}, t) = \frac{R}{\sqrt{2}} \sin(\omega_r t)$$

$$Re A_z(\vec{r}, t) = 0$$



$$Re A_x(\vec{r}, t) = \frac{R}{\sqrt{2}} \cos(\omega_r t)$$

$$Re A_y(\vec{r}, t) = \frac{R}{\sqrt{2}} \sin(\omega_r t)$$

$$Re A_z(\vec{r}, t) = 0$$

$\gamma = +1$  (linksazimutal)

$\gamma = -1$  (-rechtsazimutal)

Zur Präzisierung des Drehheitsbegriffes führen wir den Drehheitsoperator als Projektion des Anzugsimpulsoperators  $\hat{\tau}$  auf den Wellenvektor  $\vec{k}$  ein:

$$\hat{\tau}(\vec{k}) = \frac{\vec{k}}{k} \cdot \vec{\epsilon} \quad (3.190)$$

dabei sind die einzelnen Komponenten des Anzugsimpulsoperators definiert durch

$$L_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = -i \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.191)$$

die genügenden Vertauschungsrelationen

$$[L_i, L_j]_- = i \epsilon_{ijk} L_k \quad (3.192)$$

und sind die Generatoren der Drehungen

$$R_1(\varphi) = e^{-i L_1 \varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad R_2(\varphi) = e^{-i L_2 \varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad R_3(\varphi) = e^{-i L_3 \varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ +\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.193)$$

Einsetzen von (3.191) in (3.190) führt auf die folgende explizite Form des Drehheitsoperators:

$$\hat{\tau}(\vec{k}) = \frac{i}{k} \begin{pmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.194)$$

wir führen nun die Polarisationsvektoren  $\vec{E}(\vec{k}, \lambda)$  für solche ebenen Wellen ein, die sich mit dem Wellenvektor  $\vec{k}$  und der Zelisität  $\lambda = \pm 1$  ausbreiten:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = A \vec{E}(\vec{k}, \lambda) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (3.195)$$

dabei sind die Polarisationsvektoren  $\vec{E}(\vec{k}, \lambda)$  als Eigenvektoren des Zelisitätsoperators (3.194) zum Eigenwert  $\lambda$  definiert:

$$\hat{n}(\vec{k}) \vec{E}(\vec{k}, \lambda) = \lambda \vec{E}(\vec{k}, \lambda) \quad (3.196)$$

Aus dem Vergleich von (3.188) mit (3.195) lassen sich dann die Polarisationsvektoren  $\vec{E}(\vec{k} \vec{e}_z, \lambda)$  für eine Ausbreitung in  $z$ -Richtung ablesen:

$$\vec{E}(\vec{k} \vec{e}_z, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.197)$$

Iatsächlich sind die Polarisationsvektoren  $\vec{E}(\vec{k}, \lambda)$  Eigenvektoren des Zelisitätsoperators  $\hat{n}(\vec{k} \vec{e}_z)$  zum Eigenwert  $\lambda$ :

$$\hat{n}(\vec{k} \vec{e}_z) \vec{E}(\vec{k} \vec{e}_z, \lambda) \xrightarrow{(3.194), (3.197)} i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda^2=1} \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3.197)} \lambda \vec{E}(\vec{k} \vec{e}_z, \lambda) \quad (3.198)$$

Wir konstruieren nun die Polarisationsvektoren  $\vec{E}(\vec{k}, \lambda)$  mit einem beliebigen Wellenvektor  $\vec{k}$ , indem wir die ursprünglichen Polarisationsvektoren  $\vec{E}(\vec{k} \vec{e}_z, \lambda)$  mit dem ursprünglichen Wellenvektor  $\vec{k} \vec{e}_z$  entsprechend drehen. Dazu benötigen wir eine Rotationsmatrix  $R(\vartheta, \varphi)$ , die den ursprünglichen Wellenvektor  $\vec{k} \vec{e}_z$  in den Wellenvektor  $\vec{k}$  abbildet, wobei der letztere mit Hilfe von 2D-Koordinaten  $\varphi \in [0, \pi]$ ,  $\vartheta \in [0, \pi]$  beschrieben wird

$$\vec{k} = \vec{k} \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (3.199)$$

Die Rotationsmatrix  $R(\vartheta, \varphi)$  wird dabei so aufgebaut, dass erst die Rotation  $R_2(\vartheta)$  und dann die Rotation  $R_3(\varphi)$  durchgeführt wird:

$$R(\vartheta, \varphi) = R_3(\varphi) R_2(\vartheta) \quad (3.200)$$

Mit den einzelnen Rotationsmatrizen (3.193) ergibt sich dann die gesuchte Rotationsmatrix (3.200) zu

$$R(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi & -\sin \varphi & \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi & \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (3.201)$$

Ist zähdlich sind  $\vec{k}$  und  $\vec{e}_z$  durch  $R(\vartheta, \varphi)$  zu (3.199) abgebildet, wie man anhand der dritten Spalte von (3.201) ablesen kann:

$$R(\vartheta, \varphi) \vec{e}_z = \vec{k} \quad (3.202)$$

Bildet man entsprechend die Polarisationsvektoren  $\vec{\epsilon}(k \vec{e}_z, \lambda)$  mit  $R(\vartheta, \varphi)$  ab, so erhalten sich die gesuchten Polarisationsvektoren  $\vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda)$ :

$$\vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) = R(\vartheta, \varphi) \vec{\epsilon}(k \vec{e}_z, \lambda) \xrightarrow{(3.197), (3.201)} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi - 2i \sin \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi + 2i \cos \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix} \quad (3.203)$$

Ist zähdlich sind die so konstruierten Polarisationsvektoren  $\vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda)$  Eigenvektoren des Dizipoloperators  $h(\vec{k})$  zum Eigenwert  $\lambda$ :

$$h(\vec{k}) \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \xrightarrow{(3.194), (3.199), (3.203)} : \begin{pmatrix} 0 & -\cos \vartheta & \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta & 0 & -\sin \vartheta \cos \varphi \\ -\sin \vartheta \sin \varphi & \sin \vartheta \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi - 2i \sin \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi + 2i \cos \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\cos^2 \vartheta \sin \varphi - 2i \cos \vartheta \cos \varphi - \sin^2 \vartheta \sin \varphi \\ \cos^2 \vartheta \cos \varphi - 2i \cos \vartheta \sin \varphi + \sin^2 \vartheta \cos \varphi \\ -\cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi + 2i \sin \vartheta \sin^2 \vartheta + \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi + 2i \sin \vartheta \cos^2 \varphi \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \cos \vartheta \cos \varphi (\sin \varphi) \\ 2 \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi \\ -2 \sin \vartheta \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda^2 = 1} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi - 2i \sin \varphi \\ \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix} \xrightarrow{(3.203)} \lambda \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \quad (3.204)$$

Außerdem reduzieren sich (3.199) und (3.203) im Falle  $\varphi = 0, \vartheta = 0$  auf  $\vec{e}'_z$  und (3.197).

### 3.15 Eigenschaften der Polarisationsvektoren:

aufgrund der Coulomb-Gleichung (3.158) gilt für die Fourier-Operatoren  $\hat{F}(\vec{k})$  der Fourier-Zerlegung die Transversalitätsbedingung

$$\vec{k} \cdot \hat{F}(\vec{k}) = 0 \quad (3.205)$$

Demnach beinhalten die Fourier-Operatoren  $\hat{F}(\vec{k})$  zwei transversale dynamische Freiheitsgrade. Macht man den Ansatz

$$\hat{F}(\vec{k}) = N_k \sum_{\lambda=\pm 1} \vec{e}(\vec{k}, \lambda) \hat{a}_{\vec{k}, \lambda} \quad (3.206)$$

so ist die Transversalitätsbedingung (3.205) dann gewährleistet, wenn die Polarisationsvektoren  $\vec{e}(\vec{k}, \lambda)$  die Eigenwerte

$$\vec{k} \cdot \vec{e}(\vec{k}, \lambda) = 0 \quad (3.207)$$

besitzen. Offensichtlich ist diese Transversalitätsbedingung für die Polarisationsvektoren erfüllt:

$$\vec{k} \cdot \vec{e}(\vec{k}, \lambda) \stackrel{(3.199), (3.203)}{=} \frac{\vec{k}}{k} \left\{ \sin \vartheta \cos \varphi \cos^2 \varphi - \lambda i \sin \vartheta \cos \varphi \sin \varphi + \sin \vartheta \cos \vartheta \sin^2 \varphi \right. \\ \left. + \lambda i \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi - \sin \vartheta \cos \vartheta \right\} \stackrel{(3.208)}{=} 0$$

Es wird nun die Orthonormalitätsrelation der Polarisationsvektoren  $\vec{e}(\vec{k}, \lambda)$  abgeleitet:

$$1.) \vec{e}(\vec{k}, \lambda) \cdot \vec{e}(\vec{k}, \lambda) \stackrel{(3.203)}{=} \frac{1}{2} \left\{ \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \lambda^2 \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \lambda^2 \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta \right\} \stackrel{\lambda^2=1}{=} 1$$

$$2.) \vec{e}(\vec{k}, \lambda) \cdot \vec{e}(\vec{k}, -\lambda) \stackrel{(3.203)}{=} \frac{1}{2} \left\{ \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi - 2 \lambda i \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi - \lambda^2 \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi \right. \\ \left. + 2 \lambda i \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi - \lambda^2 \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta \right\} \stackrel{\lambda^2=1}{=} 0$$

Beide Ergebnisse lassen sich zusammenfassen zu

$$\vec{e}(\vec{k}, \lambda) \cdot \vec{e}(\vec{k}, \lambda)^* = \delta_{\lambda, \lambda'} \quad (3.209)$$

eine weitere wichtige Eigenschaft der Polarisationsvektoren  $\vec{e}(\vec{k}, \lambda)$  betrifft ihr Verhalten unter der Inversion  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ . Offensichtlich wird eine solche In-

version erreicht durch

$$\varphi \rightarrow \varphi + \pi: \sin \varphi \rightarrow \sin(\varphi + \pi) = -\sin \varphi, \cos \varphi \rightarrow \cos(\varphi + \pi) = -\cos \varphi \quad (3.210)$$

$$\vartheta \rightarrow \pi - \vartheta: \sin \vartheta \rightarrow \sin(\pi - \vartheta) = \sin \vartheta, \cos \vartheta \rightarrow \cos(\pi - \vartheta) = -\cos \vartheta \quad (3.211)$$

so daß dann gilt:

$$\vec{k} \xrightarrow{(3.199)} k \begin{pmatrix} \sin(\pi - \vartheta) \cos(\varphi + \pi) \\ \sin(\pi - \vartheta) \sin(\varphi + \pi) \\ \cos(\pi - \vartheta) \end{pmatrix} \xrightarrow{(3.210), (3.211)} k \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \cos \varphi \\ -\sin \vartheta \sin \varphi \\ -\cos \vartheta \end{pmatrix} \xrightarrow{(3.199)} -\vec{k} \quad (3.212)$$

eine solche Inversion  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$  führt beiden Polarisationvektoren  $\vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda)$

$$\vec{\epsilon}(-\vec{k}, \lambda) \xrightarrow{(3.203)} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\pi - \vartheta) \cos(\varphi + \pi) - 2i \sin(\varphi + \pi) \\ \cos(\pi - \vartheta) \sin(\varphi + \pi) + 2i \cos(\varphi + \pi) \\ -\sin(\pi - \vartheta) \end{pmatrix} \xrightarrow{(3.210), (3.211)} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi + 2i \sin \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi - 2i \cos \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3.203)} \vec{\epsilon}(-\vec{k}, \lambda) = \vec{\epsilon}(\vec{k}, -\lambda) = \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda)^* \quad (3.213)$$

Setzt man die Entwicklung (3.206) in (3.181) ein, so lautet die Darstellung des Feldoperators:

$$\hat{F}_\perp(\vec{x}, t) = \sum_{\lambda=\pm 1} \left[ \frac{(2\pi)^3 h}{(2\pi)^3 N \vec{k}} \{ \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_k t)} \hat{a}_{\vec{k}, \lambda} + \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda)^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_k t)} \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \} \right] \quad (3.214)$$

### 3.16 Eigenschaften der Elektronen:

In einer Übungsaufgabe zeigen wir, daß die Operatoren  $\hat{a}_{\vec{k}, 2}, \hat{a}_{\vec{k}, 2}^\dagger$  genau dann den kanonischen Verknüpfungsrelationen

$$[\hat{a}_{\vec{k}, 2}, \hat{a}_{\vec{k}', 2}]_- = [\hat{a}_{\vec{k}, 2}^\dagger, \hat{a}_{\vec{k}', 2}^\dagger]_- = 0, [\hat{a}_{\vec{k}, 2}, \hat{a}_{\vec{k}', 2}^\dagger]_- = \delta(\vec{k}^2 - \vec{k}'^2) \delta_{22'} \quad (3.215)$$

genügen, wenn die Normierungskonstante  $N \vec{k}$  gewählt wird zu

$$N \vec{k} = \sqrt{\frac{(2\pi)^3 h}{2\epsilon_0 w \vec{k}}} \quad (3.216)$$

Damit lassen sich  $\hat{a}_{\vec{k}, 2}^\dagger$  bzw.  $\hat{a}_{\vec{k}, 2}$  als Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperator

eines Photons mit Wellenvektor  $\vec{k}$  und Polarisität  $\lambda$  interpretieren. Nach (3.214) und (3.216) lautet die Darstellung des Feldoperators dann

$$\hat{A}_\perp(\vec{x}, t) = \sum_{\lambda=\pm 1} \int d^3 k \frac{t}{2(2\pi)^3 \epsilon_0 \omega_k} \left\{ \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_k t)} \hat{a}_{\vec{k}, \lambda} + \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda)^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_k t)} \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \right\} \quad (3.217)$$

In der Übungsaufgabe untersuchen wir die Eigenschaften der Photonen. Einsetzen von (3.217) in den Hamilton-Operator des elektromagnetischen Feldes (3.160) führt mit (3.125) auf

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=\pm 1} \int d^3 k t \omega_k \left\{ \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}, \lambda} + \hat{a}_{\vec{k}, \lambda} \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \right\} \quad (3.218)$$

mit einer unendlich großen Vakuumenergie

$$\langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \delta(0) \int d^3 k t \omega_k \xrightarrow{(3.173)} \infty \quad (3.219)$$

Der normalgeordnete Hamilton-Operator lautet

$$:\hat{H}: = \sum_{\lambda=\pm 1} \int d^3 k t \omega_k \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}, \lambda} \quad (3.220)$$

Entsprechend zeigen wir in der Übungsaufgabe, daß der Impulsoperator

$$\hat{\vec{P}} = \int d^3 x [\vec{\nabla} \times \hat{A}_\perp(\vec{x}, t)] \times \hat{\vec{\pi}}(\vec{x}, t) \quad (3.221)$$

und der Spinimpulsoperator

$$\hat{\vec{s}} = \int d^3 x \hat{\vec{P}}(\vec{x}, t) \times \hat{\vec{\pi}}(\vec{x}, t) \quad (3.222)$$

des elektromagnetischen Feldes gegeben sind durch

$$\hat{\vec{P}} = \sum_{\lambda=\pm 1} \int d^3 k t \vec{k} \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}, \lambda} \quad (3.223)$$

$$\hat{\vec{s}} = \sum_{\lambda=\pm 1} \int d^3 k \lambda t \frac{\vec{k}}{\hbar} \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}, \lambda} \quad (3.224)$$

wobei verhindern davon Vakuumvariationswerte aus Symmetriegründen:

$$\langle 0 | \hat{p} | 0 \rangle = \vec{0} \quad (3.225)$$

$$\langle 0 | \hat{s} | 0 \rangle = \vec{0} \quad (3.226)$$

Aus (3.220), (3.223) und (3.224) lesen wir ab, daß ein einzelner Photon mit Wellenvektor  $\vec{k}$  und Polarisierung  $\lambda$  die Energie  $\hbar \omega_{\vec{k}}$ , den Impuls  $\hbar \vec{k}$  und den Spindrehimpuls  $\lambda \hbar \vec{\tau}/\hbar$  besitzt.

### 3.17 Fock-Basis des zweitquantisierten Hilbert-Raumes:

Wir konstruieren nun die Fock-Basis des zweitquantisierten Hilbert-Raumes. Analog zu (3.85) führen wir zunächst den Vakuumzustand  $|0\rangle$  dadurch ein, daß wir von allen Vervielfachungsoperatoren  $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^+$  zu  $|0\rangle$  Null abgebildet wird:

$$\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^+ |0\rangle = 0 \iff 0 = \langle 0 | \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^+ \quad (3.227)$$

Ein Zustand  $|n_{\vec{k},\lambda}\rangle$  mit  $n_{\vec{k},\lambda}$  Photonen mit Wellenvektor  $\vec{k}$  und Polarisierung  $\lambda$  erhalten wir dann analog zu (2.88) dadurch, daß  $n_{\vec{k},\lambda}$  mal der Erzeugungsoperator  $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^+$  auf den Vakuumzustand  $|0\rangle$  angewandt wird:

$$|n_{\vec{k},\lambda}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k},\lambda}!}} (\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^+)^{n_{\vec{k},\lambda}} |0\rangle \quad (3.228)$$

Die Fock-Basis des Hilbert-Raumes der zweiten Quantisierung besteht darum aus den Vektorräumen  $\mathcal{U}$  aller dieser Zustände (3.228). Ein einzelner Basisvektor lautet:

$$|\{n_{\vec{k},\lambda}\}\rangle = \prod_{\lambda=\pm 1} \frac{\pi}{k} |n_{\vec{k},\lambda}\rangle \quad (3.229)$$

Das bedeutet, daß in jedem Zustand mit Wellenvektor  $\vec{k}$  und Polarisierung  $\lambda$  beliebig viele Photonen zusammenkommen.

### 3.18 Quantensubstitutionen des elektromagnetischen Feldes:

Wir untersuchen nun exemplarisch die Quantensubstitutionen des elektrischen Feldes, die Unregelmäßigkeiten zum magnetischen Feld verlaufen ganz analog zu

näherst können wir aus (3.151) und (3.217) eine explizite Darstellung für den Operator der elektrischen Feldstärke ab:

$$\hat{E}(\vec{x}, t) = \sum_{\lambda=\pm 1} \int d^3 k \frac{\sqrt{\frac{h}{2(2\pi)^3 \epsilon_0}}}{\sqrt{2(2\pi)^3 \epsilon_0}} \left\{ \vec{E}(k, \lambda) e^{i(k \cdot \vec{x} - \omega_k t)} \hat{a}_{k, \lambda} - \vec{E}(k, \lambda)^* e^{-i(k \cdot \vec{x} - \omega_k t)} \hat{a}_{k, \lambda}^\dagger \right\} \quad (3.230)$$

dessen Vakuumerwartungswert verhindert offenbar wegen (3.227):

$$\langle 0 | \hat{E}(\vec{x}, t) | 0 \rangle = 0 \quad (3.231)$$

Nun untersuchen wir die Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{E}_i(\vec{x}, t) \hat{E}_j(\vec{x}', t') | 0 \rangle &= \sum_{\lambda=\pm 1} \sum_{\lambda'=\pm 1} \int d^3 k \int d^3 k' \frac{\sqrt{\frac{h}{2(2\pi)^3 \epsilon_0}}}{\sqrt{2(2\pi)^3 \epsilon_0}} i \text{Kof } \vec{E}_i(k, \lambda) \hat{a}_{k, \lambda} \\ &\quad - e^{-i(k \cdot \vec{x} - \omega_k t)} \vec{E}_i(k, \lambda)^* \hat{a}_{k, \lambda}^\dagger \} e^{i(k' \cdot \vec{x}' - \omega_{k'} t')} \vec{E}_j(k', \lambda') \hat{a}_{k', \lambda'}^\dagger | 0 \rangle \quad (3.232) \end{aligned}$$

Von den vier Termen, die durch Ausmultiplikation der Gleichungen zusammen entstehen, ist nur einer wegen (3.227) von Null verschieden:

$$\langle 0 | \hat{a}_{k, \lambda} \hat{a}_{k', \lambda'}^\dagger | 0 \rangle \xrightarrow{(3.227)} \langle 0 | [\hat{a}_{k, \lambda}, \hat{a}_{k', \lambda'}^\dagger]_- | 0 \rangle \xrightarrow{(3.215)} \delta_{\lambda, \lambda'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (3.233)$$

Es durch reduziert sich die Korrelationsfunktion (3.232) auf

$$\langle 0 | \hat{E}_i(\vec{x}, t) \hat{E}_j(\vec{x}', t') | 0 \rangle = \sum_{\lambda=\pm 1} \int d^3 k \frac{\sqrt{\frac{h}{2(2\pi)^3 \epsilon_0}}}{\sqrt{2(2\pi)^3 \epsilon_0}} e^{i[k(\vec{x} - \vec{x}') - \omega_k(t - t')]} \vec{E}_i(k, \lambda) \vec{E}_j(k, \lambda)^* \quad (3.234)$$

eine Kontraktion der Komponenten führt wegen (3.173) und (3.209) auf

$$\langle 0 | \hat{E}(\vec{x}, t) \cdot \hat{E}(\vec{x}', t') | 0 \rangle = \int d^3 k \frac{\frac{hc}{(2\pi)^3 \epsilon_0}}{\sqrt{2(2\pi)^3 \epsilon_0}} e^{i[k(\vec{x} - \vec{x}') - c|\vec{k}|(t - t')]} \quad (3.235)$$

Verwendet man Zylinderkoordinaten, so gilt das Integral über im

$$\langle 0 | \hat{E}(\vec{x}, t) \cdot \hat{E}(\vec{x}', t') | 0 \rangle = \frac{\frac{hc}{(2\pi)^3 \epsilon_0}}{2\pi} \int_0^\infty dk k^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{i[k|\vec{x} - \vec{x}'| \cos\theta - c|\vec{k}|(t - t')]} \quad (3.236)$$

Die  $\theta$ -Integration ergibt dann

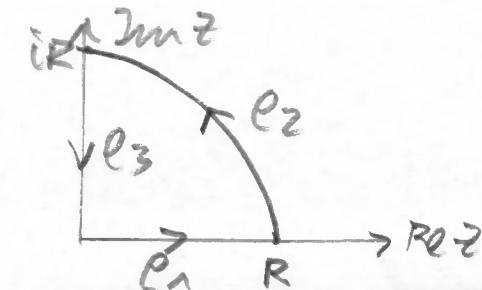
$$\langle 0 | \hat{E}(\vec{x}, t) \cdot \hat{E}(\vec{x}', t') | 0 \rangle = \frac{\frac{hc}{(2\pi)^3 \epsilon_0}}{2\pi} \frac{1}{2i} \int_0^\infty dk k^2 e^{-i[c(t - t') - |\vec{x} - \vec{x}'|]k} e^{i[c(t - t') + |\vec{x} - \vec{x}'|]k} \quad (3.237)$$

Das verbleibende Integral lässt sich mit Hilfe der Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt t^{x-1} e^{-t}, \quad x > 0 \quad (3.238)$$

bestimmen. Durch Integration entlang des geschlossenen Integrationsweges  $\ell = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$  in der komplexen Ebene folgt nämlich mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{\ell_1} dz z^{x-1} e^{-z} + \int_{\ell_2} dz z^{x-1} e^{-z} + \int_{\ell_3} dz z^{x-1} e^{-z} = 0 \quad (3.239)$$



Im Limes  $R \rightarrow \infty$  verschwindet das Integral entlang  $\ell_2$  und aus (3.239) folgt  $\ell_1: z(t) = t, t \in [0, \infty), \quad \ell_3: z(t) = it, t \in [\infty, 0]$

$$\int_0^\infty dt t^{x-1} e^{-t} + \int_\infty^0 dt i(it)^{x-1} e^{-it} = 0 \quad (3.238) \quad \Gamma(x) = i^x \int_0^\infty dt t^{x-1} e^{-it} \quad (3.240)$$

Die Substitution  $t(\vec{r}) = a\vec{r}$  führt dann (3.240) über in

$$\int_0^\infty d\vec{r} \vec{r}^{x-1} e^{-i\vec{a}\vec{r}} = \frac{\Gamma(x)}{(ia)^x} \quad (3.241)$$

Führt man zum Vergleich die Substitution  $t(\vec{r}) = a\vec{r}$  in (3.238) durch, so folgt

$$\int_0^\infty d\vec{r} \vec{r}^{x-1} e^{-a\vec{r}} = \frac{\Gamma(x)}{a^x} \quad (3.242)$$

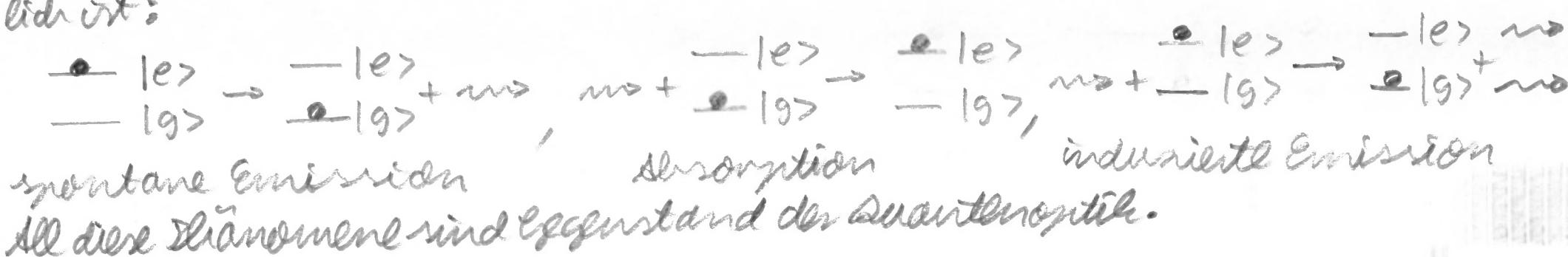
Demnach erhält man (3.241) aus (3.242) auch direkt durch analytische Fortsetzung. Die Auswertung von (3.237) mit Hilfe von (3.241) ergibt dann

$$\langle 0 | \hat{\vec{E}}(\vec{x}, t) \hat{\vec{E}}(\vec{x}', t') | 0 \rangle = \frac{ne}{2\pi^2 \epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|} \left\{ \frac{1}{[c(t-t') - |\vec{x} - \vec{x}'|]^3} - \frac{1}{[c(t-t') + |\vec{x} - \vec{x}'|]^3} \right\} \quad (3.243)$$

Der Limes  $|\vec{x} - \vec{x}'| \rightarrow 0$  lässt sich mit der Regel von de l'Hôpital oder durch Taylor-Entwicklung ausführen:

$$\langle 0 | \hat{\vec{E}}(\vec{x}, t) \hat{\vec{E}}(\vec{x}, t') | 0 \rangle = \frac{e^2 t}{\pi^2 \epsilon_0 c^3 (t-t')^4} \quad (3.244)$$

semmach ist diese Korrelationfunktion endlich, falls  $t \neq t'$  ist. Im Falle  $t = t'$  daoffen die erzeugt die Korrelationsfunktion. Dieses Ergebnis ist konsistent mit der früheren Ergebniß (3.219), daß die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes im Vakuum unendlich groß ist. Trotz dieser Divergenz der Vakuumenergie besitzt die Quantenfluktuationen gemäß (3.243) eine endliche Korrelation, die für den Casimir-Effekt, bei  $T=0$  für die spontane Emission und bei  $T > 0$  sowohl für die Absorption als auch für die induzierte Emission verantwortlich ist:



### 2.1.1. viervektoren:

die spezielle Relativitätstheorie beruht auf zwei Postulaten:

- (P1) die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich.  
 (P2) die fundamentalen physikalischen Gesetze verhalten sich in allen Inertialsystemen

die offizielle Form (Kovarianzprinzip):  
 Im Zufolge aus einer Formalisierung des Postulates (P2) werden viervektoren ein-

geführt. Eindeutig wird ein Summt in der Raum-Zeit (Minkowski-Metrik) durch

einen kontravarianten viervektor

$$(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{x}) = (ct, \vec{x}) \quad (2.1)$$

berücksichtigt. Hierbei vereinbaren wir, daß die griechischen (lateinischen) Indizes von

0 bis 3 (von 1 bis 3) laufen und daß über den griechisch aufsteigende Indizes gemäß der

einheitlichen Summenkonvention aufsummiert wird.

aus dem Postulat (P1) folgt für einen Lichtstrahl in zwei verschiedenen Inertialsystemen

$$c^2 t^2 - \vec{x}^2 = c^2 t'^2 - \vec{x}'^2. \quad (2.2)$$

diese Bedingung läßt sich mit Hilfe der kovarianten Minkowski-Metrik

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

als Invarianz des Skalarproduktes der kontravarianten viervektoren

$x^\mu$  und  $x'^\mu$  formulieren:

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu. \quad (2.4)$$

neben dem kontravarianten viervektor (2.1) führt man gemäß

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad (2.5)$$

noch den kovarianten viervektor ein:

$$(x_p) = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -\vec{x}) = (ct, -\vec{z}). \quad (2.6)$$

dann lautet nämlich die Invarianz des Skalarproduktes (2.4)

$$x^{\mu} x_{\mu} = x'^{\mu} x'_{\mu}. \quad (2.7)$$

aufgrund der offensichtlichen Identität

$$g_{\mu\nu} \delta^{\nu} x^{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\mu} \quad (2.8)$$

kann man das zweiteckige Symbol identifizieren als

$$\delta^{\mu}_{\nu} = g^{\mu}_{\nu}. \quad (2.9)$$

Die kovariante Minkowski-Metrik (2.3) ist mit ihrem Inversen

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

identisch. Aufgrund der offensichtlichen Identität

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{\mu} = 1 \quad (2.11)$$

und (2.9) läßt sich (2.10) als kontravariante Minkowski-Metrik identifizieren. Mit ihrer Hilfe läßt sich umgekehrt ein kovariantes viervektor in einen kontravarianten viervektor umwandeln:

$$x^{\mu} x_{\mu} \stackrel{(2.5)}{=} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} x^{\mu} x_{\mu} \stackrel{(2.11)}{=} \delta^{\mu}_{\mu} x^{\mu} x_{\mu} = x^{\mu} x_{\mu}. \quad (2.12)$$

Zusammenfassend kann man nun noch feststellen, daß die kovariante Metrik (2.4) Indizes runterzieht, während die kontravariante Metrik (2.10) Indizes hochzieht.

Der Begriff des viervektors entspricht sich auf alle Objekte, deren Skalarprodukte in allen Inertialsystemen übereinstimmen. Betrachten wir beispielweise die Energie-Impuls-Dispersionsrelation eines Ladungsträgers in zwei Inertialsystemen

$$E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2, \quad E'^2 = m'^2 c^4 + \vec{p}'^2 c^2, \quad (2.13)$$

so folgt aus der Einheitheit der Massen

$$m = m' \quad (2.14)$$

die Bedingung

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 = \left(\frac{E'}{c}\right)^2 - \vec{p}'^2. \quad (2.15)$$

Führt man den kontravarianten viervektorimpulsvektor ein

$$(p^\mu) = (p_0, p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right), \quad (2.16)$$

so läuft sich die Bedingung (2.15) als Invarianz des Skalarproduktes der kontravarianten Impulsvektoren  $p^\mu$  und  $p'^\mu$  formulieren:

$$g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = g_{\mu\nu} p'^\mu p'^\nu. \quad (2.17)$$

Führt man analog zu (2.5) mit

$$P_\mu = g_{\mu\nu} P^\nu \quad (2.18)$$

auch einen covarianten viervektorimpulsvektor ein

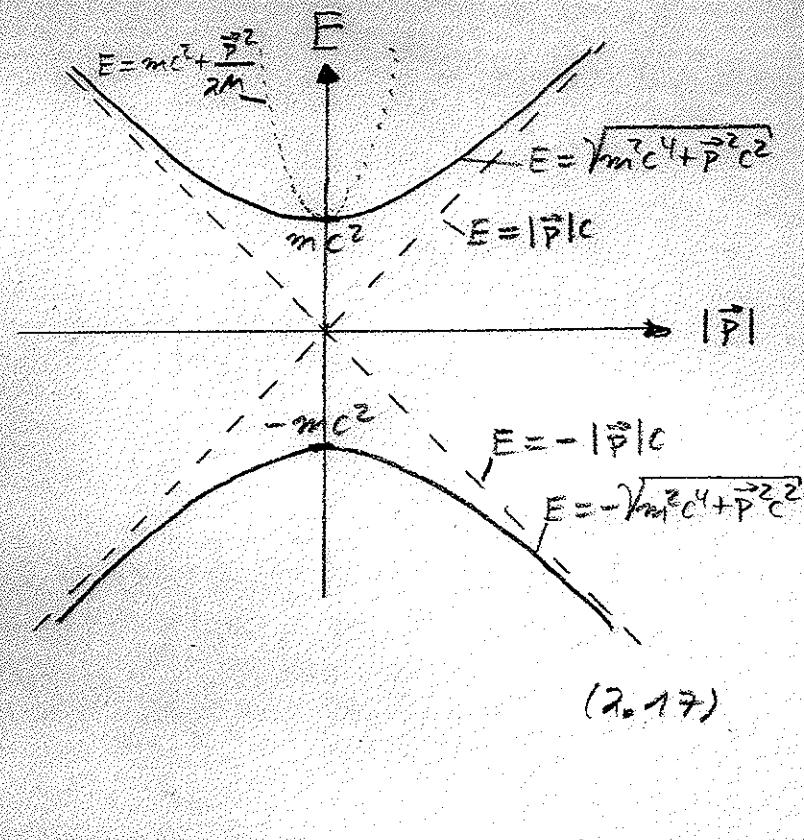
$$(P_\mu) = (p_0, p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right) = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right), \quad (2.19)$$

so lautet die Invarianz des Skalarproduktes (2.17)

$$P_\mu P^\mu = P'_\mu P'^\mu. \quad (2.20)$$

### 2.1.2. definierende Darstellung der Lorentz-Gruppe:

Nun studieren wir die Lorentztransformationen, die sich aus der Invarianz des Skalarproduktes von viervektoren beim Wechsel von einem zum anderen Inertialsystem ergeben. Dazu überzeugen wir uns, daß zwischen zwei Inertialsystemen eine Lineare Zu-



ordinatentransformation somit:

$$x^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \circ x^{\nu} \quad (2.21)$$

Die Invarianz (2.4) führt dann zu einer Eindeutigkeitsbedingung der in (2.21) auftretenden  $4 \times 4$ -Matrizen ( $\Lambda^{\mu}_{\nu}$ ):

$$g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} \xrightarrow{(2.4)} g_{\mu\nu} (\Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}) (\Lambda^{\nu}_{\mu} x^{\mu}) \xrightarrow{(2.21)} g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda^{\nu}_{\mu} x^{\mu} x^{\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\mu} \Lambda^{\nu}_{\nu} x^{\mu} x^{\nu} \quad (2.22)$$

$x^{\mu}, x^{\nu}$  beliebig

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda^{\nu}_{\mu} \circ g_{\mu\nu}$$

Berücksichtigt man die Indexumformungen

$$(\Lambda^T)_{\mu}{}^{\nu} = g_{\mu\lambda} (\Lambda^T)^{\lambda}{}^{\nu} = g_{\mu\lambda} \Lambda^{\lambda}{}^{\nu} = \Lambda^{\nu}{}^{\mu} g_{\mu\lambda} = \Lambda^{\nu}{}^{\mu}, \quad (2.23)$$

so lautet die Invarianz (2.22) in Matrixschreibweise

$$g = \Lambda^T g \Lambda \quad (2.24)$$

Die Menge  $\mathcal{L}$  aller  $4 \times 4$ -Matrizen, die die Minkowski-Metrik  $g$  gemäß (2.24) wieder in die Minkowski-Metrik  $g$  abbilden, definieren die Lorentz-Transformationsgruppe. Sie muss  $\mathcal{L}$  genügen dabei den Gruppenaxiomen:

- Abgeschlossenheit:  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{L}$

$$(\Lambda_1 \Lambda_2)^T g (\Lambda_1 \Lambda_2) = \Lambda_2^T (\Lambda_1^T g \Lambda_1) \Lambda_2 \xrightarrow{(2.24)} \Lambda_2^T g \Lambda_2 \xrightarrow{(2.24)} g \xrightarrow{(2.24)} \Lambda_1 \Lambda_2 \in \mathcal{L}$$

- Assoziativität der Matrizenmultiplikation:  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3 \in \mathcal{L}$

$$(\Lambda_1 \Lambda_2) \Lambda_3 = \Lambda_1 (\Lambda_2 \Lambda_3)$$

- Das Einselement besitzt das Kronecker-Delta-Symbol (2.9) als Komponenten:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = (g^{\mu}_{\nu}) \quad (2.25)$$

$$\Rightarrow g = \Lambda^T g \Lambda^{\mu}_{\nu} \Rightarrow \Lambda^{\mu}_{\nu} \in \mathcal{L}$$

$$\Rightarrow \Lambda \in \mathcal{L}: \Lambda \circ \Lambda = \Lambda \Lambda^{\mu}_{\nu} = \Lambda$$

- zu jedem  $\Lambda \in \mathcal{L}$  gibt es ein Inverses  $\Lambda^{-1}$ :

$$g = \Lambda^T g \Lambda \Rightarrow (\Lambda^T)^{-1} g \Lambda^{-1} = g \Rightarrow (\Lambda^{-1})^T g \Lambda^{-1} = g \Rightarrow \Lambda^{-1} \in \mathcal{L}$$

Man bezeichnet die Menge  $\mathcal{L}$  aller Lorentz-Transformationen als Lorentz-Gruppe bzw. als reedoortbare allgemeine Gruppe  $O(1,3)$  aufgrund der bekannten Gestalt der kovarianten kinematik (2.3). Die Lorentz-Gruppe  $\mathcal{L}$  lässt sich hinsichtlich zweier Merkmale klassifizieren:

(M1) Bildet man die Determinante von (2.24), so folgt

$$\det g = \det \Lambda^T \cdot \det g \cdot \det \Lambda \Rightarrow (\det \Lambda)^2 = 1 \quad (2.26)$$

eine Lorentz-Transformation mit  $\det \Lambda = +1$  ( $\det \Lambda = -1$ ) bezeichnet man als eigentlich bzw. speziell (uneigentlich bzw. nicht speziell).

(M2) aus (2.22) folgt für  $\mu = \nu = 0$ :

$$\Lambda = g_{00} = \Lambda^0_0 g_{03} \Lambda^3_0 = \Lambda^0_0 \Lambda^0_0 - \Lambda^i_0 \Lambda^i_0 \Rightarrow (\Lambda^0_0)^2 = 1 + (\Lambda^i_0)^2 \Rightarrow (\Lambda^0_0)^2 \geq 1 \quad (2.27)$$

eine Lorentz-Transformation  $\Lambda$  mit  $\Lambda^0_0 \geq 1$  ( $\Lambda^0_0 \leq -1$ ) bezeichnet man als orthodromen (nicht antiodromen).

Demnach zerfällt die Lorentz-Gruppe in vier verschiedene Zweige:

Zweig	$\det \Lambda$	$\Lambda^0_0$	Beispiel
$\mathcal{L}_1$	+1	$> 0$	Identität: $\text{diag}(1, 1, 1, 1)$
$\mathcal{L}_2$	-1	$> 0$	Raum-Spiegelung: $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$
$\mathcal{L}_3$	-1	$< 0$	Zeit-Spiegelung: $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$
$\mathcal{L}_4$	+1	$< 0$	Raum-Zeit-Spiegelung: $\text{diag}(-1, -1, -1, -1)$

Da sich Lorentz-Transformationen aus verschiedenen Zweigen nicht ineinander überführen lassen, ist die Lorentz-Gruppe nicht zusammenhängend. Nur der Zweig  $\mathcal{L}_1$  der eigentlichen Orthodromen Lorentz-Transformationen bildet ei-

eine Untergruppe der Lorentz-Gruppe, da das Hintereinanderschalten zweier Transformationen aus diesem Zweig nicht hinausführen. Deshalb beschäftigen wir uns im Folgenden nur mit diesem Zweig  $L_1$  und bezeichnen die eigentliche orthodrome Lorentz-Gruppe der Einfachheit halber verkürzend als die Lorentz-Gruppe.

### 2.1.3. Definierende Darstellung der Lorentz-Algebra:

Die Menge aller  $4 \times 4$ -Matrizen  $\Lambda$  wird insgesamt durch  $4 \cdot 4 = 16$  Freiheitsgrade beschränkt, wobei die Invarianz (2.22) zu  $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10$  Nebenbedingungen führt. Deshalb ist die Dimension der Lorentz-Gruppe

$$n = 16 - 10 = 6 \quad (2.28)$$

Nun untersuchen wir die Lorentz-Gruppe in der Umgebung des Einselementes in (2.25). Alle Elemente der Lorentz-Gruppe, die infinitesimal vom Einselement abweichen, lassen sich darstellend als

$$\Lambda^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + w^{\mu\nu} \quad (2.29)$$

Setzt man (2.29) in die Invarianz (2.22) ein, so erhält man bis zur ersten Ordnung in den Abweichungen  $w^{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} 1^0 \mu 1^3 \nu g_{03} &= (g^0 \mu + w^0 \mu)(g^3 \nu + w^3 \nu) g_{03} \approx g^0 \mu g^3 \nu + g_{03} + w^0 \mu g^3 \nu + \\ &+ g^0 \mu w^3 \nu g_{03} = g^0 \mu g_{03} + w^0 \mu g_{03} + w^3 \nu g_{03} = g_{\mu\nu} + w_{\mu\nu} + w_{\nu\mu} \stackrel{!}{=} g_{\mu\nu} \\ \Rightarrow w_{\mu\nu} + w_{\nu\mu} &= 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Die Abweichungen ( $w_{\mu\nu}$ ) der Lorentz-Transformationen von der Identität sind demnach durch antisymmetrische  $4 \times 4$ -Matrizen gegeben. Die Menge aller antisymmetrischen  $4 \times 4$ -Matrizen stellen die Lorentz-Algebra der Lorentz-Gruppe dar. Die dimensionierende Lorentz-Algebra stimmt mit der der Lorentz-Gruppe in (2.28) überein.

Unter Ausnutzung der Antisymmetrie (2.30) lassen sich die Elemente ( $w_{\mu\nu}$ ) der Lorentz-Algebra folgendermaßen darstellen:

$$w_{\mu\nu} = g^{\alpha\mu} g^\nu_\alpha - w_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g^{\alpha\mu} g^\nu_\alpha - g^\nu_\alpha g^\mu_\alpha) w_{\alpha\beta}. \quad (2.31)$$

Demnach werden die Elemente ( $w_{\mu\nu}$ ) der Lorentz-Algebra, die auch als Eigenvektoren der Lorentz-Gruppe bezeichnet werden, nach Basis-Generatoren aufgeteilt:

$$w_{\mu\nu} = -\frac{i}{2} (L^{\alpha\beta})^{\mu\nu} w_{\alpha\beta}. \quad (2.32)$$

Ziel bei stellen  $w_{\alpha\beta}$  Entwicklungskoeffizienten dar und die Darstellungsmatrizen der Basisgeneratoren  $L^{\alpha\beta}$  lauten:

$$(L^{\alpha\beta})^{\mu\nu} = i \{ g^{\alpha\mu} g^\nu_\beta - g^\nu_\alpha g^\mu_\beta \}. \quad (2.33)$$

Die Indizes  $\alpha, \beta$  kennzeichnen dabei die einzelnen Basisgeneratoren  $L^{\alpha\beta}$ , während die Indizes  $\mu, \nu$  die jeweiligen Komponenten  $(L^{\alpha\beta})^{\mu\nu}$  des Basisgenerators  $L^{\alpha\beta}$  kennzeichnen. Die Darstellungsmatrizen (2.33) besitzen offenbar die beiden Symmetrieeigenschaften

$$(L^{\alpha\beta})^{\mu\nu} \stackrel{(2.33)}{=} \{ g^{\alpha\mu} g^\nu_\beta - g^\nu_\alpha g^\mu_\beta \} \stackrel{(2.33)}{=} -(L^{\beta\alpha})^{\mu\nu}, \quad (2.34)$$

$$(L^{\alpha\beta})^{\mu\nu} \stackrel{(2.33)}{=} \{ g^\mu_\alpha g^\nu_\beta - g^\nu_\beta g^\mu_\alpha \} \stackrel{(2.33)}{=} -(L^{\beta\alpha})^{\mu\nu}. \quad (2.35)$$

Es wird nun der Kommutator zwischen zwei Basisgeneratoren  $L^{\alpha\beta}$  und  $L^{\delta\gamma}$  definiert:

$$\begin{aligned} ([L^{\alpha\beta}, L^{\delta\gamma}]_-)^{\mu\nu} &= (L^{\alpha\beta})^{\mu\lambda} (L^{\delta\gamma})^{\lambda\nu} - (L^{\delta\gamma})^{\mu\lambda} (L^{\alpha\beta})^{\lambda\nu} \stackrel{(2.33)}{=} \{ g^{\alpha\mu} g^\delta_\lambda - g^\delta_\alpha g^\mu_\lambda \} \\ &\quad \cdot \{ g^{\beta\lambda} g^\gamma_\nu - g^{\gamma\lambda} g^\beta_\nu \} - \{ g^{\alpha\mu} g^\delta_\lambda - g^\delta_\alpha g^\mu_\lambda \} \{ g^{\beta\lambda} g^\gamma_\nu - g^\gamma_\beta g^\lambda_\nu \} \\ &= g^{\alpha\mu} g^\delta_\lambda g^{\beta\lambda} g^\gamma_\nu - g^{\alpha\mu} g^\delta_\lambda g^{\gamma\lambda} g^\beta_\nu - g^{\beta\lambda} g^\gamma_\nu g^{\alpha\mu} g^\delta_\lambda + g^{\beta\lambda} g^\gamma_\nu g^{\delta\lambda} g^\alpha_\mu - g^{\alpha\mu} g^\delta_\lambda g^{\beta\lambda} g^\gamma_\nu + g^{\alpha\mu} g^\delta_\lambda g^{\gamma\lambda} g^\beta_\nu + g^{\beta\lambda} g^\gamma_\nu g^{\alpha\mu} g^\delta_\lambda - g^{\beta\lambda} g^\gamma_\nu g^{\delta\lambda} g^\alpha_\mu \\ &= g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} - g^{\beta\delta} g^{\alpha\gamma} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\beta\gamma} g^{\alpha\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\gamma\beta} + g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} + g^{\beta\delta} g^{\alpha\gamma} - g^{\beta\gamma} g^{\alpha\delta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= i \{ -g^{\alpha\delta} i(g^{B\mu} g^\sigma_{\nu} - g^{\mu\nu} g^\sigma_{\alpha}) - g^{B\delta} i(g^{\alpha\mu} g^\sigma_{\nu} - g^{\mu\nu} g^\sigma_{\alpha}) \\
 &\quad + g^{\alpha\delta} i(g^{\mu\nu} g^\sigma_{\alpha} - g^{\mu\nu} g^\sigma_{\alpha}) + g^{B\delta} i(g^{\alpha\mu} g^\sigma_{\alpha} - g^{\mu\nu} g^\sigma_{\alpha}) \} \\
 (2.33) \quad &\{ g^{\alpha\delta} (L^{B\tau})^{\mu}_{\nu} + g^{B\delta} (L^{\alpha\tau})^{\mu}_{\nu} - g^{\alpha\delta} (L^{B\delta})^{\mu}_{\nu} - g^{B\delta} (L^{\alpha\delta})^{\mu}_{\nu} \} \\
 \Rightarrow [L^{\alpha B}, L^{\delta \delta}] = &i \{ g^{\alpha\delta} L^{B\delta} + g^{B\delta} L^{\alpha\delta} - g^{\alpha\delta} L^{B\delta} - g^{B\delta} L^{\alpha\delta} \} \quad (2.36)
 \end{aligned}$$

Der Kommutator zwischen zwei Basisgeneratoren lässt sich demnach zusammenfassen zu

$$[L^{\alpha B}, L^{\delta \delta}]_- = i C_{\epsilon_B}^{\alpha B \delta \delta} L^{\epsilon_B}, \quad (2.37)$$

wobei die Strukturkonstanten der Lorentz-Algebra gegeben sind durch

$$C_{\epsilon_B}^{\alpha B \delta \delta} = g^{\alpha\delta} g^B_{\epsilon} g^\delta_{\beta} + g^{B\delta} g^\alpha_{\epsilon} g^\delta_{\beta} - g^{\alpha\delta} g^B_{\epsilon} g^\delta_{\beta} - g^{B\delta} g^\alpha_{\epsilon} g^\delta_{\beta}. \quad (2.38)$$

#### 2.1.4. Einteilung der Basisgeneratoren:

23.05.2000

Die Basisgeneratoren  $L^{\alpha B}$  lassen sich in zwei Klassen einteilen:

$$L_\alpha = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\mu\lambda} L^{\mu\lambda}, \quad (2.39)$$

$$M_\alpha = L^{\alpha 2}, \quad (2.40)$$

wobei die lateinischen Indizes die Werte 1, 2, 3 annehmen und die griechischen Indizes die Werte 0, 1, 2, 3 durchlaufen. Nach (2.33), (2.39) und (2.40) ergeben sich dabei die folgenden expliziten Darstellungen für die Basisgeneratoren der Invarianzen

$$L_1 = L^{23} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g^{22}g^{33} \\ 0 & 0 & g^{33}g^{22} & 0 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_2 = L^{31} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g^{11}g^3_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g^{33}g^1_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_3 = L^{12} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g^{11}g^2_2 & 0 \\ 0 & g^{22}g^1_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

und für die Basisgeneratoren der Boosts

$$M_1 = L^{01} = (+i) \begin{pmatrix} 0 & g^{00}g^1_1 & 0 & 0 \\ -g^{00}g^0_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (+i) \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = L^{02} = (+i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & g^{00}g^2_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g^{22}g^0_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (+i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = L^{03} = (+i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g^{00}g^3_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g^{33}g^0_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (+i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

durch Spezialisierung von (2.36) auf zeitliche bzw. räumliche Indizes unter  
durch Beaditung der Invertierung von (2.39)

$$\epsilon_{ijk} L_k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{kml} L^{lm} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmi} L^{lm} = \frac{1}{2} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) L^{lm} = \frac{1}{2} (L^{ij} - L^{ji}) \quad (2.43)$$

(2.34)

$$L^{ij} = \epsilon_{ijk} L_k$$

$$\text{i.) } [L_k, L_e] = \frac{1}{4} \epsilon_{kmn} \epsilon_{lmn} [L^{mn}, L^{lm}] - \frac{1}{4} \epsilon_{kmn} \epsilon_{lmn} \{ g^{ml} L^{nm} + g^{nl} L^{mn} - g^{mn} L^{nl} - g^{nl} L^{mn} \} = \frac{-i}{4} \{ \epsilon_{kmn} \epsilon_{lmn} L^{nm} + \epsilon_{kmn} \epsilon_{lmn} L^{mn} - \epsilon_{kmn} \epsilon_{lmn} L^{nl} - \epsilon_{kmn} \epsilon_{lmn} L^{mn} \} = \frac{-i}{4} \{ \epsilon_{nlm} \epsilon_{kmn} L^{nm} + \epsilon_{kmn} \epsilon_{nlm} L^{mn} - \epsilon_{kmn} \epsilon_{nlm} L^{nl} - \epsilon_{kmn} \epsilon_{nlm} L^{mn} \} = \frac{-i}{4} \{ (\delta_{nl} \delta_{km} - \delta_{mn} \delta_{kl}) L^{nm} + (\delta_{kn} \delta_{ml} - \delta_{kl} \delta_{mn}) L^{mn} - (\delta_{nl} \delta_{kl} - \delta_{nl} \delta_{km}) L^{nl} - (\delta_{kl} \delta_{mn} - \delta_{km} \delta_{nl}) L^{mn} \} = \frac{-i}{4} \{ L^{lk} - \cancel{\delta_{kl} L^{nn}} + L^{lk} - \cancel{\delta_{kl} L^{nn}} + L^{lk} \} \xrightarrow{(2.34)} \frac{-i}{4} \cdot 4 L^{lk} \xrightarrow{(2.34)} i \cdot L^{kk}$$

$$\xrightarrow{(2.43)} [L_k, L_e]_- = i \epsilon_{kem} L_m. \quad (2.44)$$

$$\text{ii.) } [L_k, M_l] = \frac{1}{2} \epsilon_{kmn} [L^{mn}, L^{lo}] - \frac{i}{2} \epsilon_{kmn} \{ g^{ml} L^{no} + g^{no} L^{ml} - g^{ml} L^{no} \} = \frac{-i}{2} \{ \epsilon_{ken} L^{no} - \epsilon_{kme} L^{no} \} = \frac{-i}{2} \{ \epsilon_{ken} L^{no} + \epsilon_{ken} L^{no} \} = -i \epsilon_{ken} L^{no}$$

$$\xrightarrow{(2.34), (2.40)} [L_k, M_l]_- = i \epsilon_{kem} M_m. \quad (2.45)$$

$$\text{iii.) } [M_k, M_l] = \frac{1}{2} [L^{lo}, L^{oe}] \xrightarrow{(2.36)} i \{ g^{oe} \cancel{L^{lo}} + g^{lo} \cancel{L^{oe}} - g^{oo} L^{le} - g^{le} L^{oe} \} \xrightarrow{(2.34)} -i L^{le} \xrightarrow{(2.43)} -i \epsilon_{kem} L_m \quad (2.46)$$

Der Kommutator (2.44) besagt, dass die Basisgeneratoren der Drehungen  $L_1, L_2, L_3$  eine Untergruppe der Lorentz-Symmetrie bilden.

## 2.1.5. Lie-Theorem:

Betrachtet man die Lorentz-Gruppe in der Nähe des Einselementes, so treten gemäß (2.29) und (2.32) die Basisgeneratoren  $L^{\alpha\beta}$  auf:

$$L^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{i}{\lambda} (L^{\alpha\beta})^{\mu\nu} \text{ wobei} \quad (2.47)$$

Das Lie-Theorem besagt nun unabhängig davon aus der Summe der Basisgeneratoren  $L^{\alpha\beta}$  jedes Element der Lorentz-Gruppe durch Anwendung einer Matrixexpontentialfunktion bestimmen kann:

$$L = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} L^{\alpha\beta} w_{\alpha\beta} \right\} \quad (2.48)$$

Entsprechend der Unterteilung der Basisgeneratoren  $L^{\alpha\beta}$  in die Basisgeneratoren der Drehungen (2.39) und der Boosts (2.40) werden die Entwicklungsgeschwindigkeiten  $w_{\alpha\beta}$  in Winkel

$$\phi_k = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta m} w_{\alpha\beta m} \quad (2.49)$$

und in Rapidität

$$g_k = w_{0k} \quad (2.50)$$

aufgeteilt. Das Lie-Theorem (2.48) lautet dann unter Beachtung von (2.30) und (2.34):

$$L = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} L^{00} w_{00} - L^{0k} w_{0k} \right\} \xrightarrow{(2.40), (2.43), (2.49), (2.50)} \exp \left\{ -i \vec{\varphi} \vec{L} - i \vec{g} \vec{n} \right\} \quad (2.51)$$

Zu folgenden unterscheiden wir das Lie-Theorem (2.51) für die Drehungen  $\vec{g} = \vec{0}$  und für die Boosts  $\vec{\varphi} = \vec{0}$ .

### 2.1.6. Rotationen:

Nach dem Lie-Theorem (2.51) ist eine beliebige Rotation mit dem Winkel  $\vec{\varphi}$  durch die folgende Matrixexpontentialfunktion definiert:

$$R(\vec{\varphi}) = \exp \left\{ -i \vec{\varphi} \vec{L} \right\}. \quad (2.52)$$

Beachtet man die expliziten Ausdrücke für Matrizen der Basisgeneratoren  $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$  in (2.41), so folgt

$$R(\vec{\varphi}) = \exp \{ \vec{\varphi} \} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} A^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} A^{2n+1}, \quad (2.53)$$

wobei  $A$  gegeben ist als

$$A = \varphi_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \varphi_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \varphi_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \varphi_2 \\ 0 & 0 & -\varphi_3 & 0 \\ 0 & \varphi_3 & 0 & -\varphi_1 \\ 0 & -\varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

Multipliziert man  $A$  mit sich selber, erhält man

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ 0 & \varphi_3 & 0 & -\varphi_1 \\ 0 & -\varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ 0 & \varphi_3 & 0 & -\varphi_1 \\ 0 & -\varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\varphi_3)^2 - (\varphi_2)^2 & \varphi_1 \varphi_2 & \varphi_1 \varphi_3 \\ 0 & \varphi_1 \varphi_2 & -(\varphi_1)^2 - (\varphi_3)^2 & \varphi_2 \varphi_3 \\ 0 & \varphi_1 \varphi_3 & \varphi_2 \varphi_3 & -(\varphi_1)^2 - (\varphi_2)^2 \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Außerdem besitzt die Matrix  $A$  das charakteristische Polynom

$$\det(A - \lambda I) = (-1) \begin{vmatrix} -\lambda & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & -\lambda & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^3 + |\vec{\varphi}|^2). \quad (2.56)$$

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton folgt dann für die dritte Potenz von  $A$

$$A^3 = -|\vec{\varphi}|^2 A, \quad (2.57)$$

was man auch durch Multiplikation von (2.54) mit (2.55) direkt nachweisen kann. Ein die geraden und ungeraden Zeilen von  $A$  erweitert sich damit:

$$A^{2n+1} = \{-|\vec{\varphi}|^2\}^n \cdot A; \quad n=0,1,2,\dots \quad (2.58)$$

$$A^{2n} = A \cdot A^{2(n-1)+1} = \{-|\vec{\varphi}|^2\}^{n-1} \cdot A^2; \quad n=1,2,\dots \quad (2.59)$$

Setzt man (2.58) und (2.59) in (2.53) ein, so gilt:

$$\begin{aligned} R(\vec{\varphi}) &= I + \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-|\vec{\varphi}|^2)^n}{(2n+1)!} \right\} A + \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-|\vec{\varphi}|^2)^{n-1}}{(2n)!} \right\} A^2 \\ &= I + \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n |\vec{\varphi}|^{2n+1}}{(2n+1)!} \right\} \frac{A}{|\vec{\varphi}|} - \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n |\vec{\varphi}|^{2n}}{(2n)!} \right\} \frac{A^2}{|\vec{\varphi}|^2}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Beachtet man die Taylor-Polynome der trigonometrischen Funktionen

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad (2.61)$$

so gilt (2.60) über in

$$R(\vec{\varphi}) = I + \sin|\vec{\varphi}| \cdot \frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|} + \{1 - \cos|\vec{\varphi}|\} \frac{\vec{\varphi}^2}{|\vec{\varphi}|^2}. \quad (2.62)$$

Die Matrizen (2.54) und (2.55) führen damit zu

$$R(\vec{\varphi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos|\vec{\varphi}| + (1 - \cos|\vec{\varphi}|) \frac{\varphi_1^2}{|\vec{\varphi}|^2} & -\sin|\vec{\varphi}| \frac{\varphi_3}{|\vec{\varphi}|} + (1 - \cos|\vec{\varphi}|) \frac{\varphi_1 \varphi_2}{|\vec{\varphi}|^2} \\ 0 & \sin|\vec{\varphi}| \frac{\varphi_1}{|\vec{\varphi}|} - (1 - \cos|\vec{\varphi}|) \frac{\varphi_1 \varphi_2}{|\vec{\varphi}|^2} & \cos|\vec{\varphi}| + (1 - \cos|\vec{\varphi}|) \frac{\varphi_2^2}{|\vec{\varphi}|^2} \\ 0 & -\sin|\vec{\varphi}| \frac{\varphi_2}{|\vec{\varphi}|} + (1 - \cos|\vec{\varphi}|) \frac{\varphi_1 \varphi_3}{|\vec{\varphi}|^2} & \sin|\vec{\varphi}| \frac{\varphi_1}{|\vec{\varphi}|} + (1 - \cos|\vec{\varphi}|) \frac{\varphi_2 \varphi_3}{|\vec{\varphi}|^2} \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

Diese Darstellungsmatrix besitzt die Eigenschaften

$$(E1) \quad S_P R(\vec{\varphi}) = 2 + 2 \cos|\vec{\varphi}|, \quad (2.64)$$

$$(E2) \quad R(\vec{\varphi}) \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\varphi} \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

sodass (2.63) tatsächlich als Rotationsmatrix interpretiert werden kann. In Komponentendarstellung lautet die räumlichen Komponenten

$$R_{ijk}(\vec{\varphi}) = \sin|\vec{\varphi}| \frac{\varphi_i}{|\vec{\varphi}|} \epsilon_{ijk} + (1 - \cos|\vec{\varphi}|) \frac{\varphi_j \varphi_k}{|\vec{\varphi}|^2} + \cos|\vec{\varphi}| \delta_{jk}. \quad (2.66)$$

Bildet man einen räumlichen Vektor  $\vec{x}$  mit (2.66) ab, so erhält man  $\vec{x}'$  mit

$$x'_j = \sin|\vec{\varphi}| \epsilon_{5ik} \frac{\varphi_i}{|\vec{\varphi}|} x_k + (1 - \cos|\vec{\varphi}|) \frac{\varphi_j \varphi_k}{|\vec{\varphi}|^2} x_k + \cos|\vec{\varphi}| x_j. \quad (2.67)$$

In Vektordarstellung lautet diese Abbildungsregel mit

$$\vec{x}' = \sin|\vec{\varphi}| \frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|} \times \vec{x} + (1 - \cos|\vec{\varphi}|) \frac{\vec{\varphi} \vec{x}}{|\vec{\varphi}|} \cdot \frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|} + \cos|\vec{\varphi}| \vec{x}. \quad (2.68)$$

Mit der Zerlegung in

$$\vec{x}_{\parallel} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \cdot |\vec{x}|, \quad \vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel} \quad (2.69)$$

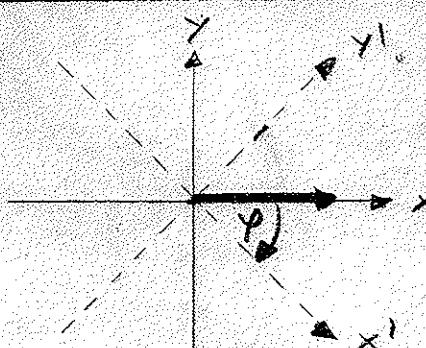
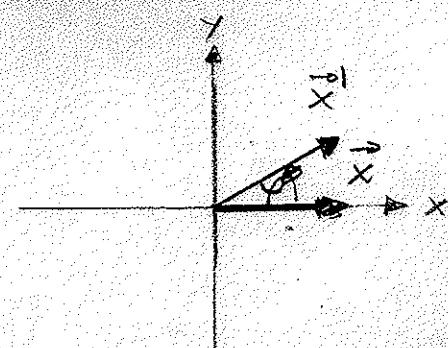
geht dies über in

$$\vec{x}' = \vec{x}_{\parallel} + \cos(\varphi) \vec{x}_{\perp} + \sin(\varphi) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \times \vec{x}. \quad (2.70)$$

Spezialisiert man auf eine Rotation um die Achse  $\vec{z} = (0, 0, 1)$ , erhält man

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

Eine Koordinatentransformation wie in (2.71) läßt zwei Interpretationen zu:

Passive Rotation	Active Rotation
Festhalten des Körpers	Bewegung des Körpers
Bewegung des Koordinatensystems	Festhalten des Koordinatensystems
 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 \\ \sin \varphi & 0 \end{pmatrix}$

Active und passive Koordinatentransformationen werden dann nach entgegengesetzt.

### 2.1.7. Boosts:

Nach dem Lie-Theorem (2.51) ist ein beliebiges Boost mit der Rapidity  $\vec{\beta}$  durch folgende Matrixexponentialfunktion definiert:

$$B(\vec{\beta}) = \exp \{-i \vec{\beta} \vec{m}\} \quad (2.72)$$

Beachtet man die expliziten Darstellungsmatrizen der Basisgeneratoren  $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$  in (2.42), so folgt

$$B(\vec{\beta}) = \exp(A) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} A^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} A^{2n+1}, \quad (2.73)$$

wobei  $A$  gegeben ist durch

$$A = g_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + g_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + g_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ g_2 & 0 & 0 \\ g_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.74)$$

Multipliziert man  $A$  mit sich selber, erhält man

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & 0 & 0 & 0 \\ g_2 & 0 & 0 & 0 \\ g_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & 0 & 0 & 0 \\ g_2 & 0 & 0 & 0 \\ g_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |g|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_1^2 & g_1 g_2 & g_1 g_3 \\ 0 & g_2 g_1 & g_2^2 & g_2 g_3 \\ 0 & g_3 g_1 & g_3 g_2 & g_3^2 \end{pmatrix}. \quad (2.75)$$

Außerdem besitzt  $A$  das charakteristische Polynom

$$\det(A - 2I) = \begin{vmatrix} -\lambda & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & -\lambda & 0 & 0 \\ g_2 & 0 & -\lambda & 0 \\ g_3 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-g_3) \begin{vmatrix} g_1 & -\lambda & 0 \\ g_2 & 0 & -\lambda \\ g_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} + (-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & g_1 & g_2 \\ g_1 & -\lambda & 0 \\ g_2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -g_3 \lambda^2 - (-\lambda)^3 + 2g_1^2 + 2g_2^2 + 2g_3^2 = \lambda^3 - |\vec{g}|^2 \lambda. \quad (2.76)$$

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton folgt dann für die dritte Potenz von  $A$

$$A^3 = |\vec{g}|^2 A, \quad (2.77)$$

was man auch durch Multiplikation von (2.74) mit (2.75) direkt nachweisen

kann. Für die geraden und ungeraden Potenzen von  $\vec{A}$  ergibt sich damit

$$A^{2n+1} = |\vec{g}|^{2n} \cdot A ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.78)$$

$$A^{2n} = A \cdot A^{2(n-1)+1} = |\vec{g}|^{2n-2} A^2 ; \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.79)$$

Setzt man (2.78) und (2.79) in (2.73) ein, so gilt

$$\begin{aligned} B(\vec{g}) &= I + \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} |\vec{g}|^{2n} \right\} A + \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} |\vec{g}|^{2n-2} \right\} A^2 \\ &= I + \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} |\vec{g}|^{2n+1} \right\} \frac{A}{|\vec{g}|} + \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} |\vec{g}|^{2n} \right\} \frac{A^2}{|\vec{g}|^2} \end{aligned} \quad (2.80)$$

Beachtet man die Taylor-Reihen der hyperbolischen Funktionen

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \quad (2.81)$$

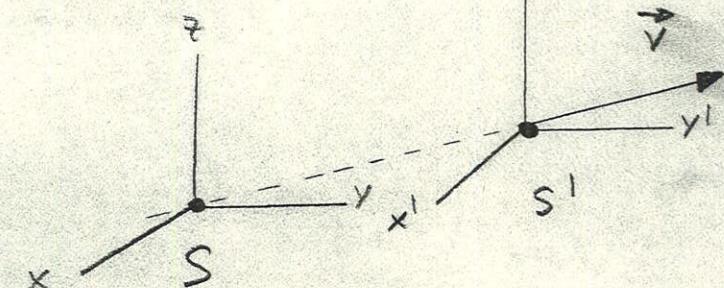
so geht (2.80) über in

$$B(\vec{g}) = I + \sinh |\vec{g}| \cdot \frac{A}{|\vec{g}|} + \{ \cosh |\vec{g}| - 1 \} \frac{A^2}{|\vec{g}|^2}. \quad (2.82)$$

Die Matrizen (2.74) und (2.75) führen damit zu

$$B(\vec{g}) = \begin{pmatrix} \cosh |\vec{g}| & \sinh |\vec{g}| \frac{g_1}{|\vec{g}|} & \sinh |\vec{g}| \frac{g_2}{|\vec{g}|} & \sinh |\vec{g}| \frac{g_3}{|\vec{g}|} \\ \sinh |\vec{g}| \frac{g_1}{|\vec{g}|} & 1 + (\cosh |\vec{g}| - 1) \frac{g_1^2}{|\vec{g}|^2} & (\cosh |\vec{g}| - 1) \frac{g_1 g_2}{|\vec{g}|^2} & (\cosh |\vec{g}| - 1) \frac{g_1 g_3}{|\vec{g}|^2} \\ \sinh |\vec{g}| \frac{g_2}{|\vec{g}|} & (\cosh |\vec{g}| - 1) \frac{g_1 g_2}{|\vec{g}|^2} & 1 + (\cosh |\vec{g}| - 1) \frac{g_2^2}{|\vec{g}|^2} & (\cosh |\vec{g}| - 1) \frac{g_2 g_3}{|\vec{g}|^2} \\ \sinh |\vec{g}| \frac{g_3}{|\vec{g}|} & (\cosh |\vec{g}| - 1) \frac{g_1 g_3}{|\vec{g}|^2} & (\cosh |\vec{g}| - 1) \frac{g_2 g_3}{|\vec{g}|^2} & 1 + (\cosh |\vec{g}| - 1) \frac{g_3^2}{|\vec{g}|^2} \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

Interpretiert man den Boost (2.83) passiv, so ist eine Beziehung zwischen der Rapidität  $\vec{g}$  und der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  gegeben, mit der sich das Koordinatensystem  $S'$  bezüglich  $S$  bewegt. Sie ergibt sich aus der Forderung,



dass der Koordinatenwechsel von  $S'$  bezüglich  $S$  und  $S'$  die folgenden Raum-Zeit-Transformationsgesetze besitzt:

$$(2.84) \quad \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\tau \\ \vec{x} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\tau' \\ \vec{x}' \end{pmatrix}.$$

Setzt man (2.84) mit Hilfe von (2.83) nach (2.84) ab, so ergibt

$$\vec{\beta} = \frac{1}{c} \sinh |\vec{\beta}| + \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} \cdot \frac{\vec{\beta} + \vec{\gamma}}{c} \sinh |\vec{\beta}|, \quad (2.85)$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} \sinh |\vec{\beta}| + \frac{\vec{\beta}}{c} - \frac{1}{c} \cosh |\vec{\beta}| - \alpha \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}}{|\vec{\beta}|c} \cdot \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}. \quad (2.86)$$

aus (2.86) liest man dann ab

$$\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} \left[ \sinh |\vec{\beta}| + (\cosh |\vec{\beta}| - 1) \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}}{|\vec{\beta}|c} \right] + \frac{\vec{\gamma}}{c} = \vec{0}, \quad (2.87)$$

d.h. Rapidity  $|\vec{\beta}|$  und Geschwindigkeit  $\vec{\gamma}$  sind zueinander antiparallel:

$$\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} = - \frac{\vec{\gamma}}{|\vec{\gamma}|}. \quad (2.88)$$

Setzt man (2.88) in (2.87) ein, folgt für die Beziehungen der Rapiditäten und der Geschwindigkeiten:

$$\frac{|\vec{\gamma}|}{c} = \sinh |\vec{\beta}| - \frac{|\vec{\gamma}|}{c} (\cosh |\vec{\beta}| - 1) \rightarrow \frac{|\vec{\gamma}|}{c} = \tanh |\vec{\beta}|, \quad (2.89)$$

$$\cosh |\vec{\beta}| = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 |\vec{\beta}|}} \quad (2.89) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{\gamma}|^2}{c^2}}} = \gamma, \quad (2.90)$$

$$\sinh |\vec{\beta}| = \frac{\tanh |\vec{\beta}|}{\sqrt{1 - \tanh^2 |\vec{\beta}|}} \quad (2.89), (2.90) \quad \frac{|\vec{\gamma}|}{c} \cdot \gamma. \quad (2.91)$$

Nach (2.83), (2.88)-(2.91) lautet die Darstellungsmatrix eines Boosts

$$B(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v_i}{c} \gamma \\ -\frac{v_i}{c} \gamma & \delta_{i5} + (\gamma - 1) \frac{v_i v_j}{|\vec{v}|^2} \end{pmatrix}. \quad (2.92)$$

Außerdem ergibt sich aus (2.85) und (2.88) - (2.91) die Zeitdilatation zu

$$\tau' = \tau \left\{ \gamma - \frac{\vec{v}^2}{c^2} \right\} \xrightarrow{(2.90)} \tau \cdot \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}. \quad (2.93)$$

### 2.1.8. Additionstheorem für Geschwindigkeiten:

Führt man zwei Boost-Transformationen (2.92) hintereinander aus, so gilt

$$\begin{aligned} B(\vec{v}_2) B(\vec{v}_1) &= \left( \begin{array}{cc} \gamma_2 & -\frac{v_2}{c} \gamma_2 \\ -\frac{v_2}{c} \gamma_2 & I + (\gamma_2 - 1) \frac{\vec{v}_2 \otimes \vec{v}_2}{\vec{v}_2^2} \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} \gamma_1 & -\frac{v_1}{c} \gamma_1 \\ -\frac{v_1}{c} \gamma_1 & I + (\gamma_1 - 1) \frac{\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_1}{\vec{v}_1^2} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{cc} \gamma_1 \gamma_2 \left( 1 + \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2} \right) & -\gamma_1 \gamma_2 \frac{\vec{v}_1}{c} - \frac{\vec{v}_2}{c} \gamma_2 - \gamma_2 (\gamma_1 - 1) \frac{\vec{v}_1}{c} \cdot \frac{\vec{v}_2 \vec{v}_2}{\vec{v}_1^2} \\ \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2} \gamma_1 \gamma_2 + I + (\gamma_2 - 1) \frac{\vec{v}_2 \otimes \vec{v}_2}{\vec{v}_2^2} + (\gamma_1 - 1) \frac{\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_1}{\vec{v}_1^2} + (\gamma_2 - 1)(\gamma_1 - 1) \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 \otimes \vec{v}_1}{\vec{v}_1^2 \vec{v}_2^2} & \end{array} \right) \quad (2.94) \end{aligned}$$

Damit dies wieder eine Boost-Transformation (2.92) zur Geschwindigkeit  $\vec{v}$  darstellt, muss gelten:

$$i.) \quad \frac{\vec{v}}{c} \gamma = \gamma_1 \gamma_2 \frac{\vec{v}_1}{c} + \frac{\vec{v}_2}{c} \gamma_2 + \gamma_2 (\gamma_1 - 1) \frac{\vec{v}_1}{c} \cdot \frac{\vec{v}_2 \vec{v}_2}{\vec{v}_1^2}, \quad (2.95)$$

$$ii.) \quad \gamma = \gamma_1 \gamma_2 \left( 1 + \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2} \right) \Rightarrow \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma} = \frac{1}{1 + \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2}}. \quad (2.96)$$

Setzt man (2.96) in (2.95) ein, erhält man das einsteinsche Additionstheorem für Geschwindigkeiten:

$$\vec{v}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \left( \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_1^2}{c^2}} - 1 \right) \left( \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \cdot \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2} \right)}{1 + \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2}}. \quad (2.97)$$

Daraus liest man ab:

i.) Die Boost-Transformationen sind im allgemeinen nicht kommutativ:  
 $B(\vec{v}_2)B(\vec{v}_1) \neq B(\vec{v}_1)B(\vec{v}_2) \quad (\Rightarrow \vec{v}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \neq \vec{v}(\vec{v}_2, \vec{v}_1))$ . (2.98)

ii.) Füreinander parallele Geschwindigkeiten  $\vec{v} = v_1 \vec{e}_1$  und  $\vec{v}_2 = v_2 \vec{e}_2$  sind die Boost-Transformationen kommutativ: (2.99)

$$v(v_1, v_2) = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = v(v_2, v_1) -$$

iii.) Im Spezialfall  $v_1 \ll c$  und  $v_2 \ll c$  erhält man aus (2.99) das Galileische Additionstheorem für Geschwindigkeiten:

$$v(v_1, v_2) = v_1 + v_2. \quad (2.100)$$

iv.) Im Spezialfall  $v_2 = c$  folgt aus (2.99): (2.101)

$$v(v_1, c) = c.$$

In allen Inertialsystemen besitzt die Lichtgeschwindigkeit denselben Wert, dies entspricht gerade dem eingangs diskutierten Postulat (P1) der speziellen Relativitätstheorie.

### 2.1.3. Darstellung der Lorentz-Algebra durch Differentialoperatoren:

Wir betrachten nun ein Skalarfeld  $\phi(x^\mu)$ , das als Tensorfeld vom Rang  $n=0$  unter beliebigen Lorentz-Transformationen invariant ist. Bei einer massiven Interpretation der Lorentz-Transformation

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad \Leftrightarrow \quad x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x'^\nu \quad (2.102)$$

bezeichnen  $x^\mu$  bzw.  $x'^\mu$  ein- und denselben Raum-Zeit-Vektor bzw. die ursprünglichen bzw. transformierten Koordinatensysteme  $S$  bzw.  $S'$ . Aufgrund der Invarianz des Skalarfeldes muß das ursprüngliche Skalarfeld  $\phi(x^\mu)$  im Ursprung mit dem transformierten Skalarfeld  $\phi'(x'^\mu)$  im transformierten Koordinatensystem  $S'$  übereinstimmen:

$$\phi'(x^{\mu}) = \phi(x^{\mu}).$$

Betrachtet man in (2.103) an das ursprüngliche Skalarfeld  $\phi$  bezüglich des transformierten Koordinatensystems  $S'$ , so gilt

$$\phi'(x^{\mu}) \stackrel{(2.102), (2.103)}{=} \phi((L^{\alpha\beta})^{\mu}_{\nu} x^{\nu}), \quad (2.104)$$

wobei die Einheit beim Ortsvektor der Einheitszeit träller weggelassen wurden. Spezialisiert man (2.104) mit Hilfe von (2.29) und (2.32) auf infinitesimalen Lorentz-Transformationen, so folgt bis zur ersten Ordnung in den Entwicklungsgeschwindigkeiten was:

$$\phi'(x^{\mu}) = \phi\left(x^{\mu} + \frac{i}{2} w_{\alpha\beta} (L^{\alpha\beta})^{\mu}_{\nu} x^{\nu}\right) = \phi(x^{\mu}) + \frac{i}{2} (L^{\alpha\beta})^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \partial_{\mu} \phi(x^{\mu}) = \left\{ 1 - \frac{i}{2} w_{\alpha\beta} \hat{L}^{\alpha\beta} \right\} \phi(x^{\mu}), \quad (2.105)$$

wobei der Differentialoperator  $\hat{L}^{\alpha\beta}$  offen ist durch

$$\hat{L}^{\alpha\beta} = - (L^{\alpha\beta})^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \partial_{\mu}. \quad (2.106)$$

Mit Hilfe der Darstellungsmatrizen (2.33) lauten dann die Differentialoperatoren

$$\hat{L}^{\alpha\beta} = i(g^{\mu\nu} g_{\alpha\nu} - g^{\mu\nu} g_{\beta\nu}) x^{\nu} \partial_{\mu} = i(x^{\mu} \partial^{\beta} - x^{\beta} \partial^{\mu}). \quad (2.107)$$

Beachtet man die Definition der Vierervektorinhaltsoperatoren

$$\hat{p}^{\alpha} = i t \partial^{\alpha}, \quad (2.108)$$

so reduziert sich (2.107) auf die Edmandruckinhaltsoperatoren

$$\hat{L}^{\alpha\beta} = \frac{1}{t} (x^{\alpha} \hat{p}^{\beta} - x^{\beta} \hat{p}^{\alpha}). \quad (2.109)$$

Die Kommutatoren zwischen Viervektoren- und Inhaltsoperatoren

$$[\hat{p}^{\alpha}, x^{\beta}]_- = i t g^{\alpha\beta} \quad (2.110)$$

Führen dann zu folgenden Kommutatorrelationen:

$$\begin{aligned} i.) \quad & [\hat{L}^{\alpha\beta}, x^{\sigma}]_- \stackrel{(2.109)}{=} \frac{1}{t} \left\{ [x^{\alpha} \hat{p}^{\beta}, x^{\sigma}]_- - [x^{\beta} \hat{p}^{\alpha}, x^{\sigma}]_- \right\} \stackrel{(1.83)}{=} \frac{1}{t} \left\{ [x^{\alpha}, x^{\sigma}]_- \hat{p}^{\beta} + \right. \\ & \left. + x^{\alpha} [\hat{p}^{\beta}, x^{\sigma}]_- - [x^{\beta}, x^{\sigma}]_- \hat{p}^{\alpha} - - x^{\beta} [\hat{p}^{\alpha}, x^{\sigma}]_- \right\} \stackrel{(2.110)}{=} i \{ g^{\beta\gamma} x^{\alpha} - g^{\alpha\gamma} x^{\beta} \} \\ & \underline{(2.33)} \quad - (L^{\alpha\beta})^{\gamma}_{\delta} x^{\delta}. \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$\text{i.e.) } [\hat{L}^{\alpha\beta}, \hat{p}^\delta]_- \xrightarrow{(2.109)} \frac{1}{\hbar} \left\{ [x^\alpha \hat{p}^\beta, \hat{p}^\delta]_- - [x^\beta \hat{p}^\alpha, \hat{p}^\delta]_- \right\} \xrightarrow{(1.83)} \frac{1}{\hbar} \left\{ x^\alpha [\hat{p}^\beta, \hat{p}^\delta]_- + \right. \\ \left. + [x^\alpha, \hat{p}^\delta]_- \hat{p}^\beta - x^\beta [\hat{p}^\alpha, \hat{p}^\delta]_- - [x^\beta, \hat{p}^\delta]_- \hat{p}^\alpha \right\} \xrightarrow{(2.110)} i \{ g^{\beta\delta} \hat{p}^\alpha - g^{\alpha\delta} \hat{p}^\beta \} \\ \underline{(2.33)} - (\hat{L}^{\alpha\beta})^{\gamma\delta} \hat{p}^\delta. \quad (2.112)$$

Aufgrund der Kommutationsrelationen (2.111) und (2.112) bestimmt man den Viererortvektor  $x^\gamma$  und den Viererimpulsoperator  $\hat{p}^\gamma$  als Vektoroperatoren. Entsprechend bestimmt man einen Operator  $\hat{o}^{A_1 \dots A_n}$  als einen Tensoroperator vom Rang  $n$ , wenn er sich in jedem Index  $A_1 \dots A_n$  wie ein Vektor transformiert:

$$[\hat{L}^{\mu\nu}, \hat{o}^{A_1 \dots A_n}]_- = - \sum_{k=1}^n (\hat{L}^{\mu\nu})^{A_k} \times \hat{o}^{A_1 \dots A_{k-1} A_{k+1} \dots A_n} \quad (2.113)$$

Mit Hilfe der Kommutationsrelationen (2.111) und (2.112) lassen sich die Kommutatoren zwischen den Differentialoperatoren (2.109) geschickt erledigen:

$$[\hat{L}^{\alpha\beta}, \hat{L}^{\gamma\delta}]_- \xrightarrow{(2.109)} \frac{1}{\hbar} \left\{ [\hat{L}^{\alpha\beta}, x^\gamma \hat{p}^\delta]_- - [\hat{L}^{\alpha\beta}, x^\delta \hat{p}^\gamma]_- \right\} \xrightarrow{(1.115)} \frac{1}{\hbar} \left\{ [\hat{L}^{\alpha\beta}, x^\gamma]_- \hat{p}^\delta \right. \\ \left. + x^\gamma [\hat{L}^{\alpha\beta}, \hat{p}^\delta]_- - [\hat{L}^{\alpha\beta}, x^\delta]_- \hat{p}^\gamma - x^\delta [\hat{L}^{\alpha\beta}, \hat{p}^\gamma]_- \right\} \xrightarrow{(2.111), (2.112)} \frac{i}{\hbar} \left\{ (g^{\beta\delta} x^\alpha - g^{\alpha\delta} x^\beta) \hat{p}^\gamma \right. \\ \left. + x^\delta (g^{\beta\delta} \hat{p}^\alpha - g^{\alpha\delta} \hat{p}^\beta) - (g^{\beta\delta} x^\alpha - g^{\alpha\delta} x^\beta) \hat{p}^\gamma - x^\delta (g^{\beta\delta} \hat{p}^\alpha - g^{\alpha\delta} \hat{p}^\beta) \right\} \\ = \frac{i}{\hbar} \left\{ g^{\alpha\delta} (x^\beta \hat{p}^\gamma - x^\gamma \hat{p}^\beta) + g^{\beta\delta} (x^\alpha \hat{p}^\gamma - x^\gamma \hat{p}^\alpha) - g^{\alpha\delta} (x^\beta \hat{p}^\gamma - x^\gamma \hat{p}^\beta) - g^{\beta\delta} (x^\alpha \hat{p}^\gamma - x^\gamma \hat{p}^\alpha) \right\} \\ \xrightarrow{(2.109)} [\hat{L}^{\alpha\beta}, \hat{L}^{\gamma\delta}]_- = i \{ g^{\alpha\delta} \hat{L}^{\beta\gamma} + g^{\beta\delta} \hat{L}^{\alpha\gamma} - g^{\alpha\gamma} \hat{L}^{\beta\delta} - g^{\beta\gamma} \hat{L}^{\alpha\delta} \}. \quad (2.114)$$

Der Vergleich von (2.38) mit (2.113) zeigt, dass auch die Differentialoperatoren  $\hat{L}^{\alpha\beta}$  den Vertauschungsrelationen der Lorentz-Algebra genügen. Deshalb kann man die Differentialoperatoren  $\hat{L}^{\alpha\beta}$  als eine Darstellung der Lorentz-Algebra im Hilbertraum der Skalarfelder auffassen. Mit Hilfe der Darstellungsma- trizen in (2.33) geht (2.114) über in

$$[L^{\alpha\beta}, L^{\gamma\delta}]_- = -(L^{\alpha\beta})^\gamma_\delta \hat{L}^{\delta\gamma} - (L^{\alpha\beta})^\delta_\gamma \hat{L}^{\gamma\delta}, \quad (2.115)$$

so daß die Differentialoperatoren  $\hat{L}^{\alpha\beta}$  im Sinne von (2.113) Tensoroperatoren vom Rang  $n=2$  darstellen.

25.05.2000

### 2.1.10. Tensor- bzw. Spinordantstellung der Lorentz-Algebra:

Wir betrachten nun ein Tensor- bzw. Spinorfeld  $A^5(x^\mu)$ , wobei der Index  $\sigma$  für die jeweiligen Tensor- bzw. Spinorindizes steht. Erhält man eine Lorentz-Transformation durch, so muß man berücksichtigen, daß die Lorentz-Transformation sowohl auf dem Viervektorektor  $x^\mu$  als auch auf die Tensor- bzw. Spinorkomponenten  $A^\sigma$  wirkt. Beispielsweise stellt das Viervektorpotential  $A^5(x^\mu)$  ein Tensorfeld vom Rang  $n=1$  dar, das durch eine Lorentz-Transformation 1 übergeht in

$$A'^\sigma(x^\mu) = \Gamma^{\sigma\tau} A^\tau(x^\mu). \quad (2.116)$$

Betrachtet man in (2.116) auch das ursprüngliche Viervektorpotential  $A^\tau$  bezüglich des transformierten Koordinatensystems  $S'$ , so gilt:

$$A'^5(x^\mu) \stackrel{(2.102), (2.116)}{=} \Gamma^5_\tau A^\tau((1^{-3})^\mu{}_\nu x^\nu), \quad (2.117)$$

wobei die Einride bei dem Viervektorektor der Einfachheit halber weggelassen wurden. Spezialisiert man (2.117) mit Ziffern von (2.29) und (2.32) auf eine infinitesimale Lorentz-Transformation, so folgt in erster Ordnung in den Entwicklungszoeffizienten  $w_{\alpha\beta}$

$$A'^5(x^\mu) = \left\{ g^5 \tau - \frac{i}{2} (L^{\alpha\beta})^5{}_\tau w_{\alpha\beta} \right\} \left\{ A^\tau(x^\mu) + \frac{i}{2} (L^{\alpha\beta})^\mu{}_\tau x^\tau \partial_\mu A^\tau(x^\mu) \right\} \quad (2.118)$$

$$\Rightarrow A'^5(x^\mu) = \left\{ g^5 \tau - \frac{i}{2} w_{\alpha\beta} (\hat{L}^{\alpha\beta})^5{}_\tau \right\} A^\tau(x^\mu)$$

Bei setzen sich die Operatoren  $\hat{w}_{\alpha\beta}$  additiv aus dem Galindiumspinsoperator (2.109) und den Darstellungsmatrizen (2.33) zusammen:

$$(\hat{M}^{\alpha\beta})^S \gamma = g^{\alpha\gamma} \hat{L}^{\alpha\beta} + (\hat{L}^{\alpha\beta})^S \gamma .$$

(2.119)

da sowohl die Balindnehimoperatorn  $\hat{L}^{\alpha\beta}$  gemäß (2.113) als auch die Darstellungsmatrizen  $\hat{L}^{\alpha\beta}$  gemäß (2.38) der Lorentz-Algebra genügen und beide miteinander vertauschen.

$$[\hat{L}^{\alpha\beta}, L^{\delta\gamma}]_- = 0 , \quad (2.120)$$

folgt für die Operatoren  $\hat{M}^{\alpha\beta}$ , daß auch sie der Lorentz-Algebra genügen:

$$([\hat{M}^{\alpha\beta}, \hat{M}^{\delta\gamma}]_-)^S \gamma = (\hat{M}^{\alpha\beta})^S \gamma (\hat{M}^{\delta\gamma})^S \gamma - (\hat{M}^{\delta\gamma})^S \gamma (\hat{M}^{\alpha\beta})^S \gamma$$

(2.119)  $\{g^{\alpha\beta} \hat{L}^{\alpha\beta} + (L^{\alpha\beta})^S \gamma\} \{g^{\delta\gamma} \hat{L}^{\delta\gamma} + (L^{\delta\gamma})^S \gamma\} - \{g^{\delta\gamma} \hat{L}^{\delta\gamma} + (L^{\delta\gamma})^S \gamma\} \{g^{\alpha\beta} \hat{L}^{\alpha\beta} + (L^{\alpha\beta})^S \gamma\}$

$$= g^{\alpha\beta} g^{\delta\gamma} \hat{L}^{\alpha\beta} \hat{L}^{\delta\gamma} + g^{\alpha\beta} (L^{\alpha\beta})^S \gamma \hat{L}^{\delta\gamma} + g^{\delta\gamma} \hat{L}^{\alpha\beta} (L^{\delta\gamma})^S \gamma + (L^{\alpha\beta})^S \gamma (L^{\delta\gamma})^S \gamma$$

$$- g^{\alpha\beta} g^{\delta\gamma} \hat{L}^{\delta\gamma} \hat{L}^{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta} (L^{\delta\gamma})^S \gamma \hat{L}^{\alpha\beta} - g^{\delta\gamma} \hat{L}^{\delta\gamma} (L^{\alpha\beta})^S \gamma - (L^{\delta\gamma})^S \gamma (L^{\alpha\beta})^S \gamma$$

$$= \delta^{\alpha\delta} [\hat{L}^{\alpha\beta}, \hat{L}^{\delta\gamma}]_- + ([L^{\alpha\beta}, \hat{L}^{\delta\gamma}]_-)^S \gamma + ([\hat{L}^{\alpha\beta}, L^{\delta\gamma}]_-)^S \gamma + ([L^{\alpha\beta}, L^{\delta\gamma}]_-)^S \gamma$$

$$(2.38), (2.113), (2.120); \delta^{\alpha\delta} (g^{\alpha\delta} \hat{L}^{\beta\gamma} + g^{\beta\gamma} \hat{L}^{\alpha\delta} - g^{\alpha\gamma} \hat{L}^{\beta\delta} - g^{\beta\delta} \hat{L}^{\alpha\gamma})$$

$$+ i (g^{\alpha\delta} L^{\beta\gamma} + g^{\beta\gamma} L^{\alpha\delta} - g^{\alpha\gamma} L^{\beta\delta} - g^{\beta\delta} L^{\alpha\gamma})^S \gamma$$

$$= i \{ g^{\alpha\delta} (\delta^{\beta\gamma} \hat{L}^{\beta\gamma} + (L^{\beta\gamma})^S \gamma) + g^{\beta\gamma} (\delta^{\alpha\delta} \hat{L}^{\alpha\delta} + (L^{\alpha\delta})^S \gamma) \}$$

$$- g^{\alpha\delta} (\delta^{\beta\gamma} \hat{L}^{\beta\gamma} - (L^{\beta\gamma})^S \gamma) - g^{\beta\gamma} (\delta^{\alpha\delta} \hat{L}^{\alpha\delta} + (L^{\alpha\delta})^S \gamma)$$

$$(2.119) i \{ g^{\alpha\delta} (\hat{M}^{\beta\gamma})^S \gamma + g^{\beta\gamma} (\hat{M}^{\alpha\delta})^S \gamma - g^{\alpha\delta} (\hat{M}^{\beta\gamma})^S \gamma - g^{\beta\gamma} (\hat{M}^{\alpha\delta})^S \gamma \}$$

$$(2.121) i \{ g^{\alpha\delta} (\hat{M}^{\beta\gamma})^S \gamma + g^{\beta\gamma} (\hat{M}^{\alpha\delta})^S \gamma - g^{\alpha\delta} (\hat{M}^{\beta\gamma})^S \gamma - g^{\beta\gamma} (\hat{M}^{\alpha\delta})^S \gamma \}$$

$$\Rightarrow [\hat{M}^{\alpha\beta}, \hat{M}^{\delta\gamma}]_- = i \{ g^{\alpha\delta} \hat{M}^{\beta\gamma} + g^{\beta\gamma} \hat{M}^{\alpha\delta} - g^{\alpha\delta} \hat{M}^{\beta\gamma} - g^{\beta\gamma} \hat{M}^{\alpha\delta} \}$$

Wir belassen nun zum allgemeinen Fall eines Tensor- bzw. Gravifeldes  $\psi^a(x^\mu)$  zurück. Bei einer infinitesimalen Lorentz-Transformation gilt dann analog zu (2.118)

$$\psi^{\alpha}(x^{\mu}) = \left\{ g^{\alpha\beta} - \frac{i}{2} \omega_{\beta} (\hat{M}^{ab})^{\alpha}_{\gamma} \right\} \psi^{\gamma}(x^{\mu}), \quad (2.122)$$

wobei sich für die Operatoren  $\hat{M}^{ab}$  eine zu (2.119) analoge Zeilegung ergibt:

$$(\hat{M}^{ab})^{\alpha}_{\gamma} = g^{\alpha\delta} \hat{L}^{ab} + (N^{ab})^{\alpha}_{\gamma}. \quad (2.123)$$

Dabei stellen die Matrizen  $N^{ab}$  eine Tensor-Law. Grinordnung dar und  $\hat{L}^{ab}$  erfüllt den Kommutatorrelationen

$$[N^{ab}, N^{cd}]_- = i \{ g^{ad} N^{bc} + g^{bd} N^{ac} - g^{ac} N^{bd} - g^{bd} N^{ac} \}. \quad (2.124)$$

Außerdem sind die beiden Darstellungen  $\hat{L}^{ab}$  und  $N^{ab}$  der Lorentz-Algebra im Minkowski-Raum und im Raum der Tensor-Law. Grinordnungen unabhängig voneinander:

$$[\hat{L}^{ab}, N^{cd}]_- = 0. \quad (2.125)$$

Daraus folgt, daß auch die Operatoren  $\hat{M}^{ab}$  aus (2.123) gemäß (2.121) den Zeitaudienrelationen der Lorentz-Algebra genügen. Sie stellen eine Darstellung der Lorentz-Algebra im Hilbert-Raum der Tensor-Law. Grinordnungen dar. Da  $\hat{L}^{ab}$  gemäß (2.109) mit dem Bahndrehimpuls übereinstimmt, kann man  $N^{ab}$  mit dem Grindelimpuls und  $\hat{M}^{ab}$  mit dem Gesamtdrehimpuls identifizieren.

### 2.1.11. Definierende Darstellung der Poincaré-Gruppe:

die Poincaré-Transformationen im Minkowski-Raum setzen sich aus einer Lorentz-Transformation  $L^{\mu}_{\nu}$  und einer Verschiebung  $a^{\mu}$  zusammen:

$$x'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}. \quad (2.126)$$

Während Lorentz-Transformationen gemäß (2.4) bzw. (2.17) das Skalarprodukt von viervektoren nicht verändern, lassen Poincaré-Transformationen nur die Abstände zwischen viervektoren invariant:

$$g_{\mu\nu} (x'^{\mu} - y'^{\mu})(x'^{\nu} - y'^{\nu}) \stackrel{(2.126)}{=} g_{\mu\nu} (x^{\mu} - y^{\mu})(x^{\nu} - y^{\nu}) \Rightarrow (x'^{\mu} - y'^{\mu})(x'_{\mu} - y'_{\mu}) = (x^{\mu} - y^{\mu})(x_{\mu} - y_{\mu}). \quad (2.127)$$

## 2.2.1. Wirkung und Bewegungsgleichungen:

wie in (1.155) - (1.157) aufgestellte Wirkung der freien Schrödinger-Felder  $\Psi(\vec{x}, t)$  und  $\Psi^*(\vec{x}, t)$  ist nicht invariant unter Lorentz-Transformationen, da die Zeitableitungen linear und die Raumableitungen quadratisch auftreten. Eine relativistische Wirkung muß Zeit- und Raumableitungen gleichberechtigt behandeln. Abhängig von internen Spinfreiheitsgraden gibt es nun verschiedene Wege, die nichtrelativistische Schrödinger-Wirkung (1.155) - (1.157) zu einer relativistischen zu erweitern.

Im folgenden wird ein geladenes relativistisches Felder betrachtet, das wie das  $\pi^+$  im  $\pi^+$  oder  $\pi^-$  einen Spinfreiheitsgrad besitzt. Ein solches Felder wird durch die Klein-Gordon-Felder  $\Psi(x^A)$  und  $\Psi^*(x^A)$  beschrieben. Die Wirkung als Funktional der Klein-Gordon-Felder

$$A = A[\Psi(\cdot); \Psi^*(\cdot)] \quad (2.194)$$

ist als Raum-Zeit-Integral über eine Lagrange-Dichte definiert

$$A = \int d^4x \mathcal{L} (\Psi(x^A), \partial_\mu \Psi(x^A); \Psi^*(x^A), \partial_\mu \Psi^*(x^A)). \quad (2.195)$$

Abbildung ist die Lagrange-Dichte der Klein-Gordon-Felder durch die Lorentz-Invariante

$$\mathcal{L} = A \text{ gur } \partial_\mu \Psi^*(x^A) \partial^\mu \Psi(x^A) + B \Psi^*(x^A) \Psi(x^A) \quad (2.196)$$

gegeben. Die auftretenden Konstanten  $A$  und  $B$  werden nun so gewählt, daß die Lagrange-Dichte der Klein-Gordon-Felder (2.196) im nichtrelativistischen Limes in die Lagrange-Dichte der Schrödinger-Felder übergeht. Dazu werden zunächst in (2.196) die Ableitungen in ihre zeitlichen und räumlichen Anteil zerlegt:

$$\mathcal{L} = A \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t} \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} - \vec{\nabla} \Psi^*(\vec{x}, t) \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}, t) \right\} + B \Psi^*(\vec{x}, t) \Psi(\vec{x}, t). \quad (2.197)$$

Beim Übergang von einer relativistischen zu einer nichtrelativistischen Theorie muss man beachten, dass die entsprechenden Energieraten gerade um die Ruhenergie  $m^2$  der Teilchen mit der Masse  $m$  verbunden sind (vgl. die Abbildung zur relativistischen Energie-Impuls-Dispersionrelation auf Seite 2-3):

$$\xrightarrow{0} \text{Einf.}$$

$$E_{\text{rel}} = E_{\text{null.}} + m^2$$

(2.198)

$$\xrightarrow{-m^2 \quad 0 \quad +m^2} \text{Einf.}$$

Da eine quantenmechanische Wellenfunktion gemäß  $e^{-\frac{i}{\hbar} Et}$  von der Energie  $E$  einer Teilchen abhängt, führt (2.198) zum Ansatz

$$\Psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}, t) \cdot \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} m c^2 t \right\}, \quad (2.199)$$

$$\Psi^*(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}, t) \cdot \exp \left\{ i + \frac{i}{\hbar} m c^2 t \right\}. \quad (2.200)$$

Setzt man (2.199), (2.200) in die Lagrange-Dichte der Schrödinger-Gitter (2.157) ein, so folgt:

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \Psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} m^2 \frac{\partial^2 \Psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t^2} \Psi(\vec{x}, t) + \frac{i}{\hbar} \frac{\partial^2 \Psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t^2} \Psi(\vec{x}, t) \right\} - A \nabla \Psi^*(\vec{x}, t) \nabla \Psi(\vec{x}, t) + \left\{ B + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} A \right\} \Psi^*(\vec{x}, t) \Psi(\vec{x}, t) \quad (2.201)$$

Im nichtrelativistischen Limes  $c \rightarrow \infty$  muss man (2.201) in (1.157) überführen:

- durch partielle Integration in der Wirkung (2.195) kann man sich der zweite und der dritte Term in (2.201) rückwärts addieren. Das Ergebnis mit (1.157) führt dann zu

$$\frac{2mi}{\hbar} \cdot A \stackrel{!}{=} i \hbar \Rightarrow A = \frac{\hbar^2}{2m}. \quad (2.202)$$

- Bei dieser Wahl von  $A$  verschwindet der erste Term in (2.201) im Limes  $c \rightarrow \infty$  und der vierte Term ergibt die richtige Abhängigkeit der Energie der Schrödinger-Gitter.
- Der fünfte Term in (2.201) muss verschwinden, da die Schrödinger-Gitter einen zulässigen Massenterm nicht besitzen:

$$B + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{1}{2} = 0 \quad \stackrel{(2.202)}{\Rightarrow} \quad B = -\frac{mc^2}{2} \quad (2.203)$$

setzt man (2.202) und (2.203) in (2.197) ein, so ist die Wirkung der Klein-Gordon-Felder

$$S = S[\Psi(\cdot, \cdot), \Psi^*(\cdot, \cdot)] \quad (2.204)$$

als Raum-Zeit-Integral:

$$S = \int dt \int d^3x \mathcal{L} (\Psi(\vec{x}, t), \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t}, \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}, t); \Psi^*(\vec{x}, t), \frac{\partial \Psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t}, \vec{\nabla} \Psi^*(\vec{x}, t)) \quad (2.205)$$

mit der Lagrang-Richtlinie

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2mc^2} \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}, t) \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}, t) - \frac{mc^2}{2} \Psi(\vec{x}, t) \Psi^*(\vec{x}, t) \quad (2.206)$$

gleich wie bei der Diskussion der Heisenberg-Felder in Abschnitt 1.7 führt dies zu Hamiltonschen Prinzipien der klassischen Feldtheorie

$$\frac{\delta S}{\delta \Psi(\vec{x}, t)} = 0, \quad \frac{\delta S}{\delta \Psi^*(\vec{x}, t)} = 0 \quad (2.207)$$

auf die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^*(\vec{x}, t)} - \vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} \Psi^*(\vec{x}, t))} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t} \right)} = 0, \quad (2.208)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi(\vec{x}, t)} - \vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} \Psi(\vec{x}, t))} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} \right)} = 0. \quad (2.209)$$

Zur Berechnung von (2.208) und (2.209) benötigt man die Legendre-Koeffizienten:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^*(\vec{x}, t)} = -\frac{mc^2}{2} \Psi(\vec{x}, t), \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} \Psi^*(\vec{x}, t))} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}, t), \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t} \right)} = \frac{\hbar^2}{2mc^2} \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t}, \quad (2.210)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi(\vec{x}, t)} = -\frac{mc^2}{2} \Psi^*(\vec{x}, t), \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} \Psi(\vec{x}, t))} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}, t), \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} \right)} = \frac{\hbar^2}{2mc^2} \frac{\partial \Psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t}. \quad (2.211)$$

ersetzt man (2.210) und (2.211) in (2.208) und (2.209) ein, so erhält man als Euler-Lagrange-Gleichungen der Lagrangef-Dichte (2.206) erneut die Klein-Gordon-Gleichungen der Felder  $\Psi(\vec{x}, t)$  und  $\Psi^*(\vec{x}, t)$ :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \Psi(\vec{x}, t) + \frac{mc^2}{t^2} \Psi(\vec{x}, t) = 0, \quad (2.212)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \Psi^*(\vec{x}, t) + \frac{mc^2}{t^2} \Psi^*(\vec{x}, t) = 0. \quad (2.213)$$

Es handelt sich bei den Klein-Gordon-Gleichungen um Wellengleichungen, die aufgrund der Erledigung des Compton-Wellenlängen des Teilchens mit der Masse  $m$

$$\lambda_c = 2\pi \cdot \frac{t}{mc} \quad (2.214)$$

noch einen Zusatzterm aufweisen. Für ein  $\pi^+$ -oder  $\pi^-$ -Teilchen mit der Ruhemasse  $m_c = 139,6 \text{ MeV}$  resultiert diese Compton-Wellenlänge zu

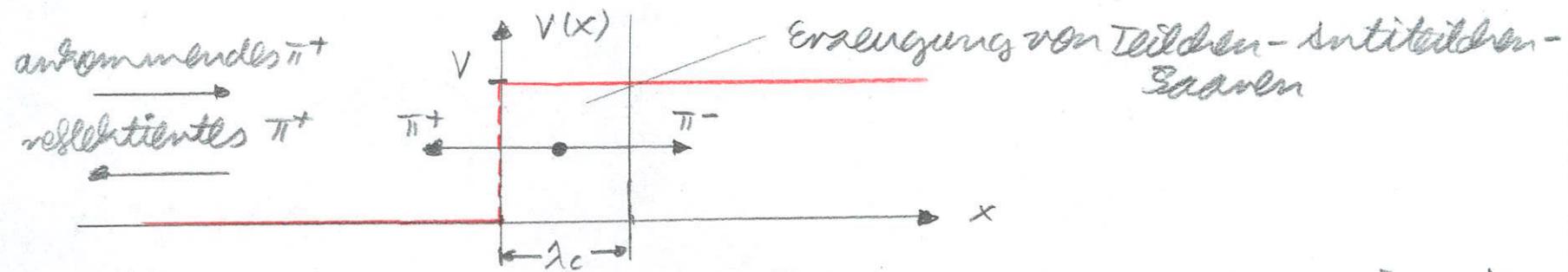
$$\lambda_c = \frac{hc}{mc^2} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{139,6 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 98 \text{ nm}, \quad (2.215)$$

was der Größenordnung des Kondensationsradius entspricht.

Das Auftreten der Compton-Wellenlänge (2.214) lässt sich physikalisch folgendermaßen verstehen. Ein relativistisches Teilchen mit der Impulsveränderung  $\Delta p = mc$  führt über die Lorentzverwandte Unrichtigkeitsrelation zu der Ortsunsicherheit

$$\Delta x = \frac{t}{\Delta p} = \frac{t}{mc}, \quad (2.216)$$

die genau in der Größenordnung der Compton-Wellenlänge liegt. Überall dort, wo ein relativistisches Teilchen auf dem Rücken seines Compton-Wellenlängenbaus ankommt, wird die resultierende Unrichtigkeitsgröße so groß, dass Teilchen- und Strahlweg übereinstimmen. Dieses Prinzip kann erstaunlich weitgehendweise das Klein-Teilchen-Prinzip erweitern. Dieses Prinzip erlaubt z.B. die Verwendung der Zelle V des Zählrohrs, bei dem ein  $\pi^+ -$  Teilchen gegen eine zentrale Quelle der Zelle V anläuft:



Erreicht die Potentialschwelle  $V$  die Größenordnung der Ruheenergie  $2mc^2$  zweier Zonen, fällt die Wellenfunktion in der Potentialschwelle exponentiell innerhalb der Potentialschwelle ab. Dadurch kommt es zur Erzeugung von Teilchen-Antiteilchen-Zoaren, die gemäß der Impulserhaltung in entgegengesetzte Richtungen laufen. Dabei verhält man innerhalb der Potentialschwelle eine negative Ladungsdichte, so dass sich der oben skizzierte Sachverhalt ergibt. Dabei ist der Reflexionskoeffizient dieses Streuproblems größer als eins. Das kleinste Zavadozon hat demnach zur Folge, dass eine relativistische Quantentheorie nie eine Einheitstheorie sein kann. Deshalb muss sie zur relativistischen Quantenfeldtheorie ausgebaut werden, um die diskreten Welleneinphänomene adäquat beschreiben zu können.

Setzt man die Gleichungen (2.199), (2.200) in die Klein-Gordon-Gleichungen (2.208) und (2.209) für die Wellenfunktionen  $\Psi(\vec{x}, t)$  und  $\Psi^*(\vec{x}, t)$  ein, so folgt

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \frac{2i}{\hbar} m \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Psi(\vec{x}, t) - \vec{\nabla}^2 \Psi(\vec{x}, t) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} V(\vec{x}, t) = 0, \quad (2.217)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t^2} + \frac{2i}{\hbar} m \frac{\partial \Psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Psi^*(\vec{x}, t) - \vec{\nabla}^2 \Psi^*(\vec{x}, t) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} V(\vec{x}, t) = 0. \quad (2.218)$$

Im nichtrelativistischen Limit  $c \rightarrow \infty$  gehen (2.217) und (2.218) in die Schrödinger-Gleichungen für die Wellenfunktionen  $\Psi(\vec{x}, t)$  und  $\Psi^*(\vec{x}, t)$  über:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \Psi(\vec{x}, t), \quad (2.219)$$

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \Psi^*(\vec{x}, t). \quad (2.220)$$

### 2.2.2. Kontinuitätsgleichung:

Nun wird der Ausdruck (2.212)  $\Psi^*(\vec{x}, t) - (2.213) \cdot \Psi(\vec{x}, t)$  näher untersucht:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c^2} \Psi^*(\vec{x}, t) \frac{\partial^2 \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) - \Psi^*(\vec{x}, t) \vec{\nabla}^2 \Psi(\vec{x}, t) + \Psi(\vec{x}, t) \vec{\nabla}^2 \Psi^*(\vec{x}, t) = 0 \\ \Rightarrow & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{c^2} \left( \Psi^*(\vec{x}, t) \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) \right) \right\} + \vec{\nabla} \left\{ \Psi(\vec{x}, t) \vec{\nabla} \Psi^*(\vec{x}, t) - \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}, t) \Psi^*(\vec{x}, t) \right\} = 0 \quad (2.221) \end{aligned}$$

Man erhält damit eine Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} S(\vec{x}, t) + \operatorname{div} \vec{j}(\vec{x}, t) = 0, \quad (2.222)$$

wobei die Richte  $S(\vec{x}, t)$  und die Stromdichte  $\vec{j}(\vec{x}, t)$  nur bis auf eine beliebige Konstante  $K$  bestimmt sind:

$$S(\vec{x}, t) = \frac{K}{c^2} \left\{ \Psi^*(\vec{x}, t) \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) \right\}, \quad (2.223)$$

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = K \left\{ \Psi(\vec{x}, t) \vec{\nabla} \Psi^*(\vec{x}, t) - \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}, t) \Psi^*(\vec{x}, t) \right\}. \quad (2.224)$$

Die Konstante  $K$  soll nun durch den nichtrelativistischen Limes  $c \rightarrow \infty$  eindeutig bestimmt werden. Hierzu setzt man den Ansatz (2.199), (2.200) in (2.223), (2.224) ein:

$$S(\vec{x}, t) = \frac{K}{c^2} \left\{ \Psi^*(\vec{x}, t) \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) - 2 \frac{imc^2}{\hbar} \Psi^*(\vec{x}, t) \Psi(\vec{x}, t) \right\}, \quad (2.225)$$

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = K \left\{ \Psi(\vec{x}, t) \vec{\nabla} \Psi^*(\vec{x}, t) - \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}, t) \Psi^*(\vec{x}, t) \right\}. \quad (2.226)$$

Zusammt (2.225) und (2.226) im Grenzübergang  $c \rightarrow \infty$  mit den nichtrelativistischen Ausdrücken

$$S(\vec{x}, t) = \Psi^*(\vec{x}, t) \Psi(\vec{x}, t), \quad (2.227)$$

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \frac{i\hbar}{2m} \left\{ \Psi(\vec{x}, t) \vec{\nabla} \Psi^*(\vec{x}, t) - \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}, t) \Psi^*(\vec{x}, t) \right\} \quad (2.228)$$

Übereinstimmen, muß man die Konstante  $\kappa$  zu

$$\kappa = \frac{it}{2m} \quad (2.229)$$

erhalten. Aus (2.223), (2.224) und (2.225) geht damit für die Richtung  $S(\vec{x}, t)$  und die Stromdichte  $\vec{S}(\vec{x}, t)$  der Zitter-Bordon-Felder

$$S(\vec{x}, t) = \frac{it}{2mc^2} \cdot \left\{ \Psi^*(\vec{x}, t) \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) \right\}, \quad (2.230)$$

$$\vec{S}(\vec{x}, t) = \frac{it}{2m} \cdot \left\{ \Psi(\vec{x}, t) \vec{\nabla} \Psi^*(\vec{x}, t) - \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}, t) \Psi(\vec{x}, t) \right\}. \quad (2.231)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung (2.222) geht die Richtung einer Bordonwelle. Beträgt man nämlich die zeitliche Änderung der Größe

$$Q = \int d^3x S(\vec{x}, t), \quad (2.232)$$

so geht:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q \stackrel{(2.232)}{=} \int d^3x \frac{\partial}{\partial t} S(\vec{x}, t) \stackrel{(2.222)}{=} \int d^3x \operatorname{div} \vec{S}(\vec{x}, t) \xrightarrow{\text{Gauß}} - \oint \vec{S} \cdot \vec{n}(\vec{x}, t). \quad (2.233)$$

Der Oberflächenintegral im Unendlichen verschwindet, da die Felder  $\Psi(\vec{x}, t)$ ,  $\Psi^*(\vec{x}, t)$  und daher auch die Stromdichte  $S(\vec{x}, t)$  in (2.231) im Unendlichen schnell genug abfallen müssen.

$$\frac{\partial}{\partial t} Q = 0. \quad (2.234)$$

Es wird nun ein Skalarprodukt zwischen zwei beliebigen Feldern  $\Psi_1(\vec{x}, t)$  und  $\Psi_2(\vec{x}, t)$  definiert:

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle = \frac{it}{2mc^2} \int d^3x \left\{ \Psi_1^*(\vec{x}, t) \frac{\partial \Psi_2(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_1^*(\vec{x}, t)}{\partial t} \Psi_2(\vec{x}, t) \right\}. \quad (2.235)$$

Dieses Skalarprodukt ist nicht positive definit. Setzt man beispielsweise

$$\Psi_1(\vec{x}, t) = \Psi_2(\vec{x}, t) = \Psi(\vec{x}, t) = N \cdot \exp \left\{ + \frac{i}{\hbar} mc^2 t \right\}, \quad (2.236)$$

so geht für die Norm dieses Feldes

$$\langle \Psi, \Psi \rangle \stackrel{(2.235), (2.236)}{=} N^2 < 0. \quad (2.237)$$

Von den nicht relativistischen Grenzfall diese Skalarprodukt ist zu unterscheiden, wird (2.199), (2.200) in (2.225) angegeben.

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle = \frac{i\hbar}{2mc^2} \int d^3x \left\{ \Psi_1^*(\vec{x}, t) \frac{\partial \Psi_2(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_1(\vec{x}, t)}{\partial t} \Psi_2(\vec{x}, t) - 2 \frac{i}{\hbar} mc^2 \Psi_1^*(\vec{x}, t) \Psi_2(\vec{x}, t) \right\} \quad (2.238)$$

und der Limes  $c \rightarrow \infty$  durchgeführt

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle = \lim_{c \rightarrow \infty} \langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle = \int d^3x \Psi_1^*(\vec{x}, t) \Psi_2(\vec{x}, t). \quad (2.239)$$

Wie ist gerade das in der Schrödinger-Theorie verwendete positiv definite Skalarprodukt aus (2.230), (2.232) und (2.235) kann man den folgenden Zusammenhang zwischen der Erhaltungsgröße  $Q$  und dem Skalarprodukt erweisen:

$$Q = \langle \Psi, \Psi \rangle. \quad (2.240)$$

Da das Skalarprodukt nicht positiv definit ist, kann die Erhaltungsgröße  $Q$  sowohl positive als auch negative Werte annehmen. Dies ermöglicht es,  $Q$  bzw.  $eQ$  als die elektrische Ladung des Klein-Gordon-Feldes zu interpretieren, wobei  $e$  die Elementarladung darstellt.

### 2.2.3. Kanonische Feldquantisierung:

Zu den beiden unabhängigen Feldern  $\Psi(\vec{x}, t)$  und  $\Psi^*(\vec{x}, t)$  gibt es zwei kanonisch konjugierte Impulsfelder:

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t})} \stackrel{(2.211)}{=} \frac{\hbar^2}{2mc^2} \frac{\partial \Psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t}, \quad (2.241)$$

$$\pi^*(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \Psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t})} \stackrel{(2.210)}{=} \frac{\hbar^2}{2mc^2} \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t}. \quad (2.242)$$

Mit Hilfe einer Legendre-Transformation erhält man die Hamilton-Dichte aus der Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L} = \pi(\vec{x}, t) \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} + \pi^*(\vec{x}, t) \frac{\partial \Psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t} - \mathcal{L}$$

$$\xrightarrow{(2.206), (2.241), (2.242)} \mathcal{L} = \frac{2mc^2}{\hbar^2} \pi^*(\vec{x}, t) \pi(\vec{x}, t) + \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \Psi^*(\vec{x}, t) \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}, t) + \frac{mc^2}{2} \Psi^*(\vec{x}, t) \Psi(\vec{x}, t). \quad (2.243)$$

Die Hamilton-Funktion  $H$  des geladenen Klein-Gordon-Feldes ist gerade das räum-

Orte Integral über diese Hamilton-Dichte  $\mathcal{L}$ :

$$H = \int d^3x \mathcal{L} . \quad (2.244)$$

Im Rahmen der kanonischen Feldquantisierung werden den klassischen Feldern  $\hat{\Pi}(x,t)$ ,  $\hat{\Psi}^+(x,t)$ ,  $\hat{\Pi}(x,t)$ ,  $\hat{\Pi}^+(x,t)$  die Operatoren  $\hat{\Psi}(x,t)$ ,  $\hat{\Psi}^+(x,t)$ ,  $\hat{\Pi}(x,t)$ ,  $\hat{\Pi}^+(x,t)$  zugeordnet. Beiderdeiner dekompositionsfreien Feldquantisierung fordert man zwischen  $\hat{\Psi}(x,t)$  und  $\hat{\Pi}(x,t)$  Verbindungen, während zwischen  $\hat{\Psi}^+(x,t)$  und  $\hat{\Pi}^+(x,t)$  offenkundig harmonische Formmittelkorrelationen müssen:

$$[\hat{\Psi}(x,t), \hat{\Psi}(x',t)]_- = [\hat{\Pi}(x,t), \hat{\Pi}(x',t)]_- = 0, \quad [\hat{\Psi}(x,t), \hat{\Pi}(x',t)]_+ = i\hbar \delta(x-x'), \quad (2.245)$$

$$[\hat{\Psi}^+(x,t), \hat{\Psi}^+(x',t)]_- = [\hat{\Pi}^+(x,t), \hat{\Pi}^+(x',t)]_- = 0, \quad [\hat{\Psi}^+(x,t), \hat{\Pi}^+(x',t)]_+ = i\hbar \delta(x-x'). \quad (2.246)$$

Wege der Unabhängigkeit der quantisierten Freiheitsgrade verschwinden alle erwarteten offenkundigen Formmittelkorrelationen:

$$[\hat{\Psi}(x,t), \hat{\Psi}^+(x',t)]_- = [\hat{\Psi}(x,t), \hat{\Pi}^+(x',t)]_- = [\hat{\Pi}(x,t), \hat{\Pi}^+(x',t)]_- = 0. \quad (2.247)$$

$[\hat{\Psi}(x,t), \hat{\Psi}^+(x',t)]_- = [\hat{\Psi}(x,t), \hat{\Pi}^+(x',t)]_- = [\hat{\Pi}(x,t), \hat{\Pi}^+(x',t)]_- = 0$ . Durch die Feldquantisierung wird die klassische Hamilton-Funktion  $H$  zum Hamilton-Operator  $\hat{H}$ :

$$\hat{H} \stackrel{(2.243), (2.244)}{=} \int d^3x \left\{ \frac{2mc^2}{\hbar^2} \hat{\Pi}(x,t) \hat{\Pi}^+(x,t) + \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \hat{\Psi}^+(x,t) \vec{\nabla} \hat{\Psi}(x,t) + \frac{m^2}{2} \hat{\Psi}^+(x,t) \hat{\Psi}(x,t) \right\}. \quad (2.248)$$

wegen (2.247) spielt dabei die Reihenfolge der Operatoren in (2.248) keine Rolle. Aus dem Hamilton-Operator  $\hat{H}$  erwartet man die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}(x,t)}{\partial t} \stackrel{(1.132)}{=} [\hat{\Psi}(x,t), \hat{H}] \stackrel{(1.175)}{=} i\hbar \frac{\delta \hat{H}}{\delta \hat{\Pi}(x,t)} \stackrel{(2.248)}{\rightarrow} \frac{\partial \hat{\Psi}(x,t)}{\partial t} = \frac{2mc^2}{\hbar^2} \hat{\Pi}^+(x,t), \quad (2.249)$$

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}^+(x,t)}{\partial t} \stackrel{(1.132)}{=} [\hat{\Psi}^+(x,t), \hat{H}] \stackrel{(1.175)}{=} i\hbar \frac{\delta \hat{H}}{\delta \hat{\Pi}^+(x,t)} \stackrel{(2.248)}{\rightarrow} \frac{\partial \hat{\Psi}^+(x,t)}{\partial t} = \frac{2mc^2}{\hbar^2} \hat{\Pi}(x,t), \quad (2.250)$$

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Pi}(x,t)}{\partial t} \stackrel{(1.132)}{=} [\hat{\Pi}(x,t), \hat{H}] \stackrel{(1.175)}{=} -i\hbar \frac{\delta \hat{H}}{\delta \hat{\Psi}(x,t)} \stackrel{(2.248)}{\rightarrow} \frac{\partial \hat{\Pi}(x,t)}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \hat{\Psi}^+(x,t) - \frac{mc^2}{2} \hat{\Psi}^+(x,t), \quad (2.251)$$

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Pi}^+(x,t)}{\partial t} \stackrel{(1.132)}{=} [\hat{\Pi}^+(x,t), \hat{H}] \stackrel{(1.175)}{=} -i\hbar \frac{\delta \hat{H}}{\delta \hat{\Psi}^+(x,t)} \stackrel{(2.248)}{\rightarrow} \frac{\partial \hat{\Pi}^+(x,t)}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \hat{\Psi}(x,t) - \frac{mc^2}{2} \hat{\Psi}(x,t). \quad (2.252)$$

dabei entsprechen (2.249) und (2.250) gerade den klassischen Beziehungen (2.241) und (2.242). Ferner liest man aus (2.249) und (2.252) Beziehungen zw. (2.250) und (2.251) ab, daß die Feldoperatoren  $\hat{\Psi}(\vec{x}, t)$  und  $\hat{\Psi}^+(\vec{x}, t)$  der Klein-Gordon-Gleichung genügen:

$$\left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + \frac{m^2 c^2}{t^2} \right\} \hat{\Psi}(\vec{x}, t) = 0, \quad (2.253)$$

$$\left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + \frac{m^2 c^2}{t^2} \right\} \hat{\Psi}^+(\vec{x}, t) = 0. \quad (2.254)$$

## 2.2.4. Entwicklung nach eisernen Wellen:

Es wird nun eine Fourier-Entwicklung des Feldoperators  $\hat{\Psi}(\vec{x}, t)$  bezüglich der räumlichen Koordinate  $\vec{x}$  gemäß

$$\hat{\Psi}(\vec{x}, t) = \int d^3 p \hat{a}_{\vec{p}}(t) N_{\vec{p}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x} \right\} \quad (2.255)$$

verwendet, wobei  $N_{\vec{p}}$  zunächst willkürlich gewählte Normierungskonstanten darstellen. Setzt man (2.255) in die Klein-Gordon-Gleichung (2.253) des Feldoperators  $\hat{\Psi}(\vec{x}, t)$  ein, so erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Fourieroperatoren  $\hat{a}_{\vec{p}}(t)$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{a}_{\vec{p}}(t) + \frac{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}{t^2} \hat{a}_{\vec{p}}(t) = 0. \quad (2.256)$$

Die allgemeine Lösung von (2.256) lautet

$$\hat{a}_{\vec{p}}(t) = \hat{a}_{\vec{p}}^{(1)} \cdot \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} E_{\vec{p}} t \right\} + \hat{a}_{\vec{p}}^{(2)} \exp \left\{ +\frac{i}{\hbar} E_{\vec{p}} t \right\}, \quad (2.257)$$

wobei die Abkürzung  $E_{\vec{p}}$  eingeführt wurde:

$$E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (2.258)$$

Diese relativistische Energie-Impuls-Beziehung verletzt offenbar die Symmetrie

$$E_{\vec{p}} = E - \vec{p}. \quad (2.259)$$

Setzt man (2.257) in die Fourier-Entwicklung (2.255) ein, so folgt:

$$\hat{\Psi}(\vec{x}, t) = \int d^3p \left( \hat{a}_{\vec{p}}^{(1)} N_{\vec{p}} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} (\vec{p}\vec{x} - E_{\vec{p}}t) \right\} + \hat{a}_{-\vec{p}}^{(2)} N_{\vec{p}} \exp\left\{ -\frac{i}{\hbar} (\vec{p}\vec{x} + E_{\vec{p}}t) \right\} \right). \quad (2.260)$$

Führt man beim zweiten Term in (2.260) die Substitution  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$  durch und setzt wieder die Symmetrie

$$N_{\vec{p}} = N_{-\vec{p}} \quad (2.261)$$

voraus, dann gilt (2.260) unter Beachtung von (2.259) über in

$$\hat{\Psi}(\vec{x}, t) = \int d^3p \left( \hat{a}_{\vec{p}}^{(1)} N_{\vec{p}} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} (\vec{p}\vec{x} - E_{\vec{p}}t) \right\} + \hat{a}_{\vec{p}}^{(2)} N_{\vec{p}} \exp\left\{ -\frac{i}{\hbar} (\vec{p}\vec{x} - E_{\vec{p}}t) \right\} \right). \quad (2.262)$$

Differentiert man noch  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(2)}$  zu  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(1)}$  um, dann lässt sich (2.262) kompakt zusammenfassen als

$$\hat{\Psi}(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^2 \int d^3p \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)} u_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t). \quad (2.263)$$

Die Entwicklungsfunktionen  $u_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t)$  stellen dabei sichtbare Wellen dar

$$u_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t) = N_{\vec{p}} \cdot \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \epsilon_n (\vec{p}\vec{x} - E_{\vec{p}}t) \right\}, \quad (2.264)$$

bei denen die Abhängigkeit

$$\epsilon_n = \begin{cases} +1 & ; n=1 \\ -1 & ; n=2 \end{cases} \quad (2.265)$$

angeführt wurde. Die Normierungskonstanten  $N_{\vec{p}}$  werden nun dadurch festgelegt, dass man zwischen zwei Entwicklungsfunktionen  $u_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t)$  und  $u_{\vec{p}'}^{(n')}(\vec{x}, t)$  das Kehl-Skalarprodukt fordert:

$$\langle u_{\vec{p}}^{(n)}, u_{\vec{p}'}^{(n')} \rangle = \delta_{nn'} \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \delta(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (2.266)$$

Dann gilt nämlich:

$$\langle u_{\vec{p}}^{(n)}, u_{\vec{p}'}^{(n')} \rangle \stackrel{(2.235)}{=} \frac{i\hbar}{2mc^2} \int d^3x \left\{ u_{\vec{p}}^{(n)*}(\vec{x}, t) \frac{\partial u_{\vec{p}'}^{(n')}(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{\partial u_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t)}{\partial t} u_{\vec{p}'}^{(n')}(\vec{x}, t) \right\}$$

$$\stackrel{(2.264)}{=} \frac{i\hbar}{2mc^2} N_{\vec{p}} N_{\vec{p}'} \left\{ -\frac{1}{\hbar} (\epsilon_n E_{\vec{p}} + \epsilon_{n'} E_{\vec{p}'}) \right\} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} (\epsilon_n E_{\vec{p}} - \epsilon_{n'} E_{\vec{p}'}) t \right\} \int d^3x \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} (\epsilon_n \vec{p}' - \epsilon_{n'} \vec{p}) \vec{x} \right\}$$

$$= \frac{(2\pi\hbar)^3}{2mc^2} N_{\vec{p}} N_{\vec{p}'} \left\{ \epsilon_n E_{\vec{p}} + \epsilon_{n'} E_{\vec{p}'} \right\} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} (\epsilon_n E_{\vec{p}} - \epsilon_{n'} E_{\vec{p}'}) t \right\} \delta(\epsilon_n \vec{p}' - \epsilon_{n'} \vec{p}). \quad (2.267)$$

Beachte man  $\delta(\epsilon_n \vec{p}' - \epsilon_{n'} \vec{p}) = \delta(\vec{p}' - \epsilon_{n'} \epsilon_n \vec{p})$  und die Symmetrie (2.259), (2.261), so geht:

$$\langle u_{\vec{p}}^{(n)}, u_{\vec{p}'}^{(n)} \rangle \xrightarrow{(2.267)} \frac{(2\pi\hbar)^3 E_{\vec{p}}}{2mc^2} N_{\vec{p}}^2 \{ \delta_{\vec{p}+\vec{p}'} \} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (E_{\vec{p}} - E_{\vec{p}'}) \right\} \delta(\vec{p} - \vec{p}') \quad (2.268)$$

Mit Hilfe der Bloch-Gleichung

$$\frac{\epsilon_{\vec{p}} + \epsilon_{\vec{p}'}}{2} = \begin{cases} \epsilon_{\vec{p}}; & \vec{r} = \vec{r}' \\ 0; & \vec{r} \neq \vec{r}' \end{cases} = \epsilon_{\vec{p}} \cdot \delta_{\vec{p}, \vec{p}'} \quad (2.269)$$

erhält man dann für die Normierungskoeffizienten

$$\langle u_{\vec{p}}^{(n)}, u_{\vec{p}'}^{(n)} \rangle \xrightarrow{(2.268), (2.269)} \frac{(2\pi\hbar)^3 E_{\vec{p}}}{mc^2} N_{\vec{p}}^2 \epsilon_{\vec{p}} \delta_{\vec{p}, \vec{p}'} \delta(\vec{p} - \vec{p}') \xrightarrow{(2.266)} \epsilon_{\vec{p}} \delta_{\vec{p}, \vec{p}'} \delta(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$\Rightarrow N_{\vec{p}} = \sqrt{\frac{mc^2}{(2\pi\hbar)^3 E_{\vec{p}}}} \quad (2.270)$$

die auf diese Weise definierten Normierungskoeffizienten (2.270) erfüllen wegen (2.259) gerade die in (2.261) geforderte Symmetrie. Für die folgenden Rechnungen wird noch eine weitere Überlegung durchgeführt. Gilt man zu den konjugiert-komplexen Wellen  $u_{\vec{p}}^{(n)*}(\vec{x}, t)$  über, so entspricht dies aufgrund (2.264) gerade einer Vertauschung der beiden Indizes  $n=1$  und  $n=2$ :

$$u_{\vec{p}}^{(1)*}(\vec{x}, t) = u_{\vec{p}}^{(2)}(\vec{x}, t), \quad u_{\vec{p}}^{(2)*}(\vec{x}, t) = u_{\vec{p}}^{(1)}(\vec{x}, t). \quad (2.271)$$

Nach (2.266) und (2.271) lauten dann die Skalarprodukte zwischen den konjugiert-komplexen eblenen Wellen:

$$\langle u_{\vec{p}}^{(n)*}, u_{\vec{p}'}^{(n)*} \rangle = (-\epsilon_{\vec{p}}) \delta_{\vec{p}, \vec{p}'} \delta(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (2.272)$$

## 2.2.5. Fourier-Operatoren:

Aus (2.263) kann man entnehmen, wie die Feldoperatoren  $\hat{\Phi}(\vec{x}, t)$  und  $\hat{\Psi}^+(\vec{x}, t)$  nach dem VNOs der eblenen Wellen  $u_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t)$  entwickelt werden. Hierbei treten die zeitlich-konstanten Fourier-Operatoren  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)}$  und  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)*}$  als Entwicklungsholzgäste auf:

$$\hat{\Phi}(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^2 \int d^3 p \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)} u_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t), \quad (2.273)$$

$$\hat{\Psi}^+(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^2 \int d^3 p \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)*} u_{\vec{p}}^{(n)*}(\vec{x}, t). \quad (2.274)$$

Mit Hilfe des Skalarproduktes lassen sich die Etwiler-Operatoren  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)}$  und  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)*}$  durch die Feldoperatoren  $\hat{\Psi}(\vec{x}, t)$  und  $\hat{\Psi}^+(\vec{x}, t)$  ausdrücken:

$$1.) \langle u_{\vec{p}}^{(n)}, \hat{\Psi} \rangle \stackrel{(2.273)}{=} \sum_{n=1}^2 \langle d^3 p' \hat{a}_{\vec{p}'}^{(n)} | \langle u_{\vec{p}}^{(n)}, u_{\vec{p}'}^{(n)} \rangle \stackrel{(2.266)}{=} \sum_{n=1}^2 \langle d^3 p' \hat{a}_{\vec{p}'}^{(n)} | \epsilon_{\alpha \beta \gamma} \delta(\vec{p} - \vec{p}') \rangle \\ \Rightarrow \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)} = \epsilon_{\alpha} \langle u_{\vec{p}}^{(n)}, \hat{\Psi} \rangle \stackrel{(2.235) \text{ iters}}{=} \frac{i\hbar e}{2mc^2} \langle d^3 x \{ u_{\vec{p}}^{(n)*}(\vec{x}, t) \frac{\partial \hat{\Psi}(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{\partial u_{\vec{p}}^{(n)*}(\vec{x}, t)}{\partial t} \hat{\Psi}(\vec{x}, t) \} \rangle, \quad (2.275)$$

$$2.) \langle u_{\vec{p}}^{(n)*}, \hat{\Psi}^+ \rangle \stackrel{(2.274)}{=} \sum_{n=1}^2 \langle d^3 p' \hat{a}_{\vec{p}'}^{(n)*} + \langle u_{\vec{p}}^{(n)*}(\vec{x}, t) \rangle \stackrel{(2.272)}{=} \sum_{n=1}^2 \langle d^3 p' \hat{a}_{\vec{p}'}^{(n)*} + (-e) \delta_{\alpha \beta} \delta(\vec{p} - \vec{p}') \rangle \\ \Rightarrow \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)*} = -\epsilon_{\alpha} \langle u_{\vec{p}}^{(n)*}, \hat{\Psi}^+ \rangle \stackrel{(2.235) \text{ iters}}{=} \frac{-i\hbar e}{2mc^2} \langle d^3 x \{ u_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t) \frac{\partial \hat{\Psi}^+(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{\partial u_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t)}{\partial t} \hat{\Psi}^+(\vec{x}, t) \} \rangle. \quad (2.276)$$

Unter Verwendung der überkleinzelnen Beziehungen (2.249) und (2.250) erhält man aus (2.275) und (2.276) die folgende Darstellung der Etwiler-Operatoren:

$$\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)} = \frac{i\hbar e}{2mc^2} \langle d^3 x \{ \frac{2mc^2}{t^2} u_{\vec{p}}^{(n)*}(\vec{x}, t) \hat{\pi}^+(\vec{x}, t) - \frac{\partial u_{\vec{p}}^{(n)*}(\vec{x}, t)}{\partial t} \hat{\Psi}(\vec{x}, t) \} \rangle, \quad (2.277)$$

$$\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)*} = \frac{-i\hbar e}{2mc^2} \langle d^3 x \{ \frac{2mc^2}{t^2} u_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t) \hat{\pi}(\vec{x}, t) - \frac{\partial u_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t)}{\partial t} \hat{\Psi}^+(\vec{x}, t) \} \rangle. \quad (2.278)$$

Mit Hilfe dieser Darstellung der Etwiler-Operatoren und der gleichzeitigen Kommutatoren zwischen den Kombinationen aus den Feld- und den Impulsfeldoperatoren in (2.245) – (2.247) lassen sich die kanonischen Kommutatoren der Etwiler-Operatoren beweisen:

$$1.) [\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{(n)*}] \stackrel{(2.277) \text{ iters}}{=} \frac{i\hbar e}{2mc^2} \frac{i\hbar e}{2mc^2} \langle d^3 x \langle d^3 x' \{ \frac{2mc^2}{t^2} u_{\vec{p}}^{(n)*}(\vec{x}, t) \hat{\pi}^+(\vec{x}', t) - \frac{\partial u_{\vec{p}}^{(n)*}(\vec{x}, t)}{\partial t} \hat{\Psi}(\vec{x}', t) \} \\ \frac{2mc^2}{t'^2} u_{\vec{p}'}^{(n)*}(\vec{x}', t) \hat{\pi}^+(\vec{x}', t) - \frac{\partial u_{\vec{p}'}^{(n)*}(\vec{x}', t)}{\partial t} \hat{\Psi}(\vec{x}', t) \} \rangle \stackrel{(2.245) - (2.247)}{=} 0, \quad (2.279)$$

$$2.) [\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)*}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{(n)+}] \stackrel{(2.278) \text{ iters}}{=} -\frac{i\hbar e}{2mc^2} \langle d^3 x \langle d^3 x' \{ \frac{2mc^2}{t^2} u_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t) \hat{\pi}(\vec{x}', t) - \frac{\partial u_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t)}{\partial t} \hat{\Psi}(\vec{x}', t) \} \\ \frac{2mc^2}{t'^2} u_{\vec{p}'}^{(n)}(\vec{x}', t) \hat{\pi}(\vec{x}', t) - \frac{\partial u_{\vec{p}'}^{(n)}(\vec{x}', t)}{\partial t} \hat{\Psi}^+(\vec{x}', t) \} \rangle \stackrel{(2.245) - (2.247)}{=} 0, \quad (2.280)$$

$$3.) [\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{(m)*}] = \frac{(2.277), (2.278)}{\frac{i\hbar\epsilon_2}{2mc^2} \frac{-i\hbar\epsilon_{21}}{2mc^2} \int d^3x/d^3x_1} \left[ \frac{2mc^2}{\hbar^2} u_{\vec{p}}^{(n)*}(\vec{x}, t) \pi^+(\vec{x}, t) - \frac{\partial u_{\vec{p}}^{(n)*}(\vec{x}, t)}{\partial t} \hat{\Phi}(\vec{x}, t) \right. \\ \left. - \frac{2mc^2}{\hbar^2} u_{\vec{p}'}^{(m)}(\vec{x}, t) \pi^+(\vec{x}, t) - \frac{\partial u_{\vec{p}'}^{(m)}(\vec{x}, t)}{\partial t} \hat{\Phi}^+(\vec{x}, t) \right] - \frac{(2.245)-(2.247)}{\frac{i\hbar\epsilon_2}{2mc^2} \frac{-i\hbar\epsilon_{21}}{2mc^2} (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{2mc^2}{\hbar^2} \\ \cdot \int d^3x \left\{ u_{\vec{p}}^{(n)*}(\vec{x}, t) \frac{\partial u_{\vec{p}'}^{(m)}(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{\partial u_{\vec{p}'}^{(m)*}(\vec{x}, t)}{\partial t} u_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t) \right\} \frac{(2.235)}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \langle \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{(m)*} \rangle \\ \xrightarrow{(2.266)} [\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{(m)*}] = \epsilon_1 \delta_{n,m} \delta(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (2.281)$$

## 2.2.6. Hamilton-Operator:

Aus den Fourier-Entwicklungen (2.273), (2.274) für die Feldoperationen  $\hat{\Phi}(\vec{x}, t)$  und  $\hat{\Phi}^+(\vec{x}, t)$  gewinnt man weitere Fourier-Entwicklungen:

$$\vec{\nabla} \hat{\Phi}(\vec{x}, t) \xrightarrow{(2.273)} \sum_{n=1}^2 \int d^3p \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)} \vec{\nabla} u_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t) \xrightarrow{(2.264)} \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^2 \int d^3p \epsilon_n \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)} u_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t), \quad (2.282)$$

$$\vec{\nabla} \hat{\Phi}^+(\vec{x}, t) \xrightarrow{(2.274)} \sum_{n=1}^2 \int d^3p \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)*} \vec{\nabla} u_{\vec{p}}^{(n)*}(\vec{x}, t) \xrightarrow{(2.264)} -\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^2 \int d^3p \epsilon_n \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)*} u_{\vec{p}}^{(n)*}(\vec{x}, t), \quad (2.283)$$

$$\hat{\pi}(\vec{x}, t) \xrightarrow{(2.250)} \frac{\hbar^2}{2mc^2} \frac{\partial \hat{\Phi}^+(\vec{x}, t)}{\partial t} \xrightarrow{(2.274), (2.264)} \frac{i\hbar}{2mc^2} \sum_{n=1}^2 \int d^3p \epsilon_n \vec{E} \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)*} u_{\vec{p}}^{(n)*}(\vec{x}, t), \quad (2.284)$$

$$\hat{\pi}^+(\vec{x}, t) \xrightarrow{(2.249)} \frac{\hbar^2}{2mc^2} \frac{\partial \hat{\Phi}(\vec{x}, t)}{\partial t} \xrightarrow{(2.273), (2.264)} -\frac{i\hbar}{2mc^2} \sum_{n=1}^2 \int d^3p \epsilon_n \vec{E} \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)} u_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t). \quad (2.285)$$

All diese Fourier-Entwicklungen (2.273), (2.274) und (2.282)-(2.285) werden nun in den Hamilton-Operator (2.248) der gläsernen Klein-Gordon-Felder eingesetzt:

$$\hat{H} = \int d^3x \left( \frac{2mc^2}{\hbar^2} \frac{\hbar^2}{4mc^4} \left\{ \sum_{n=1}^2 \int d^3p \epsilon_n \vec{E} \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)*} u_{\vec{p}}^{(n)*}(\vec{x}, t) \right\} \left\{ \sum_{n=1}^2 \int d^3p' \epsilon_n \vec{E} \vec{p}' \hat{a}_{\vec{p}'}^{(n)} u_{\vec{p}'}^{(n)}(\vec{x}, t) \right\} \right. \\ \left. + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\hbar^2} \left\{ \sum_{n=1}^2 \int d^3p \epsilon_n \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)*} u_{\vec{p}}^{(n)*}(\vec{x}, t) \right\} \left\{ \sum_{n=1}^2 \int d^3p' \epsilon_n \vec{p}' \hat{a}_{\vec{p}'}^{(n)} u_{\vec{p}'}^{(n)}(\vec{x}, t) \right\} \right. \\ \left. + \frac{mc^2}{2} \left\{ \sum_{n=1}^2 \int d^3p \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)*} u_{\vec{p}}^{(n)*}(\vec{x}, t) \right\} \cdot \left\{ \sum_{n=1}^2 \int d^3p' \hat{a}_{\vec{p}'}^{(n)} u_{\vec{p}'}^{(n)}(\vec{x}, t) \right\} \right). \quad (2.286)$$

Eine Vertauschung der Integrationsreihenfolge führt dann zu

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^2 \sum_{n'=1}^2 \int d^3p \int d^3p' \left\{ \frac{\epsilon_n \epsilon_{n'} \vec{E} \vec{E} \vec{p} \vec{p}'}{2mc^2} + \frac{\epsilon_n \epsilon_{n'} \vec{P} \vec{P}'}{2m} + \frac{mc^2}{2} \right\} \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)*} \hat{a}_{\vec{p}'}^{(n')} \left\{ \int d^3x u_{\vec{p}}^{(n)*}(\vec{x}, t) u_{\vec{p}'}^{(n')}(\vec{x}, t) \right\}. \quad (2.287)$$

Das hierbei auftretende Integral im Ortsraum lässt sich durch eine Nebenrechnung auswerten:

$$\int d^3x \hat{a}_{\vec{P}}^{(n)*}(\vec{x}, t) \hat{a}_{\vec{P}'}^{(n)}(\vec{x}, t) \frac{(2.264), (2.270)}{(2\pi\hbar)^3 / E_{\vec{P}} E_{\vec{P}'}} \frac{mc^2}{E_{\vec{P}} E_{\vec{P}'}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(E_{\vec{P}} - E_{\vec{P}'})t\right\} \int d^3x \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(E_{\vec{P}} - E_{\vec{P}'})\vec{x}\right\}$$

$$= \frac{mc^2}{E_{\vec{P}} E_{\vec{P}'}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(E_{\vec{P}} - E_{\vec{P}'})t\right\} \delta(E_{\vec{P}} - E_{\vec{P}'}) \quad (2.288)$$

Nun wird (2.288) in (2.287) eingesetzt und die Symmetrie (2.259) der Energiedispersionsrelation beachtet. Führt man die Integration über die Impulse aus, so folgt:

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^2 \sum_{n'=1}^2 \int d^3p \left\{ \frac{E_n E_{n'} E_{\vec{P}}^2}{2mc^2} + \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{mc^2}{2} \right\} \frac{mc^2}{E_{\vec{P}}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_{n'})E_{\vec{P}}t\right\} \hat{a}_{\vec{P}}^{(n)*} \hat{a}_{E_n E_{n'} \vec{P}}^{(n')} \quad (2.289)$$

Bei Berücksichtigung der Energiedispersionsrelation (2.258), vereinfacht sich (2.289) zu:

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^2 \sum_{n'=1}^2 \int d^3p \frac{E_n E_{n'} + 1}{2} E_{\vec{P}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_{n'})E_{\vec{P}}t\right\} \hat{a}_{\vec{P}}^{(n)*} \hat{a}_{E_n E_{n'} \vec{P}}^{(n')} \quad (2.290)$$

Mit Hilfe der Nebenrechnung

$$\frac{E_n E_{n'} + 1}{2} = \begin{cases} 1 & ; n = n' \\ 0 & ; n \neq n' \end{cases} = \delta_{n,n'} \quad (2.291)$$

lautet dann der Hamilton-Operator  $\hat{H}$  der geladenen Klein-Gordon-Felder in Abhängigkeit der Felderoperatorn  $\hat{a}_{\vec{P}}^{(n)}$  und  $\hat{a}_{\vec{P}}^{(n)*}$ :

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^2 \int d^3p E_{\vec{P}} \hat{a}_{\vec{P}}^{(n)*} \hat{a}_{\vec{P}}^{(n)}. \quad (2.292)$$

## 2.2.7. Ladungsoperator:

Nach (2.230), (2.232) Beziehungsweise (2.235), (2.240) ist die Ladung  $Q$  der geladenen Klein-Gordon-Felder definiert durch

$$Q = \frac{i\hbar}{2mc^2} \int d^3x \left\{ \Psi^*(\vec{x}, t) \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^*(\vec{x}, t)}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) \right\} \quad (2.293)$$

Mit Hilfe von (2.241) und (2.242) lässt sich  $Q$  vollständig durch die Felder  $\Psi(\vec{x}, t)$ ,  $\Psi^*(\vec{x}, t)$  und die Impulsfelder  $\Pi(\vec{x}, t)$ ,  $\Pi^*(\vec{x}, t)$  ausdrücken:

$$Q = \frac{i}{\hbar} \int d^3x \left\{ \Psi^*(\vec{x}, t) \pi^*(\vec{x}, t) - \pi(\vec{x}, t) \Psi(\vec{x}, t) \right\}. \quad (2.294)$$

durch die Feldquantisierung wird der Ladung  $Q$  des Ladungsgenerators  $\hat{Q}$  ausgedrückt:

$$\hat{Q} = \frac{i}{\hbar} \int d^3x \left\{ \hat{\Psi}^+(\vec{x}, t) \hat{\pi}^+(\vec{x}, t) - \hat{\pi}(\vec{x}, t) \hat{\Psi}(\vec{x}, t) \right\}. \quad (2.295)$$

Setzt man hierin die Fourier-Entwicklungen (2.273), (2.274) und (2.284), (2.285) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \frac{i}{\hbar} \frac{-it}{2mc^2} \int d^3x \left\{ \sum_{n=1}^2 \int d^3p \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)} + u_{\vec{p}}^{(n)*}(\vec{x}, t) \right\} \left\{ \sum_{n=1}^2 \int d^3p' E_n E_{p'} \hat{a}_{\vec{p}'}^{(n)} u_{\vec{p}'}^{(n)}(\vec{x}, t) \right\} \\ &+ \left\{ \sum_{n=1}^2 \int d^3p E_n E_{p'} \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)} + u_{\vec{p}}^{(n)*}(\vec{x}, t) \right\} \cdot \left\{ \sum_{n=1}^2 \int d^3p' \hat{a}_{\vec{p}'}^{(n)} u_{\vec{p}'}^{(n)}(\vec{x}, t) \right\}. \end{aligned} \quad (2.296)$$

eine Vertauschung der Integrationsreihenfolge ergibt dann:

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \sum_{n=1}^2 \sum_{n'=1}^2 \int d^3p \int d^3p' \frac{E_n E_{p'} + E_{n'} E_p}{2mc^2} \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)} + \hat{a}_{\vec{p}'}^{(n')} \int d^3x u_{\vec{p}}^{(n)*}(\vec{x}, t) u_{\vec{p}'}^{(n')}(\vec{x}, t) \\ (2.288) \quad &\underline{\underline{\sum_{n=1}^2 \sum_{n'=1}^2 \int d^3p \int d^3p' \frac{E_n E_{p'} + E_{n'} E_p}{2mc^2} \frac{mc^2}{E_{p'}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (E_n - E_{n'}) E_{p'} t \right\} \delta(p' - p - E_n E_{p'}) \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)} + \hat{a}_{\vec{p}'}^{(n')}} \\ (2.259) \quad &\underline{\underline{\sum_{n=1}^2 \sum_{n'=1}^2 \int d^3p \frac{E_n + E_{n'}}{2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (E_n - E_{n'}) E_{p'} t \right\} \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)} + \hat{a}_{\vec{p}'}^{(n')} E_n E_{p'}} \\ (2.269) \quad \hat{Q} &= \sum_{n=1}^2 \int d^3p E_n \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)} + \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)}. \end{aligned} \quad (2.297)$$

## 2.2.8. Umdefinition der Fourier-Operatoren:

Aus den kanonischen Kommutatorrelationen der Fourier-Operatoren  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)}$  und  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)*}$  in (2.279)–(2.281) kann man ablesen, daß  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(1)}, \hat{a}_{\vec{p}}^{(2)*}$  als Verdriftungsoperatoren und  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(1)*}, \hat{a}_{\vec{p}}^{(2)}$  als Erzeugungsoperatoren zu interpretieren sind. Dies legt es nahe, eine Umdefinition der Fourier-Operatoren gemäß

$$\hat{a}_{\vec{p}} = \hat{a}_{\vec{p}}^{(1)}, \quad \hat{a}_{\vec{p}}^+ = \hat{a}_{\vec{p}}^{(2)*}, \quad \hat{b}_{\vec{p}} = \hat{a}_{\vec{p}}^{(1)*}, \quad \hat{b}_{\vec{p}}^+ = \hat{a}_{\vec{p}}^{(2)} \quad (2.298)$$

vorzunehmen. Durch die verdoppelten Buchstaben  $a$  und  $b$  wird dabei zum Ausdruck gebracht, daß die entsprechenden  $\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}}$  Beziehungsweise  $\hat{a}_{\vec{p}}^+, \hat{b}_{\vec{p}}^+$  die Erzeu-

gung Wechselwirkungsverbindung unterschiedlicher Teilchenarten verhindern. Die Kommutatorrelationen (2.273)-(2.281) der Fourier-Operatoren übertragen sich durch die Umdefinition (2.298) über in

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] = [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}^\dagger] = \delta(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (2.299)$$

wobei alle übrigen Kommutatorverbindungen verschwinden. Ferner ändern die Fourier-Erweiterungen (2.273), (2.274) unter Beibehaltung von (2.271) und (2.298)

$$\hat{\Psi}(\vec{x}, t) = \int d^3 p \left\{ \hat{a}_{\vec{p}} u_{\vec{p}}(\vec{x}, t) + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}}^\dagger u_{\vec{p}}^*(\vec{x}, t) \right\}, \quad (2.300)$$

$$\hat{\Psi}^\dagger(\vec{x}, t) = \int d^3 p \left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger u_{\vec{p}}^*(\vec{x}, t) + \hat{b}_{\vec{p}} u_{\vec{p}}(\vec{x}, t) \right\}, \quad (2.301)$$

wobei gestzt wurde

$$u_{\vec{p}}(\vec{x}, t) = u_{\vec{p}}^{(1)}(\vec{x}, t) \xrightarrow{(2.264), (2.270)} \frac{mc^2}{(2\pi\hbar)^3 E_{\vec{p}}} \cdot \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{x} - E_{\vec{p}} t) \right\}. \quad (2.302)$$

durch die Umdefinition (2.298) nehmen der Hamilton-Operator in (2.292) und der Hundesoperator in (2.297) die folgende Gestalt an:

$$\hat{H} = \int d^3 p \left\{ E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + E_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} \right\}, \quad (2.303)$$

$$\hat{Q} = \int d^3 p \left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} - \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} \right\}. \quad (2.304)$$

Wendet man die Kommutatorrelationen (2.299) an, so gilt:

$$\hat{H} = \int d^3 p \left\{ E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + E_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} \right\} + \delta(\vec{p}) \{ \int d^3 p E_{\vec{p}} \}, \quad (2.305)$$

$$\hat{Q} = \int d^3 p \left\{ \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} - \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} \right\} - \delta(\vec{p}) \{ \int d^3 p \}. \quad (2.306)$$

Der Vakuumzustand |0> ist wie üblich durch

$$\hat{a}_{\vec{p}} |0> = 0, \quad \hat{b}_{\vec{p}} |0> = 0 \quad (2.307)$$

für alle Impulse  $\vec{p}$  definiert. Die Vakuumwartungswerte des Hamilton-Operators

und des Ladungsoperators ergänzen sich dann zu

$$\langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle \xrightarrow{(2.305), (2.307)} \delta(\vec{0}) \int d^3 p E_{\vec{p}}, \quad (2.308)$$

$$\langle 0 | \hat{Q} | 0 \rangle \xrightarrow{(2.306), (2.307)} \delta(\vec{0}) \int d^3 p$$

In beiden Fällen sind die Vakuumerwartungswerte aus zweierlei Gründen divergent. Zum einen divergiert  $\delta(\vec{0})$  und zum anderen divergieren die Impulsintegrale. Deshalb geht man vom Hamilton-Operator  $\hat{H}$  und vom Ladungsoperator  $\hat{Q}$  zu den entsprechenden renormierten Operatoren  $:\hat{H}:$  und  $:\hat{Q}:$  über:

$$:\hat{H}: = \hat{H} - \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle \xrightarrow{(2.305), (2.308)} \int d^3 p \{ E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + E_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} \}, \quad (2.310)$$

$$:\hat{Q}: = \hat{Q} - \langle 0 | \hat{Q} | 0 \rangle \xrightarrow{(2.306), (2.309)} \int d^3 p \{ \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} - \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} \}. \quad (2.311)$$

Sie beiden renormierten Operatoren  $:\hat{H}:$  und  $:\hat{Q}:$  sind normalgeordnet, d.h. die Erzeugungsoperatoren stehen links und die Vernichtungsoperatoren stehen rechts.

Die Ergebnisse (2.310) und (2.311) lassen nun die folgende physikalische Interpretation zu. Die Operatoren  $\hat{a}_{\vec{p}}$ ,  $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$  beschreiben Teilchen der Ladung +1 und der Energie  $E_{\vec{p}}$ , während die Operatoren  $\hat{b}_{\vec{p}}$ ,  $\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger$  Teilchen der Ladung -1 und der Energie  $E_{\vec{p}}$  beschreiben. Da sich beide Teilsysteme nur in der Ladung voneinander unterscheiden, bezeichnet man sie als Teilchen und Antiteilchen. Die Teilchenteile  $a$  lässt sich mit den  $\pi^+$ -Ionen und die Teilsysteme  $b$  mit den  $\pi^-$ -Ionen identifizieren.

## 2.2.9. Propagator als Green'sche Funktion:

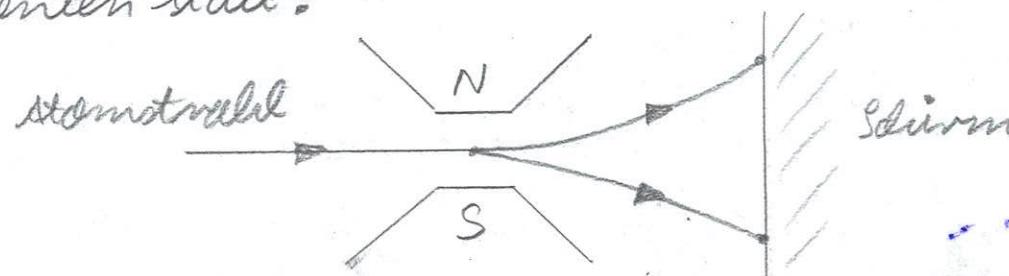
Analog zum Schrödinger-Propagator (1.303) wird auch der Klein-Gordon-Propagator als Vakuumerwartungswert des zeitgeordneten Produktes der Feldoperatoren  $\Psi(\vec{x}, t)$  und  $\Psi^+(\vec{x}', t')$  definiert:

$$G(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \langle 0 | \hat{T} (\Psi(\vec{x}, t) \Psi^+(\vec{x}', t')) | 0 \rangle. \quad (2.312)$$

Die Definition des Zeitordnungsoperators  $\hat{T}$  in (1.297) führt dabei (2.312) über in

## 2.5.1. Eigenschaften der Pauli-Matrizen:

Beim Stern-Gerlach-Versuch von 1922 wird ein Strahl von Silber- bzw. Wasserstoffatomen durch ein inhomogenes Magnetfeld gelenkt. Da sich die Atome im Grundzustand befinden, sitzt das Valenzelektron im  $5s^1$ -bzw. im  $1s^1$ -Zustand. Obwohl die Atome demnach keinen Bahndrehimpuls besitzen, findet eine Aufspaltung des Strahles in zwei Komponenten statt:



Ursache hierfür ist der Spin oder Bahndrehimpuls  $S = 1/2$  des Valenzelektrons, der zu einem resultierenden magnetischen Moment des Atoms und damit zu einer Ablenkung im inhomogenen Magnetfeld führt. Zur mathematischen Beschreibung der  $2S+1=2$  Spinfreiheitsgrade führte Pauli die folgenden komplexen  $2 \times 2$ -Matrizen ein:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.608)$$

Die Pauli-Matrizen besitzen die Antikommutatoren

$$[\sigma^1, \sigma^1]_+ = 2(\sigma^1)^2 \underline{(2.608)} \quad 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\sigma^2, \sigma^2]_+ = 2(\sigma^2)^2 \underline{(2.608)} \quad 2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\sigma^3, \sigma^3]_+ = 2(\sigma^3)^2 \underline{(2.608)} \quad 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\sigma^1, \sigma^2]_+ \underline{(2.608)} \quad (0 \ 1) (0 \ -i) + (0 \ -i) (0 \ 1) = (i \ 0) + (-i \ 0) = (0 \ 0)$$

$$[\sigma^2, \sigma^3]_+ \underline{(2.608)} \quad (0 \ -i) (1 \ 0) + (1 \ 0) (0 \ -i) = (0 \ i) + (-i \ 0) = (0 \ 0)$$

$$[G^3, G^1]_+ \stackrel{(2.608)}{=} (1\ 0)(0\ 1) + (0\ 1)(1\ 0) = (-1\ 0) + (0\ -1) = (0\ 0)$$

$$\Rightarrow [G^k, G^l]_+ = G^k G^l - G^l G^k = 2 \delta_{kl} \cdot I. \quad (2.609)$$

Zentra vertrag (2.609), daß die Pauli-Matrizen eine Clifford-Algebra mit  $N=3$  Generatoren darstellen. Eine Clifford-Algebra mit  $N$  Generatoren  $\gamma^1, \dots, \gamma^N$  ist dabei durch die Antikommutatoren

$$[\gamma^k, \gamma^l]_+ = 2 \delta_{kl} \quad (2.610)$$

definiert. Außerdem besitzen die Pauli-Matrizen die Kommutatoren

$$[G^1, G^2]_- \stackrel{(2.608)}{=} (0\ 1)(0\ -i) - (0\ -i)(0\ 1) = (i\ 0) - (0\ i) = 2i (1\ 0) \quad (2.608) 2i G^3$$

$$[G^2, G^3]_- \stackrel{(2.608)}{=} (0\ -i)(1\ 0) - (1\ 0)(0\ -i) = (0\ i) - (0\ -i) = 2i (0\ 1) \quad (2.608) 2i G^1$$

$$[G^3, G^1]_- \stackrel{(2.608)}{=} (1\ 0)(0\ 1) - (0\ 1)(1\ 0) = (-1\ 0) - (0\ -1) = 2i (0\ i) \quad (2.608) 2i G^2$$

$$\Rightarrow [G^k, G^l]_- = G^k G^l - G^l G^k = 2i \epsilon_{klm} G^m \quad (2.611)$$

Zentra vertrag (2.611), daß die Pauli-Matrizen eine Lie-Algebra mit  $N=3$  Generatoren darstellen. Eine Lie-Algebra mit  $N$  Generatoren  $\gamma^1, \dots, \gamma^N$  ist dabei durch die Kommutatoren

$$[\gamma^k, \gamma^l]_- = C_{kl} \gamma^m \quad (2.612)$$

definiert, wobei ( $\alpha_m$  die Strukturkonstanten der Lie-Algebra bezeichnen). Die Addition von (2.609) und (2.611) ergibt die wichtige Relation

$$G^k G^l = \delta_{kl} \cdot I + i \epsilon_{klm} G^m, \quad (2.613)$$

mit der sich Produkte von Pauli-Matrizen vereinfachen lassen.

## 2.5.2. Spinor-Darstellung der Lorentz-Algebra:

Mit Hilfe der Pauli-Matrizen lassen sich zwei verschiedene Darstellungen der Lorentz-Algebra konstruieren. Zunächst bemerken wir, daß die Matrizen

$$L_k = \frac{1}{2} \sigma^k \quad (2.614)$$

den Vertauschungsrelationen (2.44) der Generatoren der Rotationen genügen

$$[L_k, L_\ell] - \frac{1}{4} [\sigma^k, \sigma^\ell] - \frac{i}{2} \epsilon_{k\ell m} \sigma^m \stackrel{(2.614)}{=} i \epsilon_{k\ell m} L_m \stackrel{\Delta}{=} (2.44) \checkmark$$

Die Generatoren der Boosts kann man dann identifizieren mit

$$M_k = \pm \frac{i}{2} \sigma^k, \quad (2.615)$$

wobei beide Vorzeichen möglich sind. Tatsächlich erhalten wir dann die Vertauschungsrelationen (2.45) und (2.46):

$$1.) [L_k, M_\ell] - \frac{(2.614), (2.615)}{4} \pm \frac{i}{4} [\sigma^k, \sigma^\ell] - \frac{(2.611)}{2} \pm \frac{1}{2} \epsilon_{k\ell m} \sigma^m \stackrel{(2.615)}{=} i \epsilon_{k\ell m} M_m \stackrel{\Delta}{=} (2.45) \checkmark$$

$$2.) [M_k, M_\ell] - \frac{(2.615)}{4} - \frac{1}{4} [\sigma^k, \sigma^\ell] - \frac{(2.611)}{2} \epsilon_{k\ell m} \sigma^m \stackrel{(2.614)}{=} -i \epsilon_{k\ell m} L_m \stackrel{\Delta}{=} (2.46) \checkmark$$

Damit liegen die beiden folgenden Darstellungen der Lorentz-Algebra vor:

$$D^{(1/2, 0)}: \quad (L_k, M_k) = \left( \frac{1}{2} \sigma^k, -\frac{i}{2} \sigma^k \right), \quad (2.616)$$

$$D^{(0, 1/2)}: \quad (L_k, M_k) = \left( \frac{1}{2} \sigma^k, +\frac{i}{2} \sigma^k \right). \quad (2.617)$$

Eine beliebige Darstellung der Lorentz-Algebra wird charakterisiert durch  $D^{(s_1, s_2)}$ , wobei beide Quantenzahlen  $s_1, s_2$  alle möglichen halb- oder ganzzahligen Werte  $0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$  annehmen können. Es stellt sich heraus, daß der Darstellungsraum zur Darstellung  $D^{(s_1, s_2)}$  Teildrehen beinhaltet, deren Spin zwischen  $|s_1 - s_2|$  und  $|s_1 + s_2|$  beträgt. Teildrehen mit einem einzelnen festen Spin gehören deshalb zur Darstellung  $D^{(s, 0)}$  oder  $D^{(0, s)}$ . Die triviale Darstellung  $D^{(0, 0)}$  für spinlose Teildrehen ordnet jedem Generator der Lorentz-Algebra die Zahl 1 zu.

Nach dem Lie-Theorem (2.51) erhalten wir durch Auswertung der Matrizenexponentialfunktion

$$D(\lambda) = \exp \left\{ -i \vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi} - i \vec{m} \cdot \vec{\beta} \right\} \quad (2.618)$$

die zur Darstellung der Lorentz-Algebra entsprechende Darstellung der Lorentz-Gruppe. In den beiden Fällen (2.616) und (2.617) erhalten wir aus (2.618):

$$D^{(112,0)}(\lambda) = \exp \left\{ -i \frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi} - \frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\beta} \right\}, \quad (2.619)$$

$$D^{(0,112)}(\lambda) = \exp \left\{ i \frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi} + \frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\beta} \right\}. \quad (2.620)$$

Im folgenden berechnen wir die Matrizenexponentialfunktionen (2.619) und (2.620) für die Drehungen  $\vec{\varphi} = \vec{\sigma}$  und für die Boosts  $\vec{\beta} = \vec{\sigma}$ .

### 2.5.3. Spinor-Darstellung der Rotationen:

Nach (2.619) und (2.620) lautet die Darstellung der Rotationen

$$D(R(\vec{\varphi})) = \exp \left\{ -i \frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi} \right\}, \quad (2.621)$$

wobei aus der Hermitizität der Pauli-Matrizen

$$(5^*) + \underset{(2.608)}{\text{GK}} \quad \text{GK} \quad (2.622)$$

folgt, dass die Darstellungsmatrizen der Rotationen unitär sind:

$$D(R(\vec{\varphi})) + \underset{(2.621), (2.622)}{\text{GK}} \quad D(R(\vec{\varphi}))^{-1}. \quad (2.623)$$

Um die Matrizenexponentialfunktion (2.621) auszuwerten, verwendet man die Taylor-Reihe

$$D(R(\vec{\varphi})) \underset{(2.621)}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left( -i \frac{1}{2} \right)^{2n} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi})^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left( -i \frac{1}{2} \right)^{2n+1} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi})^{2n+1}$$

$$\Rightarrow D(R(\vec{\varphi})) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left( \frac{1}{2} \right)^{2n} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi})^{2n} - i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left( \frac{1}{2} \right)^{2n+1} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\varphi})^{2n+1} \quad (2.624)$$

Aus der Fidemregel (2.613) folgt nun

$$(\vec{\varphi} \vec{g})^2 = \varphi_k \varphi_l g_{kl} g_{ll} \stackrel{(2.613)}{=} \varphi_k \varphi_l \{ \delta_{kl} I + i \epsilon_{klm} g^{lm} \} = \vec{\varphi}^2 \cdot I, \quad (2.625)$$

so daß (2.624) übergeht in

$$D(R(\vec{\varphi})) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left( \frac{|\vec{\varphi}|}{2} \right)^{2n} \right\} I - i \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left( \frac{|\vec{\varphi}|}{2} \right)^{2n+1} \right\} \frac{\vec{e} \vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|}. \quad (2.626)$$

Beachtet man die Taylor-Reihen der trigonometrischen Funktionen (2.61), so erhält man schließlich für die Darstellungsmatrizen (2.621) der Rotationen

$$D(R(\vec{\varphi})) = e^{-\frac{i}{2} \vec{G} \vec{\varphi}} = \cos\left(\frac{|\vec{\varphi}|}{2}\right) \cdot I - i \sin\left(\frac{|\vec{\varphi}|}{2}\right) \cdot \frac{\vec{e} \vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|}. \quad (2.627)$$

Wir bemerken, daß dies für die beiden Darstellungen,  $D^{(1/2,0)}$  und  $D^{(0,1/2)}$ , dieselben Darstellungsmatrizen sind.

#### 2.5.4. Spinder-Darstellung der Boosts:

Nach (2.619) und (2.620) lautet die Darstellung der Boosts

$$D(B(\vec{\beta})) = \exp\left\{ \mp \frac{1}{2} \vec{G} \vec{\beta} \right\}, \quad (2.628)$$

wobei aus der Kommutativität der Pauli-Matrizen in (2.622) folgt, daß die Darstellungsmatrizen der Boost bestimmt sind:

$$D(B(\vec{\beta})) \stackrel{(2.622), (2.628)}{=} D(B(\vec{\beta})). \quad (2.629)$$

Die Taylor-Reihen der Matrizenexponentialfunktion (2.628)

$$D(B(\vec{\beta})) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left( \frac{1}{2} \right)^{2n} (\vec{G} \vec{\beta})^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left( \frac{1}{2} \right)^{2n+1} (\vec{G} \vec{\beta})^{2n+1} \quad (2.630)$$

gibt dann mit Ziff von (2.625) über in

$$D(B(\vec{\beta})) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left( \frac{|\vec{\beta}|}{2} \right)^{2n} \right\} \cdot I = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left( \frac{|\vec{\beta}|}{2} \right)^{2n+1} \right\} \frac{\vec{e} \vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}. \quad (2.631)$$

Beachtet man die Taylor-Reihen der hyperbolischen Funktionen (2.81), so er-

Hält man aus (2.631) für die Darstellungsmatrizen (2.628) des Bootes

$$D(B(\vec{\beta})) = e^{\pm \frac{1}{2} \vec{\beta}^2} = \cosh\left(\frac{|B|}{2}\right) I + \sinh\left(\frac{|B|}{2}\right) \frac{\vec{\beta}}{|B|}. \quad (2.632)$$

Dabei sei davon erinnert, daß das obige bezüglich der Darstellung  $D^{(M,0)}$  und daran angehängten Darstellung  $D^{(0,1/2)}$  gilt.

Wir betrachten nun ein Teilchen der Ruhemasse  $m$  im Ruhezylinder, so daß der kontinuierliche Winkelimpulsfaktor gegeben ist durch

$$(P_R^M) = (mc, \vec{\beta}). \quad (2.633)$$

Hält man einen aktiven Boot durch, so gilt der kontinuierliche Winkelimpulsfaktor (2.633) über in

$$p_M = B_{M,M}(\vec{\beta}) P_R^M \xrightarrow{(2.83), (2.633)} (p_M) = (p_0, \vec{\beta}) = (m \cosh(\vec{\beta}), m \sinh(\vec{\beta}) \cdot \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}). \quad (2.634)$$

mit Hilfe des hyperbolischen Zylindergesetzes

$$\cosh^2 d - \sinh^2 d = 1 \quad (2.635)$$

und der hyperbolischen Additionstheoreme

$$\cosh(d+\beta) = \cosh d \cosh \beta + \sinh d \sinh \beta \quad (2.636)$$

$$\sinh(d+\beta) = \sinh d \cosh \beta + \cosh d \sinh \beta \quad (2.637)$$

lassen sich dann zur Vereinfachung von (2.632) die effektiven Reduktionsfaktoren:

$$1.) \cosh |B| = \cosh\left(\frac{|B|}{2} + \frac{|B|}{2}\right) \xrightarrow{(2.636)} \cosh^2 \frac{|B|}{2} + \sinh^2 \frac{|B|}{2} = \frac{2 \cosh^2 \frac{|B|}{2} - 1}{2 \sinh^2 \frac{|B|}{2} + 1}$$

$$\Rightarrow \cosh \frac{|B|}{2} = \sqrt{\cosh(\vec{\beta}) + 1} \xrightarrow{(2.634)} \sqrt{\frac{p_0}{mc} + 1} = \sqrt{\frac{p_0 + mc}{2mc}} \quad (2.638)$$

$$\Rightarrow \sinh \frac{|\beta|}{2} = \sqrt{\cosh |\beta| - 1} \frac{(2.636)}{2} \frac{\frac{p_0}{mc} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} mc} = \sqrt{p_0 - mc} \quad (2.639)$$

$$2.) \sinh |\beta| \frac{(2.637)}{2} \sinh \frac{|\beta|}{2} \cosh \frac{|\beta|}{2} \frac{(2.638)}{(2.639)} \frac{1}{(p_0 - mc)(p_0 + mc)} \frac{mc}{mc} \quad (2.640)$$

Verwendet man (2.634) und (2.638)-(2.640), so läuft sich die Darstellungsmatrix (2.637) des Betrags durch die Komponenten der Lorentz-invarianten Elektrizitätsvektoren ausdrücken:

$$D(B(\beta)) = e^{-\frac{1}{2}\beta \vec{\beta}} = \frac{-\sqrt{p_0 + mc}}{2mc} I + \frac{p_0 - mc}{2mc} \frac{\vec{\beta} \vec{P}}{mc(p_0 - mc)(p_0 + mc)} = \frac{(p_0 + mc)I + \vec{\beta} \vec{P}}{2mc(p_0 + mc)} \quad (2.641)$$

Es erweist sich nun als sinnvoll, die drei Pauli-Matrizen  $\sigma^k$  durch die Einheitsmatrix

$$\sigma^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.642)$$

zu einem Vierer-Pauli-Matrizen-Vektor zu erweitern:

$$(5^*) = (\sigma^0, \sigma^k) \quad (2.643)$$

Dann läuft sich nämlich nach (2.641) der Betrag in die Darstellung  $D^{(4)(0)}$  überführen als

$$D^{(4)(0)}(B(\beta)) = e^{-\frac{1}{2}\beta \vec{\beta}} = \frac{p_0 + mc}{4mc(p_0 + mc)}, \quad (2.644)$$

wobei das Skalarprodukt zwischen dem Vierer-Pauli-Matrizen-Vektor (2.643) und dem Elektrizitätsvektor erfüllt wurde:

$$P \cdot G = P \cdot \sigma^0 = p_0 G^0 - \vec{P} \cdot \vec{\sigma} \quad (2.645)$$

Aufgrund davon wird der räumlich invertierten Vierortvektor

$$\vec{x} = (x^0, \vec{x}^k) = (x^0, -\vec{x}^k) \quad (2.646)$$

und entsprechend den räumlich invertierten Vierer-Pauli-Matrizen-Vektoren

$$\tilde{g} = (\tilde{g}^0, \tilde{g}^\alpha) = (g^0, -g^\alpha). \quad (2.647)$$

dann läuft sich nämlich nach (2.641) der Boost in der Darstellung  $D^{(0,1/2)}$  schreibend als

$$D^{(0,1/2)}(\tilde{\beta}) = e^{+\frac{1}{2}\tilde{g}^\beta} = \frac{P\tilde{g} + mc}{\gamma mc(P_0 + mc)}, \quad (2.648)$$

wobei das Skalarprodukt

$$P \cdot \tilde{g} = P_\mu \tilde{g}^\mu = P_0 g^0 + \vec{P} \cdot \vec{g} \quad (2.649)$$

verwendet wird. Für viele spätere Rechnungen erweist es sich als sinnvoll, die Boost-Darstellungen (2.644) und (2.647) als Wurzel aus demselben Ausdruck mit der doppelten Rapidity darzustellen:

$$\begin{aligned} e^{+\frac{1}{2}\tilde{g}^\beta} &= \sqrt{e^{+\tilde{g}^\beta}} \quad (2.632) \quad \sqrt{\cosh|\beta|} = \frac{\tilde{g}^\beta}{|\beta|} \sinh|\beta| \quad (2.634) \quad \sqrt{\frac{P_0}{mc} + \frac{\vec{P} \cdot \vec{g}}{mc}} \\ \xrightarrow{(2.645)} e^{-\frac{1}{2}\tilde{g}^\beta} &= \sqrt{\frac{P\tilde{g}}{mc}}, \quad \xrightarrow{(2.648)} e^{+\frac{1}{2}\tilde{g}^\beta} = \sqrt{\frac{P\tilde{g}}{mc}} \quad (2.650) \end{aligned}$$

## 2.5.5. Lorentz-invariante Kombinationen von Weyl-Ginoren:

In Form von  $D^{(1/2,0)}$  und  $D^{(0,1/2)}$  haben wir die kleinsten nichttrivialen Darstellungen der Lorentz-Gruppe konstruiert. Nun definieren wir die Weyl-Ginoren  $\mathfrak{z}_\alpha(x)$  und  $\mathfrak{z}^\dot{\alpha}(x)$  vom Typ  $(1/2,0)$  und  $(0,1/2)$ , auf die die dil-Darstellungsmatrizen der Lorentz-Gruppe wirken. Da unterschiedliche Transformationsvektoren der Weyl-Ginoren  $\mathfrak{z}_\alpha(x)$  und  $\mathfrak{z}^\dot{\alpha}$  unter einer Lorentz-Transformation wird dabei durch die Verwendung von untenen nichtgepunkteten und obenem gepunkteten Indizes zum Ausdruck gebracht:

$$\mathfrak{z}_\alpha(x) \xrightarrow{1} \mathfrak{z}'_\alpha(x') = D^{(1/2,0)}(1)^\alpha{}^\beta \mathfrak{z}_\beta(x), \quad (2.651)$$

$$\mathfrak{z}^\dot{\alpha}(x) \xrightarrow{1} \mathfrak{z}'^\dot{\alpha}(x') = D^{(0,1/2)}(1)^\dot{\alpha}{}^\dot{\beta} \mathfrak{z}^\dot{\beta}(x). \quad (2.652)$$

Wir versuchen nun, mit Hilfe dieser Wulf-Spinoren eine Lorentz-invariante Wirkung zu konstruieren. Dabei sollen quadratische Terme in den Wulf-Spinoren und ihre ersten Ableitungen berücksichtigt werden.

Zunächst werden quadratische Terme in den Wulf-Spinoren durch erste Ableitungen berücksichtigt, die zur Beschreibung massiver Teilchen benötigt werden. Dabei gibt es insgesamt vier verdrillbare Kombinationen

$$\vec{s} + \vec{z}, \quad \vec{s} + \vec{z}, \quad \vec{s} + \vec{z}, \quad \vec{s} + \vec{z}, \quad (2.653)$$

die durch eine Lorentz-Transformation in Übereinstimmung

$$\vec{s} + D^{(112,0)}(\Lambda) \vec{s}, \quad \vec{s} + D^{(0,112)}(\Lambda) \vec{s}, \quad \vec{s} + D^{(0,112)}(\Lambda) \vec{z}, \quad \vec{s} + D^{(112,0)}(\Lambda) \vec{z}, \quad \vec{s} + D^{(112,0)}(\Lambda) \vec{s} + D^{(0,112)}(\Lambda) \vec{z}. \quad (2.654)$$

Im Falle einer Rotation  $\Lambda = R$  sind die Darstellungsmatrizen  $D^{(112,0)}(R)$  und  $D^{(0,112)}(R)$  gemäß (2.619) und (2.620) identisch. Unter Unitarität (2.623) dieser Darstellungsmatrizen geht, daß die vier transformierten Kombinationen (2.654) mit den ursprünglichen Kombinationen (2.653) übereinstimmen. Im Falle eines Boosts  $\Lambda = B$  sind die Darstellungsmatrizen  $D^{(112,0)}(B)$  und  $D^{(0,112)}(B)$  gemäß (2.619) und (2.620) gerade ineinander ausgetauscht:

$$D^{(112,0)}(B) = D^{(0,112)}(B)^{-1}. \quad (2.655)$$

In Verbindung mit der Unitarität (2.623) dieser Darstellungsmatrizen geht, daß nur die letzten beiden der oben genannten Kombinationen (2.654) mit den letzten beiden entsprechenden Kombinationen (2.653) übereinstimmen. Zusammenfassend kann man feststellen, daß eine Lorentz-invariante Wirkung durch Raum-Zeit-Ableitungen nur mit Beteiligung der beiden Spinoren  $\vec{s}$  und  $\vec{z}$  möglich ist.

Um ein Teilchen beobachten zu können, das sich in der Raum-Zeit bewegt, muß die Wirkung auf alle Ableitungen der Wulf-Spinoren enthalten. Wir betrachten

zunächst räumliche Ableitungen und bilden die Kombinationen

$$g + 5k \partial_k g, \quad z + 5k \partial_k z, \quad g + 5k \partial_k z, \quad z + 5k \partial_k g, \quad (2.656)$$

die durch die Lorentz-Transformations-Koeffizienten

$$g + D^{(1/2,0)}(R) + 5k D^{(1/2,0)}(R) \partial_k g, \quad z + D^{(0,1/2)}(R) + 5k D^{(0,1/2)}(R) \partial_k z,$$

$$g + D^{(0,1/2)}(R) + 5k D^{(1/2,0)}(R) \partial_k z, \quad g + D^{(1/2,0)}(R) + 5k D^{(0,1/2)}(R) \partial_k g. \quad (2.657)$$

Im Falle einer Rotation  $R = R$  sind die Darstellungsfunktionen  $D^{(1/2,0)}(R)$  und  $D^{(0,1/2)}(R)$  identisch, so dass im (2.657) der Ausdruck

$$D(R) + 5k D(R) \quad (2.658)$$

zu untersuchen ist. Verwendet man (2.627), so folgt zunächst

$$\begin{aligned} D(R) + 5k D(R) &= \left\{ \cos \frac{\varphi}{2} + i \frac{\vec{\epsilon}}{|\vec{\epsilon}|} \sin \frac{|\vec{\varphi}|}{2} \right\} 5^k \left\{ \cos \frac{|\vec{\varphi}|}{2} - i \frac{\vec{\epsilon}}{|\vec{\epsilon}|} \sin \frac{|\vec{\varphi}|}{2} \right\} = \cos^2 \left( \frac{|\vec{\varphi}|}{2} \right) \cdot 5^k \\ &+ i \sin \left( \frac{|\vec{\varphi}|}{2} \right) \cos \left( \frac{|\vec{\varphi}|}{2} \right) \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}}{|\vec{\epsilon}|^2} [5^k, 5^k]_+ + \sin^2 \left( \frac{|\vec{\varphi}|}{2} \right) \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}}{|\vec{\epsilon}|^2} 5^k 5^k. \end{aligned} \quad (2.659)$$

Zuerst taucht das Produkt dreier Pauli-Matrizen auf, das sich mit der Rechengesetz (2.613) vereinfachen lässt:

$$\begin{aligned} 5^k 5^k 5^k &\stackrel{(2.613)}{=} \{5^k \otimes I + i \vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon} m 5^k\} 5^k = 5^k 5^k + i \vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon} m 5^k 5^k \stackrel{(2.613)}{=} \vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon} m 5^k \\ &+ i \vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon} m (\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon} m I + i \vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon} m \vec{\epsilon} P) = \vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon} m 5^k + i \vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon} m - (\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon} m \vec{\epsilon} P - \vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon} m \vec{\epsilon} m) \vec{\epsilon} P \\ &\Rightarrow 5^k 5^k 5^k = i \vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon} m + 5^k 5^k + \vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon} m \vec{\epsilon} l - \vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon} m \vec{\epsilon} k. \end{aligned} \quad (2.660)$$

Setzt man (2.611) und (2.660) in (2.659) ein, so folgt

$$\begin{aligned} D(R) + 5k D(R) &= \cos^2 \left( \frac{|\vec{\varphi}|}{2} \right) 5^k + i \sin \left( \frac{|\vec{\varphi}|}{2} \right) \cos \left( \frac{|\vec{\varphi}|}{2} \right) \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}}{|\vec{\epsilon}|^2} 2 i \vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon} m 5^k + \sin^2 \left( \frac{|\vec{\varphi}|}{2} \right) \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}}{|\vec{\epsilon}|^2} \{ i \vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon} m \\ &+ \vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon} m 5^k + \vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon} m 5^k - \vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon} m 5^k \} = \frac{1}{2} \{ 1 + \cos |\vec{\varphi}| \} 5^k + \sin |\vec{\varphi}| \vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon} m \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}}{|\vec{\epsilon}|^2} 5^k + \frac{1}{2} \{ 1 - \cos |\vec{\varphi}| \} \\ &\cdot \{ \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}}{|\vec{\epsilon}|^2} \vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon} - 5^k \} = \cos |\vec{\varphi}| 5^k + \sin |\vec{\varphi}| \vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon} m \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}}{|\vec{\epsilon}|^2} 5^k + \{ 1 - \cos |\vec{\varphi}| \} \frac{\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}}{|\vec{\epsilon}|^2} \frac{5^k}{|\vec{\epsilon}|^2} \end{aligned} \quad (2.661)$$

dieses Ergebnis lässt sich zusammenfassen als

$$D(R) + \text{tr} R D(R) = R \otimes \text{tr} R, \quad (2.662)$$

wobei die Matrix

$$R \otimes \text{tr} R = \cos |\varphi| \delta_{k\ell} + \sin |\varphi| \frac{\text{tr} R}{|\varphi|} \delta_{m\ell} \delta_{k\ell} + (1 - \cos |\varphi|) \frac{\text{tr} R}{|\varphi|^2} \quad (2.663)$$

mit der Darstellungsmatrix (2.66) der Rotationen im dreidimensionalen Raum überlappendt. Da sind die vertikalen Vektoren in (2.657) ebenfalls wie ein Vektor transformieren

$$\partial_k \xrightarrow{R} \partial'_k = R \otimes \text{tr} R \partial_k, \quad (2.664)$$

und die Darstellungsmatrix  $R$  orthogonale ist.

$$R R^T = I \quad (\Rightarrow) \quad R \otimes \text{tr} R R^T = \delta_{km}, \quad (2.665)$$

und alle Kombinationen (2.657) invariant unter Rotationen:

$$D(R) + \text{tr} R D(R) \partial_k \quad (2.662), \quad (2.664) \quad R \otimes \text{tr} R \partial_m \quad (2.665) \quad \delta_{km} \text{tr} R \partial_m = \delta^k_m \partial_k. \quad (2.666)$$

Es stellt sich nun die Frage, wie sich die Kombinationen (2.656) zu relativistisch invarianten Kombinationen erweitern lassen. Dazu erkennen wir an, dass sich die Pauli-Matrizen  $\sigma_k$  auf zweierlei Weise zu Viervektormatrizen erweitern lassen, nämlich in Form des Vierer-Pauli-Matrizen-Vektors  $\sigma^a$  in (2.643) und in Form des räumlich invertierten Vierer-Pauli-Matrizen-Vektors  $\hat{\sigma}^a$  in (2.646). Wir betrachten deshalb die folgenden acht Kombinationsvektoren  $\delta^a$  in (2.666).

20.06.00

$$\begin{aligned} & \delta^1 \delta^2 \delta^3, \quad \delta^1 \delta^3 \delta^2, \quad \delta^2 \delta^1 \delta^3, \quad \delta^2 \delta^3 \delta^1, \\ & \delta^1 \hat{\delta}^2 \hat{\delta}^3, \quad \delta^1 \hat{\delta}^3 \hat{\delta}^2, \quad \delta^2 \hat{\delta}^1 \hat{\delta}^3, \quad \delta^2 \hat{\delta}^3 \hat{\delta}^1. \end{aligned} \quad (2.667)$$

Der hierbei zweimal neu hinzutretende Term  $\delta^0 \delta_0$  mit der Zeitzahlleitung ist trivialerweise invariant unter Rotationen:

$$D(R)^+ 5^{\circ} D(R) \overset{(2.642)}{=} D(R)^+ D(R) \overset{(2.63), (2.623)}{=} D_0 \overset{(2.642)}{=} 5^{\circ} D_0 \quad (2.668)$$

und zerstört deshalb nicht die Rotationsinvarianten der räumlichen Orientierungswerte, die gerade diskutiert worden sind.

Dannach haben wir nur noch zu untersuchen, welche der 2-formeninvarianten (2.667) invariant unter Boost-Transformationen sind. Dafür sind zunächst die Formen

$$D(B)^+ G \mu D(B), \quad D(B)^+ \overset{\sim}{G} \mu D(B) \quad (2.669)$$

auszuwerten, wobei im linken und rechten Faktor gemäß (2.628) jeweils alle Darstellungen auftreten können. Betrachten wir zunächst den Fall  $\mu=0$ , sind die beiden Darstellungen im linken und rechten Faktor von (2.669) unterschiedlich, so wäre (2.669) wegen (2.629), (2.642) und (2.655) identisch mit  $5^{\circ}$  und würde nicht das für Eddots darstellende Transformationssymbol aufweisen. Damit folgen wir sofort, daß die 3-, 4-, 7-, 8. Kombination in (2.667) nicht unter Boosts invariant ist. Sind im linken und rechten Faktor von (2.669) beide Darstellungen identisch, so folgt im Fall  $\mu=0$

$$D(B)^+ 5^{\circ} D(B) \overset{(2.629), (2.642)}{=} D(B)^2 \overset{(2.632)}{=} \cosh |\vec{\beta}| + \frac{(\vec{\varepsilon} \vec{\beta}) \vec{\beta}}{|\beta|} \sinh |\vec{\beta}|. \quad (2.670)$$

In Fall  $\mu \neq 0$  ergibt sich dagegen

$$\begin{aligned} D(B)^+ 5^{\mu} D(B) &\overset{(2.629)}{=} D(B) G^{\mu} D(B) \overset{(2.632)}{=} \left\{ \cosh \frac{|\vec{\beta}|}{2} + \frac{\vec{\varepsilon} \vec{\beta}}{|\beta|} \sinh \frac{|\vec{\beta}|}{2} \right\} 5^{\mu} \vec{\varepsilon} \cosh \frac{|\vec{\beta}|}{2} \\ &+ \frac{\vec{\varepsilon} \vec{\beta}}{|\beta|} \sinh \frac{|\vec{\beta}|}{2} \} = \cosh^2 \left( \frac{|\vec{\beta}|}{2} \right) 5^{\mu} + \sinh \left( \frac{|\vec{\beta}|}{2} \right) \cosh \left( \frac{|\vec{\beta}|}{2} \right) \frac{\vec{\varepsilon} \vec{\beta}}{|\beta|} [5^{\mu}, 5^{\mu}] + \sinh \left( \frac{|\vec{\beta}|}{2} \right) \frac{\vec{\varepsilon} \vec{\beta}}{|\beta|^2} 5^{\mu} 5^{\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overset{(2.641), (2.660)}{=} \cosh^2 \left( \frac{|\vec{\beta}|}{2} \right) 5^{\mu} + 2 \sinh \left( \frac{|\vec{\beta}|}{2} \right) \cosh \left( \frac{|\vec{\beta}|}{2} \right) \frac{\vec{\varepsilon} \vec{\beta}}{|\beta|} 5^{\mu} + \sinh^2 \left( \frac{|\vec{\beta}|}{2} \right) \frac{\vec{\varepsilon} \vec{\beta}}{|\beta|^2} \{ 5^{\mu} 5^{\mu} + \vec{\varepsilon} \vec{\beta} 5^{\mu} \} \\ &+ \vec{\varepsilon} \vec{\beta} m 5^{\mu} - \vec{\varepsilon} \vec{\beta} m 5^{\mu} \} \overset{(2.637) - (2.639)}{=} \frac{1}{2} \{ 1 + \cosh |\vec{\beta}| \} 5^{\mu} + \sinh |\vec{\beta}| \frac{\vec{\varepsilon} \vec{\beta}}{|\beta|} + \frac{1}{2} \{ \cosh |\vec{\beta}| - 1 \} \cdot \end{aligned}$$

$$\cdot \{ 2 \frac{\vec{\varepsilon} \vec{\beta}}{|\beta|} \frac{\vec{\beta} \vec{\varepsilon}}{|\beta|} - 5^{\mu} \} = 5^{\mu} + \sinh |\vec{\beta}| \cdot \frac{\vec{\varepsilon} \vec{\beta}}{|\beta|} + \{ \cosh |\vec{\beta}| - 1 \} \frac{\vec{\varepsilon} \vec{\beta}}{|\beta|} \frac{\vec{\beta} \vec{\varepsilon}}{|\beta|}$$

$$\Rightarrow D(B)^*(\tilde{g} + \tilde{G}^k)D(B) = \tilde{g} + G^k + \sinh|\beta| \frac{\tilde{g}}{|\beta|} + (\cosh|\beta|-1) \frac{\tilde{g}(+\tilde{\beta})}{|\beta|} \frac{g_k}{|\beta|}. \quad (2.671)$$

die beiden Ergebnisse (2.670) und (2.671) lassen sich zusammenfassend als

$$D^{(1/2,0)}(B)^* \tilde{g} + \tilde{G}^k D^{(1/2,0)}(B) = B^k \tilde{g} + \tilde{G}^k, \quad (2.672)$$

$$D(0,1/2)(B)^* G^k D(0,1/2)(B) = B^k \tilde{g} + \tilde{G}^k, \quad (2.673)$$

wobei die Matrix

$$(B^k \tilde{g}) = \begin{pmatrix} \cosh|\beta| & \frac{g_k}{|\beta|} \sinh|\beta| \\ \frac{g_k}{|\beta|} \sinh|\beta| & \cosh|\beta| + (\cosh|\beta|-1) \frac{g_k \tilde{g}}{|\beta|^2} \end{pmatrix} \quad (2.674)$$

mit der Darstellungsmatrix (2.83) des Boosts in der vierdimensionalen Raum-Zeit übereinstimmt, da sich die räumlichen Ableitungen in (2.667) wie ein kovariantes Vektor transformieren

$$\partial_\mu \xrightarrow{\beta} \partial'_\mu = \beta \mu^\alpha \partial_\alpha, \quad (2.675)$$

lassen sich die folgenden invarianten Beziehungen:

$$1.) \tilde{g} + \tilde{G}^k \partial_\mu \tilde{g} \xrightarrow{\beta} \tilde{g} + D^{(1/2,0)}(B)^* \tilde{g} + D^{(1/2,0)}(B) \partial'_\mu \tilde{g} \xrightarrow{(2.672), (2.675)} \tilde{g} + B^k \tilde{g} + \tilde{G}^k B_\mu^\alpha \partial_\alpha \tilde{g}$$

$$\xrightarrow{(2.72)} \tilde{g} + \delta_{\alpha}{}^{\alpha} \tilde{g} + \tilde{G}^k \partial_\mu \tilde{g} = \tilde{g} + \tilde{G}^k \partial_\mu \tilde{g}$$

$$2.) \tilde{g} + G^k \partial_\mu \tilde{g} \xrightarrow{\beta} \tilde{g} + D^{(0,1/2)}(B)^* G^k + G^k D^{(0,1/2)}(B) \partial'_\mu \tilde{g} \xrightarrow{(2.673), (2.675)} \tilde{g} + B^k \tilde{g} + \tilde{G}^k B_\mu^\alpha \partial_\alpha \tilde{g}$$

$$\xrightarrow{(2.72)} \tilde{g} + \delta_{\alpha}{}^{\alpha} \tilde{g} + G^k \partial_\mu \tilde{g} = \tilde{g} + G^k \partial_\mu \tilde{g}$$

für die beiden restlichen Kombinationen  $\tilde{g} + G^k \partial_\mu \tilde{g}$  und  $\tilde{g} + \tilde{G}^k \partial_\mu \tilde{g}$  in (2.667) ist keine Boost-invariante Beziehbar, da sich  $G^k$  und  $\tilde{G}^k$  unter dem Darstellungsfaktor  $D^{(1/2,0)}$  und  $D(0,1/2)$  nicht als Vektorvektoren transformieren.

## 2.5.6. Dirac - Wirkung und Dirac - Gleichungen:

Aus den Überlegungen des vorangegangenen Abschnittes folgt, dass die allgemeine Lorentz-invariante Wirkung aus massiven Teilchen, die nur quadratische Terme in den Weiß-Spinoren und ihren ersten Ableitungen enthält, gegeben ist durch

$$S[\beta(\cdot), \beta^+(\cdot); \gamma(\cdot), \gamma^+(\cdot)] = \int d^4x \times L(\beta(x), \partial_\mu \beta(x); \beta^+(x), \partial_\mu \beta^+(x); \gamma(x), \partial_\mu \gamma(x); \gamma^+(x), \partial_\mu \gamma^+(x)) \quad (2.676)$$

mit der Lagrang - Gleich.

$$L = d \{ i \beta^+ \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \beta + p_i \gamma^+ \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \gamma + \delta \beta^+ \beta + \delta \gamma^+ \gamma \}, \quad (2.677)$$

wobei die Konstanten  $d, p_i, \delta, \tilde{\sigma}$  noch unbestimmt sind. Sie werden im Abschnitt 2.5.8. zeigen, dass die zusätzliche Forderung nach einer Invarianz der Lagrang - Gleich unter Raumspiegelungen dazu führt, dass die beiden Weiß-Spinoren  $\beta$  und  $\gamma$  offiziell verbreitet auftreten müssen. Dies soll vertrautet sich (2.677) auf

$$L = d \{ i \beta^+ \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \beta + i \gamma^+ \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \gamma - M \beta^+ \beta - M \gamma^+ \gamma \}. \quad (2.678)$$

Die noch unbestimmten Parameter  $d$  und  $M$  legen die Dimensionen der Wirkung fest und werden erst zu einem späteren Zeitpunkt durch den nichtrelativistischen Limiter festgelegt. Dergrund der von Null verschiedenen Ruhenmasse des Teilchens bestimmt die Wirkung (2.678) notwendigerweise beide Weiß-Spinoren  $\beta$  und  $\gamma$ . Nur wenn die Ruhenmasse des Teilchens verschwindet, kann eine Lorentz-invariante Wirkung nur mit einem der beiden Weiß-Spinoren gebildet werden, wie in Abschnitt 2.5.9. näher diskutiert werden soll. Die Weiß-Spinoren  $\beta$  und  $\gamma$  öffnen nun den Bewegungsgleichungen

$$\frac{\delta S}{\delta \beta^+(x)} \underset{(2.676)}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}^+(x)} - \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \beta^+(x))} \underset{(2.678)}{=} i \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \beta(x) - M \beta(x) = 0, \quad (2.679)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \beta^+(x)} \underset{(2.676)}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}^+(x)} - \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \gamma^+(x))} \underset{(2.678)}{=} i \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \gamma(x) - M \gamma(x) = 0. \quad (2.680)$$

Von die beiden Bewegungsgleichungen ineinander einsetzen zu können, be-

nötigt man die Reduzierung

$$g^{\mu\nu} \tilde{g}^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \tilde{g}^{\mu\nu} = 2g^{\mu\nu}\text{I}, \quad \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{g}^{\alpha\beta} + \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{g}^{\mu\nu} = 2g^{\alpha\beta}\text{I}, \quad (2.681)$$

die sich explizit nachrechnen lässt:

$$1.) 5^0 \tilde{g}^0 + 5^0 \tilde{g}^0 \xrightarrow{(2.647)} 2(5^0)^2 \xrightarrow{(2.642)} 2\text{I} = 2g^{00}\text{I},$$

$$2.) 5^0 \tilde{g}^k + 5^k \tilde{g}^0 \xrightarrow{(2.647)} -5^0 g^k + 5^k g^0 \xrightarrow{(2.642)} 0 = 2g^{0k}\text{I},$$

$$3.) 5^k \tilde{g}^l + 5^l \tilde{g}^k \xrightarrow{(2.647)} -5^k g^l - 5^l g^k \xrightarrow{(2.609)} -2g^{kl}\text{I} = 2g^{kl}\text{I}.$$

Multpliziert man (2.679) mit  $i\tilde{g}^\mu \partial_\mu$  und verwendet man (2.680) bzw. multipliziert man umgekehrt (2.680) mit  $i\tilde{g}^\mu \partial_\mu$  und verwendet man (2.679), so erhält

$$0 \xrightarrow{(2.679)} -\tilde{g}^\mu \tilde{g}^\nu \partial_\mu \partial_\nu \tilde{g}(x) - M(\tilde{g}^\mu \partial_\mu \tilde{g}(x)) \xrightarrow{(2.680), (2.681)} -g_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \tilde{g}(x) - M^2 \tilde{g}(x) = 0, \quad (2.682)$$

$$0 \xrightarrow{(2.680)} -\tilde{g}^\mu \tilde{g}^\nu \partial_\mu \partial_\nu \tilde{g}(x) - M(\tilde{g}^\mu \partial_\mu \tilde{g}(x)) \xrightarrow{(2.679), (2.681)} -g_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \tilde{g}(x) - M^2 \tilde{g}(x) = 0. \quad (2.683)$$

Abweichen erläutern die beiden Weil-Spinoren  $\tilde{g}$  und  $\tilde{z}$  der Wilson-Lyndon-Elliptizitätsgruppe die beiden Weil-Spinoren  $g$  und  $z$  der Identitätsgruppe (2.212) eines Teilchens, wobei der Parameter  $M$  mit  $m/4$  zu einer Identitätsgruppe ist.

Da bei einem massiven Teilchen notwendigerweise beide Weil-Spinoren  $\tilde{g}$  und  $\tilde{z}$  auftreten, besteht diese, beide zu einem Dirac-Grins zusammenfassen:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \tilde{g}(x) \\ \tilde{z}(x) \end{pmatrix}. \quad (2.684)$$

Im Zinklich darauß wird die Lagrang-Aidite (2.678) umgeformt

$$L = d \left\{ (\tilde{g}^+, \tilde{z}^+) \mid \begin{pmatrix} \tilde{g}^\mu & 0 \\ 0 & \tilde{g}^\mu \end{pmatrix} i\partial_\mu \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} - (\tilde{g}^+, \tilde{z}^+) \begin{pmatrix} 0 & M\text{I} \\ M\text{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} \right\}, \quad (2.685)$$

wobei die  $2 \times 2$ - Nullmatrix angeführt wurde

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.686)$$

zusätzlich wird der zum Dirac-Grinor  $\Psi(x)$  Dirac adjungierte Dirac-Grinor  $\bar{\Psi}(x) = (\bar{\psi}^+(x), \bar{\psi}^-(x)) = (\bar{\psi}(x), \bar{\psi}^+(x)) \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \bar{\Psi}^+(x) = (I^T(x), \bar{\psi}^+(x)) = \bar{\Psi}(x) \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$  (2.687) eingeführt, so dass (2.685) übergeht in

$$\mathcal{L} = \alpha \left\{ \bar{\Psi} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}^m & 0 \\ 0 & G^m \end{pmatrix} i \partial_\mu \Psi - \bar{\Psi} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} (M^I \ 0) \Psi \right\} = \alpha \bar{\Psi} \{ i \partial^\mu \partial_\mu - M^2 \} \Psi. \quad (2.688)$$

dabei treten die Dirac-Matrizen

$$\delta^m = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\sigma}^m \\ \tilde{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix} \quad (2.689)$$

auf, die die Eigenschaften einer Clifford-Algebra

$$[\delta^m, \delta^n]_+ = \delta^m \delta^n + \delta^n \delta^m \quad (2.689) \quad \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\sigma}^m \\ \tilde{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\sigma}^n \\ \tilde{\sigma}^n & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\sigma}^n \\ \tilde{\sigma}^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\sigma}^m \\ \tilde{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}^m \tilde{\sigma}^n + \tilde{\sigma}^n \tilde{\sigma}^m & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}^m \tilde{\sigma}^n + \tilde{\sigma}^n \tilde{\sigma}^m \end{pmatrix} \quad (2.690) \quad 2 \delta^{m+n} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Wegen die Wirkung (2.676) wird damit als lin. Funktional des Dirac-Grinors  $\Psi(x)$  und des Dirac adjungierten Dirac-Grinors  $\bar{\Psi}(x)$  aufgelöst

$$A[u, \cdot; \bar{\Psi}(x)] = \int d^4x \mathcal{L}(\Psi(x), \partial_\mu \Psi(x); \bar{\Psi}(x), \partial_\mu \bar{\Psi}(x)). \quad (2.691)$$

die Bewegungsgleichung des Dirac-Grinors lautet damit

$$\frac{\delta A}{\delta \bar{\Psi}(x)} \quad (2.691) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi}(x))} \quad (2.688) \quad \alpha \{ i \partial^\mu \partial_\mu \Psi(x) - M^2 \Psi(x) \} = 0 \quad (2.692)$$

was sich auf

$$i \tilde{\sigma}^m \partial_m - M^2 \Psi(x) = 0 \quad (2.693)$$

reduziert, wenn man die zeitliche Abhängigkeit den Dirac-Grinor-Wolfs

$$\theta = \delta^m \partial_m \quad (2.694)$$

verwendet.

## 2.5.7. Darstellung der Lorentz-Gruppe im Raum der Dirac-Grinonen:

Nach Konstruktion ist die Dirac-Wirkung (2.688), (2.691) invariant unter Lorentz-Transformationen. Dies wollen wir hier nochmal konkret beweisen, indem wir die Darstellung der Lorentz-Gruppe im Raum der Dirac-Grinonen studieren. Aus den Darstellungen der Lorentz-Gruppe im Raum der Wlf-Grinonen in (2.651) und (2.652) folgt

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} g(x) \\ z(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \psi'(x') = \begin{pmatrix} g'(x') \\ z'(x') \end{pmatrix} = D(1) \psi(x), \quad (2.695)$$

wobei sich die Darstellungsmatrizen  $D(1)$  aus den Darstellungsmatrizen  $D^{(1/2,0)}(1)$  und  $D^{(0,1/2)}(1)$  zusammensetzen:

$$D(1) = \begin{pmatrix} D^{(1/2,0)}(1) & 0 \\ 0 & D^{(0,1/2)}(1) \end{pmatrix}. \quad (2.696)$$

Da zwischen dem Dirac adjungierten Grinor  $\bar{\psi}$  und dem adjungierten Grinor  $\psi^+$  wegen (2.687) und (2.689) die Beziehung

$$\bar{\psi}(x) = \psi^+(x) \gamma^0, \quad \psi^+(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^0 \quad (2.697)$$

gilt, lautet der Lorentz-transformierte Dirac adjungierte Grinor

$$\bar{\psi}'(x') \xrightarrow{(2.697)} \psi'^+(x') \gamma^0 \xrightarrow{(2.695)} \psi^+(x) D(1)^+ \gamma^0 \xrightarrow{(2.697)} \bar{\psi}(x) \bar{D}(1), \quad (2.698)$$

wobei die Dirac adjungierten Darstellungsmatrizen auftreten:

$$\bar{D}(1) = \gamma^0 D(1)^+ \gamma^0. \quad (2.699)$$

Für diese erhält man im Einsetzen

$$\bar{D}(1) \xrightarrow{(2.689), (2.696), (2.699)} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \left( \begin{matrix} D^{(1/2,0)}(1)^+ & 0 \\ 0 & D^{(0,1/2)}(1)^+ \end{matrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \left( \begin{matrix} D^{(1/2,0)}(1)^+ & 0 \\ D^{(0,1/2)}(1)^+ & 0 \end{matrix} \right) = \begin{pmatrix} D^{(0,1/2)}(1)^+ & 0 \\ 0 & D^{(1/2,0)}(1)^+ \end{pmatrix}, \quad (2.700)$$

so dass man mit Hilfe von (2.619), (2.620), (2.696) und (2.700) folgern kann  
 $D(\Lambda) = D(\Lambda)^{-1}$ . (2.701)

Als nächstes bemerken wir, dass im Abschnitt 2.5.5

$$D^{(1/2,0)}(\Lambda) + \tilde{\sigma}^n D^{(1/2,0)}(\Lambda) = \Lambda^n \approx \tilde{\sigma}^n, \quad (2.702)$$

$$D^{(0,1/2)}(\Lambda) + \tilde{\sigma}^n D^{(0,1/2)}(\Lambda) = \Lambda^n \approx \tilde{\sigma}^n \quad (2.703)$$

für  $\Lambda = R$  und  $\Lambda = B$  gezeigt wurde. Da sich nun aber jede Lorentz-Transformationsmatrix als Unterschandindekomposition einer Boost und einer Rotation aufzersetzen lässt

$$\Lambda = B R, \quad (2.704)$$

gabt man die entsprechenden Darstellungsmatrizen

$$D^{(1/2,0)}(\Lambda) = D^{(1/2,0)}(B) D^{(1/2,0)}(R), \quad D^{(0,1/2)}(\Lambda) = D^{(0,1/2)}(B) D^{(0,1/2)}(R). \quad (2.705)$$

Weshalb lassen sich (2.702) und (2.703) für jede beliebige Lorentz-Transformation schreiben:

$$\begin{aligned} 1.) & D^{(1/2,0)}(\Lambda) + \tilde{\sigma}^n D^{(1/2,0)}(\Lambda) \xrightarrow{(2.705)} D^{(1/2,0)}(R) + \tilde{\sigma}^n D^{(1/2,0)}(B) D^{(1/2,0)}(R) \\ & \underline{\Lambda = B, (2.702)} \quad B^n, D^{(1/2,0)}(R) + \tilde{\sigma}^n D^{(1/2,0)}(R) \xrightarrow{\Lambda = R, (2.702)} B^n \approx R^n \approx \tilde{\sigma}^n \xrightarrow{(2.704)} \Lambda^n \approx \tilde{\sigma}^n \\ 2.) & D^{(0,1/2)}(\Lambda) + \tilde{\sigma}^n D^{(0,1/2)}(\Lambda) \xrightarrow{(2.705)} D^{(0,1/2)}(R) + D^{(0,1/2)}(B) D^{(0,1/2)}(R) \\ & \underline{\Lambda = B, (2.703)} \quad B^n, D^{(0,1/2)}(R) + \tilde{\sigma}^n D^{(0,1/2)}(R) \xrightarrow{\Lambda = R, (2.703)} B^n \approx R^n \approx \tilde{\sigma}^n \xrightarrow{(2.704)} \Lambda^n \approx \tilde{\sigma}^n \end{aligned}$$

Die beiden Transformationsregeln (2.702) und (2.703) lassen sich nun zu einem einzigen für die Dirac-Matrizen zusammenfassen:

$$D(\Lambda) \tilde{\sigma}^n D(\Lambda) \xrightarrow{(2.685), (2.686), (2.700)} \begin{pmatrix} D^{(0,1/2)}(\Lambda)^+ & 0 \\ 0 & D^{(1/2,0)}(\Lambda)^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\sigma}^n \\ \tilde{\sigma}^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{(1/2,0)}(\Lambda) & 0 \\ 0 & D^{(0,1/2)}(\Lambda) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} D(0,11)(\lambda) & 0 \\ 0 & D(11,0)(\lambda) + (\tilde{S}^M D(11,0)(\lambda)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & D(0,11)(\lambda) + \tilde{S}^M D(0,11)(\lambda) \\ D(11,0)(\lambda) + \tilde{S}^M D(11,0)(\lambda) & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2.702), (2.703) \quad \begin{pmatrix} 0 & n^{u-\delta^+} \\ n^{u-\delta^-} & 0 \end{pmatrix} = n^{u-\delta} \begin{pmatrix} 0 & \delta^+ \\ \delta^- & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2.689)} n^{u-\delta^+}. \quad (2.706)$$

Nach diesen Überlegungen läßt sich die Invarianz der Dirac-Gleichung rechtzeitig zeigen. Da sich nämlich die partiellem Mittungen im (2.688) wie ein konstanter Viervektor transformieren.

$$\partial_\mu \rightarrow \partial'_\mu = L_\mu^\alpha \partial_\alpha, \quad (2.707)$$

folgt nämlich

$$\stackrel{?}{=} (2.688), (2.691) \int d^4x \partial_\mu \bar{\psi}(x) \{ i \partial^\mu \partial'_\mu - M \} \psi(x) \xrightarrow{(2.26), (2.695), (2.698)}$$

$$\int d^4x \partial_\mu \bar{\psi}(x) \{ i \tilde{D}(\lambda) \tilde{S}^M D(\lambda) \partial_\mu^2 - M \tilde{D}(\lambda) D(\lambda) \} \psi(x) \xrightarrow{(2.701), (2.706)}$$

$$\int d^4x \partial_\mu \bar{\psi}(x) \{ i (L_\mu^\alpha \partial_\alpha - \delta^+ \partial_\mu - \delta^- \partial_\mu^2 - M) \} \psi(x) \xrightarrow{(2.707)} \int d^4x \partial_\mu \bar{\psi}(x) \{ i (L_\mu^\alpha \partial_\alpha + \delta^+ \partial_\mu^2 - \delta^- \partial_\mu - M) \} \psi(x)$$

$$(2.22) \int d^4x \partial_\mu \bar{\psi}(x) \{ i \partial_\mu \partial_\mu - M \} \psi(x) \xrightarrow{(2.688), (2.691)} \text{A } \checkmark$$

Die Darstellung (2.696) der Lorentz-Gruppe im Raum der Dirac-Vekoren läßt sich mit Hilfe von (2.619) und (2.620) auf die folgende Form bringen:

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi} - \frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\beta}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\varphi} + \frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{\beta}} \end{pmatrix} = \exp \left\{ -i \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\vec{\sigma} \end{pmatrix} \vec{\varphi} - i \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & +\frac{i}{2}\vec{\sigma} \end{pmatrix} \vec{\beta} \right\}. \quad (2.708)$$

Vereinfacht man dies mit einer covarianten Formulierung des Lie-Dreiecks will in (2.48)

$$D(\lambda) = \exp \left\{ -i \sum_{\mu} S^{\mu\alpha} S^{\mu\alpha} \right\} \xrightarrow{(2.49), (2.50)} S^{\mu\alpha} = -S^{\alpha\mu} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S^1 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \lambda \right\}, \quad (2.709)$$

so lauten die Darstellungsmatrizen der Generatoren des Boosts

$$D(M_k) = \text{so}_k = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\delta^k & 0 \\ 0 & \frac{i}{2}\delta^k \end{pmatrix}, \quad (2.710)$$

während sich die Darstellungsmatrizen der Rotationen aus

$$D(L_k) = \text{Sk} = \frac{1}{2}\epsilon_{klm} S^{lm} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2}\delta^k & 0 \\ 0 & \frac{i}{2}\delta^k \end{pmatrix} \quad (2.711)$$

ergibt zu

$$S^{lm} = \epsilon_{lmk} \begin{pmatrix} \frac{i}{2}\delta^k & 0 \\ 0 & \frac{i}{2}\delta^k \end{pmatrix}. \quad (2.712)$$

Nach (2.716) stellt (2.711) gerade den Spin-Operator für Spin 1/2-Teilchen dar. Nach Abschnitt 2.1.14 lassen sich die massiven Spin 1/2-Teilchen nach dem SU(2)-Ansatz ebenfalls die z-Komponente des Spin-Operators klassifizieren. Die beiden Ergebnisse (2.710) und (2.712) lassen sich zusammenfassen zu

$$S^{lm} = \frac{i}{4} [ \delta^{kl}, \delta^{lm} ]_- \quad (2.713)$$

zurückzieht man im Einheitsform

$$\begin{aligned} 1.) \text{so}_k \stackrel{(2.713)}{=} \frac{i}{4} \{ \delta^{0k} \delta^2 - \delta^2 \delta^{0k} \} \stackrel{(2.689)}{=} \frac{i}{4} \{ (\begin{smallmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{smallmatrix}) (\begin{smallmatrix} 0 & \delta^k \\ -\delta^k & 0 \end{smallmatrix}) - (\begin{smallmatrix} 0 & \delta^k \\ -\delta^k & 0 \end{smallmatrix}) (\begin{smallmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{smallmatrix}) \} \\ = \frac{i}{4} \{ (-\delta^k \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}) - (\delta^k \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}) \} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\delta^k & 0 \\ 0 & \frac{i}{2}\delta^k \end{pmatrix} \stackrel{*}{=} (2.710) \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.) \text{Sk} \stackrel{(2.713)}{=} \frac{i}{4} \{ \delta^{i2} \delta^j - \delta^j \delta^{i2} \} \stackrel{(2.689)}{=} \frac{i}{4} \{ (\begin{smallmatrix} 0 & \delta^i \\ -\delta^i & 0 \end{smallmatrix}) (\begin{smallmatrix} 0 & \delta^j \\ -\delta^j & 0 \end{smallmatrix}) - (\begin{smallmatrix} 0 & \delta^j \\ -\delta^j & 0 \end{smallmatrix}) (\begin{smallmatrix} 0 & \delta^i \\ -\delta^i & 0 \end{smallmatrix}) \} \\ = \frac{i}{4} \{ \begin{pmatrix} -\delta^{i2} & 0 \\ 0 & -\delta^{i2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\delta^{j2} & 0 \\ 0 & -\delta^{j2} \end{pmatrix} \} = \frac{-i}{4} \begin{pmatrix} [\delta^{i2}, \delta^{j2}]_- & 0 \\ 0 & [\delta^{i2}, \delta^{j2}]_- \end{pmatrix} \stackrel{(2.611)}{=} \frac{-i}{4} 2i\delta^{ij} \begin{pmatrix} \delta^k & 0 \\ 0 & \delta^k \end{pmatrix} \\ = i\delta^{ij} \begin{pmatrix} \frac{i}{2}\delta^k & 0 \\ 0 & \frac{i}{2}\delta^k \end{pmatrix} \stackrel{*}{=} (2.712) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Nun wird der z-Kommutator zweidimensionalen Darstellungsmatrizen  $S^{lm}$  über die

Lorentz-Algebra im Raum der Dirac-Spinoren und den Dirac-Matrizen ist benutzt.  
Verwendet man die Rechenregel

$$[AB, C]_- = ABC - CAB = ABC + ACB - ACB - CAB = A[B, C]_+ - [A, C]_+ B, \quad (2.714)$$

so folgt

$$\begin{aligned} [S^{ur}, \gamma^2]_- &\stackrel{(2.713)}{=} \frac{i}{4} \{ [\delta^{ur}, \gamma^2]_- - [\delta^2 \gamma^u, \gamma^2]_- \} \stackrel{(2.714)}{=} \frac{i}{4} \{ \gamma_u [\delta^2, \gamma^2]_+ - [\delta^u, \gamma^2]_+ \gamma^2 \\ &- \gamma^2 [\delta^u, \gamma^2]_+ + [\delta^u, \gamma^2]_+ \gamma^u \} \stackrel{(2.690)}{=} \frac{i}{4} 2 \{ g^{22} \gamma^u - g^{u2} \gamma^2 - g^{u2} \gamma^2 + g^{22} \gamma^u \} \\ &\Rightarrow [S^{ur}, \gamma^2]_- = i (g^{22} \gamma^u - g^{u2} \gamma^2). \end{aligned} \quad (2.715)$$

Somit kann nun der Kommutator zwischen zwei Darstellungsmatrizen  $S^{ur}$  und  $S^{s22}$  berechnet werden:

$$\begin{aligned} [S^{ur}, S^{s22}]_- &\stackrel{(2.713)}{=} \frac{i}{4} \{ [S^{ur}, \gamma^2 \gamma^2]_- - [S^{ur}, \gamma^2 \gamma^2]_- \} \stackrel{(1.115)}{=} \frac{i}{4} \{ [S^{ur}, \gamma^2]_- \gamma^2 + \gamma^2 [S^{ur}, \gamma^2]_- \\ &- [S^{ur}, \gamma^2]_- \gamma^2 - \gamma^2 [S^{ur}, \gamma^2]_- \} \stackrel{(2.715)}{=} \frac{i}{4} i \{ (g^{22} \gamma^u - g^{u2} \gamma^2) \gamma^2 + \gamma^{22} (g^{22} \gamma^u - g^{u2} \gamma^2) \\ &- (g^{22} \gamma^u - g^{u2} \gamma^2) \gamma^{22} - \gamma^2 (g^{22} \gamma^u - g^{u2} \gamma^2) \} = -\frac{1}{4} \{ g^{22} (\gamma^u \gamma^2 - \gamma^2 \gamma^u) \\ &+ g^{22} (\gamma^{22} \gamma^u - \gamma^u \gamma^{22}) - g^{u2} (\gamma^2 \gamma^2 - \gamma^2 \gamma^2) - g^{u2} (\gamma^{22} \gamma^2 - \gamma^2 \gamma^{22}) \} \stackrel{(2.713)}{=} \frac{1}{4} (-4i). \\ &\{ g^{22} g^{u2} + g^{22} g^{22} - g^{u2} g^{22} - g^{u2} g^{22} \} = i \{ g^{u2} g^{22} + g^{22} g^{u2} - g^{u2} g^{22} - g^{22} g^{u2} \}. \end{aligned} \quad (2.716)$$

Aus (2.716) liest man ab, daß die Darstellungsmatrizen  $S^{ur}$  tatsächlich den allgemeinen Vertauschungsrelationen (2.36) der Lorentz-Algebra genügen. Außerdem zeigt (2.715) und (2.716), daß  $\gamma^2$  und  $S^{s22}$  einen Tensoreoperator vom Rang  $n=1$  und  $n=2$  im Sinne von (2.113) darstellen.

## 2.5.8. Raumspiegelung:

22.06.00

Sei eine Raumspiegelung  $P$  wird der Viererantwortsator  $x$  in den räumlich invertierten Viererantwortator  $\tilde{x}$  von (2.646) abgebildet:

$$x'_P = P x = \tilde{x}. \quad (2.717)$$

Führt man eine Raumspiegelung  $P$  zweimal hintereinander aus, so negiert man den ursprünglichen Zustand. Die Raumspiegelung  $P$  ist demnach involutorisch:

$$P^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1} = P. \quad (2.718)$$

Die Ausstellungsmöglichkeiten für eine solche Raumausstellung lautet

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.719)$$

Die Rennzyklenlängen harmonieren mit den Generationen der Reaktionen (2-4 s)

$$P^{-1}L_1P = (-i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L_1$$

$$T^{-1} L_2 P = (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1} \otimes P = I_R \quad (2.720)$$

und antikommunistisch mit den Generationen des Soests (2-42)

$$P^{-1} M P = (-i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -M_A$$

$$P^{-1} M_2 P = (-i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -M_2$$

$$P^{-1} M_3 P = (-i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -M_3$$

$$\Rightarrow P^{-1} M_3 P = -M_3 \quad (2.721)$$

Führt man eine Raumspiegelung an einem Dirac-Spinor durch, so gilt

$$\psi(x) \xrightarrow{P} \psi_P(x) = D(P) \psi(x), \quad (2.722)$$

wobei  $D(P)$  die Darstellungsmatrix der Raumspiegelung im Raum der Dirac-Spinoren darstellt. Dabei muss  $D(P)$  durch die Inversionseigenschaft (2.719) bestehen:

$$D(P)^{-1} = 1 \quad (2.723)$$

und die beiden Kommutator- bzw. Antikommutatorrelationen (2.720) bzw. (2.721) mit den Darstellungsmatrizen  $D(L_R)$  bzw.  $D(M_R)$  des Rotationsbzw. Boosts im Raum der Dirac-Spinoren erfüllen:

$$D(P)^{-1} D(L_R) D(P) = D(L_R), \quad (2.724)$$

$$D(P)^{-1} D(M_R) D(P) = D(M_R). \quad (2.725)$$

Wir bestimmen nun die Darstellungsmatrix  $D(P)$  aus der Erfordernis, dass die Dirac-Gleichung unter einer Raumspiegelung invariant ist. Dazu überführen wir zunächst die Dirac-Gleichung (2.692) durch die Substitution  $x \rightarrow \bar{x}$  trivial um:

$$(i \gamma^\mu \tilde{\partial}_\mu - m) \psi(\bar{x}) = 0. \quad (2.726)$$

Nach (2.722) kann man dann in (2.726)  $\psi(\bar{x})$  durch  $\psi_P^i(x)$  ersetzen:

$$(i D(P) \tilde{\partial}_\mu D(P)^{-1} \partial_\mu - m) \psi_P^i(x) = 0. \quad (2.727)$$

Damit (2.727) in die Dirac-Gleichung für den vom Spiegelten Dirac-Spi-

nor  $\psi_p^1(x)$  übergeht

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_p^1(x) = 0, \quad (2.728)$$

muß die Darstellungsmatrix  $D(P)$  der Reduzierung

$$D(P) \otimes I D(P)^{-1} = \gamma^m \quad (2.729)$$

gewünscht. Seien wir die Darstellungsmatrix  $D(P)$  durch

$$D(P) = \gamma^0 \quad (2.730)$$

fest, so ist sowohl die Involutionseigenschaft (2.723)

$$D(P)^2 \stackrel{(2.730)}{=} (\gamma^0)^2 \stackrel{(2.689)}{=} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

als auch die Reduzierung (2.729) erfüllt:

$$1.) \gamma^0 \tilde{\gamma}^0 \gamma^0 = (\gamma^0)^2 \stackrel{(2.690)}{=} \gamma^0 \quad \checkmark$$

$$2.) \gamma^0 \tilde{\gamma}^k \gamma^0 = -\gamma^0 \tilde{\gamma}^k \gamma^0 \stackrel{(2.690)}{=} \gamma^k \quad \checkmark$$

Insbesondere gelten tatsächlich die Kommutatoren (2.724)

$$D(P)^{-1} D(L_k) D(P) \stackrel{(2.683), (2.711), (2.770)}{=} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \omega & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \omega & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \omega \end{pmatrix} \stackrel{(2.711)}{=} D(L_k)$$

und die Antikommutatoren (2.725)

$$D(P)^{-1} D(M_R) D(P) \stackrel{(2.689), (2.710), (2.730)}{=} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \omega & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \omega & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} \omega \end{pmatrix} \stackrel{(2.710)}{=} -D(M_R)$$

Aus der konkreten Gestalt von  $\gamma^0$  in (2.689) liest man ab, daß eine Raumspiegelung die Welf-Spinoren  $\beta$  und  $\gamma$  miteinander vertauscht:

$$\psi(x) \stackrel{(2.684)}{=} \begin{pmatrix} \beta(x) \\ \beta(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \psi_p^1(x) \stackrel{(2.684), (2.689), (2.730)}{=} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta(x) \\ \beta(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta(x) \\ \gamma(x) \end{pmatrix}. \quad (2.731)$$

In einer Theorie, wo der sowohl  $\psi(x)$  als auch  $\psi_p^1(x)$  physikalisch realisierte Zustände darstellen, mußt sich man deshalb beide Welf-Spinoren  $\beta$  und  $\gamma$ .

Aus den Überlegungen in Abschnitt 2.5.5. folgt, daß eine solche unter Raumspiegelungen invarianten Theorie notwendigerweise einen Massenterm aufweisen muß.

### 2.5.9. Neutrinos:

masslose Spin  $1/2$ -Teilchen wie die Neutrinos werden durch einen einzelnen Weyl-Grinor  $\tilde{\psi}$  oder  $\tilde{\psi}^*$  beschrieben. Nach (2.677) ist deren Lagrange-Dichte entweder durch

$$\mathcal{L} = \alpha i \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \tilde{\psi} \quad (2.732)$$

oder durch

$$\mathcal{L} = \alpha i \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \tilde{\psi} \quad (2.733)$$

gegeben. In beiden Fällen ist die Lagrange-Dichte zwar invariant unter Lorentz-Transformationen aber nicht invariant unter Raumspiegelungen. Um Neutrinos auch mit einem Dirac-Grinor  $\psi$  beschreiben zu können, muß man denselben bzw. unteren Weyl-Grinor  $\tilde{\psi}$  bzw.  $\tilde{\psi}^*$  heranzuziehen. Dazu verwendet man die Matrizen

$$\begin{aligned} \gamma^5 &= i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \stackrel{(2.689)}{=} i \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & G^1 \\ -G^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & G^2 \\ -G^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & G^3 \\ -G^3 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} -G^1 & 0 \\ 0 & G^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -G^2 G^3 & 0 \\ 0 & -G^2 G^3 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \gamma^5 = i \begin{pmatrix} G^1 G^2 G^3 & 0 \\ 0 & -G^1 G^2 G^3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.734)$$

wobei das dabei auftretende Produkt der Pauli-Matrizen sich ergibt zu

$$G^1 G^2 G^3 \stackrel{(2.608)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad (2.735)$$

so daß (2.734) übergeht in

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (2.736)$$

die Projektionsmatrizen

$$P_u = \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \stackrel{(2.736)}{=} \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.737)$$

$$P_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \xrightarrow{(2.736)} \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (2.738)$$

ersetzen dann die gefürchtete vierdimensionale

$$P_L \xrightarrow{(2.684), (2.737)} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.739)$$

$$P_R \xrightarrow{(2.684), (2.738)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix}. \quad (2.740)$$

Die reellen Spineren  $\beta$  und  $\gamma$  stellenen im Zähler von  $\frac{1}{2}(1 + \gamma^5)^4$  Eigenzustände der Matrix  $\gamma^5$  zu den Eigenwerten  $\mp 1$  dar:

$$\gamma^5 \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)^4 = \mp \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)^4. \quad (2.741)$$

Zu sich die Neutrino-Zustände nach den Eigenwerten der Matrix  $\gamma^5$  klassifizieren lassen, kommt der Matrix  $\gamma^5$  eine besondere Bedeutung zu. Man bezeichnet  $\gamma^5$  als Chiralitäts-Operator und spricht bei den Zuständen  $\frac{1}{2}(1 + \gamma^5)^4$  von linker (-1) bzw. rechter (+1) Chiralität.

Wir bemerken, daß der Chiralitäts-Operator  $\gamma^5$  aus (2.734) aufgrund der Antikommutatorrelationen (2.690) auch geschrieben werden kann als

$$\gamma^5 = \frac{i}{24} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma. \quad (2.742)$$

Zu sich die Dirac-Matrizen  $\gamma^\mu$  gemäß (2.706) unter Lorentz-Transformationswerten wie im kontravarianten Relativ transformieren, gesagt (2.742), daß der Chiralitäts-Operator  $\gamma^5$  Lorentz-invariant ist:

$$\begin{aligned} \bar{D}(L) \gamma^5 D(L) &\xrightarrow{(2.701), (2.742)} \frac{i}{24} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \{ \bar{D}(L) \gamma^\mu D(L) \} \{ \bar{D}(L) \gamma^\nu D(L) \} \{ \bar{D}(L) \gamma^\rho D(L) \} \\ &\cdot \{ \bar{D}(L) \gamma^\sigma D(L) \} \xrightarrow{(2.706)} \frac{i}{24} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \Gamma^\mu \Gamma^\nu \Gamma^\rho \Gamma^\sigma \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \\ &= \frac{i}{24} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \xrightarrow{(2.742)} \gamma^5 \end{aligned} \quad (2.743)$$

Ziel sei nun die verwandelt, daß aufgrund der weiteren physikalischen Entwicklung  
der Determinante einer  $4 \times 4$ -Matrix  $\Lambda = (\Lambda^{\mu}_{\nu})$

$$(\det \Lambda) \cdot E_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} = E_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \Lambda^{\mu_1}_{\nu_1} \Lambda^{\mu_2}_{\nu_2} \Lambda^{\mu_3}_{\nu_3} \Lambda^{\mu_4}_{\nu_4} \quad (2.744)$$

und der Eigenwert  $\det \Lambda = 1$  alle Lorentz-Transformations  
der Lorentz-Tensor in allen Inertialsystemen dieselben Komponenten  
besitzt:

$$E_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} = E_{\mu_1' \mu_2' \mu_3' \mu_4'} \quad (2.745)$$

mit Hilfe von (2.737) - (2.740) lassen sich demnach die beiden Neutrino-Wirk-  
funktionen (2.732) und (2.733) durch Dirac-Gleichungen ausdrücken:

$$\mathcal{L} = d_i \bar{\psi}(x) \partial^\mu \partial_\mu \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi(x). \quad (2.746)$$

Tatsächlich erhält man durch explizites Nachrechnen:

$$1.) \quad \mathcal{L} = d_i \bar{\psi}(x) \partial^\mu \partial_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi(x) \xrightarrow{(2.684), (2.687), (2.689)} d_i (\bar{\psi}^+ \psi^+) \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\sigma}^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \partial_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} \xrightarrow{(2.739)} d_i (\bar{\psi}^+ \psi^+) \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}^\mu \end{pmatrix} \partial_\mu \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} = d_i \bar{\psi}^+ \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \quad \checkmark$$

$$2.) \quad \mathcal{L} = d_i \bar{\psi}(x) \partial^\mu \partial_\mu \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi(x) \xrightarrow{(2.684), (2.687), (2.689)} d_i (\bar{\psi}^+ \psi^+) \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\sigma}^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \partial_\mu \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} \xrightarrow{(2.740)} d_i (\bar{\psi}^+ \psi^+) \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}^\mu \end{pmatrix} \partial_\mu \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} = d_i \bar{\psi}^+ \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \quad \checkmark$$

Die beiden Neutrino-Wirkfunktionen (2.746) sind aufgrund von (2.695), (2.698),  
(2.706) und (2.743) manifest Lorentz-invariant. Außerdem überzeugt auf-  
grund von

$$\tilde{D}(P)^{-1} \gamma_5 D(P) \xrightarrow{(2.742)} \frac{i}{24} E_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \{ D(P)^{-1} \tilde{\sigma}^\mu D(P) \} \{ D(P)^{-1} \tilde{\sigma}^\nu D(P) \} \{ D(P)^{-1} \tilde{\sigma}^\lambda D(P) \}$$

$$\bullet \{ D(P)^{-1} \gamma^2 D(P) \} \frac{(2+729), (2+730)}{24} \overset{?}{=} \text{Exz. } \tilde{\gamma}^n \tilde{\delta}^2 \tilde{\epsilon}^2 \tilde{\sigma}^2 = \frac{-\epsilon}{24} \text{ Exz. } \tilde{\gamma}^n \tilde{\delta}^2 \tilde{\epsilon}^2 \tilde{\sigma}^2 \quad (2.747)$$

$$\xrightarrow{(2.742)} D(P)^{-1} \gamma^2 D(P) = - \gamma^2 \quad (2.747)$$

ab, daß eine Raumzeileitung die beiden Neutrino-Wirkungen (2.746) inner-  
ander überführt. Die Neutrino-Wirkungen (2.746) werden erstmalis von  
Weiß im Jahre 1929 vorgeschlagen, um massive Spin 1/2-Teilchen zu vermei-  
den. Da die Neutrino-Wirkungen (2.746) aber nicht invariant unter Raum-  
zeileitungen sind und man zum damaligen Zeitpunkt nur Wechselwirkungen  
mit der elektromagnetischen oder die starke Kraft, die unter Raumzeileit-  
ungen invariant sind, wurden die Neutrino-Wirkungen (2.746) lange Zeit  
nicht beachtet. Erst 1956 wurde durch Lee und Yang anhand des  $P$ -Zerfalls  
von  $\frac{60}{27}$  (0.749) daß die schwache Wechselwirkung nicht invariant unter  
Raumzeileitungen ist und damit die Parität verloren. Seitdem hat sich die  
Beschreibung von Neutrinos durch die Wirkungen (2.746) durchgesetzt.

Abschließend betrachten wir noch die Wolf-Effektion, d.h. die Flussengangslei-  
tungen der Neutrinos:

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{\psi}(x)} \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}(x)} - \partial_{\mu} \frac{\partial L}{\partial (\partial_{\mu} \bar{\psi}(x))} \overset{(2.746)}{=} i \gamma^2 \partial_{\mu} \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) \psi = 0. \quad (2.748)$$

Im Falle eines Teilchens mit einem festen Überlagerungsvektor  $P = (p^a)$

$$\psi(x) = \psi \cdot \exp \{ i P x \} \quad (2.749)$$

gibt die Wolf-Effektion (2.748) über in

$$\bar{\psi} \vec{P} \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) \psi = \bar{\psi} \gamma^a \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) \psi. \quad (2.750)$$

Multipliziert man (2.750) von links mit  $\gamma^5 \gamma^a$ , so erhält man wegen

$$\gamma_5 \gamma^0 \gamma^2 \underset{(2.689), (2.736)}{=} \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & G^k \\ -G^k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -G^k & 0 \\ 0 & G^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^k & 0 \\ 0 & G^k \end{pmatrix} \quad (2.751)$$

und dem Spin-Operator (2.712) das Ergebnis

$$\frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|p^0|} \frac{1}{2}(1+\gamma_5) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(p^0) \gamma_5 \frac{1}{2}(1+\gamma_5). \quad (2.752)$$

wegen der Energie-impuls-Konservationsrelation  $p^0 = \pm |\vec{p}|$  sind die Eigenanzahlen  $\frac{1}{2}(1+\gamma_5)$  der Chiralitäts-Operator  $\gamma_5$  zu den Eigenwerten  $\mp 1$  und Eigenanzahlen des Helizitäts-Operators (2.193) zu den Eigenwerten  $\mp \frac{1}{2} \operatorname{sgn} p^0$ . Demnach sind Chiralität und Helizität bei Neutrinos identisch.

### 2.5.10. Ladungskonjugation:

Die Wirkung (2.688) des Dirac-Feldes ist noch bezüglich einer weiteren diskreten Symmetrieeinvarianz invariant, bei der die Komponenten des Dirac-Spinors  $\psi(x)$  durch die Komponenten des komplex konjugierten Dirac-Spinors  $\psi^*(x)$  ersetzt werden. Im Hinblick auf eine solche Symmetrietransformation werden Ansätze

$$\psi'_c(x) = C \bar{\psi}^T \underset{(2.689), (2.697)}{=} (\gamma^0 \psi^*), \quad (2.753)$$

wobei der Züllenspinor  $\bar{\psi}(x)$  aus (2.687) durch die Transposition in der entsprechenden Graltsenspinor  $\bar{\psi}^T(x)$  übergeht und  $C$  eine komplexe  $4 \times 4$ -Matrix darstellt, die diese Komponenten vermischt. Sie Matrix  $C$  soll dadurch festgelegt werden, daß der transformierte Dirac-Spinor (2.753) ebenfalls Dirac-Gleichung

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - M) \psi'_c(x) = 0 \quad (2.754)$$

genügt wie der ursprüngliche Dirac-Spinor  $\psi(x)$  in (2.692). Setzt man (2.753) in (2.754) ein und multipliziert man von links mit  $C^{-1}$ , so folgt

$$i C^{-1} \gamma^\mu C \partial_\mu \bar{\psi}^T(x) - M \bar{\psi}^T(x) = 0 \quad (2.755)$$

was durch eine Transposition übergeht in

$$i \partial_\mu \bar{\psi}(x) (C^{-2} \gamma^m)^T - m \bar{\psi}(x) = 0. \quad (2.756)$$

Die Bewegungsgleichung ist nun zu vereinfachen mit der Dirac-Gleichung für den Dirac-adjungierten Dirac-Spinor  $\bar{\psi}(x)$ . Um diese darzulegen, gehen wir aus von der Dirac-Gleichung (2.692) und erhalten durch Adjungieren

$$-i \partial_\mu \psi(x) (\delta^m)^T - m \psi(x) = 0. \quad (2.757)$$

Mit Ziff. von (2.690) für  $\mu = \tau = 0$  und (2.697) ergibt dann (2.757) über in

$$-i \partial_\mu \bar{\psi}(x) \delta^0 (\delta^m)^T \delta^0 - m \bar{\psi}(x) = 0. \quad (2.758)$$

Die Dirac-Matrizen  $\delta^m$  verfügen nur die Eigenschaft

$$\delta^0 (\delta^m)^T \delta^0 \stackrel{(2.620), (2.689)}{=} (\begin{smallmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{smallmatrix}) (\begin{smallmatrix} 0 & \hat{\sigma}^m \\ \hat{\sigma}^m & 0 \end{smallmatrix}) (\begin{smallmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{smallmatrix}) = (\begin{smallmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{smallmatrix}) (\begin{smallmatrix} \hat{\sigma}^m & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}) = (\begin{smallmatrix} 0 & \hat{\sigma}^m \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}) \stackrel{(2.689)}{=} \delta^m \quad (2.759)$$

so daß die Dirac-Gleichung für den Dirac-adjungierten Spinor  $\bar{\psi}(x)$  gegeben ist durch

$$i \partial_\mu \bar{\psi}(x) \delta^m + m \bar{\psi}(x) = 0. \quad (2.760)$$

Die Bewegungsgleichung für den Dirac-adjungierten Dirac-Spinor  $\bar{\psi}(x)$  entspricht der Euler-Lagrange-Gleichung der Dirac-Gleichung:

$$\frac{\delta A}{\delta \bar{\psi}(x)} \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}(x)} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi}(x))} \stackrel{(2.688)}{=} -\alpha \{ i \partial_\mu \bar{\psi}(x) \delta^m + m \bar{\psi}(x) \} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2.760)$$

in Vergleich von (2.756) und (2.760) führt dann auf die folgende Bestimmungsgleichung für die Matrix  $C$ :

$$(C^{-2} \gamma^m)^T = -\delta^m \Rightarrow C^{-2} \gamma^m = -(\delta^m)^T. \quad (2.761)$$

Hat man zur Lösung von (2.761) für die Matrix  $C$  den diagonalen Ansatz

$$C = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}, \quad C^{-2} = \begin{pmatrix} c^{-2} & 0 \\ 0 & -c^{-2} \end{pmatrix}, \quad (2.762)$$

so ergibt sich aus (2.689) und (2.761)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & (G^M)^T \\ (G^M)^T & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c^2 \delta^{mc} = (\tilde{G}^M)^T, c^2 \tilde{\delta}^{mc} = -(G^M)^T. \quad (2.763)$$

Setzt man beide Ergebnisse (2.763) in  $\mu = 0$  und  $\mu = 4$  ein, so führen beide auf die Bedingungen

$$c^2 \delta^{mc} = (G^M)^T, \quad (2.764)$$

$$c^2 \tilde{\delta}^{mc} = -(G^M)^T. \quad (2.765)$$

Werden noch die transponierten Pauli-Matrizen zu

$$(G^M)^T \xrightarrow{(2.642)} G^0, (G^1)^T \xrightarrow{(2.608)} G^1, (G^2)^T \xrightarrow{(2.608)} -G^2, (G^3)^T \xrightarrow{(2.608)} G^3. \quad (2.766)$$

Dann wird die Matrix  $C$  fest durch

$$C = -i G^2 \xrightarrow{(2.608)} -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.767)$$

mit der Eigenschaft

$$C^+ = C^{-1} = C^T = -C = -C^* \quad (2.768)$$

so sind (2.764) und (2.765) tatsächlich erfüllt:

- 1.)  $C^{-1} \delta^{0c} C \xrightarrow{(2.767),(2.768)} i G^2 G^0 (-i G^2) = G^2 G^0 G^2 = (G^2)^2 \xrightarrow{(2.609)} G^0 \xrightarrow{(2.766)} (G^M)^T \checkmark$
- 2.)  $C^{-1} \delta^{1c} C \xrightarrow{(2.767),(2.768)} i G^2 G^1 (-i G^2) = G^2 G^1 G^2 \xrightarrow{(2.609)} - (G^2)^2 G^1 \xrightarrow{(2.609)} - G^1 \xrightarrow{(2.766)} (G^1)^T \checkmark$
- 3.)  $C^{-1} \delta^{2c} C \xrightarrow{(2.767),(2.768)} i G^2 G^2 (-i G^2) = (G^2)^2 G^2 \xrightarrow{(2.609)} G^2 \xrightarrow{(2.766)} - (G^2)^T \checkmark$
- 4.)  $C^{-1} \delta^{3c} C \xrightarrow{(2.767),(2.768)} i G^2 G^3 (-i G^2) = G^2 G^3 G^2 \xrightarrow{(2.609)} - (G^2)^2 G^3 \xrightarrow{(2.609)} - G^3 \xrightarrow{(2.766)} - (G^3)^T \checkmark$

Aufgrund von (2.768) besitzt die Matrix  $C$  von (2.762) die Eigenschaft

$$C^+ = C^{-1} = C^T = -C = -C^* \quad (2.769)$$

und lässt sich als Produkt von Pauli-Matrizen darstellen:

$$i\gamma_0 \gamma^2 \underline{(2.689)} i \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16^2 & 0 \\ 0 & -16^2 \end{pmatrix} \underline{(2.767)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \underline{(2.762)} C. \quad (2.770)$$

Außerdem sieht sich nun, daß die diskrete Symmetrieverwandlung (2.753) involutorisch ist:

$$\begin{aligned} \gamma_c''(x) \underline{(2.753)} (\gamma_0 \gamma^2)(x) \underline{(2.753)} (\gamma_0 C^*(\gamma_0) * \gamma(x)) \underline{(2.689), (2.762)} (\gamma_0 C \gamma^0 \gamma(x)) \\ \underline{(2.689), (2.762)} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \gamma(x) = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \gamma(x) = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \gamma(x) \\ \underline{(2.768)} \quad \gamma_c''(x) = \gamma(x) \end{aligned} \quad (2.771)$$

Wir beweisen nun, daß die diskrete Symmetrieverwandlung (2.753) die Vierstromdichte des Dirac-Feldes invariant läßt. Durch Multiplikation der Bewegungsgleichungen (2.692) und (2.758) für  $\psi(x)$  und  $\bar{\psi}(x)$  mit  $\gamma(x)$  und  $\bar{\gamma}(x)$  erhält man eine kontinuitätsförmung

$$i \bar{\psi}(x) \gamma^n \partial_\mu \psi(x) - m \bar{\psi}(x) \gamma(x) \psi(x) = 0$$

$$i \partial_\mu \bar{\psi}(x) \gamma^n \psi(x) + m \bar{\psi}(x) \gamma(x) \psi(x) = 0$$

$$i \partial_\mu \{ \bar{\psi}(x) \gamma^n \psi(x) \} = 0 \Rightarrow \partial_\mu \bar{\psi}(x) \gamma^n \psi(x) = 0, \quad (2.772)$$

wobei die Vierstromdichte  $\bar{\psi}(x)$  bis auf eine Konstante  $k$  bestimmt ist:

$$\bar{\psi}(x) = k \bar{\psi}(x) \gamma^n \psi(x). \quad (2.773)$$

Um die diskrete Symmetrieverwandlung (2.753) auf die Vierstromdichte (2.773) anwenden zu können, benötigt man den transformierten Diracadjazienten Dirac-Spinor:

$$\bar{\psi}_c'(x) \underline{(2.697)} \gamma_c^{1+}(x) \gamma_0 \underline{(2.753)} \bar{\psi}(x) \gamma^0 \gamma^2 + \gamma_0 \underline{(2.689), (2.762)} - \bar{\psi}(x) \gamma_0 C \gamma^0$$

$$\underline{(2.689), (2.762)} - \bar{\psi}(x) \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = - \bar{\psi}(x) \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} = - \bar{\psi}(x) \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2.762)} \bar{\psi}_c^i(x) = \psi^T(x) C \quad (2.774)$$

Für die transformierte Viererstromdichte gilt zunächst

$$\hat{\delta}_c^m(x) \xrightarrow{(2.773)} K \bar{\psi}_c^i(x) \gamma^m \psi_c^i(x) \xrightarrow{(2.753), (2.774)} K \psi^T(x) (\gamma^m C \gamma^0 \gamma^* \psi(x)) \quad (2.775)$$

Da die einzelnen Komponenten  $\hat{\delta}_c^m(x)$  der transformierten Viererstromdichte mit ihren Transponierten übereinstimmen, folgt dann

$$\hat{\delta}_c^m(x) = (\hat{\delta}_c^m(x))^T \xrightarrow{(2.775)} K \psi^+(x) (\gamma^0 + (C \gamma^m) T \gamma^i \psi(x)) \xrightarrow{(2.689), (2.761), (2.769)}$$

$$K \psi^+(x) \gamma^0 \gamma^m \psi(x) \xrightarrow{(2.697)} K \bar{\psi}(x) \gamma^m \psi(x) \xrightarrow{(2.773)} \hat{\delta}^m(x) \quad (2.776)$$

Die physikalische Bedeutung der diskreten Symmetrieeigenschaft (2.753) als Ladungskonjugation wird erst bei der Quantisierung des Dirac-Felds deutlich werden, da dann im Unterschied zu (2.776) der Viererstromdichtenoperator sein Vorzeichen wechselt.

27.06.00

### 2.5.11. Zeitspiegelung:

Durch eine Zeitspiegelung  $T$  wird der Viererortsvektor  $x$  in den zeitlich invertierten Viererortsvektor  $-\tilde{x}$  abgebildet:

$$x_T^i = T x = -\tilde{x} \quad (2.777)$$

Führt man eine Zeitspiegelung  $T$  zweimal hintereinander aus, so regeneriert man den ursprünglichen Zustand. Die Zeitspiegelung  $T$  ist demnach involutorisch

$$T^2 = 1 \Leftrightarrow T^{-1} = T \quad (2.778)$$

Die Anstellungsmatrix für eine solche Zeitspiegelung lautet

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.779)$$

die Zeitspiegelung kommutiert mit den Elementen der Rotationsgruppe (2.41)

$$T^{-2} L_1 T = (-i) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L_1$$

$$T^{-2} L_2 T = (-i) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = L_2$$

$$T^{-2} L_3 T = (-i) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L_3$$

$$\Rightarrow T^{-2} L_k T = L_k \quad . \quad (2.780)$$

und antikommutiert mit den Elementen der Brüder (2.42)

$$T^{-2} M_1 T = (-i) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -M_1$$

$$T^{-2} M_2 T = (-i) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_2$$

$$T^{-2} M_3 T = (-i) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -M_3$$

$$\Rightarrow T^{-2} M_k T = -M_k \quad . \quad (2.781)$$

Wir untersuchen zunächst die Konsequenzen einer Zeitspiegelung für die Schrödinger-Gleichung

$$\left\{ i \hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} \Psi(x, t) = 0 \quad . \quad (2.782)$$

Auffällig ist die zeitgespiegelte Wellenfunktion

$$\psi_f(\vec{x}, t) = \psi^*(\vec{x}, -t) \quad (2.783)$$

Überfalls der Dirac-Effektivierung

$$\left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \vec{x}^2} \right\} \psi_f(\vec{x}, t) = 0. \quad (2.784)$$

In Analogie zu (2.783) führen wir die Zeitsymmetrie am Dirac-Spinor durch

$$\psi(x) \xrightarrow{T} \psi_f(x) = D(T) \psi^*(-x) \quad (2.785)$$

ein, wobei  $D(T)$  die Darstellungsmatrix der Zeitumkehrung im Raum der Dirac-Spinoren darstellt. Dafür vermuten wir, dass  $D(T)$  auch dieselbe Involutionseigenschaft (2.778) besitzt

$$D(T)^2 = 1 \quad \dots \quad (2.786)$$

und von erwarten, dass auch die zugehörigen Normierbarkeit bzw. Antikommutatorenrelationen (2.780) bzw. (2.781) mit den Darstellungsmatrizen  $D(L_R)$  bzw.  $D(M_R)$  der Rotations- und Boost im Raum der Dirac-Spinoren erhalten sind:

$$D(T)^{-1} D(L_R) D(T) = D(L_R), \quad (2.787)$$

$$D(T)^{-1} D(M_R) D(T) = -D(M_R). \quad (2.788)$$

In Analogie zu (2.784) fordern wir, dass die zeitgekreuzte Dirac-Spinor (2.785) ebenfalls der Dirac-Effektivierung (2.692) genügt:

$$(i \gamma_\mu \partial_\mu - m) \psi_f(x) = 0. \quad (2.789)$$

Setzen wir (2.785) in (2.789) ein, so folgt

$$-i \{ D(T)^{-1} \gamma^\mu D(T) \}^* \partial_\mu \psi(-x) - m \psi(-x) = 0. \quad (2.790)$$

Vereinfachen wir (2.790) mit der zeitgekreuzten Dirac-Gleichung (2.692)

$$-i \gamma^\mu \psi(-x) - m \psi(-x) = -i \gamma^\mu \partial_\mu \psi(-x) - m \psi(-x) = 0, \quad (2.791)$$

so erhalten wir für die Darstellungsmatrix  $D(T)$  der Zeitsymmetrie die Be-

## Bestimmungsaufgabe

$$D(T)^{-1} \circ^n D(T) = (\tilde{\gamma}^n)^*. \quad (2.792)$$

Berechnen wir einerseits den Kompositum  $\gamma^n$  aller der Dirac-Matrizen

$$\begin{aligned} (\tilde{\gamma}^0)^* \frac{(2.689)}{(\tilde{\gamma}^0)^*} & \left( \begin{array}{cc} 0 & (G_0)^* \\ (G_0)^* & 0 \end{array} \right) \frac{(2.608)}{(\tilde{\gamma}^1)^*} \left( \begin{array}{cc} 0 & G_0 \\ G_0 & 0 \end{array} \right), \quad (\tilde{\gamma}^1)^* \frac{(2.689)}{(-G_1)^*} \left( \begin{array}{cc} 0 & (G_1)^* \\ (-G_1)^* & 0 \end{array} \right) \frac{(2.608)}{(\tilde{\gamma}^2)^*} \left( \begin{array}{cc} 0 & G_1 \\ -G_1 & 0 \end{array} \right) \\ (\tilde{\gamma}^2)^* \frac{(2.689)}{(G_2)^*} & \left( \begin{array}{cc} 0 & (G_2)^* \\ (G_2)^* & 0 \end{array} \right) \frac{(2.608)}{(\tilde{\gamma}^3)^*} \left( \begin{array}{cc} 0 & -G_2 \\ G_2 & 0 \end{array} \right), \quad (\tilde{\gamma}^3)^* \frac{(2.689)}{(-G_3)^*} \left( \begin{array}{cc} 0 & (G_3)^* \\ (-G_3)^* & 0 \end{array} \right) \frac{(2.608)}{(\tilde{\gamma}^4)^*} \left( \begin{array}{cc} 0 & G_3 \\ -G_3 & 0 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (2.793)$$

und andererseits die Größen  $(\tilde{\gamma}^n)^T$

$$(\tilde{\gamma}^0)^T = (\tilde{\gamma}^0)^T \frac{(2.689)}{(G_0)^T} \left( \begin{array}{cc} 0 & (G_0)^T \\ (G_0)^T & 0 \end{array} \right) \frac{(2.758)}{(\tilde{\gamma}^1)^T} \left( \begin{array}{cc} 0 & G_0 \\ G_0 & 0 \end{array} \right),$$

$$(\tilde{\gamma}^1)^T = -(\tilde{\gamma}^1)^T \frac{(2.689)}{(G_1)^T} \left( \begin{array}{cc} 0 & -(G_1)^T \\ (G_1)^T & 0 \end{array} \right) \frac{(2.758)}{(\tilde{\gamma}^2)^T} \left( \begin{array}{cc} 0 & G_1 \\ -G_1 & 0 \end{array} \right),$$

$$(\tilde{\gamma}^2)^T = -(\tilde{\gamma}^2)^T \frac{(2.689)}{(G_2)^T} \left( \begin{array}{cc} 0 & -(G_2)^T \\ (G_2)^T & 0 \end{array} \right) \frac{(2.758)}{(\tilde{\gamma}^3)^T} \left( \begin{array}{cc} 0 & -G_2 \\ +G_2 & 0 \end{array} \right),$$

$$(\tilde{\gamma}^3)^T = -(\tilde{\gamma}^3)^T \frac{(2.689)}{(G_3)^T} \left( \begin{array}{cc} 0 & -(G_3)^T \\ (G_3)^T & 0 \end{array} \right) \frac{(2.758)}{(\tilde{\gamma}^4)^T} \left( \begin{array}{cc} 0 & G_3 \\ -G_3 & 0 \end{array} \right), \quad (2.794)$$

so kann man die folgende Identität ab

$$(\tilde{\gamma}^n)^* = (\tilde{\gamma}^n)^T \Rightarrow (\tilde{\gamma}^n)^T = \tilde{\gamma}^n. \quad (2.795)$$

Einsetzen von (2.795) in (2.792) ergibt dann

$$D(T)^{-1} \circ^n D(T) = (\tilde{\gamma}^n)^T \quad (2.796)$$

Verwendet man in (2.796) die Eigenschaft (2.761) der Dirac-Matrizen  $\tilde{\gamma}^n$ , so lautet die Bestimmungsgleichung für  $D(T)$

$$D(T)^{-1} \circ^n D(T) = -C^{-1} \circ^n C \Rightarrow \{D(T)C^{-1}\}^{-1} \circ^n \{D(T)C^{-1}\} = -\circ^n. \quad (2.797)$$

Eine Lösung von (2.797) lautet

$$D(T)C^{-1} = -i\sigma_5, \quad \{D(T)C^{-1}\}^{-1} = +i\sigma_5, \quad (2.798)$$

wie wir durch explizites Nachrechnen überprüfen können:

$$\text{mit } \sigma_5 \text{ aus } (2.689), (2.736) \quad (-i\ 0)(0\ 0^*)(-i\ 0) = (-i\ 0)(0\ 0^*) = -(\frac{0}{0^*} \frac{0}{0}) \underline{(2.689)} = 0^*.$$

Damit ergibt sich aus (2.798) die Darstellungsmatrix  $D(T)$  zu

$$D(T) \underline{(2.798)} = i\sigma_5 C \underline{(2.736), (2.767)} = i \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & 0^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.799)$$

wobei dies die Eigenwerte

$$D(T) = D(T)^{-1} = D(T)^* = -D(T)^* \quad (2.800)$$

besitzt. Gemäß (2.800) erfüllt die Darstellungsmatrix  $D(T)$  nur die Eigenwert-  
schafft (2.726), die Zeitspiegelung am Dirac-Spinor ist aber nicht involutorisch:

$$\Psi_+''(x) \underline{(2.785)} D(T) \Psi_+^*(-x) \underline{(2.785)} D(T) D(T)^* \Psi_+(x) \underline{(2.800)} = \Psi(x). \quad (2.801)$$

Die Zeitspiegelung am Dirac-Spinor unter Zeitspiegelung entspricht dem bei  
dieser Umbruttion von Dirac-Spinoren unter Raumumkehrung, wo nach (2.627) und (2.696) der ursprüngliche Dirac-  
Spinor Raumumkehrung, wo nach (2.627) und (2.696) der ursprüngliche Dirac-  
Spinor ent durch eine Raumumkehrung um  $4\pi$  entstellt. Für die Kommutatoren  
von  $D(T)$  mit  $D(L_A)$  erhalten wir

$$D(T)^2 D(L_A) D(T) \underline{(2.711), (2.799)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(5k)^T & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(5k)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \frac{1}{2}(5k)^T & 0 \\ 0 & -c \frac{1}{2}(5k)^T \end{pmatrix}$$

$$\underline{(2.765), (2.768)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(5k)^T & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(5k)^T \end{pmatrix} \underline{(2.627)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(5k)^T & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(5k)^T \end{pmatrix} \underline{(2.711)} D(L_A)^* \quad (2.802)$$

und entsprechend gilt für die Kommutatoren von  $D(T)$  mit  $D(M_A)$

$$D(T)^2 D(M_A) D(T) \underline{(2.710), (2.799)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(5k)^T & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(5k)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2}c(5k)^T & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2}c(5k)^T \end{pmatrix}$$

$$(2.765), (2.768) \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}(G^a)^T & 0 \\ 0 & \frac{i}{2}(G^a)^T \end{pmatrix} \underline{(2.622)} \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}(G^a)^* & 0 \\ 0 & \frac{i}{2}(G^a)^* \end{pmatrix} \underline{(2.710)} - D(Ma)^* \quad (2.803)$$

Die Ergebnisse (2.802), (2.803) stimmen nicht mit unseren ursprünglichen Erwartungen (2.787), (2.788) überein. Sie deuten darauf hin, daß die Zeitspielung antilinear ist.

### 2.5.12. Dirac-Darstellung:

Die bisher verwendete Darstellung (2.689) der Dirac-Matrizen  $\gamma^1$  wird als Dirac-Darstellung (Weyl-Darstellung) bezeichnet, da in dieser Darstellung der Dirac-Läufigkeits-Operator  $\gamma^5$  gemäß (2.736) diagonal ist. Ausgruppentheoretischer Sicht besitzt sie den Vorteil, daß die Darstellungsmatrizen der Lorentz-Transformation (2.696) eine Blockdiagonalgestalt besitzen. Eine andere gebräuchliche Darstellung ist die sogenannte Dirac-Darstellung (Standard-Darstellung).

$$\psi_D(x) = S_D \psi(x), \quad (2.804)$$

wobei die Transformationsmatrix  $S_D$  gegeben ist durch

$$S_D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix} \quad (2.805)$$

mit dem Inversen

$$S_D^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} = S_D^T. \quad (2.806)$$

Die Transformationsmatrix  $S_D$  ist demnach orthonormal bzw. unitär. Für den Dirac-adjungierten Dirac-Spinor  $\bar{\psi}(x)$  erhält man in der Dirac-Darstellung

$$\bar{\psi}_D(x) \underline{(2.697)} \psi_D^+(x) \gamma^0 \underline{(2.804)} \psi^+(x) S_D^+ \gamma^0 \underline{(2.697)} \bar{\psi}(x) \gamma^0 S_D^+ \gamma^0 \underline{(2.689), (2.805)}$$

$$\bar{\psi}(x) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \bar{\psi}(x) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} \underline{(2.806)} \bar{\psi}(x) S_D^{-1}. \quad (2.807)$$

Für die Dirac-Matrizen  $\gamma^0$  erhält man in der Dirac-Darstellung

$$\gamma_D^0 = S_D \gamma^0 S_D^{-1} \underline{(2.689), (2.805), (2.806)} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (2.808)$$

$$\gamma_D^k = S_D \gamma^k S_D^{-1} \underline{(2.689), (2.805), (2.806)} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \gamma^k \\ -\gamma^k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^k \\ -\gamma^k & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.809)$$

Genausprechend verändert sich der Drehlichkeits-Operator  $\gamma^5$  in der Dirac-Darstellung:

$$\gamma_D^5 = S_D \gamma^5 S_D^{-1} \underline{(2.736), (2.805), (2.806)} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.810)$$

und ist demnach nicht mehr diagonal. Umgekehrt ist die Dirac-Matrix  $\gamma^0$  in der Weyl-Darstellung (2.689) nicht diagonal, während sie in der Dirac-Darstellung (2.808) diagonal ist. Die Generatoren der Rotationen im Spinorraum sind unter dem Darstellungswechsel invariant

$$D(L_A)_D = S_D D(L_A) S_D^{-1} \underline{(2.711), (2.805), (2.806)} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\gamma^k & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\gamma^k & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma^k \end{pmatrix} \quad (2.811)$$

und für die Generatoren der Boosts im Spinorraum erhält man in der Dirac-Darstellung

$$D(M_A)_D = S_D D(M_A) S_D^{-1} \underline{(2.710), (2.805), (2.806)} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\gamma^k & 0 \\ 0 & \frac{i}{2}\gamma^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2}\gamma^k \\ \frac{i}{2}\gamma^k & 0 \end{pmatrix} \quad (2.812)$$

### 2.5.13. Nichtrelativistischer Limes:

Die Dirac-Darstellung besitzt den Vorteil, dass in ihr der nichtrelativistische Limes einfach durchzuführen ist. Im Zimelde daran anschließen wir die Dirac-Gleichung (2.692) gemäß (2.804) in die Dirac-Darstellung

$$i \gamma_5^\mu \partial_\mu \psi_D(x) - m \psi_D(x) = 0. \quad (2.813)$$

In dieser manifest kovarianten Formulierung der Dirac-Gleichung treten nur noch zeitliche und Raumliche Anteile

$$i\gamma_5 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi_D(x,t) + i\gamma_5^k \partial_k \psi_D(x,t) - M \psi_D(x,t) = 0. \quad (2.814)$$

Die Dirac-Gleichung läßt sich dann in die Form einer gewöhnlichen Gleichung bringen

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_D(x,t) = \hat{H}_D \psi_D(x,t), \quad (2.815)$$

wobei der Diracsche Hamilton-Operator gegeben ist durch

$$\hat{H}_D = -i\hbar \partial \cdot \vec{B} + c\hbar M \vec{B}. \quad (2.816)$$

Die hierbei auftretenden Matrizen

$$\beta = \gamma^5 \frac{(2.808)}{(2.808)} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (2.817)$$

$$\alpha^k = \gamma^0 \gamma^k \frac{(2.808), (2.809)}{(2.808)} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5^k \\ -5^k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5^k \\ -5^k & 0 \end{pmatrix} \quad (2.818)$$

besitzen daher die Antikommutatorrelationen

$$1.) [\beta, \beta]_+ = 2\beta^2 \frac{(2.817)}{(2.817)} 2 \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = 2 \mathbb{1} \quad (2.819)$$

$$2.) [\alpha^k, \beta]_+ \frac{(2.817), (2.818)}{(2.817), (2.818)} \begin{pmatrix} 0 & 5^k \\ 5^k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5^k \\ 5^k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5^k \\ 5^k & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 5^k \\ -5^k & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.820)$$

$$3.) [\alpha^k, \alpha^l]_+ \frac{(2.818)}{(2.818)} \begin{pmatrix} 0 & 5^k \\ 5^k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5^l \\ 5^l & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 5^l \\ 5^l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5^k \\ 5^k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^k 5^l & 0 \\ 0 & -5^k 5^l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5^l 5^k & 0 \\ 0 & -5^l 5^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} [5^k, 5^l]_+ & 0 \\ 0 & [5^k, 5^l]_+ \end{pmatrix} \frac{(2.609)}{(2.609)} 2 \delta_{kl} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = 2 \delta_{kl} \mathbb{1} \quad (2.821)$$

Wie in der Weyl-Darstellung in (2.684) so zerlegen wir auch in der Dirac-Darstellung den vierdimensionalen Dirac-Grüner in zwei zweidimensionalen Weyl-Gründer:

$$\psi_D(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} f_D(\vec{x}, t) \\ g_D(\vec{x}, t) \end{pmatrix} \quad (2.822)$$

Einsetzen von (2.822) in (2.815) und (2.816) führt dann unter Bedingung von (2.817) und (2.818) auf zwei gekoppelte Bewegungsgleichungen für diese Wellenfunktionen:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} f_D(\vec{x}, t) \\ g_D(\vec{x}, t) \end{pmatrix} = -i\hbar \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \vec{\nabla} \begin{pmatrix} f_D(\vec{x}, t) \\ g_D(\vec{x}, t) \end{pmatrix} + \text{ctm}(\vec{x}, t) \begin{pmatrix} f_D(\vec{x}, t) \\ g_D(\vec{x}, t) \end{pmatrix}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f_D(\vec{x}, t) = -i\hbar \vec{\sigma} \vec{\nabla} g_D(\vec{x}, t) + \text{ctm} f_D(\vec{x}, t), \quad (2.823)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} g_D(\vec{x}, t) = -i\hbar \vec{\sigma} \vec{\nabla} f_D(\vec{x}, t) - \text{ctm} g_D(\vec{x}, t). \quad (2.824)$$

Wir bemerken jedoch nun, dass gemäß (2.198) die relativistische und nicht-relativistische Energiedichte um die Ruhewelle  $m^2$  gegeneinander verschoben sind:

$$\psi_D(\vec{x}, t) \stackrel{(2.822)}{=} \begin{pmatrix} f_D(\vec{x}, t) \\ g_D(\vec{x}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_D(\vec{x}, t) e^{-i\hbar m c t} \\ g_D(\vec{x}, t) e^{-i\hbar m c t} \end{pmatrix}. \quad (2.825)$$

Dadurch gelten die beiden gekoppelten Bewegungsgleichungen (2.823), (2.824) über ein

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}_D(\vec{x}, t) = i\hbar (\vec{\sigma} \vec{\nabla} \tilde{g}_D(\vec{x}, t) + \text{ctm} - mc^2) \tilde{f}_D(\vec{x}, t), \quad (2.826)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}_D(\vec{x}, t) = -i\hbar (\vec{\sigma} \vec{\nabla} \tilde{f}_D(\vec{x}, t) + \text{ctm} - mc^2) \tilde{g}_D(\vec{x}, t). \quad (2.827)$$

Letztlich müssen wir den noch offenen Parameter  $m$  durch die Compton-Wellenlänge des Elektrons bestimmen.

$$m = \frac{mc}{t_0}, \quad (2.828)$$

so tritt die Ruhewelle  $m^2$  nur noch in der zweiten Bewegungsgleichung auf.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}_D(\vec{x},t) = -i\hbar c \vec{S} \vec{B} \tilde{\psi}_D(\vec{x},t), \quad (2.829)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}_D(\vec{x},t) = -i\hbar c \vec{S} \vec{B} \tilde{\psi}_D(\vec{x},t) + 2mc^2 \tilde{\psi}_D(\vec{x},t). \quad (2.830)$$

Im nichtrelativistischen Limes  $c \rightarrow \infty$  ist nur die magnetische Fördereffekt des Welf-Spinors  $\tilde{\psi}_D$  gegenüber dem Pauli-Spinor verdeckt:

$$|i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}_D(\vec{x},t)| \ll |mc^2 \tilde{\psi}_D(\vec{x},t)|, \quad (2.831)$$

so daß sich Näherungsweise der Welf-Spinor  $\tilde{\psi}_D$  durch den Welf-Spinor  $\tilde{\psi}_D$  ausdrücken läßt:

$$\tilde{\psi}_D(\vec{x},t) = \frac{-i\hbar}{2mc} \vec{S} \vec{B} \tilde{\psi}_D(\vec{x},t). \quad (2.832)$$

Einfügen von (2.832) in (2.829) führt dann auf die Schrödinger-Gleichung für den Welf-Spinor  $\tilde{\psi}_D(\vec{x},t)$ :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}_D(\vec{x},t) = -\frac{e^2}{2m} \vec{S} \vec{A} \tilde{\psi}_D(\vec{x},t) = -\frac{e^2}{2m} \frac{1}{2} [\vec{S} \vec{A}, \vec{S} \vec{A}] + \partial_A \partial_A \tilde{\psi}_D(\vec{x},t),$$

$$(2.609) \quad -\frac{e^2}{2m} \frac{1}{2} 2 \partial_A I \partial_A \tilde{\psi}_D(\vec{x},t) = -\frac{e^2}{2m} \Delta \tilde{\psi}_D(\vec{x},t). \quad (2.833)$$

Führt man den nichtrelativistischen Limes in der Dirac-Gleichung bei Anwendung eines Elektromagnetischen Feldes durch, so erhält man für den Welf-Spinor  $\tilde{\psi}_D(\vec{x},t)$  statt der Schrödinger-Gleichung (2.833) die Pauli-Gleichung. Arbeitet man automatisch der relativistischen Landau-Faktor  $g_s = 2$  auf.

Wir betrachten nun den nichtrelativistischen Limes der Dirac-Wirkung (2.688), (2.691) in der Dirac- $\vec{A}$ -Darstellung

$$A = \int d^4x \alpha^i \overline{\psi}_D(\vec{x},t) \gamma^i \partial_S \partial_\mu - M^2 \psi_D(\vec{x},t). \quad (2.834)$$

Nach (2.697), (2.808), (2.825) lautet der Dirac-adjungierte Welf-Spinor

$$\Psi_D(\vec{x}, t) = \Psi_D^+(\vec{x}, t) \partial_0^+ = (\tilde{\psi}_D^+(\vec{x}, t) e^{+i\frac{1}{c}mc^2t}, -\tilde{\psi}_D^+(\vec{x}, t) e^{+i\frac{1}{c}mc^2t}). \quad (2.835)$$

Damit ergibt sich die Dirac-Wirkung (2.834) unter Veradnung von (2.805), (2.809), (2.825), (2.829) zu

$$\begin{aligned} A &= \int d^4x \partial \left\{ i \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) \partial^0 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_D(\vec{x}, t) + i \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) \bar{\partial}_0 \vec{\sigma} \Psi(\vec{x}, t) - M \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) \Psi_D(\vec{x}, t) \right\} \\ &= \int d^4x \partial \left\{ \frac{i}{c} (\tilde{\psi}_D^+(\vec{x}, t) - \tilde{\psi}_D^-(\vec{x}, t)) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{i}{c} mc^2 \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) \\ \frac{\partial \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{i}{c} mc^2 \bar{\psi}_D(\vec{x}, t) \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + i (\tilde{\psi}_D^+(\vec{x}, t) - \tilde{\psi}_D^-(\vec{x}, t)) \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) - \frac{mc}{c} (\tilde{\psi}_D^+(\vec{x}, t) - \tilde{\psi}_D^-(\vec{x}, t)) \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) \\ \bar{\psi}_D(\vec{x}, t) \end{pmatrix} \right\} \\ &= \int d^4x \partial \left\{ \frac{i}{c} [\tilde{\psi}_D^+(\vec{x}, t) \frac{\partial \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t)}{\partial t} + \tilde{\psi}_D^-(\vec{x}, t) \frac{\partial \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t)}{\partial t}] + \frac{mc}{c} [\tilde{\psi}_D^+(\vec{x}, t) \tilde{\psi}_D^-(\vec{x}, t) + \tilde{\psi}_D^+(\vec{x}, t) \bar{\psi}_D(\vec{x}, t)] \right. \\ &\quad \left. + i [\tilde{\psi}_D^+(\vec{x}, t) \vec{\sigma} \vec{\sigma} \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) + \tilde{\psi}_D^-(\vec{x}, t) \vec{\sigma} \vec{\sigma} \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t)] - \frac{mc}{c} [\tilde{\psi}_D^+(\vec{x}, t) \tilde{\psi}_D^-(\vec{x}, t) - \tilde{\psi}_D^-(\vec{x}, t) \bar{\psi}_D(\vec{x}, t)] \right\} \\ &= \int d^4x \partial \left\{ i [\tilde{\psi}_D^+(\vec{x}, t) \frac{\partial \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t)}{\partial t} + \tilde{\psi}_D^-(\vec{x}, t) \frac{\partial \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t)}{\partial t}] + i [\tilde{\psi}_D^+(\vec{x}, t) \vec{\sigma} \vec{\sigma} \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) + \tilde{\psi}_D^-(\vec{x}, t) \vec{\sigma} \vec{\sigma} \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t)] \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{mc}{c} \tilde{\psi}_D^-(\vec{x}, t) \bar{\psi}_D(\vec{x}, t) \right\} \quad (2.836) \end{aligned}$$

Setzt man nun den Welf-Gitter  $\tilde{\psi}_D$  gemäß (2.832) in die oben Welf-Gitter  $\tilde{\psi}_D$  ein, so ergibt (2.836) im nichtrelativistischen Grenz  $c \rightarrow \infty$  über ein

$$\begin{aligned} A &= \int d^4x \partial \left\{ i \frac{1}{c} \tilde{\psi}_D^+(\vec{x}, t) \frac{\partial \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t)}{\partial t} + i [\tilde{\psi}_D^+(\vec{x}, t) \vec{\sigma} \vec{\sigma} \frac{-it}{2mc} \partial_0 \partial_0 \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) + \frac{it}{2mc} \partial_0 \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) \vec{\sigma} \vec{\sigma} \right. \\ &\quad \left. + 54 \partial_0 \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t)] + 2 \frac{mc}{c} \frac{-it}{2mc} \frac{it}{2mc} \partial_0 \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) \vec{\sigma} \vec{\sigma} \partial_0 \partial_0 \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) \right\} \\ &\stackrel{(2.613)}{=} \int d^4x \partial \left\{ i \tilde{\psi}_D^+(\vec{x}, t) \frac{\partial \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{t}{2mc} \tilde{\psi}_D^+(\vec{x}, t) \Delta \tilde{\psi}_D(\vec{x}, t) \right\} - \quad (2.837) \end{aligned}$$

Lassen wir den noch offenen Parameter  $a$  durch

$$a = ct$$

$$(2.838)$$

gesetzt, so geht (2.837) in die Schrödinger-Gleichung (1.155)-(1.157) für den Welfe-Spinor  $\tilde{\psi}_D$  über

$$A = \int dx \left\{ i\hbar \tilde{\psi}_D^\dagger(x) \frac{\partial \tilde{\psi}_D(x)}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \tilde{\psi}_D^\dagger(x) \Delta \tilde{\psi}_D(x) \right\}. \quad (2.839)$$

Nach den Festlegungen (2.828) und (2.838) lautet dann die Dirac-Lagrange-Aktion in der Welfe-Darstellung

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) \left\{ i\hbar c \not{\partial} - mc^2 \right\} \psi(x). \quad (2.840)$$

In folgenden werden wir einige Anwendungen des in Abschnitt 2.3. diskutierten Noether-Theorems auf die Lagrange-Aktion (2.840) des Dirac-Feldes durchführen. Dabei haben wir zu beachten, daß die in Abschnitt 2.3. diskutierten allgemeinen Felder  $\psi^\alpha(x)$  sowohl mit dem Dirac-Spinor  $\psi(x)$  als auch mit dem Dirac adjungierten Dirac-Spinor  $\bar{\psi}(x)$  zu identifizieren sind.

#### 2.5.14. Vierverströmungsdichte:

Die Lagrange-Aktion (2.840) besitzt die innere Symmetrie, daß sie unter den globalen Phaseentransformationen

$$\psi'(x^1) = \psi(x^1) e^{-\frac{i}{\hbar} \varphi}, \quad \bar{\psi}'(x^1) = \bar{\psi}(x^1) e^{+\frac{i}{\hbar} \varphi}, \quad x'^1 = x^1 \quad (2.841)$$

invariant ist. Die infinitesimalen Transformationen zu (2.841) lauten

$$\delta \psi(x^1) = -\frac{i}{\hbar} \psi(x^1) \delta \varphi, \quad \delta \bar{\psi}(x^1) = +\frac{i}{\hbar} \bar{\psi}(x^1) \delta \varphi, \quad \delta x^1 = 0, \quad (2.842)$$

so daß sich die allgemeine Kontinuitätsgleichung (2.375) auf die Kontinuitätsgleichung der Ladungserhaltung (2.772) reduziert. Die Vierverströmungsdichte  $j^\mu(x^1)$  ist dabei gegeben durch

$$\delta^m(x^1) \frac{(2.376)}{\frac{\partial L}{\partial (\partial_m \bar{\psi}(x^1))}} \delta \bar{\psi}(x^1) + \delta \bar{\psi}(x^1) \frac{\partial L}{\partial (\partial_m \bar{\psi}(x^1))}$$

$$(2.842) \frac{-i}{\hbar} \left\{ \frac{\partial L}{\partial (\partial_m \bar{\psi}(x^1))} \bar{\psi}(x^1) - \bar{\psi}(x^1) \frac{\partial L}{\partial (\partial_m \bar{\psi}(x^1))} \right\} \frac{(2.840)}{(2.843)} \bar{\psi}(x^1) C_8 m \bar{\psi}(x^1). \quad (2.843)$$

somit ist die in (2.773) auftretende Konstante  $k$  festgelegt zu

$$k = c. \quad (2.844)$$

zur Kontinuitätsgleichung (2.772) gehörende Erhaltungsgröße ist die Ladung:

$$Q = \int d^3x \frac{1}{c} \bar{\psi}^0(\vec{x}, t) \frac{(2.843)}{\int d^3x \bar{\psi}(\vec{x}, t) \gamma^0 \bar{\psi}(\vec{x}, t)} \frac{(2.690), (2.697)}{\int d^3x \bar{\psi}^+(\vec{x}, t) \bar{\psi}(\vec{x}, t)}. \quad (2.845)$$

### 2.5.15. Kanonischer Energie-Impuls-Tensor:

die Lagrange-Gleichung (2.840) des Dirac-Feldes besitzt darüber hinaus die längs-

symmetrie, daß sie unter den Raum-Zeit-Translationen

$$\psi^1(x^1) = \psi(x^1), \quad \bar{\psi}^1(x^1) = \bar{\psi}(x^1), \quad x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu \quad (2.846)$$

invariant ist. da die infinitesimalen Transformationen zu (2.846) gegeben sind durch

$$\delta \psi(x^1) = 0, \quad \delta \bar{\psi}(x^1) = 0, \quad \delta x^\mu = \varepsilon^\mu, \quad (2.847)$$

reduziert sich die allgemeine Kontinuitätsgleichung (2.375) auf die Kontinuitätsgleichung der Energie-Impuls-Erhaltung in (2.380). Die kontravarianten Komponenten  $\mathbb{D}^{mu}(x^1)$  des Energie-Impuls-Tensors ergeben sich dabei unter Verwendung der Dirac-Gleichung zu

$$\mathbb{D}^{mu}(x^1) \frac{(2.381)}{\frac{\partial L}{\partial (\partial_m \bar{\psi}(x^1))}} \partial^2 \bar{\psi}(x^1) + \partial^2 \bar{\psi}(x^1) \frac{\partial L}{\partial (\partial_m \bar{\psi}(x^1))} - g^{mu} \cdot \mathcal{L}$$

$$(2.840) i\hbar c \overline{\psi}(x) \partial^m \partial^2 \psi(x) - g_{\mu\nu} \overline{\psi}(x) \{ i\hbar c \partial^2 \partial_\mu - m^2 I \} \psi(x)$$

$$12.692), (2.828) i\hbar c \overline{\psi}(x) \partial^m \partial^2 \psi(x). \quad (2.848)$$

Es ist anzumerken, daß der kanonische Energie-Impuls-Tensor des Dirac-Feldes nicht symmetrisch ist. Dies liegt am nicht verschwindenden Spin der Quanten des Dirac-Feldes. Sie zur Kontinuitätsbedingung (2.375) gehörenden Erhaltungsgrößen bilden den Vierimpulsvektor

$$P^\nu = \frac{1}{c} \int d^3x \Theta^{0\nu}(\vec{x}, t) \quad (2.848) \quad i\hbar \int d^3x \overline{\psi}(\vec{x}, t) \gamma^0 \partial^\nu \psi(\vec{x}, t) \quad (2.690), (2.697) \quad \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}, t) i\hbar \partial^\nu \psi(\vec{x}, t) \quad (2.849)$$

Der Vierimpulsvektor des Dirac-Feldes ist demnach das Gruppenprodukt des Vierimpulsoperators (2.108) bezüglich des Dirac-Spinors. Die Energie des Dirac-Feldes ist dann gegeben durch

$$E = c P^0 \quad (2.849) \quad i\hbar \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}, t) \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (2.850)$$

und der Impuls des Dirac-Feldes lautet

$$P^\mu = \frac{1}{i} \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}, t) \vec{\nabla} \psi(\vec{x}, t). \quad (2.851)$$

## 2.5.16. Symmetrisierter Energie-Impuls-Tensor:

Wir führen nun die im Abschnitt 2.3.11. diskutierte Belobantl-Konstruktion zur Symmetrisierung des kanonischen Energie-Impuls-Tensors des Dirac-Feldes durch. Zunächst bemerken wir, daß die Darstellungsmatrizen  $N^{\alpha\beta}$  der Lorentz-Algebra im Spinorderraum nach (2.709) durch die Matrizen  $S^{\alpha\beta}$  in (2.713) gegeben sind. Der Spindorl-Impuls-Tensor des Dirac-Feldes lautet dann

$$S^{\mu\nu\rho}(x) \quad (2.390) \quad \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \psi(x))} (-i) S^{\rho\lambda} \psi(x) + (-i) \overline{\psi}(x) \overline{S}^{\rho\lambda} \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \overline{\psi}(x))}$$

$$(2.840) \quad \overline{\psi}(x) i\hbar c \partial^m (-i) S^{\rho\lambda} \psi(x) = i\hbar c \overline{\psi}(x) \partial^m S^{\rho\lambda} \psi(x).$$

(2.852)

Setzt man (2.852) unter Beachtung von (2.713) in (2.414) ein so erhält man

$$\begin{aligned} \chi_{\text{Hxx}}(x) & \stackrel{(2.414)}{=} \frac{1}{2} \{ \sin x + 5^{\text{Hxx}}(x) - 5^{\text{Hxx}}(x) \} \stackrel{(2.852)}{=} \frac{i\epsilon}{2} \bar{\psi}(x) \{ 2^{\text{Hxx}} \\ & + 8^{\text{Hxx}} - 8^{\text{Hxx}} \bar{\psi}(x) \} \stackrel{(2.713)}{=} \frac{i\epsilon}{8} \bar{\psi}(x) \{ 8^{\text{Hxx}}(8^{\text{Hxx}} - 8^{\text{Hxx}}) + 8^{\text{Hxx}}(8^{\text{Hxx}} - 8^{\text{Hxx}}) \\ & - 8^{\text{Hxx}}(8^{\text{Hxx}} - 8^{\text{Hxx}}) \} \bar{\psi}(x) = \frac{i\epsilon}{8} \bar{\psi}(x) \{ (8^{\text{Hxx}} - 8^{\text{Hxx}}) 8^{\text{Hxx}} - (8^{\text{Hxx}} + 8^{\text{Hxx}}) 8^{\text{Hxx}} \\ & + (8^{\text{Hxx}} + 8^{\text{Hxx}}) 8^{\text{Hxx}} \} \bar{\psi}(x) \stackrel{(2.690)}{=} \frac{i\epsilon}{8} \bar{\psi}(x) \{ 2^{\text{Hxx}} 8^{\text{Hxx}} - 2^{\text{Hxx}} 8^{\text{Hxx}} - 2^{\text{Hxx}} 8^{\text{Hxx}} \\ & + 2^{\text{Hxx}} 8^{\text{Hxx}} \} \bar{\psi}(x) = \frac{i\epsilon}{4} \bar{\psi}(x) \{ g_{\mu\nu} 8^{\text{Hxx}} + g^{\mu\nu} 8^{\text{Hxx}} - g^{\mu\nu} 8^{\text{Hxx}} - g^{\mu\nu} 8^{\text{Hxx}} \} \bar{\psi}(x) \quad (2.853) \end{aligned}$$

Bilden wir die Viererdivergenz aller Tensoren 3. Stufe, so geht zunächst  
 $\partial_\mu \chi_{\text{Hxx}} = \frac{i\epsilon}{4} \{ \partial^\mu (\bar{\psi} \partial_\mu \psi) + \bar{\psi} \partial^\mu \partial_\mu \psi - \partial^\mu (\bar{\psi} \partial^\mu \psi) - \partial_\mu (\bar{\psi} \partial^\mu \psi) \} \quad (2.854)$   
 durch Umwandlung der Bewegungsgleichungen (2.692) und (2.760) für den  
 reellen Elementarzustand  $\psi(x)$  und den reellen adjungierten Dirac-Spinor  $\bar{\psi}(x)$  läßt  
 sich (2.854) vereinfachen. Es muß erst rechniert werden (2.854) wegen (2.772) und  
 (2.773) auf

$$\partial_\mu \chi_{\text{Hxx}} = \frac{i\epsilon}{4} \{ \partial^\mu (\bar{\psi} \partial_\mu \psi) - \partial^\mu (\bar{\psi} \partial^\mu \psi) - \partial_\mu (\bar{\psi} \partial^\mu \psi) \} \quad (2.855)$$

wir extrahieren nun die beiden Bewegungsgleichungen (2.692) und (2.760) und  
 multiplizieren sie von links mit  $\bar{\psi} \partial_\mu \psi$  von rechts mit  $\bar{\psi} \partial^\mu \psi$ :

$$1.) i \bar{\psi} \partial_\mu \bar{\psi} \partial_\mu \psi \stackrel{(2.690)}{=} 2i g_{\mu\nu} \partial_\mu \psi - i \partial_\mu \bar{\psi} \partial_\mu \psi \stackrel{(2.692), (2.828)}{=} \frac{mc}{\hbar} \bar{\psi} \partial^\mu \psi$$

$$\Rightarrow \bar{\psi} \partial^\mu \bar{\psi} \partial_\mu \psi = 2 \bar{\psi} \partial_\mu \psi + i \frac{mc}{\hbar} \bar{\psi} \partial^\mu \psi \quad (2.856)$$

$$2.) i \partial_\mu \bar{\psi} \partial^\mu \bar{\psi} \stackrel{(2.690)}{=} 2i \partial_\mu \bar{\psi} g_{\mu\nu} - i \partial_\mu \bar{\psi} \partial^\mu \psi \stackrel{(2.760)}{=} - \frac{mc}{\hbar} \bar{\psi} \partial^\mu \psi$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \bar{\psi} \partial^\mu \bar{\psi} \partial_\mu \psi = 2 \bar{\psi} \partial^\mu \psi - i \frac{mc}{\hbar} \bar{\psi} \partial^\mu \psi \quad (2.857)$$

Multipliziert man (2.856) von links mit  $\bar{\psi}$  und (2.857) von rechts mit  $\psi$ ,  
 so ergibt durch Addition beider Gleichungen

$$\partial_m \chi_{\mu=2} = \frac{ic}{4} \{ \partial^2 \bar{\psi} \partial^2 \psi + \bar{\psi} \partial^2 \partial^2 \psi - \partial^2 \bar{\psi} \partial^2 \psi - \bar{\psi} \partial^2 \partial^2 \psi - 2 \bar{\psi} \partial^2 \partial^2 \psi - 2 \partial^2 \bar{\psi} \partial^2 \psi \} \\ = \frac{ic}{4} \{ - \partial^2 \bar{\psi} \partial^2 \psi + \bar{\psi} \partial^2 \partial^2 \psi - \partial^2 \bar{\psi} \partial^2 \psi - 3 \bar{\psi} \partial^2 \partial^2 \psi \}. \quad (2.858)$$

Einsetzen von (2.858) in (2.400), (2.403), (2.848) ergibt den symmetrisierten Energie-Impuls-Tensor

$$T^{m\mu}(x) = \frac{ic}{4} \{ \bar{\psi}(x) \partial^2 \partial^2 \psi(x) + \bar{\psi}(x) \partial^2 \partial^2 \psi(x) - \partial^2 \bar{\psi}(x) \partial^2 \psi(x) - \partial^2 \bar{\psi}(x) \partial^2 \psi(x) \}. \quad (2.859)$$

Zur Form des symmetrisierten Energie-Impuls-Tensors ist proportional zur Masse des Teilchens:

$$T^{m\mu}(x) = \frac{ic}{2} \{ \bar{\psi}(x) \partial^m \partial_\mu \psi(x) - \partial_m \bar{\psi}(x) \partial^m \psi(x) \} \quad (2.692), (2.760) \quad \frac{ic}{2} \{ \bar{\psi}(x) \frac{-im}{\hbar} \psi(x) \\ - i \frac{mc}{\hbar} \bar{\psi}(x) \psi(x) \} = mc^2 \bar{\psi}(x) \psi(x).$$

Der Spin des Dirac-Feldes ist schließlich gegeben durch:

$$S_i \stackrel{(2.398)}{=} \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} S^{jk} = \frac{1}{c} \int d^3x \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} S^{jk} \psi(x, t) \quad (2.852) \quad \hbar \int d^3x \bar{\psi}(x, t) \partial^0 \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \psi(x, t) \\ \circ S^{jk} \psi(x, t) \stackrel{(2.690), (2.697)}{=} \hbar \int d^3x \psi^+(x, t) \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} S^{jk} \psi(x, t)$$

$$\stackrel{(2.711)}{\rightarrow} \vec{S} = \frac{\hbar}{2} \int d^3x \psi^+(x, t) \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \psi(x, t). \quad (2.861)$$

### 2.5.17. Ebene Wellen:

Wir bestimmen nun die Fundamentallösungen der Dirac-Gleichung (2.692), die durch die Festlegung (2.828) die folgende Form annimmt:

$$\{ i \partial^m \partial_m - \frac{mc}{\hbar} \} \psi(x) = 0. \quad (2.862)$$

Im Ruhsystem des Teilchens kann der Dirac-Spinor nur von der Zeit  $t$  abhängen:

$$\psi(x) = \psi(t). \quad (2.863)$$

29.06.00

Einsetzen von (2.863) in (2.861) führt auf

$$\left\{ i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - \frac{mc^2}{\hbar} \right\} \Psi(t) = 0 \quad (2.864)$$

eine Multiplikation von (2.864) mit dem Operator  $\left\{ i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - \frac{mc^2}{\hbar} \right\}$  ergibt dann

$$\left\{ i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - \frac{mc^2}{\hbar} \right\} \left\{ i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - \frac{mc^2}{\hbar} \right\} \Psi(t) = \left\{ (\gamma^0)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left( \frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 \right\} \Psi(t) = 0. \quad (2.865)$$

Damit erhält es zwei verdrillte Lösungen

$$\Psi(t) = \Psi \cdot e^{i \frac{mc^2}{\hbar} t}, \quad (2.866)$$

wobei der Amplitudenspinor  $\Psi$  aufgrund von (2.864) und (2.866) der Effektivitätenspinor ist

$$(\pm \gamma^0 - 1) \Psi = 0 \quad (2.867)$$

Beachtet man die spezielle Form der Dirac-Matrix  $\gamma^0$  in der Welfe-  
darstellung, so geht (2.867) über in

$$1.) (\gamma^0 - 1) \Psi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right\} \Psi = \begin{pmatrix} -I & I \\ I & -I \end{pmatrix} \Psi = 0, \quad (2.868)$$

$$2.) (-\gamma^0 - 1) \Psi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right\} \Psi = \begin{pmatrix} -I & -I \\ I & -I \end{pmatrix} \Psi = 0. \quad (2.869)$$

Es seien nun  $\chi(+\frac{1}{2})$  und  $\chi(-\frac{1}{2})$  zwei orthonormierte Zweispinoren

$$\chi^+(\lambda) \chi(\lambda) = \delta_{\lambda, \lambda}. \quad (2.870)$$

Dann lassen sich zwei Lösungen von (2.868) angeben durch

$$\Psi^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi(\frac{1}{2}) \\ \chi(\frac{1}{2}) \end{pmatrix}, \quad \Psi^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi(-\frac{1}{2}) \\ \chi(-\frac{1}{2}) \end{pmatrix}. \quad (2.871)$$

Zur Probe rechnen wir dies explizit nach:

$$\begin{pmatrix} -I & I \\ I & -I \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi(\pm \frac{1}{2}) \\ \chi(\pm \frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\chi(\pm \frac{1}{2}) + \chi(\mp \frac{1}{2}) \right) = (0) \quad \checkmark$$

Wir bilden dann die zu  $\chi(\pm \frac{1}{2})$  dualen konjugierten Zweispinoren

$$x^c(\pm \frac{1}{2}) = c x^*(\pm \frac{1}{2}), \quad (2.872)$$

die ebenfalls orthonormiert sind

$$x^c(2) + x^c(2') = (x^c(2) + x^c(2'))^T \underbrace{(2.872)}_{(2.768)} (x^T(2)c + c x^*(2'))^T \underbrace{(2.768)}_{(2.873)}$$

$$(x^T(2)x^*(2'))^T = x^*(2')x(2) \underbrace{(2.870)}_{(2.768)} \delta_{2,2'}.$$

Mit diesen lassen sich auch zwei Lösungen von (2.869) angeben durch

$$\psi^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x^c(\frac{1}{2}) \\ -x^c(\frac{1}{2}) \end{pmatrix}, \quad \psi^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x^c(-\frac{1}{2}) \\ -x^c(-\frac{1}{2}) \end{pmatrix}. \quad (2.874)$$

Zur Probe rechnen wir dies explizit nach

$$\begin{pmatrix} -I & I \\ -I & -I \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x^c(\pm \frac{1}{2}) \\ -x^c(\pm \frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -x^c(\pm \frac{1}{2}) + x^c(\pm \frac{1}{2}) \\ -x^c(\pm \frac{1}{2}) - x^c(\pm \frac{1}{2}) \end{pmatrix} = (0) \quad \checkmark$$

Wir bemerken, dass  $\psi^{(3)}$  und  $\psi^{(4)}$  gerade die Ladungskonjugierten Anteile spannen von  $\psi^{(1)}$  und  $\psi^{(2)}$  darstellen. Mit dem Dirac adjungierten Dirac-Spinor

$$\overline{\psi}(1,2) = \psi(1,2) + \gamma_0 \underbrace{(2.689) \text{ d}2.874}_{(2.875)} \frac{1}{\sqrt{2}} (x^*(\pm \frac{1}{2}), x^*(\pm \frac{1}{2})) \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^*(\pm \frac{1}{2}), x^*(\pm \frac{1}{2})) \quad (2.875)$$

Führt nämlich die Ladungskonjugation auf

$$\psi_c^{(1,2)} \underbrace{(2.753)}_{(2.8753)} \in \overline{\psi}^{(1,2)T} \underbrace{(2.762), (2.875)}_{(2.876)} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x^*(\pm \frac{1}{2}) \\ x^*(\pm \frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} c x^*(\pm \frac{1}{2}) \\ -c x^*(\pm \frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(2.872)}_{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x^c(\pm \frac{1}{2}) \\ -x^c(\pm \frac{1}{2}) \end{pmatrix}} \underbrace{(2.874)}_{\psi^{(3,4)}}. \quad (2.876)$$

Wir bereiten nun die Feindamortallösungen (2.866), (2.871), (2.874) des Dirac-Gleichung vom Rubbersystem in das Dirac Bezugssystem:

$$\psi^{(1,2)} e^{-\frac{i}{\hbar} mc^2 t} \xrightarrow{B} \psi_{\frac{p}{\hbar}}^{(1,2)}(x) = \psi_{\frac{p}{\hbar}}^{(1,2)} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} px}, \quad (2.877)$$

$$\psi^{(3,4)} e^{+ \frac{i}{\hbar} mc^2 t} \xrightarrow{B} \psi_{\vec{P}}^{(3,4)}(x) = \psi^{(3,4)} e^{+ \frac{i}{\hbar} px}, \quad (2.878)$$

wobei der Überimpulsvektor vom Ruheresystem (2.633) in das bewegte Bezugssystem (2.634) überführt wird. Bei einer zellaren Bogst-Transformationsmatrix bleibt das Skalarprodukt des Überimpulsvektors invariant, so dass die zeitartigen Komponenten des Überimpulsvektors durch die räumlichen Komponenten gestaffelt ist:

$$p_k^A p_{k\mu} = p_{\mu k} p_{\mu} \xrightarrow{(2.633), (2.634)} m c^2 = (\mu c)^2 - \vec{p}^2 \xrightarrow{(2.46)} E_p = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (2.879)$$

was entspricht gerade der relativistischen Energie-Moments-Dispersionsrelation (2.13). Außerdem ergibt die Amplitudengrenzübersetzung  $\psi_{\vec{P}}^{(n)}$  für  $n = 1, 2, 3, 4$  durch Bogsten die Amplitudengrenzübersetzung  $\psi^{(n)}$  über  $\psi^{(n)}$ :

$$\psi_{\vec{P}}^{(n)} = D(B) \psi^{(n)} \quad (2.880)$$

dieser lautet die Bogst-Darstellung im Raum der Direktschreiber:

$$D(B) \xrightarrow{(2.696)} \begin{pmatrix} D^{(11,0)}(B) & 0 \\ 0 & D^{(0,11)}(B) \end{pmatrix} \xrightarrow{(2.619), (2.620)} \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{S} \cdot \vec{P}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{\hbar} \vec{S} \cdot \vec{P}} \end{pmatrix} \xrightarrow{(2.690)} \begin{pmatrix} \frac{PE}{mc} & 0 \\ 0 & \frac{PE}{mc} \end{pmatrix} \quad (2.881)$$

damit erhalten wir im endlichen:

$$\psi_{\vec{P}}^{(1,2)} = D(B) \psi^{(1,2)} \xrightarrow{(2.871), (2.881)} \begin{pmatrix} \frac{PE}{mc} & 0 \\ 0 & \frac{PE}{mc} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi(\pm \frac{1}{2}) \\ \chi(\pm \frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{PE}{mc} \times (\pm \frac{1}{2}) \\ \frac{PE}{mc} \times (\pm \frac{1}{2}) \end{pmatrix} \quad (2.882)$$

$$\psi_{\vec{P}}^{(3,4)} = D(B) \psi^{(3,4)} \xrightarrow{(2.874), (2.881)} \begin{pmatrix} \frac{PE}{mc} & 0 \\ 0 & \frac{PE}{mc} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi(\pm \frac{1}{2}) \\ -\chi(\pm \frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{PE}{mc} \times (\pm \frac{1}{2}) \\ -\frac{PE}{mc} \times (\pm \frac{1}{2}) \end{pmatrix} \quad (2.883)$$

Beachten wir die Abkürzung

$$(PG)(P\hat{G}) = P_{\mu} G^{\mu\nu} P_{\nu} \hat{G}^{\nu} = \frac{1}{2} (G^{\mu\nu} \hat{G}_{\mu\nu} + G^{\mu\nu} \hat{G}_{\nu\mu}) P_{\mu} P_{\nu} \xrightarrow{(2.681)} \frac{1}{2} \cdot 2 g_{\mu\nu} I P_{\mu} P_{\nu}$$

$$= p^2 \Gamma \underset{(2.884)}{\underline{(2.13), (2.16)}} (mc)^2 I,$$

(2.884)

so eben wir erzielt, dass wir damit Lösungen der Dirac-Gleichung (2.862) kontrolliert haben:

$$1.) \left\{ i \gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar} \right\} \Psi_{\vec{p}}^{(1/2)}(\vec{r}) = 0 \quad \underset{(2.877)}{\Rightarrow} \quad \left\{ \gamma^\mu P_\mu - mc \right\} \Psi_{\vec{p}}^{(1/2)} = 0 \quad (2.885)$$

Aus (2.689) und (2.882) folgt:

$$\begin{pmatrix} 0 & P_5 \\ P_5 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{mc}{me} \chi^{(\pm\frac{1}{2})} \\ \frac{P_5}{me} \chi^{(\pm\frac{1}{2})} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( mc \frac{P_5}{me} \frac{P_5}{me} \chi^{(\pm\frac{1}{2})} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( mc \frac{P_5}{me} \frac{P_5}{me} \frac{(P_5)(P_5)}{(mc)^2} \chi^{(\pm\frac{1}{2})} \right)$$

$$(2.884) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} mc \frac{P_5}{me} \chi^{(\pm\frac{1}{2})} \\ mc \frac{P_5}{me} \chi^{(\pm\frac{1}{2})} \end{pmatrix} = (mcI \ 0) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{P_5}{me} \chi^{(\pm\frac{1}{2})} \\ \frac{P_5}{me} \chi^{(\pm\frac{1}{2})} \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$2.) \left\{ i \gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar} \right\} \Psi_{\vec{p}}^{(3/4)}(\vec{r}) = 0 \quad \underset{(2.878)}{\Rightarrow} \quad \left\{ \gamma^\mu P_\mu + mc \right\} \Psi_{\vec{p}}^{(3/4)} = 0 \quad (2.886)$$

Aus (2.689) und (2.883) folgt:

$$\begin{pmatrix} 0 & P_5 \\ P_5 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{P_5}{me} \chi^c(\pm\frac{1}{2}) \\ -\frac{P_5}{me} \chi^c(\pm\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -mc \frac{P_5}{me} \frac{P_5}{me} \chi^c(\pm\frac{1}{2}) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -mc \frac{P_5}{me} \frac{P_5}{me} \frac{(P_5)(P_5)}{(mc)^2} \chi^c(\pm\frac{1}{2}) \right)$$

$$(2.884) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -mc \frac{P_5}{me} \chi^c(\pm\frac{1}{2}) \\ +mc \frac{P_5}{me} \chi^c(\pm\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = - (mcI \ 0) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{P_5}{me} \chi^c(\pm\frac{1}{2}) \\ \frac{P_5}{me} \chi^c(\pm\frac{1}{2}) \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Wir bemerken, dass  $\Psi_{\vec{p}}^{(1/2)}$  und  $\Psi_{\vec{p}}^{(3/4)}$  gerade die Ladungskomponenten Dirac-Gleichungen von  $\Psi_{\vec{p}}^{(1)}$  und  $\Psi_{\vec{p}}^{(3)}$  darstellen. Zunächst erhalten wir für die Dirac-adjungierten Dirac-Gleichungen

$$\overline{\Psi}_{\vec{p}}^{(1/2)} = \Psi_{\vec{p}}^{(1/2)} + \delta^0 \underset{(2.689), (2.882)}{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \chi^+(\pm\frac{1}{2}) \frac{P_5}{me}, \chi^+(\pm\frac{1}{2}) \frac{P_5}{me} \right) (I_0)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \chi^+(\pm\frac{1}{2}) \frac{P_5}{me}, \chi^+(\pm\frac{1}{2}) \frac{P_5}{me} \right) \quad (2.887)$$

zusätzlich lassen wir noch (2.764) und (2.765) zusammen

$c \circ \delta^m = (\tilde{\delta}^m)^T \xrightarrow{(2.767)} c(\delta^m)^T c^{-1} = \tilde{\delta}^m, c(\tilde{\delta}^m)^T c^{-1} = \delta^m \quad (2.888)$   
und verallgemeinern diese Beziehung auf eine beliebige Einheit von zwei  
 $\tilde{U}$ -matrizen  $\delta(\tilde{\delta}^m)$  bzw.  $\delta(\tilde{\delta}^n)$ :

$$c \delta(\tilde{\delta}^m)^T c^{-1} = \delta(\tilde{\delta}^m), \quad c \delta(\tilde{\delta}^n)^T c^{-1} = \delta(\tilde{\delta}^n). \quad (2.889)$$

Die Ladungskonjugation der Dirac-Spinoren  $\chi_{\frac{1}{2}}$  und  $\chi_{\frac{3}{2}}$  führt dann auf

$$\begin{aligned} \chi_{\frac{1}{2}}^{(n)} &\xrightarrow{(2.753)} C \overline{\chi}_{\frac{1}{2}}^{(n)} \xrightarrow{(2.762), (2.887)} \left( \begin{array}{cc} \delta & 0 \\ 0 & -c \end{array} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{array}{c} \frac{P_E}{mc} + \chi^*(\pm \frac{1}{2}) \\ \frac{P_E}{mc} - \chi^*(\pm \frac{1}{2}) \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{array}{c} c \frac{P_E}{mc} \delta \circ \chi^*(\pm \frac{1}{2}) \\ -c \frac{P_E}{mc} \delta \circ \chi^*(\pm \frac{1}{2}) \end{array} \right) \xrightarrow{(2.872), (2.889)} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{array}{c} \frac{P_E}{mc} \chi(\pm \frac{1}{2}) \\ -\frac{P_E}{mc} \chi(\pm \frac{1}{2}) \end{array} \right) \xrightarrow{(2.883)} \chi_{\frac{1}{2}}^{(n)}. \quad (2.890) \end{aligned}$$

Die Amplitudenspinoren (2.882) und (2.883) lassen sich nun schreiben als

$$\chi_{\frac{1}{2}}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{array}{c} \frac{P_E}{mc} \times \left( \frac{(-1)^{n+1}}{2} \right) \\ \frac{P_E}{mc} \times \left( \frac{(-1)^{n+1}}{2} \right) \end{array} \right) \quad ; \quad n = 1, 2 \quad (2.891)$$

$$\chi_{\frac{3}{2}}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{array}{c} \frac{P_E}{mc} \times \left( \frac{(-1)^{n+1}}{2} \right) \\ \frac{P_E}{mc} \times \left( \frac{(-1)^{n+1}}{2} \right) \end{array} \right) \quad ; \quad n = 3, 4 \quad (2.892)$$

und erhalten die adjungierten Amplitudenspinoren

$$\chi_{\frac{1}{2}}^{(n)*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \chi + \left( \frac{(-1)^{n+1}}{2} \right) \frac{P_E}{mc}, \chi^* + \left( \frac{(-1)^{n+1}}{2} \right) \frac{P_E}{mc} \right) \quad ; \quad n = 1, 2 \quad (2.893)$$

$$\chi_{\frac{3}{2}}^{(n)*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \chi + \left( \frac{(-1)^{n+1}}{2} \right) \frac{P_E}{mc}, \chi^* + \left( \frac{(-1)^{n+1}}{2} \right) \frac{P_E}{mc} \right) \quad ; \quad n = 3, 4 \quad (2.894)$$

Die Amplitudenspinoren  $\chi_{\frac{1}{2}}^{(n)}$  für  $n = 1, 2$  und  $\chi_{\frac{3}{2}}^{(n)}$  für  $n = 3, 4$  erfüllen den  $L^2$ -  
Orthonormalitätsrelationen:

$$1.) \quad \tau = 1,2; \quad \tau' = 1,2 :$$

$$\begin{aligned} & \frac{\psi(\tau) + \bar{\psi}(\tau)}{\sqrt{2}} \xrightarrow{(2.891), (2.893)} \frac{1}{2} \left( x^+ \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) \frac{P_E}{mc}, x^+ \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) \frac{P_E}{mc} \right) \left( \frac{P_E}{mc} x \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} x^+ \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) \left\{ \frac{P_E}{mc} + \frac{P_E}{mc} \right\} x \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) = x^+ \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) \frac{1}{2} \frac{2P_E}{mc} x \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) \\ &= \frac{EP}{mc^2} x^+ \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) x \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) \xrightarrow{(2.890)} \frac{EP}{mc^2} \delta_{\tau, \tau'} \end{aligned} \quad (2.895)$$

$$2.) \quad \tau = 3,4; \quad \tau' = 3,4 :$$

$$\begin{aligned} & \frac{\psi(\tau) + \bar{\psi}(\tau)}{\sqrt{2}} \xrightarrow{(2.892), (2.894)} \frac{1}{2} \left( x^c \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) \frac{P_E}{mc}, -x^c \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) \frac{P_E}{mc} \right) \left( \frac{P_E}{mc} x^c \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} x^c \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) \left\{ \frac{P_E}{mc} + \frac{P_E}{mc} \right\} x^c \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) = x^c \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) \frac{1}{2} \frac{2P_E}{mc} x^c \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) \\ &= \frac{EP}{mc^2} x^c \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) x^c \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) \xrightarrow{(2.893)} \frac{EP}{mc^2} \delta_{\tau, \tau'} \end{aligned} \quad (2.896)$$

$$3.) \quad \tau = 1,2; \quad \tau' = 3,4 :$$

$$\begin{aligned} & \frac{\psi(\tau) + \bar{\psi}(\tau)}{\sqrt{2}} \xrightarrow{(2.892), (2.893)} \frac{1}{2} \left( x^+ \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) \frac{P_E}{mc}, x^+ \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) \frac{P_E}{mc} \right) \left( \frac{P_E}{mc} x^c \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} x^+ \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) \left\{ \frac{P_E}{mc} \left( \frac{P_E}{mc} \right)^T - \frac{1}{2} \frac{P_E}{mc} \left( \frac{P_E}{mc} \right)^T \right\} x^c \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) \equiv 0 \end{aligned} \quad (2.897)$$

$$4.) \quad \tau = 3,4; \quad \tau' = 1,2 :$$

$$\begin{aligned} & \frac{\psi(\tau) + \bar{\psi}(\tau)}{\sqrt{2}} \xrightarrow{(2.891), (2.894)} \frac{1}{2} \left( x^c \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) \frac{P_E}{mc}, -x^c \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) \frac{P_E}{mc} \right) \left( \frac{P_E}{mc} x \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} x^c \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) \left\{ \frac{P_E}{mc} \left( \frac{P_E}{mc} \right)^T - \frac{1}{2} \frac{P_E}{mc} \left( \frac{P_E}{mc} \right)^T \right\} x \left( \frac{(-1)^{\tau+1}}{2} \right) \equiv 0 \end{aligned} \quad (2.898)$$

see orthogonalityrelationen (2.895)-(2.898) lassen sich zusammenfassen zu

$$\frac{\psi(\tau) + \bar{\psi}(\tau)}{\sqrt{2}} = \frac{EP}{mc^2} \delta_{\tau, \tau'} \quad (2.899)$$

wobei die Abkürzung

$$e_n = \begin{cases} +1 & n=1,2 \\ -1 & n=3,4 \end{cases} \quad (2.900)$$

verwendet wird. Damit läuft sich nun die Orthonormalitätsrelation der Fundamentallokungen (2.877) und (2.878)

$$\int_{\vec{p}} \psi_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t) \psi_{\vec{p}'}^{(n')}(\vec{x}, t) d^3x = \int_{\vec{p}} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} e_n(E_B t - \vec{p} \cdot \vec{x})\right\} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} e_{n'}(E_B t - \vec{p}' \cdot \vec{x})\right\} d^3x \quad (2.901)$$

benutzen:

$$\begin{aligned} & \int_{\vec{p}} \psi_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t) \psi_{\vec{p}'}^{(n')}(\vec{x}, t) \stackrel{(2.901)}{=} \int_{\vec{p}} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(E_n E_{p'} - E_n E_{p'})t\right\} d^3x e^{\frac{i}{\hbar}(E_n \vec{p} - E_n \vec{p}') \cdot \vec{x}} \\ &= \int_{\vec{p}} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(E_n E_{p'} - E_n E_{p'})t\right\} \frac{(2\pi\hbar)^3}{(2\pi\hbar)^3} \delta(E_n \vec{p} - E_n \vec{p}') = \frac{(2\pi\hbar)^3}{m c^2} \int_{\vec{p}} \delta(E_n \vec{p} - E_n \vec{p}') \delta_{nn'} \\ &\cdot e^{\frac{i}{\hbar}(E_n E_{p'} - E_n E_{p'})t} \delta(\vec{p} - \vec{p}') \stackrel{(2.879), (2.859)}{=} \frac{(2\pi\hbar)^3 E_B^2}{m c^2} e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_{n'}) E_B t}. \\ &\cdot \delta_{nn'} \delta(\vec{p} - \vec{p}') = \frac{(2\pi\hbar)^3 E_B^2}{m c^2} \delta_{nn'} \delta(\vec{p} - \vec{p}') \end{aligned} \quad (2.902)$$

Nun wir nun (2.901) ersetzen durch

$$\int_{\vec{p}} \psi_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t) \psi_{\vec{p}'}^{(n')}(\vec{x}, t) = \frac{mc^2}{(2\pi\hbar)^3 E_B^2} \int_{\vec{p}} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} e_n(E_B t - \vec{p} \cdot \vec{x})\right\} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} e_{n'}(E_B t - \vec{p}' \cdot \vec{x})\right\} d^3x, \quad (2.903)$$

so ergibt dies Fundamentallokungen der Dirac-Gleichung (2.862) den Orthonormalitätskoeffizienten

$$\int_{\vec{p}} \psi_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t) \psi_{\vec{p}'}^{(n')}(\vec{x}, t) = \delta_{nn'} \delta(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (2.904)$$

Der Vollständigkeit halber geben wir noch zum Schluß die Fundamentallokungen (2.903) in der Dirac-Darstellung an. Dazu benutzen wir zunächst die Darstellungen (2.871) und (2.874) im Ruhesystem in der Dirac-Darstellung:

$$\psi_D^{(1,2)} \frac{(2.804)}{S_D} S_D \psi_D^{(1,2)} \frac{(2.805), (2.871)}{\gamma_2} \frac{1}{\gamma_2} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix} \frac{1}{\gamma_2} \begin{pmatrix} X^{(\pm\frac{1}{2})} \\ X^{(\pm\frac{1}{2})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^{(\pm\frac{1}{2})} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.905)$$

$$\psi_D^{(3,4)} \frac{(2.804)}{S_D} S_D \psi_D^{(3,4)} \frac{(2.805), (2.874)}{\gamma_2} \frac{1}{\gamma_2} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix} \frac{1}{\gamma_2} \begin{pmatrix} X^c(\pm\frac{1}{2}) \\ -X^c(\pm\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -X^c(\pm\frac{1}{2}) \end{pmatrix}. \quad (2.906)$$

durch einen Boost in das bewegte Bezugssystem erhalten wir dann:

$$1.) \psi_{\vec{P}D}^{(1,2)} \frac{(2.804)}{S_D} S_D \psi_{\vec{P}}^{(1,2)} \frac{(2.805), (2.882)}{\gamma_2} \frac{1}{\gamma_2} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix} \frac{1}{\gamma_2} \begin{pmatrix} \frac{PG}{mc} X^{(\pm\frac{1}{2})} \\ \frac{PG}{mc} X^{(\pm\frac{1}{2})} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\frac{PG}{mc} + \frac{PG}{mc}) X^{(\pm\frac{1}{2})} \\ (-\frac{PG}{mc} + \frac{PG}{mc}) X^{(\pm\frac{1}{2})} \end{pmatrix}$$

$$\frac{(2.644), (2.648), (2.650)}{\gamma_2} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{PG+mc}{\gamma_2 mc(p_0+mc)} + \frac{PG+mc}{\gamma_2 mc(p_0+mc)} X^{(\pm\frac{1}{2})} \\ \frac{PG+mc}{\gamma_2 mc(p_0+mc)} + \frac{PG+mc}{\gamma_2 mc(p_0+mc)} X^{(\pm\frac{1}{2})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{EP+mc^2}{\lambda mc^2}} X^{(\pm\frac{1}{2})} \\ \frac{-Gpc}{\gamma_2 mc(EP+mc^2)} X^{(\pm\frac{1}{2})} \end{pmatrix} \quad (2.907)$$

$$2.) \psi_{\vec{P}D}^{(3,4)} \frac{(2.804)}{S_D} S_D \psi_{\vec{P}}^{(3,4)} \frac{(2.805), (2.883)}{\gamma_2} \frac{1}{\gamma_2} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix} \frac{1}{\gamma_2} \begin{pmatrix} \frac{PG}{mc} X^c(\pm\frac{1}{2}) \\ -\frac{PG}{mc} X^c(\pm\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\frac{PG}{mc} - \frac{PG}{mc}) X^c(\pm\frac{1}{2}) \\ (-\frac{PG}{mc} - \frac{PG}{mc}) X^c(\pm\frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$

$$\frac{(2.644), (2.648), (2.650)}{\gamma_2} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{PG+mc}{\gamma_2 mc(p_0+mc)} - \frac{PG+mc}{\gamma_2 mc(p_0+mc)} X^c(\pm\frac{1}{2}) \\ -\frac{PG+mc}{\gamma_2 mc(p_0+mc)} - \frac{PG+mc}{\gamma_2 mc(p_0+mc)} X^c(\pm\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-Gpc}{\gamma_2 mc(EP+mc^2)} X^c(\pm\frac{1}{2}) \\ -\frac{EP+mc^2}{\gamma_2 mc^2} X^c(\pm\frac{1}{2}) \end{pmatrix} \quad (2.908)$$

Im nichtrelativistischen Limit  $c \rightarrow \infty$  sind bei  $\psi_{\vec{P}D}^{(1,2)}$  bzw. bei  $\psi_{\vec{P}D}^{(3,4)}$  die unteren bzw. die oberen Komponenten des Dirac-Gimino klein.

## 2.5.18. Zellitätsgrößen:

Bei den Überlegungen im vorhergehenden Abschnitt wurden die beiden ortho- und antientwilesspionen  $X^{(\pm\frac{1}{2})}$  und  $X^{(-\frac{1}{2})}$  nicht näher spezifiziert. Wir betrachten zunächst Spin  $1/2$ -Teilchen, die in ihrem Ruhsystem länglich der  $z$ -Achse quantisiert sind. In diesem Fall müssen wir die ortho- und antientwilesspionen durch

$$X^{(\pm\frac{1}{2})} = (1), \quad X^{(-\frac{1}{2})} = (2) \quad (2.909)$$

gestlogen, da sie die orthonormierten Eigenvektoren des Operators  $D(L_3) = \frac{1}{2} \sigma_3$  der Rotationen um die  $\hat{z}$ -Achse darstellen:

$$\frac{1}{2} \sigma_3 \chi(\pm \frac{1}{2}) \underline{(2.608), (2.909)} \pm \frac{1}{2} \chi(\pm \frac{1}{2}) \quad (2.910)$$

Aus  $(2.767), (2.872)$  und  $(2.909)$  ergibt sich dann die erwartete Form der Ladungsgaußprojektionen zweier spinlosen Elektronen

$$\chi^c(\pm \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi^c(-\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.911)$$

Da nun die eingesetzten Radungsgaußprojektionen eindeutig sind kann die Ergebnisse aus den entsprechenden Gleichungen  $(2.871)$  und  $(2.873)$  übernommen werden.

$$\frac{1}{2} \sigma_3 \chi^c(\pm \frac{1}{2}) \underline{(2.608), (2.911)} \pm \frac{1}{2} \chi^c(\pm \frac{1}{2}). \quad (2.912)$$

Der Vergleich von  $(2.910)$  mit  $(2.912)$  zeigt, dass die Ergebnisse von  $\chi(\pm \frac{1}{2})$  und  $\chi^c(\pm \frac{1}{2})$  große Veränderungen unterliegen. Sie mit den Zwischenzuständen  $\chi(\pm \frac{1}{2})$  und  $\chi^c(\pm \frac{1}{2})$  im Rahmen des Teilchen-Apparates überprüfen ( $2.871$  und  $2.873$ ) führen im Rahmen des Operators  $D(L_3)$  der Rotationen um die  $\hat{z}$ -Achse dar:

$$D(L_3) \psi^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \psi^{(n)}; n=1,2 \quad D(L_3) \psi^{(n)} = \frac{(-1)^n}{2} \psi^{(n)}; n=3,4 \quad (2.913)$$

unter Beachtung von  $(2.711)$  gilt nämlich

$$\begin{aligned} 1.) \left( \begin{array}{cc} \frac{1}{2} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \sigma_3 \end{array} \right) \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \chi(\pm \frac{1}{2}) \\ \chi(\pm \frac{1}{2}) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\pi} \left( \begin{array}{cc} \frac{1}{2} \sigma_3 \chi(\pm \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2} \sigma_3 \chi(\pm \frac{1}{2}) \end{array} \right) \underline{(2.910)} \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{2} \chi(\pm \frac{1}{2}) \\ \pm \frac{1}{2} \chi(\pm \frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \chi(\pm \frac{1}{2}) \\ \chi(\pm \frac{1}{2}) \end{pmatrix} \\ 2.) \left( \begin{array}{cc} \frac{1}{2} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \sigma_3 \end{array} \right) \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \chi(\pm \frac{1}{2}) \\ -\chi(\pm \frac{1}{2}) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\pi} \left( \begin{array}{cc} \frac{1}{2} \sigma_3 \chi(\pm \frac{1}{2}) \\ -\frac{1}{2} \sigma_3 \chi(\pm \frac{1}{2}) \end{array} \right) \underline{(2.910)} \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \mp \frac{1}{2} \chi(\pm \frac{1}{2}) \\ \pm \frac{1}{2} \chi(\pm \frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \mp \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \chi(\pm \frac{1}{2}) \\ -\chi(\pm \frac{1}{2}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir betrachten nun Spin  $1/2$ -Teilchen, die in Bildung des Teilchenimprässes  $\hat{z}$  involviert sind. Die darüber auftretenden Elektrizitätsmomente kontrollieren wiederum zum Vergleich im Abschnitt 2.4.12., wo die Polarisationsvektoren zinseller polarisierten ebenen Elektrizitätswellen kontrolliert werden.

Zunächst betrachten wir den Zellikato-Operator (2.193), dieser Spinweltler (2.178) im Raum der Zweiergrößen angehend von (2.744) durch  $D(L_3) = \frac{1}{2} \sigma^z$  ergänzt:

$$u(\vec{P}) = \frac{D(L^2)\vec{P}}{\vec{P}} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{P}}{2\vec{P}} \stackrel{(2.608)}{\frac{1}{2\vec{P}}} \left\{ P_x \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P_y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + P_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2\vec{P}} \begin{pmatrix} P_x & P_x - iP_y \\ iP_x + iP_y & -P_z \end{pmatrix} \quad (2.914)$$

Wir definieren die Zellikato-Spinoren  $\chi_n(\vec{P}, \pm \frac{1}{2})$  als Eigenvektoren des Zellikato-Operators (2.914) zum Eigenwert  $\pm \frac{1}{2}$ :

$$u(\vec{P}) \chi_n(\vec{P}, \pm \frac{1}{2}) = \pm \frac{1}{2} \chi_n(\vec{P}, \pm \frac{1}{2}). \quad (2.915)$$

Aus (2.909) und (2.914) folgt unmittelbar, dass die Zweiergrößen  $\chi(\pm \frac{1}{2})$  Eigenvektoren des Zellikato-Operators  $u(P \vec{\sigma} \vec{z})$  zum Eigenwert  $\pm \frac{1}{2}$  darstellen:

$$u(P \vec{\sigma} \vec{z}) \chi(+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(P \vec{\sigma} \vec{z}) \chi(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2.915)} \chi_n(P \vec{\sigma} \vec{z}, \pm \frac{1}{2}) = \chi(\pm \frac{1}{2}). \quad (2.916)$$

Im Falle der Quantisierung bezüglich der Impulsrichtung  $\vec{P}$  bedenken wir den Impulsvektor  $\vec{P}$  analog zu (2.536) mit Hilfe von Zueigenvektoren  $P_\theta$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ :

$$\vec{P} = P \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.917)$$

Dann bestimmen wir analog zu (2.537) im Raum der Zweiergrößen die Rotationsmatrix  $D(R(\theta, \ell))$ , bei der zuerst die Rotation  $D(R_z(\theta))$  und dann die Rotation  $D(R_\ell(\ell))$  durchgeführt wird:

$$D(R(\theta, \ell)) = D(R_z(\theta)) D(R_\ell(\ell)). \quad (2.918)$$

dabei lauten die einzelnen Drehmatrizen

$$D(R_z(\varphi)) = e^{-iD(L_3)\varphi} \frac{(2.616)}{e^{-\frac{i}{2}\xi^3\varphi}} \frac{(2.627)}{\cos \frac{\varphi}{2} I - i \sin \frac{\varphi}{2} \xi^3} \frac{(2.608)}{\cos \frac{\varphi}{2} (1\%)} \\ -i \sin \frac{\varphi}{2} (1\%) = \begin{pmatrix} \cos \varphi/2 - i \sin \varphi/2 & 0 \\ 0 & \cos \varphi/2 + i \sin \varphi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{+i\varphi/2} \end{pmatrix}, \quad (2.919)$$

$$D(R_y(\vartheta)) = e^{-iD(L_2)\vartheta} \frac{(2.616)}{e^{-\frac{i}{2}\xi^2\vartheta}} \frac{(2.627)}{\cos \frac{\vartheta}{2} I - i \sin \frac{\vartheta}{2} \xi^2} \frac{(2.608)}{\cos \frac{\vartheta}{2} (1\%)} \\ -i \sin \frac{\vartheta}{2} (1\%) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta/2 - i \sin \vartheta/2 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta/2 + i \sin \vartheta/2 \end{pmatrix}, \quad (2.920)$$

so dass die resultierende Drehmatrix (2.918) gegeben ist durch

$$D(R(\vartheta, \varphi)) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta/2 e^{-i\varphi/2} & -\sin \vartheta/2 e^{-i\varphi/2} \\ \sin \vartheta/2 e^{+i\varphi/2} & \cos \vartheta/2 e^{+i\varphi/2} \end{pmatrix}. \quad (2.921)$$

Wir bilden nun die Zweierspinoren  $\chi(\pm \frac{1}{2})$  mit der Drehmatrix  $D(R(\vartheta, \varphi))$  ab und erhalten die Zellitäts-Zweierspinoren

$$\chi_n(\vec{p}, \pm \frac{1}{2}) = D(R(\vartheta, \varphi)) \chi(\pm \frac{1}{2}). \quad (2.922)$$

Mit der expliziten Gestalt der Zweierspinoren (2.909) und der Drehmatrix (2.921) lauten dann die Zellitäts-Zweierspinoren

$$\chi_n(\vec{p}, +\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta/2 e^{-i\varphi/2} \\ \sin \vartheta/2 e^{+i\varphi/2} \end{pmatrix}, \quad \chi_n(\vec{p}, -\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta/2 e^{-i\varphi/2} \\ \cos \vartheta/2 e^{+i\varphi/2} \end{pmatrix}. \quad (2.923)$$

Im Falle  $\vec{p} = p \vec{e}_z$ , d.h.  $\vartheta = \varphi = 0$  reduziert sich (2.923) gemäß (2.916) auf (2.909). Die Ladungskonjugation der Zellitäts-Spinoren  $\chi_n(\vec{p}, \pm \frac{1}{2})$  führt auf

$$\chi_n^c(\vec{p}, +\frac{1}{2}) \xrightarrow{(2.872)} c \chi_n^*(\vec{p}, +\frac{1}{2}) \xrightarrow{(2.767), (2.923)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta/2 e^{i\varphi/2} \\ \sin \vartheta/2 e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta/2 e^{-i\varphi/2} \\ \cos \vartheta/2 e^{+i\varphi/2} \end{pmatrix} \quad (2.924)$$

$$\chi_n^c(\vec{p}, -\frac{1}{2}) \xrightarrow{(2.872)} c \chi_n^*(\vec{p}, -\frac{1}{2}) \xrightarrow{(2.767), (2.923)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \vartheta/2 e^{i\varphi/2} \\ \cos \vartheta/2 e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \vartheta/2 e^{-i\varphi/2} \\ -\sin \vartheta/2 e^{+i\varphi/2} \end{pmatrix} \quad (2.925)$$

Im Falle  $\vec{p} = p \vec{e}'_z$ , d.h.  $\vartheta = \varphi = 0$  reduzieren sich (2.924) und (2.925) auf (2.909):

$$x_n^c(\vec{r}, \vec{\epsilon}_z, \pm \frac{1}{2}) = x^c(\pm \frac{1}{2}). \quad (2.926)$$

Sicherlich führt die Abbildung der Radialisprojektionen zu Ellipsoiden (2.911) mit der Anisotropie (2.921) auf die Radialisprojektionen Ellipsoide-Spinoren (2.924) und (2.925):

$$x_n^c(\vec{r}, \pm \frac{1}{2}) = D(R(-\vartheta, \psi)) x^c(\pm \frac{1}{2}). \quad (2.927)$$

Zur Sicherheit prüfen wir noch nach, ob die kontrahierten Ellipsoide-Spinoren  $x_n^c(\vec{r}, \pm \frac{1}{2})$  gemäß (2.914) tatsächlich Eigenvektoren des Ellipsoide-Operators  $h(\vec{r})$  zum Eigenwert  $\pm \frac{1}{2}$  sind:

$$\begin{aligned} 1.) h(\vec{r}) x_n^c(\vec{r}, +\frac{1}{2}) &\stackrel{(2.914), (2.917), (2.923)}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta e^{-i\psi} \\ \sin \vartheta e^{i\psi} & -\cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta/2 e^{-i\vartheta/2} \\ \sin \vartheta/2 e^{+i\vartheta/2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\vartheta/2} (\cos \vartheta \cos \frac{\vartheta}{2} + \sin \vartheta \sin \frac{\vartheta}{2}) \\ e^{+i\vartheta/2} (\sin \vartheta \cos \frac{\vartheta}{2} - \cos \vartheta \sin \frac{\vartheta}{2}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\vartheta/2} \cos(\vartheta - \frac{\vartheta}{2}) \\ e^{+i\vartheta/2} \sin(\vartheta - \frac{\vartheta}{2}) \end{pmatrix} \stackrel{(2.923)}{=} \frac{1}{2} x_n(\vec{r}, +\frac{1}{2}) \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.) h(\vec{r}) x_n^c(\vec{r}, -\frac{1}{2}) &\stackrel{(2.914), (2.917), (2.923)}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta e^{-i\psi} \\ \sin \vartheta e^{i\psi} & -\cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \vartheta/2 e^{-i\vartheta/2} \\ \cos \vartheta/2 e^{+i\vartheta/2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\vartheta/2} (-\cos \vartheta \sin \frac{\vartheta}{2} + \sin \vartheta \cos \frac{\vartheta}{2}) \\ e^{+i\vartheta/2} (-\sin \vartheta \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \vartheta + \cos \vartheta \sin \frac{\vartheta}{2}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\vartheta/2} \sin(\vartheta - \frac{\vartheta}{2}) \\ -e^{+i\vartheta/2} \cos(\vartheta - \frac{\vartheta}{2}) \end{pmatrix} \stackrel{(2.923)}{=} -\frac{1}{2} x_n(\vec{r}, -\frac{1}{2}) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Sicherlich zeigen wir, dass die kontrahierten Radialisprojektionen Ellipsoide-Spinoren  $x_n^c(\vec{r}, \pm \frac{1}{2})$  Eigenvektoren des Ellipsoide-Operators  $h(\vec{r})$  zum Eigenwert  $\mp \frac{1}{2}$  sind:

$$h(\vec{r}) x_n^c(\vec{r}, \pm \frac{1}{2}) = \mp \frac{1}{2} x_n^c(\vec{r}, \pm \frac{1}{2}) \quad (2.928)$$

Entsprechend gilt im Einfallen

$$\begin{aligned} 1.) h(\vec{r}) x_n^c(\vec{r}, +\frac{1}{2}) &\stackrel{(2.914), (2.917), (2.924)}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta e^{-i\psi} \\ \sin \vartheta e^{i\psi} & -\cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \vartheta/2 e^{-i\vartheta/2} \\ \cos \vartheta/2 e^{+i\vartheta/2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\vartheta/2} (-\cos \vartheta \sin \frac{\vartheta}{2} + \sin \vartheta \cos \frac{\vartheta}{2}) \\ e^{+i\vartheta/2} (-\sin \vartheta \sin \frac{\vartheta}{2} - \cos \vartheta \cos \frac{\vartheta}{2}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\vartheta/2} \sin(\vartheta - \frac{\vartheta}{2}) \\ -e^{+i\vartheta/2} \cos(\vartheta - \frac{\vartheta}{2}) \end{pmatrix} \stackrel{(2.924)}{=} -\frac{1}{2} x_n(\vec{r}, +\frac{1}{2}) \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$2.) h(\vec{p}) \chi_n(\vec{p}, -\frac{1}{2}) \xrightarrow{(2.914), (2.917), (2.925)} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ \sin \frac{\theta}{2} & -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} (-\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}) \\ e^{+i\phi/2} (-\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi/2} (\cos(\theta - \frac{\phi}{2})) \\ e^{+i\phi/2} \sin(\theta - \frac{\phi}{2}) \end{pmatrix} \xrightarrow{(2.925)} \frac{1}{2} \chi_n(\vec{p}, -\frac{1}{2})$$

Wir bilden nun den Zellzüts-Operator im Raum der Überzüngungen gemäß (2.178), (2.193) und (2.741):

$$H(\vec{p}) = \frac{D(D)\vec{p}}{\vec{p}} = \frac{1}{2\vec{p}} \begin{pmatrix} \vec{p} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{p} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} \xrightarrow{(2.914)} \begin{pmatrix} h(\vec{p}) & 0 \\ 0 & h(\vec{p}) \end{pmatrix} \quad (2.929)$$

Nach (2.64a), (2.650) und (2.914) kommutiert der Zellzüts-Operator  $H(\vec{p})$  im Raum der Überzüngungen mit der Koord.-Darstellung im Raum der Zellzüngungen:

$$[\frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{mc}, h(\vec{p})]_- = [\frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{mc}, h(\vec{p})]_+ = 0 \quad (2.930)$$

Zudem sind die mit den Zellzüts-Züngungen  $\chi_n(\vec{p}, \pm \frac{1}{2})$  und  $\chi_h(\vec{p}, \pm \frac{1}{2})$  definierten sind die mit den Zellzüts-Züngungen  $\chi_n(\vec{p}, \pm \frac{1}{2})$  und  $\chi_h(\vec{p}, \pm \frac{1}{2})$  definierten Züngungen (2.882) und (2.883) Eigenzüngende des Zellzüts-Operators.

$$H(\vec{p}) \psi(m) = \frac{1-a^2 m^2}{2} \psi(m), m=1,2 \quad H(\vec{p}) \psi(n) = \frac{(-1)^n}{2} \psi(n); n=3,4 \quad (2.931)$$

In einzelnen gilt nämlich:

$$1.) n=1,2:$$

$$H(\vec{p}) \psi(n) \xrightarrow{(2.882), (2.929)} \begin{pmatrix} h(\vec{p}) & 0 \\ 0 & h(\vec{p}) \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{mc} \chi_n(\vec{p}, \pm \frac{1}{2}) \\ \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{mc} \chi_h(\vec{p}, \pm \frac{1}{2}) \end{pmatrix} \xrightarrow{(2.914), (2.930)} + \frac{1}{2} \frac{1}{T^2} \begin{pmatrix} \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{mc} \chi_n(\vec{p}, \pm \frac{1}{2}) \\ \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{mc} \chi_h(\vec{p}, \pm \frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$

$$2.) n=3,4:$$

$$H(\vec{p}) \psi(n) \xrightarrow{(2.883), (2.929)} \begin{pmatrix} h(\vec{p}) & 0 \\ 0 & h(\vec{p}) \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{mc} \chi_h(\vec{p}, \pm \frac{1}{2}) \\ \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{mc} \chi_n(\vec{p}, \pm \frac{1}{2}) \end{pmatrix} \xrightarrow{(2.918), (2.930)} + \frac{1}{2} \frac{1}{T^2} \begin{pmatrix} \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{mc} \chi_h(\vec{p}, \pm \frac{1}{2}) \\ -\frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{mc} \chi_n(\vec{p}, \pm \frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$

## 2.5.19. Kanonische Feldquantisierung:

04.07.00

In der hamiltonschen Formulierung der klassischen Feldtheorie sieht man die zu den unabhängigen Feldern der Lagrange'schen Formulierung kanonisch konjugierten Impulsfelder auf. Im Falle des Dirac-Feldes erhält man zum Vierespinoor  $\psi(\vec{x}, t)$  und zum Dirac adjungierten Vierespinoor  $\bar{\psi}(\vec{x}, t)$  die folgenden kanonisch konjugierten Impulsfelder:

$$\Pi(\vec{x}, t) = \frac{\delta A}{\delta(\partial_t \bar{\psi}(\vec{x}, t))} \stackrel{(2.691)}{=} \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \bar{\psi}(\vec{x}, t))} \stackrel{(2.840)}{=} i \hbar \bar{\psi}(\vec{x}, t) \gamma^0 \stackrel{(2.697)}{=} i \hbar \psi^+(\vec{x}, t), \quad (2.932)$$

$$\bar{\Pi}(\vec{x}, t) = \frac{\delta A}{\delta(\partial_t \psi(\vec{x}, t))} \stackrel{(2.691)}{=} \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \psi(\vec{x}, t))} \stackrel{(2.840)}{=} 0. \quad (2.933)$$

Damit kann man in der hamiltonschen Formulierung des Dirac-Theorie  $\mathcal{L}(\vec{x}, t)$  und  $\Pi(\vec{x}, t)$  oder aber auch  $\psi(\vec{x}, t)$  und  $\psi^+(\vec{x}, t)$  als unabhängige Felder ansetzen. In (2.845), (2.850), (2.851) und (2.861) sind die Ladung, die Entladung, der Impuls und der Spindrehimpuls des Dirac-Feldes in Abhängigkeit von  $\psi(\vec{x}, t)$  und  $\psi^+(\vec{x}, t)$  ausgedrückt.

Bei einer kanonischen Quantisierung des Dirac-Feldes wenden die unabhängigen Felder  $\psi(\vec{x}, t)$  und  $\Pi(\vec{x}, t)$  bzw.  $\psi(\vec{x}, t)$  und  $\psi^+(\vec{x}, t)$  der hamiltonschen Feldtheorie nun Feldoperatoren  $\hat{\psi}(\vec{x}, t)$  und  $\hat{\Pi}(\vec{x}, t)$  bzw.  $\hat{\psi}(\vec{x}, t)$  und  $\hat{\psi}^+(\vec{x}, t)$ . Da eine bosonische Quantisierung des Dirac-Feldes die Kausalität verletzt und damit zu Widersprüchen führt, hat man eine fermionische Quantisierung vorzunehmen. Deshalb wird eine gleichzeitige Antikommutatoralgebra gefordert:

$$[\hat{\psi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\psi}_\beta(\vec{x}', t)]_+ = [\hat{\pi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\pi}_\beta(\vec{x}', t)]_+ = 0, \quad [\hat{\psi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\pi}_\beta(\vec{x}', t)]_+ = i \hbar \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (2.934)$$

Aufgrund von (2.932) geht dabei (2.934) über in

$$[\hat{\Psi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\Psi}_\beta(\vec{x}', t)]_+ = [\hat{\Psi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\Psi}_\beta^+(\vec{x}', t)]_+ = 0, \quad [\hat{\Psi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\Psi}_\beta^-(\vec{x}', t)]_+ = \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (2.935)$$

aus dem Noether-Theorem gewonnenen Erhaltungsräumen der klassischen Elektrodynamik wie die Ladung  $Q$ , die Energie  $E$ , der Impuls  $\vec{P}$  oder der Spindrehimpuls  $\vec{S}$  werden durch die kanonische Feldquantisierung zu Operatoren der quantisierten

$$\hat{Q} \stackrel{(2.845)}{=} \int d^3x \hat{\Psi}^+(\vec{x}, t) \hat{\Psi}^-(\vec{x}, t), \quad (2.936)$$

$$\hat{H} \stackrel{(2.850)}{=} \int d^3x \hat{\Psi}^+(\vec{x}, t) i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}^-(\vec{x}, t) \stackrel{(2.845)}{=} \int d^3x \hat{\Psi}^+(\vec{x}, t) h(\vec{x}) \hat{\Psi}^-(\vec{x}, t), \quad (2.937)$$

$$\hat{\vec{P}} \stackrel{(2.851)}{=} \int d^3x \hat{\Psi}^+(\vec{x}, t) \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \hat{\Psi}^-(\vec{x}, t), \quad (2.938)$$

$$\hat{\vec{S}} \stackrel{(2.861)}{=} \int d^3x \hat{\Psi}^+(\vec{x}, t) \frac{\hbar}{2} \left( \begin{matrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{matrix} \right) \hat{\Psi}^-(\vec{x}, t). \quad (2.939)$$

Zur Berechnung der zugehörigen Bewegungsgleichungen geht man die Reduktionsschritte

$$[A, BC] = A B C - B C A = A B C + B A C - B A C - B C A = [A, B] + C - B[A, C] \quad (2.940)$$

somit ergeben sich die zugehörigen Bewegungsgleichungen der Elektronenmomente  $\hat{\Psi}(\vec{x}, t)$  und  $\hat{\Psi}^+(\vec{x}, t)$  zu

$$1.) \text{ in } \frac{\partial \hat{\Psi}_\alpha(\vec{x}, t)}{\partial t} \stackrel{(1.132)}{=} [\hat{\Psi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{H}] \stackrel{(2.937)}{=} \sum_{B,C=1}^4 \int d^3x' [\hat{\Psi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\Psi}_B(\vec{x}' t) h_{BC}(\vec{x}') \hat{\Psi}_C(\vec{x}', t)] -$$

$$\stackrel{(2.940)}{=} \sum_{B,C=1}^4 \int d^3x' \{ [\hat{\Psi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\Psi}_B(\vec{x}', t)]_+ h_{BC}(\vec{x}') \hat{\Psi}_C(\vec{x}', t) - \hat{\Psi}_B(\vec{x}', t) h_{BC}(\vec{x}') [\hat{\Psi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\Psi}_C(\vec{x}', t)]_+ \}$$

$$\stackrel{(2.935)}{=} \sum_{B,C=1}^4 \int d^3x' \delta_{\alpha B} \delta(\vec{x} - \vec{x}') h_{BC}(\vec{x}') \hat{\Psi}_C(\vec{x}', t) = \sum_{B=1}^4 h_{\alpha B}(\vec{x}) \hat{\Psi}_B(\vec{x}, t)$$

$$\Rightarrow \text{in } \frac{\partial \hat{\Psi}_\alpha(\vec{x}, t)}{\partial t} \stackrel{(2.846)/(2.828)}{=} h(\vec{x}) \hat{\Psi}^+(\vec{x}, t) \quad \text{für } \alpha = \vec{D} + m e \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \hat{\Psi}(\vec{x}, t) \quad (2.941)$$

$$2.) \text{ in } \frac{\partial \hat{\Psi}^+(\vec{x}, t)}{\partial t} \stackrel{(1.132)}{=} [\hat{\Psi}^+(\vec{x}, t), \hat{H}] \stackrel{(2.937)}{=} \sum_{B,C=1}^4 \int d^3x' [\hat{\Psi}_B(\vec{x}, t), \hat{\Psi}_C(\vec{x}', t) h_{BC}(\vec{x}') \hat{\Psi}_0(\vec{x}', t)] -$$

$$(2.940) \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \int d^3x \left\{ [\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\vec{x}, t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\vec{x}', t)] + h_{\beta\alpha}(\vec{x}') \hat{\psi}_\beta(\vec{x}, t) - \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\vec{x}, t) h_{\beta\alpha}(\vec{x}') [\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\vec{x}, t), \hat{\psi}_\beta(\vec{x}', t)] \right\}$$

$$(2.935) - \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \int d^3x' \hat{\psi}_\beta^\dagger(\vec{x}', t) h_{\beta\alpha}(\vec{x}') \delta(x - \vec{x}') = - \sum_{\beta=1}^4 \int d^3x' \hat{\psi}_\beta^\dagger(\vec{x}', t) h_{\beta\alpha}(\vec{x}') \delta(x - \vec{x}')$$

$$\Rightarrow -i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}, t)}{\partial t} = \int d^3x' \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}', t) h(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}') = \int d^3x' \delta(\vec{x} - \vec{x}') \{ h(\vec{x}') \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}', t) \}^+$$

$$\Rightarrow -i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}, t)}{\partial t} = \{ h(\vec{x}) \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}, t) \}^+ = i\hbar c \vec{\nabla} \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}, t) \vec{\alpha} + mc^2 \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}, t) \quad (2.942)$$

damit gehören die Feldoperatoren  $\hat{\psi}(\vec{x}, t)$  und  $\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}, t)$  der Dirac-Gleichung bzw. der adjungierten Dirac-Gleichung.

### 2.5.20. Entwicklung nach sferenen Wellen:

der Feldoperator  $\hat{\psi}(\vec{x}, t)$  wird nun nach den in (2.903) definierten Fundamentallösungen  $\psi_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t)$  der Dirac-Gleichung entwickelt. Die dabei auftretenden Entwicklungskoeffizienten sind dann Operatoren der zweiten Quantisierung:

$$\hat{\psi}(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^4 \int d^3p \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)} \psi_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t). \quad (2.943)$$

Entsprechend erhält man für den adjungierten Feldoperator:

$$\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^4 \int d^3p \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)\dagger} \psi_{\vec{p}}^{(n\dagger)}(\vec{x}, t). \quad (2.944)$$

Mit Hilfe der Orthonormalitätsrelation (2.904) der Fundamentallösungen lassen sich die Entwicklung (2.943) und (2.944) invertieren:

$$1.) \int d^3x \psi_{\vec{p}}^{(n\dagger)}(\vec{x}, t) \hat{\psi}(\vec{x}, t) \xrightarrow{(2.943)} \sum_{n=1}^4 \int d^3p \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)} \int d^3x \psi_{\vec{p}}^{(n\dagger)}(\vec{x}, t) \psi_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t) \xrightarrow{(2.904)}$$

$$\sum_{n=1}^4 \int d^3p \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)} \delta_{n,n} \delta(\vec{p} - \vec{p}') = \hat{a}_{\vec{p}'}^{(n)}, \quad (2.945)$$

$$2.) \int d^3x \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}, t) \psi_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t) \xrightarrow{(2.944)} \sum_{n=1}^4 \int d^3p \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)\dagger} \int d^3x \psi_{\vec{p}}^{(n\dagger)}(\vec{x}, t) \psi_{\vec{p}}^{(n)}(\vec{x}, t) \xrightarrow{(2.904)}$$

$$\sum_{n=1}^4 \int d^3 p_1 \hat{a}_{\vec{p}_1}^{(n)} + \delta_{n,2} \delta(\vec{p} - \vec{p}') = \hat{a}_{\vec{p}}^{(2)} + . \quad (2.946)$$

Aus der gleichzeitigen Antikommutatoralgebra des Feldoperators  $\hat{\psi}(x,t)$  und des adjungierten Feldoperators  $\hat{\psi}^+(x,t)$  lässt sich eine entsprechende Antikommutatoralgebra für die Entwicklungsoptatoren  $\hat{a}_{\vec{p}}$  und  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)}$  ableiten:

$$1.) [\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{(m)}] + \underline{(2.945), (2.946)} \int d^3 x \int d^3 x' \sum_{\alpha, \alpha'=1}^4 \hat{\psi}_{\vec{p}, \alpha}^{(n)*} (\vec{x}, t) \hat{\psi}_{\vec{p}', \alpha'}^{(m)*} (\vec{x}', t) [\hat{\psi}_{\alpha}(\vec{x}, t), \hat{\psi}_{\alpha'}^{+}(\vec{x}', t)] +$$

$$\underline{(2.935)} \int d^3 x \int d^3 x' \sum_{\alpha, \alpha'=1}^4 \hat{\psi}_{\vec{p}, \alpha}^{(n)*} (\vec{x}, t) \hat{\psi}_{\vec{p}', \alpha'}^{(m)*} (\vec{x}', t) \delta_{\alpha \alpha'} \delta(\vec{x} - \vec{x}') = \int d^3 x \sum_{\alpha=1}^4 \hat{\psi}_{\vec{p}, \alpha}^{(n)*} (\vec{x}, t) \hat{\psi}_{\vec{p}, \alpha}^{(m)*} (\vec{x}, t) \quad (2.947)$$

$$= \int d^3 x \hat{\psi}_{\vec{p}}^{(n)*} (\vec{x}, t) \hat{\psi}_{\vec{p}'}^{(m)*} (\vec{x}, t) \underline{(2.904)} \delta_{n,2} \delta(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$2.) [\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{(m)}] + \underline{(2.943)} \int d^3 x \int d^3 x' \sum_{\alpha, \alpha'=1}^4 \hat{\psi}_{\vec{p}, \alpha}^{(n)} (\vec{x}, t) \hat{\psi}_{\vec{p}', \alpha'}^{(m)} (\vec{x}', t) [\hat{\psi}_{\alpha}^{+}(\vec{x}, t), \hat{\psi}_{\alpha'}^{+}(\vec{x}', t)] + \underline{(2.935)} 0 \quad (2.948)$$

$$3.) [\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)*}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{(m)*}] + \underline{(2.944)} \int d^3 x \int d^3 x' \sum_{\alpha, \alpha'=1}^4 \hat{\psi}_{\vec{p}, \alpha}^{(n)*} (\vec{x}, t) \hat{\psi}_{\vec{p}', \alpha'}^{(m)*} (\vec{x}', t) [\hat{\psi}_{\alpha}^{+}(\vec{x}, t), \hat{\psi}_{\alpha'}^{+}(\vec{x}', t)] + \underline{(2.935)} 0 \quad (2.949)$$

Da die Operatoren  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)}$ ,  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)*}$  gemäß (2.947)–(2.949) der kanonischen Antikommutatoralgebra genügen, werden bis auf weiteren  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)}$  als Vermittlungsoptatoren und  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)*}$  als Erzeugungsoptatoren fermionischer Teilchen interpretiert.

### 2.5.21. Operationen der zweiten Quantisierung:

Der Ladungsoptator  $\hat{Q}$  der zweiten Quantisierung lässt sich in Abhängigkeit der Erzeugungs- und Vermittlungsoptatoren  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)*}$  und  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)}$  angeben:

$$\hat{Q} \underline{(2.936), (2.943), (2.944)} \sum_{n=1}^4 \sum_{\alpha=1}^4 \int d^3 p \int d^3 p' \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)*} \hat{a}_{\vec{p}'}^{(n)} \int d^3 x \hat{\psi}_{\vec{p}}^{(n)*} (\vec{x}, t) \hat{\psi}_{\vec{p}'}^{(n)} (\vec{x}, t) \underline{(2.904)}$$

$$\sum_{n=1}^4 \sum_{\alpha=1}^4 \int d^3 p \int d^3 p' \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)*} \hat{a}_{\vec{p}'}^{(n)} \delta_{n,2} \delta(\vec{p} - \vec{p}') = \sum_{n=1}^4 \int d^3 p \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)*} \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)} \quad (2.950)$$

Da der Teilchenschlagsoperator  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)*} \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)}$  positiv definit ist, ist nach (2.950) auch der Ladungsoptator  $\hat{Q}$  positiv definit. Die fermionischen Teilchen seien nun eine

positive Ladung zu verteilen. Entsprechend erhält man für den Hamilton-Operator  $\hat{H}$  der zweiten Quantisierung:

$$\hat{H} \underset{(2.937),(2.943),(2.944)}{\sum_{n=1,2}^4 \sum_{m=-1}^1} \{ d^3 p \{ d^3 p^\dagger \hat{a}_\beta^{(n)} \hat{a}_\beta^{(m)} \} d^3 x \} \hat{U}_{\beta}^{(n)}(2t) \hat{U}_{\beta}^{(m)}(2t) \underset{(2.951)}{}$$

Betrachtet man, dass die ebenen Wellen  $\hat{U}_{\beta}^{(n)}(2t)$  Eigenfunktionen des Hamilton-Operators der ersten Quantisierung sind

$$h(2) \hat{U}_{\beta}^{(n)}(2t) \underset{(2.937)}{=} i + \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}_{\beta}^{(n)}(2t) \underset{(2.903)}{=} E_\beta \hat{U}_{\beta}^{(n)}(2t), \quad (2.952)$$

so ergibt sich der Hamilton-Operator der zweiten Quantisierung zu

$$\hat{H} \underset{(2.951),(2.952)}{\sum_{n=1,2}^4 \sum_{m=-1}^1} \{ d^3 p \{ d^3 p^\dagger E_\beta \hat{U}_{\beta}^{(n)} \hat{a}_\beta^{(n)} \} d^3 x \} \hat{U}_{\beta}^{(m)}(2t) \hat{U}_{\beta}^{(n)}(2t) \quad (2.953)$$

$$(2.904) \sum_{n=1}^4 \{ d^3 p \{ E_\beta \hat{a}_\beta^{(n)} + \hat{a}_\beta^{(n)} \} = \int d^3 p \left\{ \sum_{n=1}^2 E_\beta \hat{a}_\beta^{(n)} \hat{a}_\beta^{(n)} + \sum_{n=3}^4 (-E_\beta) \hat{a}_\beta^{(n)} \hat{a}_\beta^{(n)} \right\}. \quad (2.954)$$

Damit schreibt die geometrischen Teilchen mit  $n=1,2$  positive Energien  $E_\beta$  zu Elektronen, während diejenigen mit  $n=3,4$  entsprechend negative Energien aufweisen.

Der Impulsoperator  $\vec{p}$  der zweiten Quantisierung ergibt sich zu

$$\vec{p} \underset{(2.938),(2.943),(2.944)}{\sum_{n=1,2}^4 \sum_{m=-1}^1} \{ d^3 p \{ d^3 p^\dagger \hat{a}_\beta^{(n)} \hat{a}_\beta^{(m)} \} d^3 x \} \hat{U}_{\beta}^{(n)}(2t) \underset{(2.954)}{\sum_{n=1}^4} \vec{p} \hat{U}_{\beta}^{(n)}(2t) \quad (2.954)$$

Entsprechend man, dass die ebenen Wellen Eigenfunktionen des Impulsoperators der ersten Quantisierung sind

$$\vec{p} \underset{(2.937)}{\sum_{n=1}^4} \hat{U}_{\beta}^{(n)}(2t) \underset{(2.903)}{=} E_\beta \vec{p} \{ \hat{U}_{\beta}^{(n)}(2t) \}, \quad (2.955)$$

dann lautet der Impulsoperator der zweiten Quantisierung

$$\vec{p} \underset{(2.954),(2.955)}{\sum_{n=1,2}^4 \sum_{m=-1}^1} \{ d^3 p \{ d^3 p^\dagger E_\beta \hat{a}_\beta^{(n)} \hat{a}_\beta^{(m)} \} d^3 x \} \hat{U}_{\beta}^{(n)}(2t) \hat{U}_{\beta}^{(m)}(2t) \quad (2.956)$$

$$(2.904) \sum_{n=1}^4 \{ d^3 p \{ E_\beta \hat{a}_\beta^{(n)} + \hat{a}_\beta^{(n)} \} = \int d^3 p \left\{ \sum_{n=1}^2 \vec{p} \hat{a}_\beta^{(n)} \hat{a}_\beta^{(n)} + \sum_{n=3}^4 (-\vec{p}) \hat{a}_\beta^{(n)} \hat{a}_\beta^{(n)} \right\}. \quad (2.956)$$

Damit schreibt die geometrischen Teilchen mit  $n=1,2$  den Impuls  $\vec{p}$  und diejenigen mit  $n=3,4$  den Impuls  $-\vec{p}$  zuverteilen.

## 2.5.22. Diracsche Löchertheorie:

Im Rahmen der kanonischen Feldquantisierung ist der Vakuumzustand  $|0\rangle_V$  gewöhnlicherweise dadurch definiert, daß sich keine Teilchen in ihm befinden. Dies ist garantiert, wenn alle Vernichtungsoperatoren  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)}$  den Vakuumzustand  $|0\rangle_V$  annullieren:

$$\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)} |0\rangle_V = 0 \quad \text{für alle } n \text{ und } \vec{p}. \quad (2.957)$$

Dirac nimmt nun an, daß statt des Vakuumzustandes  $|0\rangle_V$  in der Natur ein physikalischer Vakuumzustand  $|0\rangle_P$  realisiert ist. Er ist dadurch definiert, daß sämtliche Zustände mit negativen Energien für  $n=3,4$  bestehen sind:

$$|0\rangle_P = \prod_{n=3,4} \prod_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)+} |0\rangle_V. \quad (2.958)$$

Ziel bei ist über den Impuls  $\vec{p}$  ein kontinuierliches Produkt zu bilden. Dirac rechtfertigt diesen Übergang vom Vakuumzustand  $|0\rangle_V$  zum physikalischen Vakuumzustand  $|0\rangle_P$  so, daß der Dirac-Lee immer vorhanden ist und deshalb im Experiment nicht beobachtbar ist. Da immer nur Energie- oder Ladungsdifferenzen im Experiment gemessen werden können, läßt sich die unendlich große Energie oder Ladung dieses Dirac-Lees weglassen.

eine unmittelbare Konsequenz der Definition des physikalischen Vakuumzustandes  $|0\rangle_P$  in (2.958) besteht darin, daß er von den Vernichtungsoperatoren  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)}$  für  $n=1,2$  wegen (2.957) und von den Erzeugungsoperatoren  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)+}$  für  $n=3,4$  wegen der Antikommutatoralgebra (2.949) annulliert wird:

$$\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)} |0\rangle_P = 0 \quad \text{für } n=1,2 \text{ und } \vec{p}, \quad \hat{a}_{\vec{p}}^{(n)+} |0\rangle_P = 0 \quad \text{für } n=3,4 \text{ und } \vec{p}. \quad (2.959)$$

Beachtet man die Antikommutatoralgebra (2.947)-(2.949) und die Eigenschaft (2.959) des physikalischen Vakuums  $|0\rangle_P$ , so wird eine Reinterpretation dieser Operatoren möglich. Während  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)}$  und  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(n)+}$  für  $n=1,2$  auch weiterhin als Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren von Teilchen aufgefaßt werden, lassen

sich nun  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(r)}$  und  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(r)*}$  für  $r = 3, 4$  umgekehrt als die Erzeugungs- und Vernichtungssoperatoren von Teilchen interpretieren. Die Konventionen werden dabei die folgenden Bezeichnungen einschließen:

$$\begin{aligned} r = 1, 2 &\equiv \text{Teilchen (Elektron mit Spin up / Spin down)} \\ r = 3, 4 &\equiv \text{Antiteilchen (Positron mit Spin up / Spin down)} \end{aligned} \quad (2.960)$$

Die Doppelrolle der Entwikkungsoperatoren  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(r)}$  bzw.  $\hat{a}_{\vec{p}}^{(r)*}$  als Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren gestaltet die Theorie unmittelbarlich. Daher liegt es nahe, unterschiedliche Bezeichnungen für die Teilchen- und die Antiteilchenoperatoren zu verwenden:

$$\begin{aligned} \text{Teilchenoperator: } \hat{a}_{\vec{p}}^{(1)*} &= \hat{b}_{\vec{p}}^{(1)}, \hat{a}_{\vec{p}}^{(2)*} = \hat{b}_{\vec{p}}^{(2)}, \text{ Teilchenvermesser: } \hat{a}_{\vec{p}}^{(1)} = \hat{b}_{\vec{p}}^{(1)}, \hat{a}_{\vec{p}}^{(2)} = \hat{b}_{\vec{p}}^{(2)} \\ \text{Antiteilchenoperator: } \hat{a}_{\vec{p}}^{(3)*} &= \hat{d}_{\vec{p}}^{(1)*}, \hat{a}_{\vec{p}}^{(4)*} = \hat{d}_{\vec{p}}^{(2)*}, \text{ Antiteilchenvermesser: } \hat{a}_{\vec{p}}^{(3)} = \hat{d}_{\vec{p}}^{(1)}, \hat{a}_{\vec{p}}^{(4)} = \hat{d}_{\vec{p}}^{(2)} \end{aligned} \quad (2.961)$$

Für  $r = 1, 2$  entspricht diese Umdefinition einer einfachen Umbelebnerung. Für  $r = 3, 4$  vertauschen dagegen Erzeuger und Vernichter ihre Rollen. Nach (2.947)–(2.949) und (2.961) bleibt die Antikommutatoralgebra invariant, da in den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren offensichtlich aufgetreten.

$$\begin{aligned} [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}^{(r)}]_+ &= [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{d}_{\vec{p}'}^{(r)}]_+ = [\hat{d}_{\vec{p}}, \hat{d}_{\vec{p}'}^{(r)}]_+ = [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{d}_{\vec{p}'}^{(r)*}]_+ = 0 \\ [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}^{(r)*}]_+ &= [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{d}_{\vec{p}'}^{(r)*}]_+ = [\hat{d}_{\vec{p}}, \hat{d}_{\vec{p}'}^{(r)*}]_+ = [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{d}_{\vec{p}'}^{(r)+}]_+ = 0 \quad , \quad r = 1, 2 \quad (2.962) \\ [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}^{(r)*}]_+ &= [\hat{d}_{\vec{p}}, \hat{d}_{\vec{p}'}^{(r)+}]_+ = \delta_{\vec{p}, \vec{p}'} \delta(\vec{p} - \vec{p}') \end{aligned}$$

Nach (2.959) und (2.961) wird der Wirkungsgehalt des Verkennungsoperators  $|0\rangle_P$  nun durch bestimmt, daß er von den Vernichtungsoperatoren  $\hat{b}_{\vec{p}}^{(r)}, \hat{d}_{\vec{p}}^{(r)}$  der Teilchen und der Antiteilchen annuliert wird:

$$\hat{b}_{\vec{p}}^{(r)} |0\rangle_P = 0 \quad \text{und} \quad \hat{d}_{\vec{p}}^{(r)} |0\rangle_P = 0 \quad \text{für } r = 1, 2 \text{ und alle } \vec{p} \quad (2.963)$$

Der Hamilton-Operator (2.953) der zweiten Quantisierung besitzt sowohl positive

tive als auch negative Energien mit - Wurde die Umordenung (2.961) eingesetzt erhält man

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3\vec{r} E_{\vec{p}} \left\{ b_{\vec{p}}^{(n)\dagger} b_{\vec{p}}^{(n)} - \hat{d}_{\vec{p}}^{(n)\dagger} \hat{d}_{\vec{p}}^{(n)} \right\}. \quad (2.964)$$

Beachtet man die Antikommutatorregel (2.962), so läßt sich der Ausdruck (2.964) für den Hamilton-Operator umformen:

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3\vec{r} E_{\vec{p}} \left\{ b_{\vec{p}}^{(n)\dagger} b_{\vec{p}}^{(n)} + \hat{d}_{\vec{p}}^{(n)\dagger} \hat{d}_{\vec{p}}^{(n)} \right\} - \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} E_{\vec{p}} \delta(\vec{p}). \quad (2.965)$$

Der Erwartungswert dieses Hamilton-Operators bezüglich des physikalischen Zustandess  $|0\rangle_p$  ist negativ divergent:

$$\langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle_p \xrightarrow{(2.963), (2.965)} - \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3\vec{r} E_{\vec{p}} \delta(\vec{p}) = -\infty. \quad (2.966)$$

Die Wegerechnung dieses unendlich großen Erwartungswertes erfordert dadurch, daß man vom unzureichenden Hamilton-Operator  $\hat{H}$  zum normalgeordneten physikalischen Hamilton-Operator : $\hat{H}$ : übergeht:

$$:\hat{H}: = \hat{H} - \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle_p \xrightarrow{(2.965), (2.966)} \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3\vec{r} E_{\vec{p}} \left\{ b_{\vec{p}}^{(n)\dagger} b_{\vec{p}}^{(n)} + \hat{d}_{\vec{p}}^{(n)\dagger} \hat{d}_{\vec{p}}^{(n)} \right\}. \quad (2.967)$$

Dieser physikalische Hamilton-Operator ist positiv definit - Teilchen und Antiteilchen besitzen dieselbe Energie  $E_{\vec{p}} > 0$ .

Entsprechend verändern sich der Ladungsoperator  $\hat{Q}$  und der Impulsoperator  $\hat{P}$  des zweiten Quantisierungs aus (2.950) und (2.956) durch die Umordenung (2.961) zu

$$\hat{Q} = \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3\vec{r} \left\{ b_{\vec{p}}^{(n)\dagger} b_{\vec{p}}^{(n)} + \hat{d}_{\vec{p}}^{(n)\dagger} \hat{d}_{\vec{p}}^{(n)} \right\}, \quad (2.968)$$

$$\hat{P} = \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3\vec{r} \hat{P} \left\{ b_{\vec{p}}^{(n)\dagger} b_{\vec{p}}^{(n)} - \hat{d}_{\vec{p}}^{(n)\dagger} \hat{d}_{\vec{p}}^{(n)} \right\}. \quad (2.969)$$

Um die Normalordnung der Operatoren herzustellen, muß man die Antikommutatorregel (2.962) beachten:

$$\hat{Q} = \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3 p \left\{ b_{\vec{p}}^{(n)} + \hat{b}_{\vec{p}}^{(n)} - \hat{d}_{\vec{p}}^{(n)} + \hat{d}_{\vec{p}}^{(n)} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3 p \delta(\vec{o}), \quad (2.970)$$

$$\hat{P} = \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3 p \hat{P} \left\{ b_{\vec{p}}^{(n)} + \hat{b}_{\vec{p}}^{(n)} + \hat{d}_{\vec{p}}^{(n)} + \hat{d}_{\vec{p}}^{(n)} \right\} - \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3 p \hat{P} \delta(\vec{o}). \quad (2.971)$$

Die Erwartungswerte des Ladungsoperators  $\hat{Q}$  und des Impulsoperators  $\hat{P}$  bezüglich des physikalischen Vakuumzustandes  $|0\rangle_P$  ergeben sich dann zu

$${}_P\langle 0 | \hat{Q} | 0 \rangle_P \xrightarrow{(2.963), (2.970)} - \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3 p \delta(\vec{o}) = -\infty, \quad (2.972)$$

$${}_P\langle 0 | \hat{P} | 0 \rangle_P \xrightarrow{(2.963), (2.971)} - \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3 p \hat{P} \delta(\vec{o}) = 0. \quad (2.973)$$

Der divergente Erwartungswert des Ladungsoperators  $\hat{Q}$  lässt sich dadurch wegnormieren, daß man zum normalgeordneten Ladungsoperator  $: \hat{Q} :$  übergeht:

$$: \hat{Q} : = \hat{Q} - {}_P\langle 0 | \hat{Q} | 0 \rangle_P \xrightarrow{(2.970), (2.972)} \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3 p \left\{ b_{\vec{p}}^{(n)} + \hat{b}_{\vec{p}}^{(n)} - \hat{d}_{\vec{p}}^{(n)} + \hat{d}_{\vec{p}}^{(n)} \right\}. \quad (2.974)$$

Beim Impulsoperator  $\hat{P}$  erübriggt sich eine Renormierung, da dessen Erwartungswert (2.973) verschwindet. Der Impulsoperator ist demnach schon normalgeordnet:

$$: \hat{P} : = \hat{P} \xrightarrow{(2.971), (2.973)} \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3 p \hat{P} \left\{ b_{\vec{p}}^{(n)} + \hat{b}_{\vec{p}}^{(n)} + \hat{d}_{\vec{p}}^{(n)} + \hat{d}_{\vec{p}}^{(n)} \right\}. \quad (2.975)$$

Demnach tragen die Teileilen die Ladung +1 und besitzenden Impuls  $\vec{p}$ , während Antiteileilen die negative Ladung -1 aufweisen und durch den Impuls  $\vec{p}$  bestimmen.

### 2.5.23. Propagator als gruppierende Funktion:

Analog zum Schrödinger-Propagator (1.303) wird auch der Dirac-Propagator als Erwartungswert des zeitgeordneten Produktes der Feldoperatoren  $\hat{\psi}_\alpha(\vec{x}, t)$  und  $\hat{\psi}_B^\dagger(\vec{x}', t')$  bezüglich des physikalischen Vakuums  $|0\rangle_P$  definiert:

$$S_{AB}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = {}_P\langle 0 | \hat{T} (\hat{\psi}_\alpha(\vec{x}, t) \hat{\psi}_B^\dagger(\vec{x}', t')) | 0 \rangle_P. \quad (2.976)$$