KLAUSURAUFGABEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK II (LAK)

Sommersemester 2019, Donnerstag, 4.7.19, 8:15 Uhr

Sie schreiben bitte ausschließlich auf den zusätzlich verteilten Schreibvorlagen!
Benutzen Sie davon wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite! (Egal ob Vorder- oder Rückseite)
Beachten Sie auch die Formelsammlung.

Punkte: 9 / 5 / 5 / 5 Summe: 24 (bestanden ab 12 Punkten)

Aufgabe 1: Grundwissen (9 Punkte)

1. Berechnen Sie und vereinfachen Sie so weit wie möglich: (1 Punkt – je 1/2)

$$\frac{(a+b)^2/2}{(a^2-b^2)/4} = \qquad , \qquad\qquad \sin(\frac{\pi}{2}) + \cos(\pi) = \qquad .$$

2a.) Wie lautet die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ folgender Funktion? Skizzieren Sie die Funktion auf $\mathbb{D}$. (1 Punkt)

$$f(x) = \begin{cases} x^2; & x \leq 1 \\ 1/x^2; & x > 1 \end{cases}$$

2b.) Untersuchen Sie, ob die Funktion aus 2a.) auf $\mathbb{D}$ stetig ist (mit Begründung!) (1 Punkt)

2c.) Berechnen Sie für Funktion aus 2a.) das Integral $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ (1 Punkt)

3. Gegeben sind die beiden Punktladungen $Q_1 = q$ am Ort $\vec{r}_1 = (a, 2a, 2a)$ und $Q_2 = -q$ am Ort $\vec{r}_2 = (2a, a, 2a)$. Wie lautet das von den beiden Ladungen gemeinsam erzeugte $\vec{E}$-Feld? Welche Kraft übt dieses Feld auf eine Ladung $Q_3 = 2q$ aus, die sich am Ort $\vec{r}_3 = (0, 0, 0)$ befindet?
(2 Punkte - alle im Text angegebenen Werte sind einzusetzen!)

4. Skizzieren oder beschreiben Sie einige Äquipotenzialflächen des (in Kugelkoordinaten gegebenen) Feldes $\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \exp(-r)$. (1 Punkt)

5. Gegeben ist der Vektor $\vec{A} = (1, 2, 3)$. Sind die folgenden Aussagen **für diesen speziellen Vektor** richtig oder falsch? (Sie können abkürzen mit f/r für falsch/richtig).

I) $A_x + A_y = A_z$ II) $|\vec{A}| = 6$ III) $\vec{A} = \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z$ IV) $\vec{A} \cdot \vec{e}_y = 2$

Nicht raten, falsche Antworten ergeben Punktabzug (innerhalb dieser Teilaufgabe) (2 Punkte)

Aufgabe 2: Gesetz von Gauß (5 Punkte)

Gegeben ist eine Kugel, deren (in Kugelkoordinaten gegebene) Ladungsdichte ρ_V aus 2 konzentrischen Schichten besteht:

$$\rho_V(r, \vartheta, \varphi) = \begin{cases} a, & r \leq R_1 \\ b\,r, & R_1 < r \leq R_2 \end{cases} \qquad (a \text{ und } b \text{ sind Konstanten})$$

a.) Jemand behauptet, das $\vec{E}$-Feld der Kugel habe die Form $\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_x$. Skizzieren Sie dieses Feld. Beschreiben Sie in 2-3 verständlichen, logischen Sätzen mit Hilfe Ihrer Skizze, wie Sie dies mit Hilfe eines **Symmetrieargumentes** widerlegen können. (2,5 Punkte – nur Symmetrieargument bringt Punkte!)

b.) Korrigieren Sie die Form des $\vec{E}$-Feldes aus a.) – ohne Begründung! (0.5 Punkte)

c.) (2 Punkte) Jemand schreibt für das Gaußsche Gesetz der oben gegebenen Kugel (Gaußfläche mit Radius r_G):

$$\text{Bereich} \quad R_1 < r_G < R_2 : \quad \oiint \vec{E}(r_G) \cdot d\vec{f} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{r=R_1}^{R_2} b\,r\,dV$$

- Entscheiden Sie, ob dies mit r_G im angegebenen Bereich richtig oder falsch ist.
- Falls die Beziehung (für den angegebenen Bereich) richtig ist, skizzieren Sie dafür die Kugel und die Gaußfläche mit Radius r_G.
- Falls die Beziehung falsch ist, verbessern Sie diese (für den angegebenen Bereich) und zeichnen dann ebenfalls die Kugel und die dazu gehörige Gaußfläche mit Radius r_G.

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie weitgehend richtig rechnen und skizzieren.

b.w.

Aufgabe 3: Relativitätstheorie (5 Punkte)

Um 0 Uhr passiert ein Raumschiff (System S') die Erde (System S) mit der Geschwindigkeit $v = 0.6\,c$. Sowohl die Raumschiff- als auch die Erdzeit beträgt in diesem Moment 0 Uhr.

Gegeben sind folgende drei Ereignisse:

Ereignis A: Von der Erde wird zur Erdzeit $1\,h$ ein Signal (mit Lichtgeschwindigkeit) in Richtung Raumschiff losgeschickt.

Ereignis B: Dieses Signal erreicht das Raumschiff.

Ereignis C: Als die Uhren der Erde $2\,h$ anzeigen, entsteht in der Entfernung 5 Lichtstunden vor der Erde (gerechnet in Erdkoordinaten) ein neuer Stern. "Vor der Erde" meint: in positive x-Richtung.

a.) Welche der Erdkoordinaten x_A, t_A, x_B, t_B, x_C, t_C sowie der Raumschiffkoordinaten x'_A, t'_A, x'_B, t'_B, x'_C, t'_C lassen sich aus der Aufgabenstellung ohne Rechnung erschließen? Welche Werte besitzen sie?
(1,5 Punkte, wenn alles richtig ist.
Ansonsten je 1/4 Punkt auf richtige Antworten, je -1/4 Punkt auf Falschangaben, auch hier max. 1,5 Punkte.
Achtung: Die Punktzahl enthält keine "versteckte" Information über die Anzahl der gefragten Größen!)

b.) Berechnen Sie fünf weitere Koordinaten Ihrer Wahl – egal, ob von S oder S', ob Orts- oder Zeitkoordinaten! (2,5 Punkte)

c.) Skizzieren Sie ein Minkowski-Diagramm Ihrer Wahl mit den Koodinatensystemen S und S' sowie (mindestens) den Ereignissen A und B. Zeigen Sie für **ein selbstgewähltes neues Ereignis D**, wie Sie die Koordinaten in beiden Systemen geometrisch bestimmen können. (1 Punkt)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie weitgehend richtig rechnen und skizzieren.

Aufgabe 4: Maxwell-Gleichungen (5 Punkte)

k, ω, E_0 und B_0 sind Konstanten mit positiven Werten, x, y, z sind kart. Koordinaten. t ist die Zeit.

a.) Wie lautet die Maxwell-Gleichung, die den Term des Maxwell'schen Verschiebungsstroms enthält in differenzieller und in integraler Form? Markieren Sie jeweils den Maxwell'schen Verschiebungsstrom.
(1 Punkt)

b.) Gegeben ist das $\vec{E}$- und das $\vec{B}$-Feld, sowie $\vec{j}$:

$$\vec{E} = E_0 \sin(kx)\,\sin(\omega t)\,\vec{e}_z, \qquad \vec{B} = -B_0 \cos(kx)\,\cos(\omega t)\,\vec{e}_y, \qquad \vec{j} = j_0\,\sin(kx)\,\cos(\omega t)\,\vec{e}_z.$$

Überprüfen Sie, ob diese Größen (zusammen) die Maxwell-Gleichung aus a.) in integraler Form erfüllen. Wählen Sie die Integrationsgebiete so, dass kein Einzelintegral trivial Null wird.

Machen Sie die Integrale an einer verständlichen Skizze deutlich!

Ist die Maxwell-Gleichung aus a.) bei passender Wahl der Konstanten erfüllbar? Falls ja: Welche Bedingung müssen die Konstanten erfüllen?
(4 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie weitgehend richtig rechnen und beschreiben.

Formelsammlung

Zylinderkoord.: $\vec r = r_\perp\,\vec e_{r_\perp} + z\vec e_z$, $\quad \vec e_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$, $\quad \vec e_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$

$$\vec\nabla V(r_\perp,\varphi,z) = \vec e_{r_\perp}\frac{\partial V}{\partial r_\perp} + \vec e_\varphi \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \vec e_z\frac{\partial V}{\partial z}, \quad \vec\nabla\cdot\vec C(r_\perp,\varphi,z) = \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial(r_\perp C_{r_\perp})}{\partial r_\perp} + \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial C_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial C_z}{\partial z},$$

$$\vec\nabla\times\vec C(r_\perp,\varphi,z) = \vec e_{r_\perp}\left(\frac{1}{r_\perp}\frac{\partial C_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial C_\varphi}{\partial z}\right) + \vec e_\varphi\left(\frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r_\perp}\right) + \vec e_z\frac{1}{r_\perp}\left(\frac{\partial(r_\perp C_\varphi)}{\partial r_\perp} - \frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial\varphi}\right),$$

$$\vec\nabla^2 V(r_\perp,\varphi,z) = \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial}{\partial r_\perp}\left(r_\perp\frac{\partial V}{\partial r_\perp}\right) + \frac{1}{r_\perp^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Kugelkoordinaten: $\quad x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$

$\vec e_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta)$, $\quad \vec e_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$, $\quad \vec e_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta)$.

$$\vec\nabla V(r,\vartheta,\varphi) = \vec e_r\frac{\partial V}{\partial r} + \vec e_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\vartheta} + \vec e_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial\varphi},$$

$$\vec\nabla\cdot\vec C(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 C_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta C_\vartheta)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\vec\nabla\times\vec C(r,\vartheta,\varphi) =$$

$$= \vec e_r\frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta C_\varphi) - \frac{\partial C_\vartheta}{\partial\varphi}\right) + \vec e_\vartheta\left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rC_\varphi)}{\partial r}\right) + \vec e_\varphi\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rC_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial\vartheta}\right),$$

$$\vec\nabla^2 V(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}.$$

Kurven- und Flächenelemente (Richtungsvektoren bitte selbst überlegen!):

Kreislinie (Radius R) in oder parallel zu xy-Ebene: $ds = R\,d\varphi$.

Kreislinie (Radius R) entlang Längengrad: $ds = R\,d\vartheta$

Kreisfläche in oder parallel zu xy-Ebene: $df = r\,dr\,d\varphi$

Kugeloberfläche: $df = R^2\,\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$

Zylindermantel: $df = R\;d\varphi\,dz$

Integralsätze:

$$\text{Gauss:} \quad \iiint \vec\nabla\cdot\vec A\,dV = \oiint \vec A\cdot d\vec f, \qquad \text{Stokes:} \quad \int\int(\vec\nabla\times\vec A)\cdot d\vec f = \oint \vec A\cdot d\vec r$$

$$\text{Potenzial:} \quad \phi(\vec r_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_j \frac{q_j}{|\vec r_i - \vec r_j|}, \quad \phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho_V(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

$$\frac{\vec r - \vec r\,'}{|\vec r - \vec r\,'|^3} = -\vec\nabla_r\frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

$$\text{Spannung:} \quad U = -\int_{\vec r_1}^{\vec r_2}\vec E(\vec r)\cdot d\vec r$$

$$\text{Strom und Stromdichte:} \quad I = \int\int \vec j\cdot d\vec f, \qquad \text{und} \quad \vec j = \rho_V(\vec r)\,\vec v$$

$$\text{Energie:} \quad E_g = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3r\,|\vec E(\vec r)|^2$$

b.w.

Taylor in $d = 1$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \qquad f(x_0 + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n,$$

Taylor in $d = 3$:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) \quad = \quad & \phi(\vec{r}_0) + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial y}\right|_{\vec{r}_0} \Delta y + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0} \Delta z + \\ & + \frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x^2}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta x + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x\partial y}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta y + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x\partial z}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta z + \cdots + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial z^2}\right|_{\vec{r}_0} \Delta z\,\Delta z \right] + \\ & \quad + \quad \frac{1}{3!}(\text{3. Ableitungen}) \quad + \quad \frac{1}{4!}(\text{4. Ableitungen}) \quad \cdots + \ldots \end{aligned}$$

Dipolmoment: $\vec{p} = \sum_j \vec{r}_j q_j \to \int \vec{r}\rho_V(\vec{r})\,dV$ Dipolpotenzial: $\phi_{\text{Dipol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}$

$$\vec{E}_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\phi_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r}) - \vec{p}r^2}{r^5}$$

Poisson-Gleichung: $\Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_V(\vec{r})}{\epsilon_0}$

Relativitätstheorie: LT: $x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad ct' = \frac{ct - vx/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Inv. LT: $x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad ct = \frac{ct' + vx'/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Magn. Moment: $\vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r\,(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})) \qquad \to \qquad \vec{m} = \frac{1}{2}I\int \vec{r}\times d\vec{r},$

... einer Leiterschleife: $\vec{m} = IF\,\vec{n},$

Drehmoment: $\vec{N} = \vec{m}\times\vec{B},$

1. Ampèresches Gesetz:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{2\to 1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{r}_1\times(d\vec{r}_2\times\vec{r}_{12})}{r_{12}^3} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}(d\vec{r}_1\cdot d\vec{r}_2)\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3},$$

Biot-Savart: $\vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\oint_{C_2}\frac{d\vec{r}_2\times\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad \vec{F}_{12} = I_1\oint_{C_1} d\vec{r}_1\times\vec{B}_2(\vec{r}_1)$

Spule: $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 NI}{\ell}$, Selbstinduktivität: $L = \mu_r\mu_0\frac{N^2}{\ell}f$

Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial\rho(\vec{r})}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r})$

Wellengleichungen (für $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) für jede Komponente E_i, B_i:

$$\Delta E_i = \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_i, \quad \Delta B_i = \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}B_i, \qquad k = \frac{\omega}{c'}, \quad c' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_r\mu_r}}$$

Poynting-Vektor: $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$