KLAUSURAUFGABEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK II (LAK)

Sommersemester 2020, Donnerstag, 27.8.20, 10:15 Uhr

Sie schreiben bitte ausschließlich auf den zusätzlich verteilten Schreibvorlagen!
Benutzen Sie davon wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite! (Egal ob Vorder- oder Rückseite)
Beachten Sie auch die Formelsammlung.

Punkte: 6 / 6 / 4 / 7 Summe: 23 (bestanden ab 11.5 Punkten)

Aufgabe 1: Grundwissen (6 Punkte) a, b, c, ρ_0 sind Konstanten mit positiven Werten.

1. Kürzen Sie soweit wie möglich: (0.5 Punkte)

$$\frac{(x+a)^2}{x^2-a^2} =$$

2. Vereinfachen Sie: (0.5 Punkte)

$$(a^2)^b, \qquad a^b \cdot a^c$$

3. Wie lautet die Funktionsvorschrift $f(x)$ einer nach oben geöffneten Normalparabel mit dem Scheitel am Punkt $(x, y) = (1, 2)$? (0.5 Punkte)

Wie lautet die Steigung ihrer Tangente am Punkt $x = 0$? (0.5 Punkte)

4. Wie groß ist die Oberfläche eines Quaders der Seitenlängen a, b und c? (0.5 Punkte)

5. Berechnen Sie die Gesamtladung einer Kugel vom Radius R (Mittelpunkt im Koordinatenursprung) mit der Ladungsdichte $\rho = \rho_0 r^2 \sin(\varphi/2)/a^2$? (1.5 Punkte)

6. Ein positiv geladenes Teilchen fliegt mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ (relativ zum Beobachter) durch den Raum. Verursacht dies aus Sicht des Beobachters ein elektrisches Feld / ein magnetisches Feld / beides / keines davon? (Ohne Begründung). (1 Punkt)

7. Sind die folgenden Größen Vektoren (aus R^3) oder Skalare? (Abkürzungen S/V sind erlaubt.)

a.) (Elektrostatische) Spannung b.) Stromdichte c.) Ladungsdichte d.) $\oint\!\!\oint \vec{E} \cdot d\vec{f}$

Nicht raten, falsche Antwort gibt Punktabzug (innerhalb dieser Teilaufgabe) (1 Punkt)

Aufgabe 2: Punktladungen (6 Punkte)

Q_0, a sind positive Konstanten.

Gegeben seien die beiden Punktladungen $Q_1 = +Q_0$ am Ort $\vec{r}_1 = (a, 2a, 0)$ und $Q_2 = -Q_0$ am Ort $\vec{r}_2 = (-a, a, 0)$.

a.) Wie lautet das von beiden Ladungen gemeinsam erzeugte elektrostatische Potenzial $\phi(\vec{r})$? (1 Punkt)

b.) Finden Sie irgendeinen Punkt, an dem $\phi(\vec{r})$ (aus a.) gleich 0 ist. (2 Punkte)

c.) Welche Arbeit muss man verrichten, um eine dritte Ladung der Stärke $Q_3 = +Q_0$ vom Punkt $P_1 = (a, a, a)$ zum Punkt $P_2 = (a, a, 2a)$ zu befördern? (1 Punkt)

d.) Wie lautet das Dipolmoment $\vec{p}$, das von den beiden Ladungen Q_1 und Q_2 aus (a.) erzeugt wird? Berechnen Sie daraus das entsprechende Dipolpotenzial am Ort $\vec{r} = (10a, 10a, 10a)$? (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie weitgehend richtig rechnen und skizzieren.

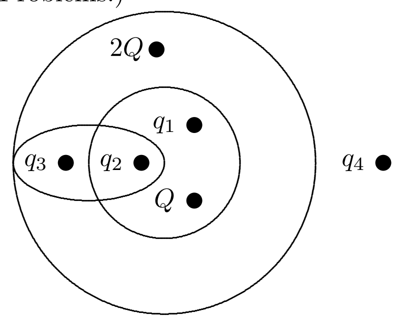
b.w.

Aufgabe 3: Gauß'sches Gesetz (4 Punkte)

Q ist eine positive Konstante.

Gegeben sind die beiden eingezeichneten Ladungen Q und $2Q$ (siehe Abb.) sowie die eingezeichneten Gauß'schen Flächen mit dem jeweils angegebenen elektrischen Fluss durch die Oberflächen. Unbekannt sind die ebenfalls eingezeichneten Ladungen q_1 bis q_4.

(Die Abb. ist die zweidimensionale Darstellung des dreidimensionalen Problems.)



Für den Fluss durch die 3 Gauß'schen Flächen:
"Kleine Kugel (KK)", "Große Kugel (GK)", "Ellipsoid (E)" gilt:

$$\oiint_{KK} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \oiint_{GK} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \oiint_{E} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \frac{4Q}{\epsilon_0}$$

Bestimmen Sie aus diesen Informationen so viele Ladungen q_i wie möglich. Geben Sie auch an, wenn eine Ladung nicht bestimmbar ist. Falsch bestimmte Ladungen bringen Punktabzug (innerhalb dieser Teilaufgabe)!

Aufgabe 4: Maxwell-Gleichungen (7 Punkte)

E_0, B_0, q und ω seien positive Konstanten.

a.) Schreiben Sie das Gauß-Gesetz und das Faraday-Gesetz in differenzieller und in integraler Form. (2 Punkte)

b.) Im Vakuum (keine freien Ladungen oder Ströme) seien ein $\vec{E}$-und ein $\vec{B}$-Feld gegeben:

$$\vec{E} = E_0 \exp[-(qx - \omega t)^2]\, \vec{e}_y, \quad \vec{B} = B_0 \exp[-(qx - \omega t)^2]\, \vec{e}_z.$$

Überprüfen Sie (rechnerisch) **eine der beiden Gleichungen Ihrer Wahl** aus a.) in differenzieller Form und geben Sie am Ende an, ob, bzw. unter welcher Bedingung sie erfüllt ist (1 Punkt).

c.) Überprüfen Sie **die andere der beiden Gleichungen** in integraler Form. Geben Sie auch hier am Ende an, ob, bzw. unter welcher Bedingung sie erfüllt ist. Fertigen Sie eine übersichtliche Skizze, aus der die Geometrie des Integrationsgebietes und die Richtung der beteiligten Felder klar hervorgeht. Das Integrationsgebiet muss so gewählt sein, dass keine der beiden Seiten der überprüften Gleichung trivial Null wird.

Hinweis: Voraussichtlich werden Sie nicht alle Stammfunktionen (sofort) finden können. Sie haben dann die Möglichkeit

- Integrale gegeneinander wegzuheben. (Bringen Sie in diesem Fall die betroffenen Integrale in eine Form, der man deulich ansehen kann, gegen welches andere Integral der Gleichung sie sich wegheben.)
- Die Reihenfolge von Differenzation und Integration zu vertauschen. (Dies löst das Problem.)

(2 Punkte)

d.) Welches Phänomen wurde aus den Maxwell-Gleichungen vorhergesagt? Schreiben Sie 1-2 Sätze zum Begriff der "Vorhersage". Hat sich diese Vorhersage erfüllt? Falls ja, wie? (2 Punkte)

1 Zusatzpunkt, wenn Sie weitgehend richtig rechnen und beschreiben.

Formelsammlung

Zylinderkoord.: $\vec{r} = r_\perp \, \vec{e}_{r_\perp} + z\vec{e}_z, \qquad \vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$

$$\vec{\nabla}V(r_\perp,\varphi,z) = \vec{e}_{r_\perp}\frac{\partial V}{\partial r_\perp} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{C}(r_\perp,\varphi,z) = \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial(r_\perp C_{r_\perp})}{\partial r_\perp} + \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial C_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial C_z}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{C}(r_\perp,\varphi,z) = \vec{e}_{r_\perp}\left(\frac{1}{r_\perp}\frac{\partial C_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial C_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r_\perp}\right) + \vec{e}_z \frac{1}{r_\perp}\left(\frac{\partial(r_\perp C_\varphi)}{\partial r_\perp} - \frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial\varphi}\right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r_\perp,\varphi,z) = \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial}{\partial r_\perp}\left(r_\perp \frac{\partial V}{\partial r_\perp}\right) + \frac{1}{r_\perp^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Kugelkoordinaten: $\qquad x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$

$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta).$

$$\vec{\nabla}V(r,\vartheta,\varphi) = \vec{e}_r\frac{\partial V}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\vartheta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial\varphi},$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{C}(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 C_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta C_\vartheta)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{C}(r,\vartheta,\varphi) =$$

$$= \vec{e}_r\frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta C_\varphi) - \frac{\partial C_\vartheta}{\partial\varphi}\right) + \vec{e}_\vartheta\left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rC_\varphi)}{\partial r}\right) + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rC_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial\vartheta}\right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}.$$

Kurven- und Flächenelemente (Richtungsvektoren bitte selbst überlegen!):

Kreislinie (Radius R) in oder parallel zu xy-Ebene: $ds = R\,d\varphi$.

Kreislinie (Radius R) entlang Längengrad: $ds = R\,d\vartheta$

Kreisfläche in oder parallel zu xy-Ebene: $df = r\,dr\,d\varphi$

Kugeloberfläche: $df = R^2\,\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$

Zylindermantel: $df = R\;d\varphi\,dz$

Integralsätze:

$$\text{Gauss:} \quad \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV = \oiint \vec{A}\cdot d\vec{f}, \qquad \text{Stokes:} \quad \int\!\!\int (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{f} = \oint \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

$$\text{Potenzial:} \quad \phi(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_j \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho_V(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_r\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\text{Spannung:} \quad U = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

$$\text{Strom und Stromdichte:} \quad I = \int\!\!\int \vec{j}\cdot d\vec{f}, \qquad \text{und} \quad \vec{j} = \rho_V(\vec{r})\,\vec{v}$$

$$\text{Energie:} \quad E_g = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3r\,|\vec{E}(\vec{r})|^2$$

b.w.

Taylor in $d=1$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n,\qquad f(x_0+\Delta x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n,$$

Taylor in $d=3$:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}_0+\Delta\vec{r}) \;&=\; \phi(\vec{r}_0)+\left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x}\right|_{\vec{r}_0}\Delta x+\left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial y}\right|_{\vec{r}_0}\Delta y+\left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0}\Delta z+\\ &+\frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x^2}\right|_{\vec{r}_0}\Delta x\,\Delta x+\left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x\partial y}\right|_{\vec{r}_0}\Delta x\,\Delta y+\left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x\partial z}\right|_{\vec{r}_0}\Delta x\,\Delta z+\cdots+\left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial z^2}\right|_{\vec{r}_0}\Delta z\,\Delta z\right]+\\ &\quad+\quad\frac{1}{3!}(\text{3. Ableitungen})\quad+\quad\frac{1}{4!}(\text{4. Ableitungen})\quad\cdots+\ldots\end{aligned}$$

$$\text{Dipolmoment:}\quad \vec{p}=\sum_j\vec{r}_jq_j\to\int\vec{r}\rho_V(\vec{r})\,dV\qquad\text{Dipolpotenzial:}\quad \phi_{\text{Dipol}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}$$

$$\vec{E}_{\text{Dipol}}=-\vec{\nabla}\phi_{\text{Dipol}}=-\vec{\nabla}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r})-\vec{p}r^2}{r^5}$$

$$\text{Poisson-Gleichung:}\quad \Delta\phi(\vec{r})=-\frac{\rho_V(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\text{Relativitätstheorie:}\quad\text{LT:}\qquad x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\qquad ct'=\frac{ct-vx/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\text{Inv. LT:}\qquad x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\qquad ct=\frac{ct'+vx'/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\text{Magn. Moment:}\quad \vec{m}=\frac{1}{2}\int d^3r\,(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r}))\qquad\to\qquad\vec{m}=\frac{1}{2}I\int\vec{r}\times d\vec{r},$$

$$\text{... einer Leiterschleife:}\quad \vec{m}=IF\,\vec{n},$$

$$\text{Drehmoment:}\quad \vec{N}=\vec{m}\times\vec{B},$$

1. Ampèresches Gesetz:

$$\vec{F}_{12}=\vec{F}_{2\to1}=\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{r}_1\times(d\vec{r}_2\times\vec{r}_{12})}{r_{12}^3}=-\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}(d\vec{r}_1\cdot d\vec{r}_2)\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3},$$

$$\text{Biot-Savart:}\quad \vec{B}_2(\vec{r}_1)=\frac{\mu_0I_2}{4\pi}\oint_{C_2}\frac{d\vec{r}_2\times\vec{r}_{12}}{r_{12}^3},\quad \vec{F}_{12}=I_1\oint_{C_1}d\vec{r}_1\times\vec{B}_2(\vec{r}_1)$$

$$\text{Spule:}\quad |\vec{B}|=\frac{\mu_0NI}{\ell},\quad\text{Selbstinduktivität:}\quad L=\mu_r\mu_0\frac{N^2}{\ell}f$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung:}\quad \frac{\partial\rho(\vec{r})}{\partial t}=-\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r})$$

Wellengleichungen (für $\rho=0$, $\vec{j}=0$) für jede Komponente E_i, B_i:

$$\Delta E_i=\frac{1}{c'^{\,2}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_i,\quad \Delta B_i=\frac{1}{c'^{\,2}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}B_i,\qquad k=\frac{\omega}{c'},\quad c'=\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_r\mu_r}}$$