KLAUSURAUFGABEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK II (LAK)

Sommersemester 2021, Montag, 5.7.20, 8:15 Uhr

Sie schreiben bitte ausschließlich auf den zusätzlich verteilten Schreibvorlagen!
Benutzen Sie davon wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite! (Egal ob Vorder- oder Rückseite)
Beachten Sie auch die Formelsammlung.

Punkte: 6 / 6 / 7 / 5 Summe: 24 (bestanden ab 12 Punkten)

Aufgabe 1: Vektoren und Vektorfeld (6 Punkte)

a.) Schreiben Sie die beiden Maxwell-Gleichungen in diffenzieller und integraler Form auf, welche die Quellen- und Wirbeldichte des elektrischen Feldes beschreiben. Geben Sie auch deren Namen an. (2 Punkte)

b.) Skizzieren Sie das Feld:

$$\vec{A} = (x, x + y, 0)$$

in der xy-Koordinatenebene in allen 4 Quadranten (mindestens 3 Pfeile pro Quadrant und 1-2 je Achse). (2 Punkte)

c.) Berechnen Sie die Quellen- und die Wirbeldichte des Feldes $\vec{A}$ aus b.)
Stellen Sie sich vor, das Feld beschreibt ein Geschwindigkeitsfeld (z.B. von strömendem Wasser): Welche Bewegung führt dann das Wasser aus? / In welche Richtung fließt dann das Wasser? (2 Punkte)

2. Coulombkraft: (6 Punkte)

Gegeben seien die Ladungen $Q_1 = 2q$ am Punkt $P_1 = (0, a, 0)$, $Q_2 = -q$ am Punkt $P_2 = (a, -a, 0)$ und $Q_3 = q$ am Punkt $P_3 = (0, 0, a)$.

a.) Skizzieren Sie alle Ladungen in ein perspektivisches Koordinatensystem (am besten mit Würfeln als Hilfskonstruktionen). Deuten Sie die Richtungen aller einzelnen Coulombkräfte durch Pfeile an die betreffende Ladung an. (1 Punkt)

b.) Berechnen Sie die gesamte Coulombkraft auf Ladung Q_3. (2 Punkt)

c.) Berechnen Sie das von allen Ladungen gemeinsam erzeugte elektrostatische Potenzial $\Phi(\vec{r})$. (2 Punkte)

d.) Welche Spannung besteht zwischen den Punkten $(0, 0, 0)$ und (a, a, a)? (1 Punkt)

Darstellung der Lösung: Setzen Sie alle gegebenen Koordinaten ein und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

b.w.

Aufgabe 3: Gauß'sches Gesetz (7 Punkte)

Q und R sind positive Konstanten (Ladungs- und Längeneinheit), $r_\perp, \varphi, z$ die Zylinderkoordinaten.

Gegeben sei ein unendlich langer geladener dünner Stab entlang der z-Achse mit der Ladungsdichte $\rho_\ell = Q/R$ (Linienladungsdichte).

Dieser Draht sei von einem (ebenfalls unendlich langen) Hohlzylinder mit Innenradius R und Außenradius $2\,R$ umgeben (ebenfalls symmetrisch zur z-Achse liegend). Dieser Hohlzylinder trage die Volumenladungsdichte $\rho_V = \frac{Q}{R^4}\,r_\perp$.

a.) Wie lautet das Gaußsche Gesetz? Wie lautet die Form des $\vec{E}$-Feldes, die Sie verwenden? (1 Punkt)

b.) Teilen Sie den Raum in drei sinnvolle Bereiche auf und berechnen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Gesetzes das $\vec{E}$-Feld in allen 3 Bereichen in Betrag und Richtung.

Erstellen Sie dabei jeweils eine Skizze, aus der Ihre Gauß'sche Fläche sowie die gegebene Geometrie hervorgeht. Bitte drei getrennte Skizzen, die übersichtlich und groß genug sind. (4 Punkte)

c.) Skizzieren Sie den Wert der Feldkomponente $E(r_\perp)$ als Funktion von $r_\perp$ in mindestens 2 der 3 Bereiche (Ihrer Wahl) und überprüfen Sie explizit, ob sie für $r_\perp > 0$ überall stetig ist. (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie weitgehend richtig rechnen und beschreiben.

Aufgabe 4: Energie (5 Punkte)

Q, R, m und v_0 sind Konstanten mit positiven Werten.

Gegeben ist eine geladene Kugel vom Radius R (Mittelpunkt im Koordinatenursprung), mit folgendem Feld im Außenraum (in Kugelkoordinaten):

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\,\vec{e}_r.$$

Ein Teilchen von Masse m und Ladung $q = 4Q$ wird im Abstand $2R$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = \sqrt{2Q^2/(\pi\epsilon_0 Rm)}$ in Richtung des Kugelmittelpunktes geschossen. Mit welcher Geschwindigkeit v prallt es auf der Kugel auf?

Bewertet werden der Ansatz, die Rechnung und die Verständlichkeit.

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie weitgehend richtig rechnen und beschreiben.

Formelsammlung

Zylinderkoord.: $\vec{r} = r_\perp \, \vec{e}_{r_\perp} + z\vec{e}_z, \qquad \vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$

$$\vec{\nabla} V(r_\perp,\varphi,z) = \vec{e}_{r_\perp}\frac{\partial V}{\partial r_\perp} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{C}(r_\perp,\varphi,z) = \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial(r_\perp C_{r_\perp})}{\partial r_\perp} + \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial C_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial C_z}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{C}(r_\perp,\varphi,z) = \vec{e}_{r_\perp}\left(\frac{1}{r_\perp}\frac{\partial C_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial C_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r_\perp}\right) + \vec{e}_z\frac{1}{r_\perp}\left(\frac{\partial(r_\perp C_\varphi)}{\partial r_\perp} - \frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial\varphi}\right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r_\perp,\varphi,z) = \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial}{\partial r_\perp}\left(r_\perp\frac{\partial V}{\partial r_\perp}\right) + \frac{1}{r_\perp^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Kugelkoordinaten: $\qquad x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$

$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi,\cos\varphi,0), \quad \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta).$

$$\vec{\nabla} V(r,\vartheta,\varphi) = \vec{e}_r\frac{\partial V}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\vartheta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial\varphi},$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{C}(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 C_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta C_\vartheta)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{C}(r,\vartheta,\varphi) =$$

$$= \vec{e}_r\frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta C_\varphi) - \frac{\partial C_\vartheta}{\partial\varphi}\right) + \vec{e}_\vartheta\left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rC_\varphi)}{\partial r}\right) + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rC_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial\vartheta}\right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}.$$

Kurven- und Flächenelemente (Richtungsvektoren bitte selbst überlegen!):

Kreislinie (Radius R) in oder parallel zu xy-Ebene: $ds = R\,d\varphi$.

Kreislinie (Radius R) entlang Längengrad: $ds = R\,d\vartheta$

Kreisfläche in oder parallel zu xy-Ebene: $df = r\,dr\,d\varphi$

Kugeloberfläche: $df = R^2\,\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$

Zylindermantel: $df = R\;d\varphi\,dz$

Integralsätze:

$$\text{Gauss:} \quad \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV = \oiint \vec{A}\cdot d\vec{f}, \qquad \text{Stokes:} \quad \int\!\!\int (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{f} = \oint \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

$$\text{Potenzial:} \quad \phi(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_j \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho_V(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_r\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\text{Spannung:} \quad U = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

$$\text{Strom und Stromdichte:} \quad I = \int\!\!\int \vec{j}\cdot d\vec{f}, \qquad \text{und} \quad \vec{j} = \rho_V(\vec{r})\,\vec{v}$$

$$\text{Energie:} \quad E_g = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3r\,|\vec{E}(\vec{r})|^2$$

b.w.

Taylor in $d = 1$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \qquad f(x_0 + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n,$$

Taylor in $d = 3$:

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) \quad = \quad & \phi(\vec{r}_0) + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial y}\right|_{\vec{r}_0} \Delta y + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0} \Delta z + \\
& + \frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x^2}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta x + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x\partial y}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta y + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x\partial z}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta z + \cdots + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial z^2}\right|_{\vec{r}_0} \Delta z\,\Delta z\right] + \\
& + \quad \frac{1}{3!}(\text{3. Ableitungen}) \quad + \quad \frac{1}{4!}(\text{4. Ableitungen}) \quad \cdots + \ldots
\end{aligned}$$

$$\text{Dipolmoment:} \quad \vec{p} = \sum_j \vec{r}_j q_j \to \int \vec{r}\rho_V(\vec{r})\,dV \qquad \text{Dipolpotenzial:} \quad \phi_{\text{Dipol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}$$

$$\vec{E}_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\phi_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r}) - \vec{p}r^2}{r^5}$$

$$\text{Poisson-Gleichung:} \quad \Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_V(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\text{Relativitätstheorie:} \quad \text{LT:} \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad ct' = \frac{ct - vx/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\text{Inv. LT:} \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad ct = \frac{ct' + vx'/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\text{Magn. Moment:} \quad \vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r\,(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})) \qquad \to \qquad \vec{m} = \frac{1}{2}I\int \vec{r}\times d\vec{r},$$

$$\text{... einer Leiterschleife:} \quad \vec{m} = IF\,\vec{n},$$

$$\text{Drehmoment:} \quad \vec{N} = \vec{m}\times\vec{B},$$

1. Ampèresches Gesetz:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{2\to 1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{r}_1\times(d\vec{r}_2\times\vec{r}_{12})}{r_{12}^3} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}(d\vec{r}_1\cdot d\vec{r}_2)\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3},$$

$$\text{Biot-Savart:} \quad \vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\oint_{C_2}\frac{d\vec{r}_2\times\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad \vec{F}_{12} = I_1\oint_{C_1} d\vec{r}_1\times\vec{B}_2(\vec{r}_1)$$

$$\text{Spule:} \quad |\vec{B}| = \frac{\mu_0 N I}{\ell}, \quad \text{Selbstinduktivität:} \quad L = \mu_r\mu_0\frac{N^2}{\ell}f$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung:} \quad \frac{\partial\rho(\vec{r})}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r})$$

Wellengleichungen (für $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) für jede Komponente E_i, B_i:

$$\Delta E_i = \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_i, \quad \Delta B_i = \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}B_i, \qquad k = \frac{\omega}{c'}, \quad c' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_r\mu_r}}$$