KLAUSURAUFGABEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK II (LAK)

Sommersemester 2023, Donnerstag, 10.7.23, 8:15 Uhr

Sie schreiben bitte ausschließlich auf den zusätzlich verteilten Schreibvorlagen!
Benutzen Sie davon wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite! (Egal ob Vorder- oder Rückseite)
Beachten Sie auch die Formelsammlung.

Punkte: 5 / 6 / 6 / 6 Summe: 23 (bestanden ab 11.5 Punkten)

Aufgabe 1: Grundwissen (5 Punkte)

a.) Welche der folgenden Rechnungen/Termumformungen/Schreibweisen sind richtig (R) und welche falsch (F) ? (1 Punkt)

$$(i) \quad x+4+3 = x+7-2 = x+5, \qquad (ii) \quad f'(x) \to x^2 = 2x, \qquad (iii) \quad \frac{b}{\frac{a}{c}} = \frac{bc}{a}, \qquad (iv) \quad d\vec{f} = df$$

Nicht raten - falsche Antworten führen zu Punktabzug (innerhalb dieser Teilaufgabe)!

b.) Welchen Winkel schließen die folgenden Vektoren miteinander ein? (0.5 Punkte)

$$\vec{A} = (1,2,1), \quad \vec{B} = (1,0,-1)$$

c.) Berechnen Sie $\vec{\nabla} r$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$ (mit dem Ortsvektor $\vec{r}$ und $|\vec{r}| = r$). (1 Punkt)

d.) Bestimmen Sie die Gesamtladung einer Kugel mit Radius R der konstanten Ladungsdichte $\rho = \rho_0$ (0.5 Punkte)

e.) Gegeben sind zwei Punktladungen Q am Ort $\vec{r}_1 = (a, 2a, a)$ und $2Q$ am Ort $\vec{r}_2 = (-a, a, a)$. Wie lautet das von beiden Ladungen gemeinsam erzeugte elektrische Feld $\vec{E}$?
Welche Kraft üben diese Ladungen gemeinsam auf eine Probeladung q am Ort $\vec{r}_3 = (a, a, a)$ aus?
Setzen Sie die gegebenen Größen ein und vereinfachen Sie so weit wie möglich! (2 Punkte)

Aufgabe 2: Feld und Energie (6 Punkte)

q, m, $E_0 = ma/(\tau^2 q)$, a und τ (Längen- und Zeiteinheit) sind Konstanten mit positiven Werten.

a.) Gegeben ist ein homogenes elektrisches Feld $\vec{E}(x,y,z) = -E_0\,\vec{e}_x$ für $x \geq 0$. Wie lautet sein elektrostatisches Potenzial $\Phi(x,y,z)$ unter der Zusatzbedingung $\Phi = 0$ für $x = 0$? (1 Punkt)

b.) Zeigen Sie (in verständlicher Form), dass $E_0 = ma/(\tau^2 q)$ die Dimension eines elektrischen Feldes besitzt. (1 Punkt)

c.) Ein Teilchen mit (positiver) Ladung q und Masse m wird in dem Feld aus a.) am Ort $\vec{r}_0 = (10a, a, 0)$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = (2,0,0)\frac{a}{\tau}$ losgeschickt. Welche Gesamtenergie besitzt diese Ladung? (1 Punkt)

d.) Es soll keine Reibung wirken. An welchem Ort $\vec{r}$ wechselt die x-Komponente der Geschwindigkeit des Teilchens ihr Vorzeichen? (Geben Sie $\vec{r}$ in allen Komponenten an.) Begründen Sie Ihr Vorgehen in 1-2 verständlichen Sätzen. (2 Punkte)

e.) Durch welches geladene Objekt wird ein elektrisches Feld wie in a.) erzeugt? Benennen Sie Lage und Aussehen. Ist die Ladung positiv oder negativ? (1 Punkt)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie weitgehend richtig rechnen und beschreiben.

b.w.

Aufgabe 3: Gauß'sches Gesetz (6 Punkte)

ρ_0 und R sind positive Konstanten.

Gegeben ist eine Kugel vom Radius R, Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Die Kugel ist aus 2 Teilen zusammengesetzt mit der Ladungsdichte

$$\rho(r, \vartheta, \varphi) = \begin{cases} \rho_0/3 & \text{für} \quad r \leq R/2 \quad \text{Bereich I} \\ \rho_0 R^2/r^2 & \text{für} \quad R/2 < r \leq R \quad \text{Bereich II.} \end{cases}$$

Den Bereich $r > R$ bezeichnen wir als "Bereich III".

a.) Berechnen Sie das elektrische Feld mit Hilfe des Gauß'schen Gesetzes in Betrag und Richtung im Bereich III, $r > R$ mit Hilfe des Gauß'sches Gesetzes.

Erstellen Sie eine beschriftete Skizze der Kugel, aus der alle verwendeten Längen (R, r_G, ...) eindeutig hervorgehen.

b.) Berechnen Sie das elektrische Feld mit Hilfe des Gauß'schen Gesetzes in Betrag und Richtung im Bereich II, $R/2 < r \leq R$.

Erstellen Sie auch hier eine (getrennte) beschriftete Skizze der Kugel, aus der alle verwendeten Längen (R, r_G, ...) eindeutig hervorgehen.

Das $\vec{E}$-Feld im Bereich I ist aus Zeitgründen nicht gefragt!

Es gibt insgesamt 5 Punkte auf die Teile a.) und b.) zusammen.

c.) Untersuchen Sie explizit, ob das Feld bei $r = R$ stetig ist. (1 Punkt)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie weitgehend richtig rechnen und beschreiben.

Aufgabe 4: Maxwell-Gleichungen (6 Punkte)

Gegeben sind folgende Sätze über elektrischen oder magnetischen Fluss, die falsch oder richtig sein können.

Geben Sie für jeden Satz die Maxwell-Gleichung in integraler Form an, die Auskunft über den jeweiligen Fluss gibt.

Entscheiden Sie dann, ob der jeweilige Satz richtig (R) oder falsch (F) ist.

Geben Sie jeweils eine kurze stichhaltige Begründung (1 Satz reicht), warum Sie den jeweiligen Satz für falsch, bzw. richtig halten. (6 Punkte, je 1,5 Punkte)

a.) Der Fluss eines elektrischen Feldes durch eine Würfeloberfläche ist immer gleich Null.

b.) Der Fluss eines Magnetfeldes durch eine Quadratfläche ist immer gleich Null.

c.) Der Fluss eines elektrischen Feldes durch eine Quadratfläche ist immer gleich Null.

d.) Der Fluss eines Magnetfeldes durch eine Würfeloberfläche ist immer gleich Null.

Nicht raten - falsche Antworten führen zu Punktabzug (innerhalb dieser Aufgabe)!

Formelsammlung

Zylinderkoord.: $\vec{r} = r_\perp \vec{e}_{r_\perp} + z\vec{e}_z, \qquad \vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$

$$\vec{\nabla}V(r_\perp,\varphi,z) = \vec{e}_{r_\perp}\frac{\partial V}{\partial r_\perp} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \vec{e}_z\frac{\partial V}{\partial z}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{C}(r_\perp,\varphi,z) = \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial(r_\perp C_{r_\perp})}{\partial r_\perp} + \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial C_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial C_z}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{C}(r_\perp,\varphi,z) = \vec{e}_{r_\perp}\left(\frac{1}{r_\perp}\frac{\partial C_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial C_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r_\perp}\right) + \vec{e}_z\frac{1}{r_\perp}\left(\frac{\partial(r_\perp C_\varphi)}{\partial r_\perp} - \frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial\varphi}\right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r_\perp,\varphi,z) = \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial}{\partial r_\perp}\left(r_\perp\frac{\partial V}{\partial r_\perp}\right) + \frac{1}{r_\perp^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Kugelkoordinaten: $x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$

$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta).$

$$\vec{\nabla}V(r,\vartheta,\varphi) = \vec{e}_r\frac{\partial V}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\vartheta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial\varphi},$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{C}(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 C_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta C_\vartheta)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{C}(r,\vartheta,\varphi) =$$

$$= \vec{e}_r\frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta C_\varphi) - \frac{\partial C_\vartheta}{\partial\varphi}\right) + \vec{e}_\vartheta\left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rC_\varphi)}{\partial r}\right) + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rC_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial\vartheta}\right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}.$$

Kurven- und Flächenelemente (Richtungsvektoren bitte selbst überlegen!):

Kreislinie (Radius R) in oder parallel zu xy-Ebene: $ds = R\,d\varphi$.

Kreislinie (Radius R) entlang Längengrad: $ds = R\,d\vartheta$

Kreisfläche in oder parallel zu xy-Ebene: $df = r\,dr\,d\varphi$

Kugeloberfläche: $df = R^2\,\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$

Zylindermantel: $df = R\;d\varphi\,dz$

Integralsätze:

$$\text{Gauss:} \quad \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV = \oint\!\!\!\oint \vec{A}\cdot d\vec{f}, \qquad \text{Stokes:} \quad \int\int(\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{f} = \oint \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

$$\text{Potenzial:} \quad \phi(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_j \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho_V(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_r\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\text{Spannung:} \quad U = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

$$\text{Strom und Stromdichte:} \quad I = \int\int \vec{j}\cdot d\vec{f}, \qquad \text{und} \quad \vec{j} = \rho_V(\vec{r})\,\vec{v}$$

$$\text{Energie:} \quad E_g = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3r\,|\vec{E}(\vec{r})|^2$$

b.w.

Taylor in $d = 1$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \qquad f(x_0 + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n,$$

Taylor in $d = 3$:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) \quad &= \quad \phi(\vec{r}_0) + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial y}\right|_{\vec{r}_0} \Delta y + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0} \Delta z + \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x^2}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta x + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x\partial y}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta y + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x\partial z}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta z + \cdots + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial z^2}\right|_{\vec{r}_0} \Delta z\,\Delta z \right] + \\ &\qquad + \quad \frac{1}{3!}(\text{3. Ableitungen}) \quad + \quad \frac{1}{4!}(\text{4. Ableitungen}) \quad \cdots + \ldots\end{aligned}$$

Dipolmoment: $\vec{p} = \sum_j \vec{r}_j q_j \to \int \vec{r}\rho_V(\vec{r})\,dV$ Dipolpotenzial: $\phi_{\text{Dipol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}$

$$\vec{E}_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\phi_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r}) - \vec{p}r^2}{r^5}$$

Poisson-Gleichung: $\Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_V(\vec{r})}{\epsilon_0}$

Relativitätstheorie: LT: $x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad ct' = \frac{ct - vx/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Inv. LT: $x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad ct = \frac{ct' + vx'/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Magn. Moment: $\vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r\,(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})) \qquad \to \qquad \vec{m} = \frac{1}{2}I\int \vec{r}\times d\vec{r},$

... einer Leiterschleife: $\vec{m} = IF\,\vec{n},$

Drehmoment: $\vec{N} = \vec{m}\times\vec{B},$

1. Ampèresches Gesetz:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{2\to1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{r}_1\times(d\vec{r}_2\times\vec{r}_{12})}{r_{12}^3} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}(d\vec{r}_1\cdot d\vec{r}_2)\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3},$$

Biot-Savart: $\vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\oint_{C_2}\frac{d\vec{r}_2\times\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad \vec{F}_{12} = I_1\oint_{C_1} d\vec{r}_1\times\vec{B}_2(\vec{r}_1)$

Spule: $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 NI}{\ell}$, Selbstinduktivität: $L = \mu_r\mu_0\frac{N^2}{\ell}f$

Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial\rho(\vec{r})}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r})$

Wellengleichungen (für $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) für jede Komponente E_i, B_i:

$$\Delta E_i = \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_i, \quad \Delta B_i = \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}B_i, \qquad k = \frac{\omega}{c'}, \quad c' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_r\mu_r}}$$