AUFGABEN DER NACHKLAUSUR ZUR THEO. PHYSIK II (LAK)

Sommersemester 2019, Dienstag, 1.10.19, 10:15 Uhr (Dauer: 90 Min)

Sie schreiben bitte ausschließlich auf den zusätzlich verteilten Schreibvorlagen!
Benutzen Sie davon wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite! (Egal ob Vorder- oder Rückseite)
Beachten Sie auch die Formelsammlung.

Punkte: 6 / 6 / 5 / 5 Summe: 22 (bestanden ab 11 Punkten)

Aufgabe 1: Grundwissen (6 Punkte)

1. Berechnen, vereinfachen und kürzen Sie so weit wie möglich: (1.5 Punkte – je 1/2)

$$\frac{2}{5}+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}= \qquad , \qquad 1\frac{2}{3}+1\frac{1}{2}= \qquad , \qquad \frac{x^2+y^2+2xy}{2x+2y}=$$

2. Zeigen Sie je anhand einer Skizze, wie eine Funktion aussieht, die im Punkt x_0 (i) nicht stetig und (ii) stetig aber nicht differenzierbar ist. (1 Punkt)

3. Berechnen Sie das Integral (1 Punkt)

$$\int_0^2 x\,\exp(2x)\,dx.$$

4. Skizzieren Sie folgendes Vektorfeld in ein xy-Koordinatensystem (mehrere Pfeile pro Quadranten – Feldverlauf muss erkennbar sein). (1 Punkt)

$$\vec{A}=(y,1,0)$$

5. a.) Wie lautet das $\vec{E}$-Feld, das von den beiden identischen Punktladungen q gemeinsam erzeugt wird, die sich an den Orten $(a,0,0)$ und $(0,a,0)$ befinden? (0.5 Punkte)

b.) Welche Kraft übt dieses Feld auf eine positive Punktladung Q am Ort $(a/2,a/2,0)$ aus? (0.5 Punkte)

6. Nennen Sie 10 vektorielle Größen aus der Physik. (Gefragt sind die Bezeichnungen, nicht die Symbole!) (0.5 Punkte)

Aufgabe 2: Dipolmoment (6 Punkte)

C, ρ_0 und R sind Konstanten mit positiven Werten.
Gegeben ist eine Kugel vom Radius R mit folgender Ladungsdichte ρ_V (in Kugelkoordinaten):

$$\rho_V(r,\vartheta,\varphi)=\frac{\rho_0}{R}\,r\cos(\vartheta)$$

a.) Skizzieren Sie die Kugel und deuten Sie ρ_V durch Plus- und Minussymbole an. An welchen Stellen der Kugel ist der Betrag der Ladungsdichte besonders groß? Wo ist die Ladungsdichte Null? (1 Punkt)

b.) Nennen Sie (möglichst genau) 2 verschiedene Symmetrieeigenschaften der geladenen Kugel. (1 Punkt)

"Möglichst genau" bedeutet: Rotationsachsen, etc. müssen angegeben sein.

"Verschieden" bedeutet: Die beiden Symmetrieoperationen dürfen sich nicht z.B. nur um den Drehwinkel unterscheiden.

c.) Berechnen Sie das Dipolmoment dieser Kugel (in allen Komponenten). (2 Punkte)

Ersatz: Falls Sie Teil c.) nicht geschafft haben, so rechnen Sie nun mit dem Dipolmoment $\vec{p}=(C,0,C)$ weiter. (Dies hat nichts mit der wirklichen Lösung zu tun.)

d.) Berechnen Sie das Dipolpotenzial Φ_{Dipol} der Kugel. Geben Sie das Ergebnis in Kugelkoordinaten an. Wie groß ist Φ_{Dipol} genau am "Nordpol" der Kugel? (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie ohne den Ersatz weitgehend richtig rechnen und erklären.

b.w.

Aufgabe 3: Relativitätstheorie (5 Punkte)

a.) Man sagt oft, dass sich in der Relativitätstheorie $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder nicht voneinander unterschieden lassen. Erklären Sie in 2-3 verständlichen Sätzen, was dies bedeutet und was der Grund ist.
(2 Punkte)

b.) Gegeben sind die Erde (System S), sowie ein Planet P, der im Abstand von $5\,ch$ (5 Lichtstunden) zur Erde relativ zu dieser ruht und dessen Uhren die gleiche Zeit wie auf der Erde zeigen. Außerdem passiert ein Raumschiff (S') zur Zeit $t = t' = 0$ die Erde und fliegt in Richtung des Planeten P. Die Geschwindigkeit des Raumschiffs beträgt $v = 0.8\,c$. (Erde, Raumschiff und Planet befinden sich also auf einer Linie, entlang der x-Achse.)

Lösen Sie die folgenden Fragen rechnerisch: (3 Punkte)

- Vom Planeten aus wird um 0 Uhr (Erdzeit) ein Signal (mit Lichtgeschwindigkeit) in Richtung der Erde losgeschickt. Um wieviel Uhr Erdzeit trifft das Signal beim **Raumschiff** ein?
- Welche Zeit zeigen die Uhren des Raumschiffs beim Eintreffen des Signals?

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie weitgehend richtig rechnen.

Aufgabe 4: Amperesches Durchflutungsgesetz (5 Punkte)

j_0, a, u und R sind Konstanten mit positiven Werten.

Gegeben ist ein in z-Richtung unendlich ausgedehnter Draht mit kreisförmigem Querschnitt vom Radius a, der vom Strom der konstanten Stromdichte $\vec{j}_0$ durchflossen wird (siehe Abb. 1). Er liege symmetrisch zur z-Achse.

Abb. 2 zeigt den (vergrößerten) Draht im Querschnitt (durchgezogene Linie). Innerhalb und außerhalb des Drahtquerschnitts wird nun je eine Amperesche Linie gelegt (gestrichelte Linien) und zwar:

- Eine quadratische Amperesche Linie Γ_1 der Seitenlänge u (**kleiner als der Drahtquerschnitt und vollständig innerhalb**)
- Eine kreisförmige Amperesche Linie Γ_2 vom Radius $R > a$ (**größer als der Drahtquerschnitt und vollständig außerhalb**)

a.) Berechnen Sie in beiden Fällen das Flächenintegral

$$\int\int \vec{j}_0 \cdot d\vec{f},$$

durch die von Γ_1 bzw. Γ_2 eingeschlossene Fläche, sofern dies möglich ist. (1 Punkt)

b.) Lässt sich **unter Verwendung der Ergebnisse aus a.)** das vom Draht erzeugte Magnetfeld $\vec{B}$ mit Hilfe des Amperesches Durchflutungsgesetzes (ADG) innerhalb und/oder außerhalb des Drahtes berechnen?

Falls ja, berechnen Sie es in Betrag und Richtung. Geben Sie dabei an, ob es sich um das $\vec{B}$-Feld außerhalb oder innerhalb des Drahtes handelt.

Falls nein, geben Sie eine kurze Begründung, warum es nicht möglich ist $\vec{B}$ mit Hilfe des ADG und der Ergebnisse aus a.) zu berechnen. (3 Punkte)

c.) Wie lautet die Maxwell-Gleichung, die aus dem Ampereschen Durchflutungsgesetz hervorgeht in integraler Form? Beschreibt sie die Quellen oder die Wirbel des $\vec{B}$-Feldes? (1 Punkt)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie weitgehend richtig rechnen und beschreiben.

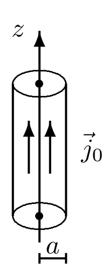

Abb. 1

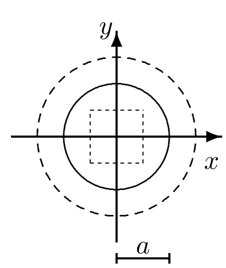

Abb. 2

Formelsammlung

Zylinderkoord.: $\vec{r} = r_\perp \vec{e}_{r_\perp} + z\vec{e}_z, \qquad \vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$

$$\vec{\nabla}V(r_\perp,\varphi,z) = \vec{e}_{r_\perp}\frac{\partial V}{\partial r_\perp} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \vec{e}_z\frac{\partial V}{\partial z}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{C}(r_\perp,\varphi,z) = \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial(r_\perp C_{r_\perp})}{\partial r_\perp} + \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial C_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial C_z}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{C}(r_\perp,\varphi,z) = \vec{e}_{r_\perp}\left(\frac{1}{r_\perp}\frac{\partial C_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial C_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r_\perp}\right) + \vec{e}_z\frac{1}{r_\perp}\left(\frac{\partial(r_\perp C_\varphi)}{\partial r_\perp} - \frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial\varphi}\right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r_\perp,\varphi,z) = \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial}{\partial r_\perp}\left(r_\perp\frac{\partial V}{\partial r_\perp}\right) + \frac{1}{r_\perp^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Kugelkoordinaten: $\qquad x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$

$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi,\cos\varphi,0), \quad \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta).$

$$\vec{\nabla}V(r,\vartheta,\varphi) = \vec{e}_r\frac{\partial V}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\vartheta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial\varphi},$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{C}(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 C_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta C_\vartheta)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{C}(r,\vartheta,\varphi) =$$

$$= \vec{e}_r\frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta C_\varphi) - \frac{\partial C_\vartheta}{\partial\varphi}\right) + \vec{e}_\vartheta\left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rC_\varphi)}{\partial r}\right) + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rC_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial\vartheta}\right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}.$$

Kurven- und Flächenelemente (Richtungsvektoren bitte selbst überlegen!):

Kreislinie (Radius R) in oder parallel zu xy-Ebene: $ds = R\,d\varphi$.

Kreislinie (Radius R) entlang Längengrad: $ds = R\,d\vartheta$

Kreisfläche in oder parallel zu xy-Ebene: $df = r\,dr\,d\varphi$

Kugeloberfläche: $df = R^2\,\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$

Zylindermantel: $df = R\;d\varphi\,dz$

Integralsätze:

$$\text{Gauss:} \quad \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV = \oint\!\!\!\oint \vec{A}\cdot d\vec{f}, \qquad \text{Stokes:} \quad \int\int (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{f} = \oint \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

$$\text{Potenzial:} \quad \phi(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_j \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho_V(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_r\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\text{Spannung:} \quad U = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

$$\text{Strom und Stromdichte:} \quad I = \int\int \vec{j}\cdot d\vec{f}, \qquad \text{und} \quad \vec{j} = \rho_V(\vec{r})\,\vec{v}$$

$$\text{Energie:} \quad E_g = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3r\,|\vec{E}(\vec{r})|^2$$

b.w.

Taylor in $d=1$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n,\qquad f(x_0+\Delta x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n,$$

Taylor in $d=3$:

$$\begin{aligned}\phi(\vec r_0+\Delta\vec r) \;&=\; \phi(\vec r_0)+\left.\frac{\partial\phi(\vec r)}{\partial x}\right|_{\vec r_0}\Delta x+\left.\frac{\partial\phi(\vec r)}{\partial y}\right|_{\vec r_0}\Delta y+\left.\frac{\partial\phi(\vec r)}{\partial z}\right|_{\vec r_0}\Delta z+\\ &+\frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2\phi(\vec r)}{\partial x^2}\right|_{\vec r_0}\Delta x\,\Delta x+\left.\frac{\partial^2\phi(\vec r)}{\partial x\partial y}\right|_{\vec r_0}\Delta x\,\Delta y+\left.\frac{\partial^2\phi(\vec r)}{\partial x\partial z}\right|_{\vec r_0}\Delta x\,\Delta z+\cdots+\left.\frac{\partial^2\phi(\vec r)}{\partial z^2}\right|_{\vec r_0}\Delta z\,\Delta z\right]+\\ &\quad+\quad\frac{1}{3!}(\text{3. Ableitungen})\quad+\quad\frac{1}{4!}(\text{4. Ableitungen})\quad\cdots+\ldots\end{aligned}$$

$$\text{Dipolmoment:}\quad \vec p=\sum_j\vec r_j q_j\to\int\vec r\rho_V(\vec r)\,dV\qquad\text{Dipolpotenzial:}\quad\phi_{\text{Dipol}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec r\cdot\vec p}{r^3}$$

$$\vec E_{\text{Dipol}}=-\vec\nabla\phi_{\text{Dipol}}=-\vec\nabla\frac{\vec r\cdot\vec p}{r^3}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\vec r(\vec p\cdot\vec r)-\vec p r^2}{r^5}$$

$$\text{Poisson-Gleichung:}\quad\Delta\phi(\vec r)=-\frac{\rho_V(\vec r)}{\epsilon_0}$$

$$\text{Relativitätstheorie:}\quad\text{LT:}\qquad x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\qquad ct'=\frac{ct-vx/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\text{Inv. LT:}\qquad x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\qquad ct=\frac{ct'+vx'/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\text{Magn. Moment:}\quad\vec m=\frac{1}{2}\int d^3r\,(\vec r\times\vec j(\vec r))\qquad\to\qquad\vec m=\frac{1}{2}I\int\vec r\times d\vec r,$$

$$\text{... einer Leiterschleife:}\quad\vec m=IF\,\vec n,$$

$$\text{Drehmoment:}\quad\vec N=\vec m\times\vec B,$$

1. Ampèresches Gesetz:

$$\vec F_{12}=\vec F_{2\to1}=\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec r_1\times(d\vec r_2\times\vec r_{12})}{r_{12}^3}=-\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}(d\vec r_1\cdot d\vec r_2)\frac{\vec r_{12}}{r_{12}^3},$$

$$\text{Biot-Savart:}\quad\vec B_2(\vec r_1)=\frac{\mu_0I_2}{4\pi}\oint_{C_2}\frac{d\vec r_2\times\vec r_{12}}{r_{12}^3},\quad\vec F_{12}=I_1\oint_{C_1}d\vec r_1\times\vec B_2(\vec r_1)$$

$$\text{Spule:}\quad|\vec B|=\frac{\mu_0NI}{\ell},\quad\text{Selbstinduktivität:}\quad L=\mu_r\mu_0\frac{N^2}{\ell}f$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung:}\quad\frac{\partial\rho(\vec r)}{\partial t}=-\vec\nabla\cdot\vec j(\vec r)$$

Wellengleichungen (für $\rho=0$, $\vec j=0$) für jede Komponente E_i, B_i:

$$\Delta E_i=\frac{1}{c'^{\,2}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_i,\quad\Delta B_i=\frac{1}{c'^{\,2}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}B_i,\qquad k=\frac{\omega}{c'},\quad c'=\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_r\mu_r}}$$

Poynting-Vektor: $\vec S=\vec E\times\vec H$