NACHKLAUSURAUFGABEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK II (LAK)

Sommersemester 2020, Freitag, 2.10.20, 10:15 Uhr

Sie schreiben bitte ausschließlich auf den zusätzlich verteilten Schreibvorlagen!
Benutzen Sie davon wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite! (Egal ob Vorder- oder Rückseite)
Beachten Sie auch die Formelsammlung.

Punkte: 6 / 7 / 5 / 5 Summe: 23 (bestanden ab 11,5 Punkten)

Aufgabe 1: Grundwissen (6 Punkte) a, b, c, ρ_0 sind Konstanten mit positiven Werten.

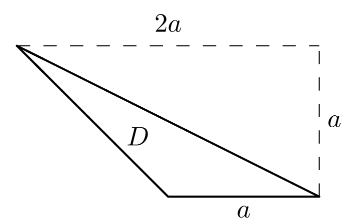
1. Eine Zahl wird verdreifacht. Zum Ergebnis wird 5 addiert. Das Ergebnis ist 41. Wie lautet die Zahl? (1 Punkt)

2. Schreiben Sie als eine einzige Potenz, soweit möglich. Wo es nicht möglich ist, schreiben Sie "nicht möglich". (1 Punkt)

$$i)\quad a^c + b^c, \qquad ii)\quad \sqrt[3]{a^6}, \qquad iii)\quad (a^n)^m$$

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + 3x$. Wie lautet die Geradengleichung der Tangente an die Kurve bei $x = 1$? (1 Punkt)

4. Wie groß ist die Fläche des Dreiecks D? (1 Punkt)



5. Was ist eine elektromagnetische Welle? Wie kann man sie physikalisch erzeugen/nachweisen? (1 Punkt)

6. Sind die folgenden Größen Vektoren (aus R^3) oder Skalare? (Abkürzungen S/V sind erlaubt.)

a.) Elektrischer Widerstand b.) Lorentzkraft c.) Elektrostatisches Potenzial d.) Elektrisches Feld

Nicht raten, falsche Antwort gibt Punktabzug (innerhalb dieser Teilaufgabe) (1 Punkt)

Aufgabe 2: Ladungsverteilung: Feld und Energie (7 Punkte)

ρ_0 ist eine positive Konstante.

Geben Sie alle Einheiten als SI-Einheiten an.

r, ϑ, φ: Kugelkoordinaten

Gegeben ist eine homogen geladene Kugel vom Radius R (Mittelpunkt im Koordinatenursprung) der konstanten Volumenladungsdichte $\rho = \rho_0$.

a.) Berechnen Sie das elektrische Feld dieser Ladungsverteilung (in Betrag und Richtung) im Innen- und im Außenraum der Kugel. Erstellen Sie für beide Fälle je eine (getrennte) übersichtliche Skizze, aus der alle von Ihnen eingeführten Längen und Größen eindeutig hervorgehen. (2,5 Punkte)

b.) Skizzieren Sie den Betrag des Feldes aus a.) als Funktion von r. Ist er überall stetig (mit Begründung)? (1 Punkt)

c.) Berechnen Sie die Energie, die (insgesamt) in dieser Ladungsverteilung gespeichert ist. (2,5 Punkte)

d.) Erläutern Sie (ohne Rechung), wie diese Energie entstanden sein könnte (z.B. durch welche Arbeit). (1 Punkt)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie weitgehend richtig rechnen und skizzieren.

b.w.

Aufgabe 3: Magnetische Kräfte und Felder (5 Punkte)

j_0, B_0, k, ω und r_0 sind positive Konstanten.

x, y, z: Kartesische Koordinaten, $r_\perp, \varphi, z$: Zylinderkoordinaten

a.) Gegen ist ein unendlich langer zylindrischer Leiter vom Radius R, der vom Strom der Stromdichte

$$\vec{j} = j_0 \, \exp(-r_\perp / r_0) \, \vec{e}_z$$

durchflossen wird.

Berechnen Sie das hiervon erzeugte Magnetfeld im Innen- und im Außenraum des Leiters in Betrag und Richtung. Erstellen Sie für beide Fälle je eine (getrennte) übersichtliche Skizze, aus der alle von Ihnen eingeführten Längen und Größen eindeutig hervorgehen. (3 Punkte)

b.) Gegeben ist das Magnetfeld:

$$\vec{B} = B_0 \exp[i(kx - \omega t)] \, \vec{e}_y$$

Wie groß ist das Oberflächenintegral dieses Feldes

$$\oiint \vec{B} \cdot \vec{df}$$

über die geschlossene Fläche eines Würfels der Seitenlänge a mit $x \in [0, a]$, $y \in [0, a]$, $z \in [0, a]$? (Rechnung oder Begründung ist verlangt!) (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie weitgehend richtig rechnen und skizzieren.

Aufgabe 4: Maxwell-Gleichungen (5 Punkte)

E_0, k und ω seien positive Konstanten.

a.) Gegeben ist eine elektromagnetische Welle mit den Komponenten des E-Feldes:

$$E_x = E_0 \, \cos(kz - \omega t), \quad E_y = E_0 \, \cos(kz - \omega t + \frac{\pi}{2})$$

In welche Richtung bewegt sich die Welle (mit kurzer Begründung)? (1 Punkt)

b.) Beschreiben Sie in 1-2 Sätzen den Begriff "Polarisierung".

Erklären Sie dann anhand einer Skizze, ob die Welle aus a.) polarisiert ist. Wenn ja, wie? (2 Punkte)

c.) Berechnen Sie das zu $\vec{E}$ gehörige $\vec{B}$-Feld. Machen Sie deutlich, welches Gesetz Sie dazu benutzen. (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie weitgehend richtig rechnen und beschreiben.

Formelsammlung

Zylinderkoord.: $\vec{r} = r_\perp \, \vec{e}_{r_\perp} + z\vec{e}_z, \qquad \vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$

$$\vec{\nabla} V(r_\perp, \varphi, z) = \vec{e}_{r_\perp} \frac{\partial V}{\partial r_\perp} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{C}(r_\perp, \varphi, z) = \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial (r_\perp C_{r_\perp})}{\partial r_\perp} + \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial C_z}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{C}(r_\perp, \varphi, z) = \vec{e}_{r_\perp} \left(\frac{1}{r_\perp} \frac{\partial C_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial C_\varphi}{\partial z} \right) + \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r_\perp} \right) + \vec{e}_z \frac{1}{r_\perp} \left(\frac{\partial (r_\perp C_\varphi)}{\partial r_\perp} - \frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial \varphi} \right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r_\perp, \varphi, z) = \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial}{\partial r_\perp} \left(r_\perp \frac{\partial V}{\partial r_\perp} \right) + \frac{1}{r_\perp^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Kugelkoordinaten: $\qquad x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$

$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta).$

$$\vec{\nabla} V(r, \vartheta, \varphi) = \vec{e}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi},$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 C_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta} \frac{\partial (\sin\vartheta C_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{C}(r, \vartheta, \varphi) =$$

$$= \vec{e}_r \frac{1}{r\sin\vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin\vartheta C_\varphi) - \frac{\partial C_\vartheta}{\partial \varphi} \right) + \vec{e}_\vartheta \left(\frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial C_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r C_\varphi)}{\partial r} \right) + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r C_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial \vartheta} \right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$

Kurven- und Flächenelemente (Richtungsvektoren bitte selbst überlegen!):

Kreislinie (Radius R) in oder parallel zu xy-Ebene: $ds = R\, d\varphi$.

Kreislinie (Radius R) entlang Längengrad: $ds = R\, d\vartheta$

Kreisfläche in oder parallel zu xy-Ebene: $df = r\, dr\, d\varphi$

Kugeloberfläche: $df = R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$

Zylindermantel: $df = R\; d\varphi\, dz$

Integralsätze:

$$\text{Gauss:} \quad \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\, dV = \oiint \vec{A} \cdot d\vec{f}, \qquad \text{Stokes:} \quad \int\!\!\int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{f} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

$$\text{Potenzial:} \quad \phi(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\rho_V(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\text{Spannung:} \quad U = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$\text{Strom und Stromdichte:} \quad I = \int\!\!\int \vec{j} \cdot d\vec{f}, \qquad \text{und} \quad \vec{j} = \rho_V(\vec{r})\, \vec{v}$$

$$\text{Energie:} \quad E_g = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r\, |\vec{E}(\vec{r})|^2$$

b.w.

Taylor in $d=1$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n, \qquad f(x_0+\Delta x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n,$$

Taylor in $d=3$:

$$\begin{aligned}
\phi(\vec r_0+\Delta\vec r) \;&=\; \phi(\vec r_0)+\left.\frac{\partial\phi(\vec r)}{\partial x}\right|_{\vec r_0}\Delta x+\left.\frac{\partial\phi(\vec r)}{\partial y}\right|_{\vec r_0}\Delta y+\left.\frac{\partial\phi(\vec r)}{\partial z}\right|_{\vec r_0}\Delta z+\\
&+\frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2\phi(\vec r)}{\partial x^2}\right|_{\vec r_0}\Delta x\,\Delta x+\left.\frac{\partial^2\phi(\vec r)}{\partial x\partial y}\right|_{\vec r_0}\Delta x\,\Delta y+\left.\frac{\partial^2\phi(\vec r)}{\partial x\partial z}\right|_{\vec r_0}\Delta x\,\Delta z+\dots+\left.\frac{\partial^2\phi(\vec r)}{\partial z^2}\right|_{\vec r_0}\Delta z\,\Delta z\right]+\\
&\quad+\quad\frac{1}{3!}(\text{3. Ableitungen})\quad+\quad\frac{1}{4!}(\text{4. Ableitungen})\quad\dots+\dots
\end{aligned}$$

$$\text{Dipolmoment:}\quad \vec p=\sum_j \vec r_j q_j\to\int \vec r\rho_V(\vec r)\,dV \qquad \text{Dipolpotenzial:}\quad \phi_{\text{Dipol}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\vec r\cdot\vec p}{r^3}$$

$$\vec E_{\text{Dipol}}=-\vec\nabla\phi_{\text{Dipol}}=-\vec\nabla\frac{\vec r\cdot\vec p}{r^3}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{3\vec r(\vec p\cdot\vec r)-\vec p r^2}{r^5}$$

$$\text{Poisson-Gleichung:}\quad \Delta\phi(\vec r)=-\frac{\rho_V(\vec r)}{\epsilon_0}$$

$$\text{Relativitätstheorie:}\quad\text{LT:}\qquad x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\qquad ct'=\frac{ct-vx/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\text{Inv. LT:}\qquad x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\qquad ct=\frac{ct'+vx'/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\text{Magn. Moment:}\quad \vec m=\frac{1}{2}\int d^3r\,(\vec r\times\vec j(\vec r))\qquad\to\qquad \vec m=\frac{1}{2}I\int\vec r\times d\vec r,$$

$$\text{... einer Leiterschleife:}\quad \vec m=IF\,\vec n,$$

$$\text{Drehmoment:}\quad \vec N=\vec m\times\vec B,$$

1. Ampèresches Gesetz:

$$\vec F_{12}=\vec F_{2\to1}=\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec r_1\times(d\vec r_2\times\vec r_{12})}{r_{12}^3}=-\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}(d\vec r_1\cdot d\vec r_2)\frac{\vec r_{12}}{r_{12}^3},$$

$$\text{Biot-Savart:}\quad \vec B_2(\vec r_1)=\frac{\mu_0I_2}{4\pi}\oint_{C_2}\frac{d\vec r_2\times\vec r_{12}}{r_{12}^3},\quad \vec F_{12}=I_1\oint_{C_1}d\vec r_1\times\vec B_2(\vec r_1)$$

$$\text{Spule:}\quad |\vec B|=\frac{\mu_0NI}{\ell},\quad\text{Selbstinduktivität:}\quad L=\mu_r\mu_0\frac{N^2}{\ell}f$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung:}\quad \frac{\partial\rho(\vec r)}{\partial t}=-\vec\nabla\cdot\vec j(\vec r)$$

Wellengleichungen (für $\rho=0$, $\vec j=0$) für jede Komponente E_i, B_i:

$$\Delta E_i=\frac{1}{c'^{\,2}}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_i,\quad \Delta B_i=\frac{1}{c'^{\,2}}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}B_i,\qquad k=\frac{\omega}{c'},\quad c'=\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_r\mu_r}}$$