# KLAUSURAUFGABEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK II (LAK)

**Sommersemester 2021, Freitag, 27.8.20, 10:15 Uhr**

**Sie schreiben bitte ausschließlich auf den zusätzlich verteilten Schreibvorlagen!**
Benutzen Sie davon wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
**Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite! (Egal ob Vorder- oder Rückseite)**
Beachten Sie auch die Formelsammlung.

Punkte: 6 / 6 / 7 / 7 Summe: 26 (bestanden ab 13 Punkten)

**Aufgabe 1: Ladungen und Felder (6 Punkte)**

$A$ ist eine Konstante mit positivem Wert. $r, \vartheta, \varphi$ sind die Kugelkoordinaten.

Gegeben sei eine Hohlkugel mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung, dem Innenradius $R/2$ und dem Außenradius $R$. Die elektrische Ladungsdichte $\rho(r, \vartheta, \varphi)$ betrage:

$$\rho(r, \vartheta, \varphi) = A\, r^2$$

für $R/2 < r < R$ und ansonsten 0.

a.) Erstellen Sie eine ungefähre Skizze der Hohlkugel mit ihrer Ladungsverteilung. (1 Punkt)

b.) Berechnen Sie die Gesamtladung $Q$ der Hohlkugel. (3 Punkte)

c.) Verursacht die Hohlkugel (i) ein elektrisches Feld, (ii) ein Magnetfeld oder (c) beides? (ohne Begründung) (1 Punkt)

d.) Die Hohlkugel sei nun entfernt. Dafür haben wir jetzt eine Punktladung $q$ am Koordinatenursprung. Wie lautet deren Feld in Betrag und Richtung? Die Rechnung ist nicht verlangt. (1 Punkt)

**2. Coulombkraft: (6 Punkte)**

Gegeben seien die beiden Ladungen $Q_1 = 2q$ am Punkt $\vec{r}_1 = (a, 0, 0)$ und $Q_2 = 2q$ am Punkt $\vec{r}_2 = (0, 0, 2a)$.

a.) Berechnen Sie das $\vec{E}$-Feld, das von beiden Ladungen gemeinsam erzeugt wird. (1 Punkt)

b.) Finden Sie einen Punkt $\vec{r}_0$ im Raum, an dem das Feld aus a.) Null ist. (Es gibt mehrere mögliche Antworten). (2 Punkte)

c.) Welche Arbeit fällt an, um eine dritte Ladung $Q_3 = -q$ vom Ort $(0, 0, 0)$ zum Ort $(0, 0, a)$ zu befördern? (3 Punkte)

Darstellung der Lösung: Setzen Sie alle gegebenen Koordinaten ein und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

b.w.

## 3. Biot-Savart (7 Punkte)

Gegeben ist ein unendlich langer dünner Draht, der gebogen ist, wie in der Abb. gezeigt und der vom konstanten Strom $I$ (technische Stromrichtung gegen den Uhrzeigersinn) durchflossen wird.

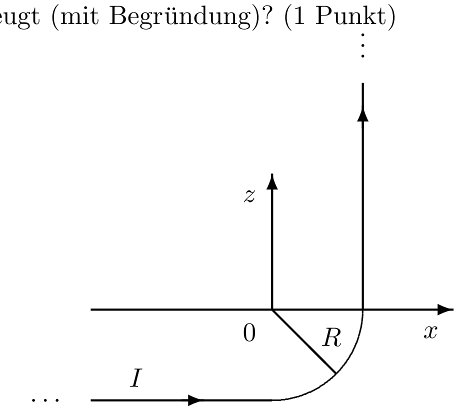
a.) Berechnen Sie das $\vec{B}$-Feld am Koordinatenursprung, d.h. den Wert $\vec{B}(0,0,0)$ in Betrag und Richtung nach dem Gesetz von Biot-Savart, indem Sie das Integral in 3 Teile aufspalten (in die beiden geraden Stücke sowie das viertelkreisförmige Stück).

Benutzen Sie an gegebener Stelle eine der folgenden Stammfunktionen:

$$\int \frac{du}{(a^2+u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2(a^2+u^2)^{1/2}}, \quad \int \sqrt{au+b}\, du = \frac{2}{3a}\sqrt{au+b}^3, \quad \int u\sqrt{a^2+u^2}\, du = \frac{1}{3}\sqrt{a^2+u^2}^3$$

(6 Punkte)

b.) Wird von diesem Strom eine elektromagnetische Welle erzeugt (mit Begründung)? (1 Punkt)




1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie weitgehend richtig rechnen und beschreiben.

## 4. Elektromagnetische Welle (7 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir elektromagnetische Wellen im Vakuum mit Ladungsdichte $\rho = 0$ und Stromdichte $\vec{j} = 0$.

a.) Schreiben Sie das $\vec{E}$-Feld einer elektromagnetischen Welle, die zirkular polarisiert ist und sich in die $z$-Richtung ausbreitet. (2 Punkte)

b.) Wie lautet der $\vec{k}$-Vektor dieser Welle? (1 Punkt)

c.) Wie lautet eine Maxwell-Gleichung mit Hilfe derer Sie das $\vec{B}$-Feld bestimmen können, das zu Ihrer Welle aus a.) gehört? Geben Sie sowohl die Gleichung, als auch ihren Namen an. (1 Punkt)

d.) Bestimmen Sie das $\vec{B}$-Feld, das zur Welle aus a.) gehört. (3 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie weitgehend richtig rechnen und beschreiben.

# Formelsammlung

Zylinderkoord.: $\vec{r} = r_\perp \, \vec{e}_{r_\perp} + z\vec{e}_z, \qquad \vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$

$$\vec{\nabla}V(r_\perp,\varphi,z) = \vec{e}_{r_\perp}\frac{\partial V}{\partial r_\perp} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r_\perp}\frac{\partial V}{\partial\varphi} + \vec{e}_z\frac{\partial V}{\partial z}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{C}(r_\perp,\varphi,z) = \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial(r_\perp C_{r_\perp})}{\partial r_\perp} + \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial C_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial C_z}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{C}(r_\perp,\varphi,z) = \vec{e}_{r_\perp}\left(\frac{1}{r_\perp}\frac{\partial C_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial C_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r_\perp}\right) + \vec{e}_z\frac{1}{r_\perp}\left(\frac{\partial(r_\perp C_\varphi)}{\partial r_\perp} - \frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial\varphi}\right),$$

$$\vec{\nabla}^2V(r_\perp,\varphi,z) = \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial}{\partial r_\perp}\left(r_\perp\frac{\partial V}{\partial r_\perp}\right) + \frac{1}{r_\perp^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Kugelkoordinaten: $\qquad x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$

$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta).$

$$\vec{\nabla}V(r,\vartheta,\varphi) = \vec{e}_r\frac{\partial V}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\vartheta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial\varphi},$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{C}(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2C_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta C_\vartheta)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{C}(r,\vartheta,\varphi) =$$

$$= \vec{e}_r\frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta C_\varphi) - \frac{\partial C_\vartheta}{\partial\varphi}\right) + \vec{e}_\vartheta\left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rC_\varphi)}{\partial r}\right) + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rC_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial\vartheta}\right),$$

$$\vec{\nabla}^2V(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}.$$

Kurven- und Flächenelemente (Richtungsvektoren bitte selbst überlegen!):

Kreislinie (Radius $R$) in oder parallel zu $xy$-Ebene: $ds = R\,d\varphi$.

Kreislinie (Radius $R$) entlang Längengrad: $ds = R\,d\vartheta$

Kreisfläche in oder parallel zu $xy$-Ebene: $df = r\,dr\,d\varphi$

Kugeloberfläche: $df = R^2\,\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$

Zylindermantel: $df = R\;d\varphi\,dz$

Integralsätze:

$$\text{Gauss:} \quad \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV = \oiint \vec{A}\cdot d\vec{f}, \qquad \text{Stokes:} \quad \int\int(\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{f} = \oint \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

$$\text{Potenzial:} \quad \phi(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_j\frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho_V(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_r\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\text{Spannung:} \quad U = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

$$\text{Strom und Stromdichte:} \quad I = \int\int\vec{j}\cdot d\vec{f}, \qquad \text{und} \quad \vec{j} = \rho_V(\vec{r})\,\vec{v}$$

$$\text{Energie:} \quad E_g = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3r\,|\vec{E}(\vec{r})|^2$$

b.w.

Taylor in $d = 1$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \qquad f(x_0 + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n,$$

Taylor in $d = 3$:

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) \quad = \quad & \phi(\vec{r}_0) + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial y}\right|_{\vec{r}_0} \Delta y + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0} \Delta z + \\
& + \frac{1}{2!}\left[ \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x^2}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta x + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x\partial y}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta y + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x\partial z}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta z + \cdots + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial z^2}\right|_{\vec{r}_0} \Delta z\,\Delta z \right] + \\
& \quad + \quad \frac{1}{3!}(\text{3. Ableitungen}) \quad + \quad \frac{1}{4!}(\text{4. Ableitungen}) \quad \cdots + \ldots
\end{aligned}$$

$$\text{Dipolmoment:} \quad \vec{p} = \sum_j \vec{r}_j q_j \to \int \vec{r}\rho_V(\vec{r})\, dV \qquad \text{Dipolpotenzial:} \quad \phi_{\text{Dipol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\, \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}$$

$$\vec{E}_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\phi_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\, \frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r}) - \vec{p}r^2}{r^5}$$

$$\text{Poisson-Gleichung:} \quad \Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_V(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\text{Relativitätstheorie:} \quad \text{LT:} \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad ct' = \frac{ct - vx/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\text{Inv. LT:} \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad ct = \frac{ct' + vx'/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\text{Magn. Moment:} \quad \vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r\, (\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})) \qquad \to \qquad \vec{m} = \frac{1}{2} I \int \vec{r}\times d\vec{r},$$

$$\text{... einer Leiterschleife:} \quad \vec{m} = IF\,\vec{n},$$

$$\text{Drehmoment:} \quad \vec{N} = \vec{m}\times\vec{B},$$

1. Ampèresches Gesetz:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{2\to 1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{C_1}\int_{C_2} \frac{d\vec{r}_1 \times (d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3},\ \vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1}\oint_{C_2} (d\vec{r}_1\cdot d\vec{r}_2)\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3},$$

$$\text{Biot-Savart:} \quad \vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\int_{C_2} \frac{d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad \vec{F}_{12} = I_1 \int_{C_1} d\vec{r}_1 \times \vec{B}(\vec{r}_1)$$

$$\text{Spule:} \quad |\vec{B}| = \frac{\mu_0 N I}{\ell}, \quad \text{Selbstinduktivität:} \quad L = \mu_r\mu_0 \frac{N^2}{\ell} f$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung:} \quad \frac{\partial\rho(\vec{r})}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r})$$

Wellengleichungen (für $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) für jede Komponente $E_i$, $B_i$:

$$\Delta E_i = \frac{1}{c'^{\,2}}\, \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_i, \quad \Delta B_i = \frac{1}{c'^{\,2}}\, \frac{\partial^2}{\partial t^2} B_i, \qquad k = \frac{\omega}{c'}, \quad c' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_r\mu_r}}$$