KLAUSURAUFGABEN ZUR THEO. PHYSIK II (NACHKLAUSUR LAK)

Sommersemester 2022, Mittwoch, 12.10.22, 14:15 Uhr

Sie schreiben bitte ausschließlich auf den zusätzlich verteilten Schreibvorlagen!
Benutzen Sie davon wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite! (Egal ob Vorder- oder Rückseite)
Beachten Sie auch die Formelsammlung.

Punkte: 6 / 7 / 6 / 5 Summe: 24 (bestanden ab 12 Punkten)

Aufgabe 1: Grundwissen (6 Punkte)

a.) Durch welchen Punkt (x/y) geht die Tangente an die Funktion $f(x) = 2x^2 - 3x$ an der Stelle $x = 2$ und welche Steigung besitzt sie? (1 Punkt)

b.) Berechnen Sie/ Vereinfachen Sie soweit wie möglich unter Verwendung der binomischen Formeln (1 Punkt):

$$(i) \quad (\sqrt{8} - \sqrt{2})^2, \qquad (ii) \quad \frac{a^2}{a-b} - \frac{b^2}{a-b}$$

c.) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \exp(-x^2)$ bis zur 2. Ordnung in eine Taylorreihe um den Punkt $x_0 = 0$.

Skizzieren Sie $f(x)$ sowie das Taylorpolynom in ein gemeinsames Koordinatensystem und markieren Sie die Abweichung zwischen beiden am Punkt $x = 1$. (2 Punkte)

d.) Welche der 4 Maxwellgleichungen beschreibt die Wirbel des elektrischen Feldes? (Name + Formel sind verlangt). (1 Punkt)

e.) Eine Ladung Q ruht relativ zum Zimmer. Ein Beobachter A bewegt sich mit der Geschwindigkeit v durch das Zimmer. Welche Felder (Elektrisch/ Magnetisch/ beides/ keines von beiden) nimmt A wahr? (Mit kurzer Begründung).
(1 Punkt)

Aufgabe 2: Gauß'sches Gesetz (7 Punkte)

ρ_0, a sind positive Konstanten.

Gegeben ist eine Kugel vom Radius a der Ladungsdichte $\rho(r) = \frac{\rho_0}{r} \exp(r^2/a^2)$ für $r > 0$.

a.) Welche Form des $\vec{E}$-Feldes $\vec{E}(r, \vartheta, \varphi)$ erwarten Sie? Berechnen Sie daraus das Flussintegral, das im Gauß'schen Gesetz benötigt wird (1 Punkt)
(Ihre Antwort kann die Bepunktung im weiteren Verlauf der Aufgabe beeinflussen.)

b.) Berechnen Sie das $\vec{E}$-Feld im **Innen**raum der Kugel. (Sie können annehmen, dass $r > 0$). Erstellen Sie dazu eine übersichtliche Skizze, aus der alle in der Aufgabenstellung genannten Längen ersichtlich sind (ebenso alle eventuell selbst eingeführten Längen). (2 Punkte)

Hinweis für b.) und c.): Das auftretende Integral lässt sich erraten oder durch eine passende Substitution lösen.

c.) Berechnen Sie das $\vec{E}$-Feld im **Außen**raum der Kugel. Erstellen Sie dazu eine übersichtliche Skizze, aus der alle in der Aufgabenstellung genannten Längen ersichtlich sind (ebenso alle eventuell selbst eingeführten Längen). (1.5 Punkte)

d.) Untersuchen Sie durch Rechnung, ob das $\vec{E}$-Feld am Kugelrand stetig ist. (1 Punkt)

e.) Gegeben ist eine (neue) Kugel, die in ihrer oberen Hälfte die (konstante) Ladungsdichte $+\rho_0$ und in ihrer unteren Hälfte die (konstante) Ladungsdichte $-\rho_0$ trägt.

Skizzieren Sie, welches $\vec{E}$-Feld Sie für diese Kugel (ungefähr) erwarten.

Lässt sich auch das $\vec{E}$-Feld dieser Kugel mit Hilfe des Gauß'schen Gesetzes berechnen? Begründen Sie ihre Meinung möglichst prägnant. Rechnung ist nicht verlangt! (1.5 Punkte).

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie weitgehend richtig rechnen und beschreiben.

b.w.

Aufgabe 3: Relativitätstheorie (6 Punkte)

Um 0 Uhr passiert ein Raumschiff (System S') die Erde (System S) mit der Geschwindigkeit $v = (4/5)\,c$. Sowohl die RS- als auch die Erdzeit beträgt in diesem Moment 0 Uhr. Gegeben ist außerdem eine Raumstation, die relativ zur Erde ruht und deren Uhren Erdzeit anzeigen. Sie befindet sich am Ort $x_R = 2\,ch$ (in Erdkoordinaten), so dass Erde, Raumschiff und Raumstation zu jeder Zeit auf einer Linie liegen.

Lösen Sie alle folgenden Fragen zunächst rechnerisch!

Benennen Sie alle Koordinaten verständlich mit den Indizes A, B ...

a.) Um wieviel Uhr passiert das Raumschiff die Raumstation (Ereignis A) aus Sicht der Erde. (1 Punkt)

b.) Um wieviel Uhr passiert das Raumschiff die Raumstation in seinen eigenen Koordinaten? (1 Punkt)

c.) Als das Raumschiff an der Raumstation vorbeifliegt, schickt es ein Lichtsignal in Richtung Erde. Zu welcher Raumschiffzeit kommt dieses auf der Erde an? (2 Punkte)

d.) Zeichnen Sie Erde, Raumschiff und Raumstation in ein Minkowski-Diagramm Ihrer Wahl. Markieren Sie Ereignis A (Vorbeiflug des Raumschiffs an der Raumstation) sowie den Lichtstrahl. (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie weitgehend richtig rechnen und beschreiben.

Aufgabe 4: Elektromagnetische Wellen: (5 Punkte)

Gegeben ist eine elektromagnetische Welle im Vakuum mit dem $\vec{E}$-Feld:

$$\vec{E} = E_1\,\cos(qx - \omega t)\,\vec{e}_y + E_2\,\cos(qx - \omega t + \pi/2)\,\vec{e}_z.$$

Es gelte $E_1 > E_2$.

a.) In welche Richtung bewegt sich die Welle? (mit Begründung) (1 Punkt)

b.) Skizzieren Sie den Weg (mit Richtung), den die Spitze des $\vec{E}$-Vektors nimmt in ein geeignetes Koordinatensystem. Beschriften Sie die Achsen! Ist die Welle polarisiert, wenn ja in welcher Weise? (2 Punkte)

c.) Zeigen Sie für eine der Komponenten Ihrer Wahl, unter welcher Bedingung diese die Wellengleichung erfüllt. Wie lautet diese Bedingung? Unter welchem Namen ist diese Bedingung bekannt? (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie weitgehend richtig rechnen und beschreiben.

Formelsammlung

Zylinderkoord.: $\vec{r} = r_\perp \vec{e}_{r_\perp} + z\vec{e}_z, \qquad \vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$

$$\vec{\nabla} V(r_\perp, \varphi, z) = \vec{e}_{r_\perp} \frac{\partial V}{\partial r_\perp} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{C}(r_\perp, \varphi, z) = \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial (r_\perp C_{r_\perp})}{\partial r_\perp} + \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial C_z}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{C}(r_\perp, \varphi, z) = \vec{e}_{r_\perp} \left(\frac{1}{r_\perp} \frac{\partial C_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial C_\varphi}{\partial z} \right) + \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r_\perp} \right) + \vec{e}_z \frac{1}{r_\perp} \left(\frac{\partial (r_\perp C_\varphi)}{\partial r_\perp} - \frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial \varphi} \right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r_\perp, \varphi, z) = \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial}{\partial r_\perp} \left(r_\perp \frac{\partial V}{\partial r_\perp} \right) + \frac{1}{r_\perp^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Kugelkoordinaten: $x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$

$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta).$

$$\vec{\nabla} V(r, \vartheta, \varphi) = \vec{e}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi},$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 C_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta} \frac{\partial (\sin\vartheta C_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta} \frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{C}(r, \vartheta, \varphi) =$$

$$= \vec{e}_r \frac{1}{r\sin\vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin\vartheta C_\varphi) - \frac{\partial C_\vartheta}{\partial \varphi} \right) + \vec{e}_\vartheta \left(\frac{1}{r\sin\vartheta} \frac{\partial C_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r C_\varphi)}{\partial r} \right) + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r C_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial \vartheta} \right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$

Kurven- und Flächenelemente (Richtungsvektoren bitte selbst überlegen!):

Kreislinie (Radius R) in oder parallel zu xy-Ebene: $ds = R\,d\varphi$.

Kreislinie (Radius R) entlang Längengrad: $ds = R\,d\vartheta$

Kreisfläche in oder parallel zu xy-Ebene: $df = r\,dr\,d\varphi$

Kugeloberfläche: $df = R^2 \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$

Zylindermantel: $df = R\;d\varphi\,dz$

Integralsätze:

$$\text{Gauss:} \quad \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\,dV = \oiint \vec{A} \cdot d\vec{f}, \qquad \text{Stokes:} \quad \int\int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{f} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

$$\text{Potenzial:} \quad \phi(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\rho_V(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\text{Spannung:} \quad U = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$\text{Strom und Stromdichte:} \quad I = \int\int \vec{j} \cdot d\vec{f}, \qquad \text{und} \quad \vec{j} = \rho_V(\vec{r})\,\vec{v}$$

$$\text{Energie:} \quad E_g = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r\,|\vec{E}(\vec{r})|^2$$

b.w.

Taylor in $d = 1$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \qquad f(x_0 + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n,$$

Taylor in $d = 3$:

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) \quad = \quad & \phi(\vec{r}_0) + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial y}\right|_{\vec{r}_0} \Delta y + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0} \Delta z + \\
& + \frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x^2}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\, \Delta x + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x \partial y}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\, \Delta y + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x \partial z}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\, \Delta z + \cdots + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial z^2}\right|_{\vec{r}_0} \Delta z\, \Delta z \right] + \\
& \quad + \quad \frac{1}{3!}(\text{3. Ableitungen}) \quad + \quad \frac{1}{4!}(\text{4. Ableitungen}) \quad \cdots + \ldots
\end{aligned}$$

$$\text{Dipolmoment:} \quad \vec{p} = \sum_j \vec{r}_j q_j \to \int \vec{r} \rho_V(\vec{r})\, dV \qquad \text{Dipolpotenzial:} \quad \phi_{\text{Dipol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}$$

$$\vec{E}_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\phi_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r}) - \vec{p}r^2}{r^5}$$

$$\text{Poisson-Gleichung:} \quad \Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_V(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\begin{aligned}
\text{Relativitätstheorie:} \quad \text{LT:} \qquad & x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad ct' = \frac{ct - vx/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
\text{Inv. LT:} \qquad & x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad ct = \frac{ct' + vx'/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}
\end{aligned}$$

$$\text{Magn. Moment:} \quad \vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r\, (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \qquad \to \qquad \vec{m} = \frac{1}{2} I \int \vec{r} \times d\vec{r},$$

$$\text{... einer Leiterschleife:} \quad \vec{m} = IF\,\vec{n},$$

$$\text{Drehmoment:} \quad \vec{N} = \vec{m} \times \vec{B},$$

1. Ampèresches Gesetz:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{2\to 1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1}\oint_{C_2} \frac{d\vec{r}_1 \times (d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1}\oint_{C_2} (d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2)\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3},$$

$$\text{Biot-Savart:} \quad \vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad \vec{F}_{12} = I_1 \oint_{C_1} d\vec{r}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1)$$

$$\text{Spule:} \quad |\vec{B}| = \frac{\mu_0 N I}{\ell}, \quad \text{Selbstinduktivität:} \quad L = \mu_r \mu_0 \frac{N^2}{\ell} f$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung:} \quad \frac{\partial\rho(\vec{r})}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r})$$

Wellengleichungen (für $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) für jede Komponente E_i, B_i:

$$\Delta E_i = \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} E_i, \quad \Delta B_i = \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} B_i, \qquad k = \frac{\omega}{c'}, \quad c' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \mu_r}}$$