KLAUSURAUFGABEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK II (LAK)

Sommersemester 2023, Montag, 9.10.23, 10:15 Uhr

Sie schreiben bitte ausschließlich auf den zusätzlich verteilten Schreibvorlagen!
Benutzen Sie davon wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite! (Egal ob Vorder- oder Rückseite)
Beachten Sie auch die Formelsammlung.

Punkte: 6 / 6 / 6 / 4 Summe: 22 (bestanden ab 11 Punkten)

Aufgabe 1: Grundwissen (6 Punkte) a, b, c, v, Q sind Konstanten mit positiven Werten.

a.) Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{A} = (a, b, c)$ und $\vec{B} = b\,\vec{e}_x - a\,\vec{e}_y$. Bilden Sie (1 Punkt)

$$\vec{A} - \vec{B}, \qquad \vec{A} \cdot \vec{B}, \qquad \vec{A} \times \vec{B}, \qquad |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2.$$

b.) Berechnen Sie: (1 Punkt)

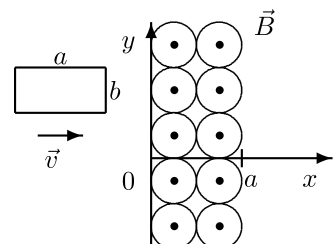
$$\frac{\partial}{\partial t} \int \sin(ax - ct)\, dx.$$

c.) $\vec{r}$ ist der Ortsvektor. Berechnen Sie $\vec{\nabla} r$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$ (mit $|\vec{r}| = r$). (1 Punkt)

d.) Ein Raumschiff fliegt mit der Geschwindigkeit $v/c = \sqrt{11}/6$. Berechnen Sie den Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ als natürlichen Bruch. (1 Punkt)

e.) Gegeben sind drei Punktladungen Q am Ort $\vec{r}_1 = (0, 0, 0)$, Q am Ort $\vec{r}_2 = (0, 2a, 0)$ und $2Q$ am Ort $\vec{r}_3 = (2a, 2a, 2a)$. Wie lautet das von allen Ladungen gemeinsam erzeugte elektrische Feld $\vec{E}$?
Welche Kraft üben diese drei Ladungen gemeinsam auf eine Probeladung q am Ort $\vec{r}_4 = (a, a, a)$ aus?
Setzen Sie die gegebenen Größen ein und vereinfachen Sie so weit wie möglich! (2 Punkte)

Aufgabe 2: (6 Punkte)



a, b, B_0, v, τ sind Konstanten mit positiven Werten.

a.) Gegeben ist das (zeitlich) konstante Magnetfeld $\vec{B} = B_0\,(0, 0, 1)$ sowie eine rechteckige Schleife der Seitenlängen a und b in der xy-Ebene, wobei ihre Seiten parallel zu x- und y-Achse ausgerichtet sind. Das Magnetfeld bedeckt in x-Richtung einen Streifen der Breite a der xy-Ebene und ist in y-Richtung deutlich breiter als die Schleife.

Die Schleife wird mit der konstanten Geschwindigkeit $v = a/\tau$ in x-Richtung durch das Magnetfeld gezogen, wobei die Seite der Länge b vorne liegt (siehe Skizze).

Zum Zeitpunkt $t = \tau$ tritt die Schleife mit ihrer Vorderseite (der Breite b) in das Magnetfeld ein. Berechnen Sie den magnetischen Fluss $\Phi(t)$ (durch die Schleife), sowie die induzierte Spannung $U(t)$ für $0 \leq t \leq 4\tau$.

Skizzieren Sie $\Phi(t)$ und $U(t)$ als Funktion von t für $0 \leq t \leq 4\tau$. (4 Punkte)

b.) Gegeben ist das zeitabhängige $\vec{B}$-Feld:

$$\vec{B} = B_0\, \sin^2(2\pi t/\tau)\, \vec{e}_z$$

(diesmal innerhalb der xy-Ebene unendlich ausgedehnt) sowie die rechteckige Schleife der Seitenlängen a und b in der xy-Ebene aus a.) Diesmal soll sich die Schleife jedoch nicht bewegen, sondern ruhig auf dem Tisch liegen. Berechnen Sie wieder die induzierte Spannung $U(t)$. (2 Punkte)

Hinweis: Die beiden Teilaufgaben lassen sich unabhängig voneinander bearbeiten!

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie weitgehend richtig rechnen und skizzieren.

b.w.

Aufgabe 3: Relativitätstheorie (6 Punkte)

Um 0 Uhr passiert ein Raumschiff die Erde mit der Geschwindigkeit $v/c = \sqrt{11}/6$. (Beachten Sie Aufgabe 1d). Sowohl die Raumschiff- als auch die Erdzeit beträgt in diesem Moment 0 Uhr.

Beantworten Sie alle Fragen zunächst rechnerisch!

Geben Sie im Folgenden alle Zeiten/Zeitintervalle in Stunden, und alle Längen in Lichtstunden an.

a.) Um 2 Uhr Erdzeit beginnt auf dem Raumschiff eine Geburtstagsfeier. Wieviel Uhr ist es zu Beginn dieser Feier auf dem Raumschiffs? (1 Punkt)

b.) Die Feier dauert (auf dem Raumschiff) 3 Stunden. Wie lange dauert sie aus Sicht der Erde? (1.5 Punkte)

c.) Die Erde schickt um 3 Uhr ihrer Zeit ein Glückwunschtelegramm (Signal mit Lichtgeschwindigkeit) in Richtung Raumschiff. Zu welcher Erdzeit kommt dieses beim Raumschiff an? (1.5 Punkte)

d.) Zeichnen Sie ein Minkowski-Diagramm Ihrer Wahl. Markieren Sie Beginn und Ende der Feier (als Ereignisse) und beschriften Sie diese verständlich. Skizzieren Sie auch den Weg des Signals. Kommt es noch während der Feier auf dem Raumschiff an?

Nehmen Sie zum Zeichnen etwa $v \approx 0.5\,c$ an (auch wenn dieser Wert nicht ganz exakt ist). Es wird keine hohe Genauigkeit beim Zeichnen erwartet. (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie weitgehend richtig rechnen und skizzieren.

Aufgabe 4: Elektromagnetische Wellen (4 Punkte)

Der $\vec{E}$-Vektor einer elektromagnetischen Welle soll in eine beliebige Richtung $\vec{e}$ schwingen, d.h. er habe die Form $\vec{E} = E_i\,\vec{e}$, mit:

$$E_i = A\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \qquad (*)$$

mit dem konstanten Wellenvektor $\vec{k}$, der Frequenz ω und einer beliebigen Konstanten A. (Der Richtungsvektor $\vec{e}$ spielt im Folgenden keine Rolle).

a.) Erläutern Sie in einigen Sätzen, warum zum Zeitpunkt $t = 0$, die Maxima von E_i ("Wellenfronten") in bestimmten Ebenen liegen. Gehen Sie auf die (mathematischen) Bedingungen ein, unter denen E_i maximal ist.

Wie sind diese Ebenen in Bezug auf $\vec{k}$ orientiert (mit Begründung)? (2 Punkte)

b.) Wie verändert sich die Lage der Wellenfronten von $(*)$ mit zunehmender Zeit t? Begründen Sie dies anhand einer Skizze. (2 Punkte)

Formelsammlung

Zylinderkoord.: $\vec{r} = r_\perp \vec{e}_{r_\perp} + z\vec{e}_z, \qquad \vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$

$$\vec{\nabla} V(r_\perp, \varphi, z) = \vec{e}_{r_\perp} \frac{\partial V}{\partial r_\perp} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{C}(r_\perp,\varphi,z) = \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial (r_\perp C_{r_\perp})}{\partial r_\perp} + \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial C_z}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{C}(r_\perp,\varphi,z) = \vec{e}_{r_\perp}\left(\frac{1}{r_\perp}\frac{\partial C_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial C_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r_\perp}\right) + \vec{e}_z \frac{1}{r_\perp}\left(\frac{\partial (r_\perp C_\varphi)}{\partial r_\perp} - \frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial \varphi}\right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r_\perp,\varphi,z) = \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial}{\partial r_\perp}\left(r_\perp \frac{\partial V}{\partial r_\perp}\right) + \frac{1}{r_\perp^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Kugelkoordinaten: $x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$

$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi,\cos\varphi,0), \quad \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta).$

$$\vec{\nabla}V(r,\vartheta,\varphi) = \vec{e}_r\frac{\partial V}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial\varphi},$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{C}(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 C_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta C_\vartheta)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{C}(r,\vartheta,\varphi) =$$

$$= \vec{e}_r \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta C_\varphi) - \frac{\partial C_\vartheta}{\partial\varphi}\right) + \vec{e}_\vartheta\left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rC_\varphi)}{\partial r}\right) + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rC_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial\vartheta}\right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}.$$

Kurven- und Flächenelemente (Richtungsvektoren bitte selbst überlegen!):

Kreislinie (Radius R) in oder parallel zu xy-Ebene: $ds = R\,d\varphi$.

Kreislinie (Radius R) entlang Längengrad: $ds = R\,d\vartheta$

Kreisfläche in oder parallel zu xy-Ebene: $df = r\,dr\,d\varphi$

Kugeloberfläche: $df = R^2\,\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$

Zylindermantel: $df = R\;d\varphi\,dz$

Integralsätze:

$$\text{Gauss:} \quad \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV = \oiint \vec{A}\cdot d\vec{f}, \qquad \text{Stokes:} \quad \int\int (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{f} = \oint \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

$$\text{Potenzial:} \quad \phi(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_j \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho_V(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_r\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\text{Spannung:} \quad U = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

$$\text{Strom und Stromdichte:} \quad I = \int\int \vec{j}\cdot d\vec{f}, \qquad \text{und} \quad \vec{j} = \rho_V(\vec{r})\,\vec{v}$$

$$\text{Energie:} \quad E_g = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3r\,|\vec{E}(\vec{r})|^2$$

b.w.

Taylor in $d = 1$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \qquad f(x_0 + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n,$$

Taylor in $d = 3$:

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) \quad = \quad & \phi(\vec{r}_0) + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial y}\right|_{\vec{r}_0} \Delta y + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0} \Delta z + \\
& + \frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x^2}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\, \Delta x + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x \partial y}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\, \Delta y + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x \partial z}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\, \Delta z + \cdots + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial z^2}\right|_{\vec{r}_0} \Delta z\, \Delta z \right] + \\
& \quad + \quad \frac{1}{3!}(\text{3. Ableitungen}) \quad + \quad \frac{1}{4!}(\text{4. Ableitungen}) \quad \cdots + \ldots
\end{aligned}$$

$$\text{Dipolmoment:} \quad \vec{p} = \sum_j \vec{r}_j q_j \to \int \vec{r}\rho_V(\vec{r})\, dV \qquad \text{Dipolpotenzial:} \quad \phi_{\text{Dipol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}$$

$$\vec{E}_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\phi_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r}) - \vec{p}r^2}{r^5}$$

$$\text{Poisson-Gleichung:} \quad \Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_V(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\text{Relativitätstheorie:} \quad \text{LT:} \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad ct' = \frac{ct - vx/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\text{Inv. LT:} \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad ct = \frac{ct' + vx'/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\text{Magn. Moment:} \quad \vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r\, (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \qquad \to \qquad \vec{m} = \frac{1}{2} I \int \vec{r} \times d\vec{r},$$

$$\text{... einer Leiterschleife:} \quad \vec{m} = IF\,\vec{n},$$

$$\text{Drehmoment:} \quad \vec{N} = \vec{m} \times \vec{B},$$

1. Ampèresches Gesetz:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{2\to 1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{r}_1 \times (d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} (d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2) \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3},$$

$$\text{Biot-Savart:} \quad \vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad \vec{F}_{12} = I_1 \oint_{C_1} d\vec{r}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1)$$

$$\text{Spule:} \quad |\vec{B}| = \frac{\mu_0 N I}{\ell}, \quad \text{Selbstinduktivität:} \quad L = \mu_r \mu_0 \frac{N^2}{\ell} f$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung:} \quad \frac{\partial\rho(\vec{r})}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r})$$

Wellengleichungen (für $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) für jede Komponente E_i, B_i:

$$\Delta E_i = \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} E_i, \quad \Delta B_i = \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} B_i, \qquad k = \frac{\omega}{c'}, \quad c' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_r\mu_r}}$$