AUFGABEN ZUR KLAUSUR ZUR THEORETISCHEN PHYSIK I (LAK)

Wintersemester 2022/23, Dienstag, 7.2.23, 10:00 Uhr

Auf S. 3 befindet sich eine Formelsammlung.
Erlaubte Unterlagen: keine (auch keine Taschenrechner)
Zeit: 90 Min

Punkte: 5 / 6 / 7 / 6 Summe: 24 (bestanden ab 12 Punkten)

Beantworten Sie alle Fragen nur auf den zusätzlich ausgeteilten Papier (wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides). Antworten auf diesem Aufgabenzettel werden nicht gewertet!

Aufgabe 1: Grundwissen (5 Punkte)

a.) Geben Sie für die folgenden Größen jeweils eine passende physikalische Einheit an (Begriff oder übliches Symbol). V ist das Potenzial (potenzielle Energie): (1 Punkt)

(1) Energie (2) $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$, (3) $\vec{\nabla} V(\vec{r})$ (4) Linearer Impuls

b.) Welche Lösungen besitzt die folgende Gleichung für $x \in \mathbb{C}$? (1 Punkt)

$$\frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{2}$$

c.) In welchen Bereichen ihres Definitionsbereichs ist die folgende Funktion monoton steigend, in welchen monoton fallend? (1.5 Punkte)

$$f(x) = x \exp(-x)$$

d.) Kürzen Sie so weit wie möglich: (0.5 Punkte)

$$\frac{\sqrt{4x-4}}{2\sqrt{x}}$$

e.) Sind die folgenden vier Größen **Vektoren** aus R^3 oder **Skalare**? (1 Punkt)

(1) Drehimpuls, (2) Potenzial (potenzielle Energie), (3) Linearer Impuls (4) Skalarprodukt

Nicht raten! Falsche Antworten ergeben Minuspunkte (innerhalb dieser Teilaufgabe)

Aufgabe 2: Analytische Mechanik (6 Punkte)

Ein Punktteilchen der Masse m rutscht unter dem Einfluss der Schwerkraft in einer parabelförmigen Fläche der Form $z = x^2$ und y beliebig.

a.) Wie viele Freiheitsgrade besitzt dieses Problem? Welche Koordinate(n) wählen Sie?
Hinweis: Bleiben Sie besser in kartesischen Koordinaten. (1 Punkt)

b.) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Problems auf. (1 Punkt)

c.) Untersuchen Sie, ob eine Koordinate zyklisch ist (mit Begründung!). Falls ja, geben Sie die zugehörige Erhaltungsgröße an (Form und Bezeichnung). (2 Punkte)

d.) Stellen Sie die Bewegungsgleichung(en) nach dem Lagrangeformalismus auf. (2 Punkte)

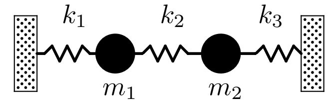
Sollten Sie b.) nicht geschafft haben, lösen Sie d.) bitte mit folgender Ersatz-Lagrangefunktion. (Diese hat mit der gestellten Aufgabe nichts zu tun):

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \sin(q) - mgq^2 \cos(q)$$

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie ohne den Ersatz (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Bitte wenden

Aufgabe 3: Gekoppelte Schwingungen (7 Punkte)



k und m sind positive Konstanten.

Gegeben sind 2 schwingende Massen, $m_1 = m$, $m_2 = 3m$, die mittels 3 Federn $k_1 = k$, $k_2 = k$ und $k_3 = 3k$ untereinander und mit den Wänden verbunden sind (siehe Abb.). Die Massen sollen waagrecht und frei schwingen (keine Schwerkraft, keine Reibung).

a.) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen der beiden Massen auf, wahlweise nach Newton oder Lagrange. (2 Punkte)

b.) Berechnen Sie alle Eigenfrequenzen. (2 Punkte)
Hinweis: Es sollte herauskommen: $\omega_1^2 = 1\,\frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{7}{3}\,\frac{k}{m}$.

c.) Berechnen Sie für eine Eigenfrequenz Ihrer Wahl das Verhältnis der Amplituden. Skizzieren Sie dies in (wahlweise) einem der Schemata aus der Vorlesung (also z.B. durch Pfeile an den Massen). (1 Punkt)

d.) Im Verlauf der Rechnung wird eine Determinante gleich Null gesetzt. Warum? Was wäre eine triviale und was wäre eine nichttriviale Lösung? Um welche Größen geht es dabei? – Beschreiben Sie diese Zusammenhänge in 2-3 verständlichen Sätzen. (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Aufgabe 4: Potenzial und Erhaltungssätze (6 Punkte)

k ist eine Konstante mit positivem Wert.

Gegeben ist folgendes Potenzial:

$$V = k\,(x^2 + y^2 + z^2).$$

In diesem Potenzial bewege sich ein punktförmiger Körper K.

a.) Welches Kraftfeld $\vec{F}$ folgt aus diesem Potenzial? Geben Sie $\vec{F}$ in kartesischen und in Kugelkoordinaten an. (1 Punkt)

b.) Ist die Energie des Körpers K erhalten (mit Begründung)? (1 Punkt)

c.) Sind für den Körper K linearer Impuls $\vec{p}$ und/oder Drehimpuls $\vec{L}$ erhalten (mit Begründung)? (2 Punkte)

d.) Erfolgt die Bewegung des Körpers K in einer Ebene und wie ist diese Ebene ggf. orientiert (mit Begründung)? (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

FORMELSAMMLUNG

Zylinderkoordinaten: $x = r_\perp \cos\varphi, \quad y = r_\perp \sin\varphi \quad z = z$

$\vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \qquad \vec{e}_z$ (müssen Sie kennen).

$$v^2 = \dot{r}_\perp^2 + r_\perp^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \qquad\qquad dV = r_\perp\, dr_\perp\, d\varphi\, dz$$

Kugelkoordinaten: $x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$

$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta),\ \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0),\ \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta)$.

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta, \qquad\qquad dV = r^2\,\sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

Kreisbewegung: $\vec{v}_{\mathrm{rot}} = \vec{\omega}\times\vec{r}, \quad \dot{\vec{e}}_{i'} = \vec{\omega}\times\vec{e}_{i'}$.

Reibungskräfte: Haftreibung $\vec{F}_{H,max} = -\mu_H|\vec{F}_\perp|\dfrac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$, Gleitreibung:$\vec{F}_G = -\mu_G|\vec{F}_\perp|\dfrac{\vec{v}}{v}$,

Viskose Reibung: Stokes'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_S\vec{v}$

Newton'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_N v\vec{v}$.

Eulersche Formeln: $\exp[\pm i\lambda t] = \cos[\lambda t] \pm i\sin[\lambda t]$

$\omega = 2\pi\nu, \quad \nu = 1/T,$ Oszillator: $\omega_0^2 = k/m,$ Pendel: $\omega_0^2 = g/\ell$

Komplexe Zahlen:

$$\chi = |\chi|\exp[i\varphi], \quad |\chi| = \sqrt{\chi\chi^*}, \quad \mathrm{Re}\,\chi = \frac{1}{2}(\chi + \chi*), \quad \mathrm{Im}\,\chi = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\chi - \chi*), \quad \tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}\,\chi}{\mathrm{Re}\,\chi}$$

Arbeit: $W_{21} = -\displaystyle\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r},$ Potenzial (potenzielle Energie): $V(\vec{r}) = -\displaystyle\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{F}\cdot d\vec{r}$

$$V = -\int^x F_x\,dx + f(y,z), \quad V = -\int^y F_y\,dy + f(x,z), \quad V = -\int^z F_z\,dz + f(x,y).$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}, \quad \vec{N} = \vec{s}\times\vec{F}, \quad \vec{L} \equiv m(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) = \vec{r}\times\vec{p}, \quad \vec{N} = \frac{d}{dt}\vec{L}$$

Hamilton-Bewegungsgleichungen: $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t}$.