KLAUSUR ZUR THEORETISCHEN PHYSIK I (LAK)

Wintersemester 2023/24, Donnerstag, 8.2.24, 10:00 Uhr

Sie schreiben bitte ausschließlich auf das zusätzlich verteilte Papier!
Benutzen Sie wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Auf S. 3 befindet sich eine Formelsammlung.
Erlaubte Unterlagen: keine (auch keine Taschenrechner)
Zeit: 90 Min

Punkte: 5 / 7 / 6 / 8 Summe: 26 (bestanden ab 13 Punkten)

Beantworten Sie alles auf dem zusätzlich verteilten Papier! Unterstreichungen und Antworten auf dieser Vorlage werden nicht gewertet!

Aufgabe 1: Grundwissen (5 Punkte)

a.) Lösen Sie nach x auf und schreiben Sie das Ergebnis ohne Doppelbrüche: (1 Punkt)

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{1}{c}$$

b.) Welche Masse M und welche Oberfläche A besitzt eine Kugel vom Radius R der konstanten Massendichte ρ_0? (1 Punkt)

c.) Skizzieren Sie folgende Funktion: $f(x) = -(x-2)^2 + 1$ (1 Punkt)

d.) Differenzieren Sie folgende Funktionen nach x: (1 Punkt)

$$f(x) = \sin^2(ax), \qquad g(x) = \exp(3x^2)$$

e.) Sind die folgenden Umformungen richtig (r) oder falsch (f)? - Beantworten Sie auch dies auf den zusätzlich verteilten Schreibvorlagen. (1 Punkt)

$$I. \quad (e^2)^3 = (e^3)^2 \qquad II. \quad e^{1/n} = 1/e^n \qquad III. \quad e^2 + e^3 = e^5 \qquad IV. \quad e^2 \cdot e^3 = e^6$$

Nicht raten! Falsche Antworten ergeben Punktabzug (innerhalb dieser Teilaufgabe).

Aufgabe 2: Kraft und Potenzial (7 Punkte)

α und a sind Konstanten mit positivem Wert.

Gegeben sind folgende Kräfte:

$$\vec{F}_1 = \alpha \dot{\vec{r}}, \qquad \vec{F}_2 = \alpha \left(\frac{z^2}{2} \cos(x), \, y^2, \, z \sin(x) \right)$$

a.) Besitzen die obigen Kraftfelder jeweils ein Potenzial (mit Begründung)? (1 Punkt)

b.) Falls ja, bestimmen Sie dieses Potenzial unter der Nebenbedingung $V(0,0,0) = 0$. (2 Punkte)

c.) Ist bei einer Bewegung durch das Kraftfeld $\vec{F}_2$ entlang der y-Achse die verrichtete Arbeit gleich Null? (mit Begründung) (1 Punkt)

d.) Berechnen Sie die anfallende Arbeit, wenn ein Körper durch das Kraftfeld $\vec{F}_2$ auf direktem Weg vom Punkt $(0, a, a)$ zum Punkt $(\pi, 0, 2a)$ befördert wird. (1 Punkt)

e.) Erklären Sie in 2-3 Sätzen, was "Wegunabhängigkeit" mit dem Begriff "Potenzial (potenzielle Energie)" $V(\vec{r})$ zu tun hat. Gehen Sie dabei ein auf die Fragen: Welche Größe muss wegunabhängig sein? Was ist überhaupt ein Potenzial?

Ihre Erklärung muss gut verständlich sein. (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Bitte wenden

Aufgabe 3: Bewegungsgleichung (6 Punkte)

k, μ und m sind positive Konstanten.

Gegeben ist ein Teilchen der Masse m, das sich im Einfluss der beiden Kräfte $\vec{F}_1 = -2\mu\dot{x}\,\vec{e}_x$ und $\vec{F}_2 = -5kx\,\vec{e}_x$ bewegt.

a.) Um welche Kraft (Schwer-, Feder-, Coulomb-, sonstige Kraft) handelt es sich jeweils - passende Konstanten vorausgesetzt? (1 Punkt)

b.) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für dieses Problem auf. (1 Punkt)

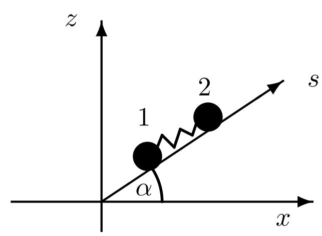
c.) Klassifizieren Sie diese Bewegungsgleichung mit mindestens 3 Begriffen wie z.B.: Homogen, partiell, etc. (bzw. ihren Gegenteilen). Begründungen sind nicht verlangt aber falsche Begriffe verkleinern Ihre Punktzahl. (1 Punkt)

d.) Setzen Sie nun alle Konstanten $m = \mu = k = 1$ und lösen Sie die Bewegungsgleichung. Anfangsbedingungen sind nicht gegeben (d.h., dass Sie eine passende Anzahl von Konstanten in der Lösung behalten sollen). Jedoch soll die Lösung vollständig reell geschrieben werden. (2 Punkte)

e.) Skizzieren Sie diese Lösung als Funktion von x. (Die Anfangswerte dürfen Sie dabei beliebig setzen.) (1 Punkt)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Aufgabe 4: Analytische Mechanik (8 Punkte)



Zwei Teilchen 1 und 2 mit identischen Massen m rutschen (unter dem Einfluss der Schwerkraft) reibungsfrei eine (eindimensionale) schiefe Ebene herunter. Sie sollen dabei durch eine Feder der Federkonstanten k verbunden sein und entsprechend schwingen können. Die Länge der Feder im entspannten Zustand sei ℓ_0.

a.) Wie viele Freiheitsgrade besitzt dieses Problem? Welche Koordinate(n) wählen Sie? Falls Sie dazu neue Symbole einführen, erklären Sie diese ggf. anhand einer Skizze. (1 Punkt)

b.) Wie lauten die Ortsvektoren der beiden Massen in den gewählten Koordinaten? (1 Punkt)

c.) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Problems auf. (1 Punkt)

Sollten Sie b.) nicht geschafft haben, lösen Sie die folgenden Teilaufgaben bitte mit folgender Ersatz-Lagrangefunktion. (Diese hat mit der gestellten Aufgabe nichts zu tun):

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m x \dot{x}^2 - x\sin(x) \quad \text{mit} \quad V(x) = x\sin(x)$$

d.) Finden Sie den/die generalisierten Impuls(e) dieses Problems und stellen Sie die Hamiltonfunktion dieses Problems in den passenden Koordinaten auf. (2 Punkte)

e.) Finden Sie die Hamilton-Bewegungsgleichungen. (2 Punkte)

f.) Wahlweise: Finden Sie **entweder** eine Bewegungsgleichung 2. Ordnung in der Zeit nach dem Lagrangeformalismus **oder** aus d.) (1 Punkt)

1 Zusatzpunkt, wenn Sie ohne den Ersatz (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

FORMELSAMMLUNG

Zylinderkoordinaten: $x = r_\perp \cos\varphi, \quad y = r_\perp \sin\varphi \quad z = z$

$\vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \qquad \vec{e}_z$ (müssen Sie kennen).

$$v^2 = \dot{r}_\perp^2 + r_\perp^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \qquad dV = r_\perp\, dr_\perp\, d\varphi\, dz$$

Kugelkoordinaten: $x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$

$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta),\ \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0),\ \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta).$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta, \qquad dV = r^2\ \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

Kreisbewegung: $\vec{v}_{\mathrm{rot}} = \vec{\omega}\times\vec{r}, \quad \dot{\vec{e}}_{i'} = \vec{\omega}\times\vec{e}_{i'}.$

Reibungskräfte: Haftreibung $\vec{F}_{H,max} = -\mu_H|\vec{F}_\perp|\dfrac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$, Gleitreibung:$\vec{F}_G = -\mu_G|\vec{F}_\perp|\dfrac{\vec{v}}{v}$,

Viskose Reibung: Stokes'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_S\vec{v}$
Newton'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_N v\vec{v}.$

Eulersche Formeln: $\exp[\pm i\lambda t] = \cos[\lambda t] \pm i\sin[\lambda t]$

$\omega = 2\pi\nu, \quad \nu = 1/T,$ Oszillator: $\omega_0^2 = k/m,$ Pendel: $\omega_0^2 = g/\ell$

Komplexe Zahlen:

$$\chi = |\chi|\exp[i\varphi], \quad |\chi| = \sqrt{\chi\chi^*}, \quad \mathrm{Re}\,\chi = \frac{1}{2}(\chi+\chi*), \quad \mathrm{Im}\,\chi = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\chi-\chi*), \quad \tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}\,\chi}{\mathrm{Re}\,\chi}$$

Arbeit: $W_{21} = -\displaystyle\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$, Potenzial (potenzielle Energie): $V(\vec{r}) = -\displaystyle\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{F}\cdot d\vec{r}$

$$V = -\int^x F_x\,dx + f(y,z), \quad V = -\int^y F_y\,dy + f(x,z), \quad V = -\int^z F_z\,dz + f(x,y).$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}, \quad \vec{N} = \vec{s}\times\vec{F}, \quad \vec{L} \equiv m(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) = \vec{r}\times\vec{p}, \quad \vec{N} = \frac{d}{dt}\vec{L}$$

Hamilton-Bewegungsgleichungen: $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}$