NACHKLAUSUR ZUR THEORETISCHEN PHYSIK I (LAK)

Wintersemester 2021/22, Mittwoch, 13.4.22, 10:00 Uhr

Sie schreiben bitte ausschließlich auf das zusätzlich verteilte Papier!
Benutzen Sie wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Auf S. 3 befindet sich eine Formelsammlung.
Erlaubte Unterlagen: keine (auch keine Taschenrechner)
Zeit: 90 Min

Punkte: 8 / 5 / 7 / 7 Summe: 27 (bestanden ab 13.5 Punkten)

Aufgabe 1: Grundwissen (8 Punkte)

1. Berechnen Sie: (0.5 Punkte)

$$\frac{1}{2a} - \frac{1}{3a}$$

2. Welche Winkelgeschwindigkeiten (nur der Betrag ist gefragt) haben (i) der große Uhrzeiger und (ii) der kleine Uhrzeiger (einer normalen Uhr)? Wieviele Minuten nach 12 Uhr schließen sie einen Winkel von exakt $\varphi = \pi/3$ miteinander ein? (3 Punkte)

3. Gegeben ist ein ideales Gas mit konstanter Teilchenzahl N. Wie ändert sich der Druck, wenn Temperatur und Volumen jeweils verdoppelt werden (mit Begründung)? (1 Punkt)

4. Skizzieren Sie das Vektorfeld $\vec{A} = (x, x, 0)$ in allen vier Quadranten (mehrere Pfeile pro Quadrant, Feldverlauf muss verständlich sein). (1,5 Punkte)

5. Gegeben ist eine Ellipse in Polarkoordinaten, welche die Bahnkurve eines Planeten um die Sonne beschreibt:

$$r(\varphi) = \frac{k}{1 + \epsilon \cos\varphi}$$

mit den positiven Konstanten k und $0 < \epsilon < 1$.

Zeichnen Sie die Bahnkurve, den Ort von Sonne und Planet und berechnen Sie den minimalen und den maximalen Abstand zwischen Sonne und Planeten jeweils als Funktion von k und ϵ. (2 Punkte)

Aufgabe 2: Differenzialgleichungen (5 Punkte)

a.) Welche der folgenden Gleichungen sind **gewöhnliche, lineare Differenzialgleichungen**? (ja/nein) Bei "Nein" schreiben Sie, welche dieser Eigenschaften nicht zutrifft. (2 Punkte)

$$2\dot{x}(t) + 5x(t) + 1 = 0$$

$$x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dy} = 0$$

$$3\ddot{x}(t)x(t) + 5\dot{x}^2(t) = 0$$

b.) Stellen Sie selbstständig eine lineare gewöhnliche Differenzialgleichung Ihrer Wahl mit mindestens zwei verschiedenen Termen auf und lösen Sie diese (ohne Anfangsbedingungen) nach einem nachvollziehbaren Ansatz. (Nicht akzeptiert wird eine Lösung ohne Rechenweg, die sie zufällig bereits kennen). (3 Punkte)

Bitte wenden

Aufgabe 3: Lagrange (7 Punkte)

Gegeben ist ein gerades Stück Draht, das in der xz-Ebene gespannt ist, so dass für den Draht $z(x) = x$ gilt. Eine Masse M ist wie eine Perle auf diesem Draht aufgefädelt und gleitet ihn reibungslos entlang. Ein masseloser Stab der Länge L verbindet M mit einer zweiten Masse m, so dass diese in der xz-Ebene pendeln kann.

Die Bewegung soll in der xz-Ebene unter dem Einfluss der Schwerkraft stattfinden (siehe Skizze) und die Masse m soll während der Betrachtung nirgendwo anstoßen.

a.) Wie viele Freiheitsgrade besitzt dieses Problem? Welche Koordinaten wählen Sie?

Skizzieren Sie dieses Problem auf Ihr Blatt und markieren Sie die gewählten Koordinaten und ihre Nullpunkte. (1 Punkt)

b.) Wie lauten die Ortsvektoren beider Massen als Funktionen der gewählten Koordinaten? (1 Punkt)

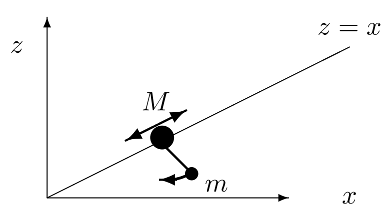
c.) Stellen Sie die Lagrangefunktion für dieses Problem auf. (2 Punkte)

d.) Finden Sie die Bewegungsgleichung(en) dieses Problems. (3 Punkte)

Falls Sie c.) nicht geschafft haben, rechnen Sie hier ersatzweise mit (a und b sind positive Konstanten):

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = a\dot{x}^2 + bxy\dot{x}\dot{y} + x\sin(y)\,\dot{y}$$

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie ohne den Ersatz (weitgehend) richtig rechnen und erklären.



Aufgabe 4: Trägheitstensor (7 Punkte)

Gegeben ist ein Quader mit den Seitenlängen a, b, c (in x-, y- und z-Richtung) und der konstanten Massendichte $\rho = \rho_0$.

a.) Berechnen Sie die Masse des Quaders und die beiden Trägheitsmomente J_{xx} und J_{xy}. Bezugspunkt soll die geometrische Mitte der Unterseite sein (Rechteck mit den Seiten a und b). (3 Punkte)

b.) Welche weiteren Trägheitsmomente können Sie aus den beiden Trägheitsmomenten aus a.) ohne weitere Rechnung bestimmen? Bestimmen Sie auf diese Weise so viele weitere Trägheitsmomente wie möglich. (1 Punkt)

c.) Welche kinetische Energie besitzt der Quader bei Rotation um die Achse $(a, b, 0)$ mit der Winkelgeschwindigkeit vom Betrag $|\vec{\Omega}| = \Omega_0$ durch den Bezugspunkt aus a.)? Skizzieren Sie den Quader, die Drehachse und die Richtung des Vektors $\vec{\Omega}$ (2 Punkte)

d.) Ein Zylinder der Masse M rollt eine schiefe Ebene herunter. Unten angekommen betrage seine lineare Geschwindigkeit v, seine potenzielle Energie sei Null (Höhe $H = 0$). Beträgt seine Gesamtenergie in diesem Moment $E = Mv^2/2$? (Mit Begründung!) (1 Punkt)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

FORMELSAMMLUNG

Zylinderkoordinaten: $x = r_\perp \cos\varphi, \quad y = r_\perp \sin\varphi \quad z = z$

$\vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \qquad \vec{e}_z$ (müssen Sie kennen).

$$v^2 = \dot{r}_\perp^2 + r_\perp^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \qquad\qquad dV = r_\perp \, dr_\perp \, d\varphi \, dz$$

Kugelkoordinaten: $x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi \quad z = r \cos\vartheta$

$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta),\ \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0),\ \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta).$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta, \qquad\qquad dV = r^2\,\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi$$

Kreisbewegung: $\vec{v}_{\rm rot} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \dot{\vec{e}}_{i'} = \vec{\omega} \times \vec{e}_{i'}.$

Reibungskräfte: Haftreibung $\vec{F}_{H,max} = -\mu_H |\vec{F}_\perp| \dfrac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$, Gleitreibung:$\vec{F}_G = -\mu_G |\vec{F}_\perp| \dfrac{\vec{v}}{v}$,

Viskose Reibung: Stokes'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_S \vec{v}$

Newton'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_N v \vec{v}.$

Eulersche Formeln: $\exp[\pm i\lambda t] = \cos[\lambda t] \pm i \sin[\lambda t]$

$\omega = 2\pi\nu, \quad \nu = 1/T,$ Oszillator: $\omega_0^2 = k/m,$ Pendel: $\omega_0^2 = g/\ell$

Komplexe Zahlen:

$$\chi = |\chi| \exp[i\varphi], \quad |\chi| = \sqrt{\chi\chi^*}, \quad \mathrm{Re}\,\chi = \frac{1}{2}(\chi + \chi *), \quad \mathrm{Im}\,\chi = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\chi - \chi *), \quad \tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}\,\chi}{\mathrm{Re}\,\chi}$$

Arbeit: $W_{21} = -\displaystyle\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, Potenzial (potenzielle Energie): $V(\vec{r}) = -\displaystyle\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$V = -\int^x F_x\,dx + f(y,z), \quad V = -\int^y F_y\,dy + f(x,z), \quad V = -\int^z F_z\,dz + f(x,y).$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}, \quad \vec{N} = \vec{s} \times \vec{F}, \quad \vec{L} \equiv m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \vec{N} = \frac{d}{dt}\vec{L}$$

Hamilton-Bewegungsgleichungen: $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t}.$

Hilfen zum Trägheitstensor:

$$J_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2), \quad J_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i$$

(Andere Elemente und Elemente bei kontinuierlicher Massenverteilung lassen sich daraus erschliessen.)

$$T_{\rm rot} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \Omega_\alpha \Omega_\beta J_{\alpha,\beta}, \qquad \vec{L} = \hat{J}\vec{\Omega}.$$