# KLAUSUR ZUR THEORETISCHEN PHYSIK I (LAK)

**Wintersemester 2022/23, Freitag, 21.4.23, 14:00 Uhr**

**Sie schreiben bitte ausschließlich auf das zusätzlich verteilte Papier!**
Benutzen Sie wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Auf S. 3 befindet sich eine Formelsammlung.
Erlaubte Unterlagen: keine (auch keine Taschenrechner)
Zeit: 90 Min

Punkte: 5 / 7 / 6 / 8 Summe: 26 (bestanden ab 13 Punkten)

---

**Beantworten Sie alles auf dem zusätzlich verteilten Papier! Unterstreichungen und Antworten auf dieser Vorlage werden nicht gewertet!**

### Aufgabe 1: Grundwissen (5 Punkte)

a.) Geben Sie für die folgenden Größen jeweils eine passende Einheit an (Begriff oder übliches Symbol):
(1) Temperatur (2) Energie (3) Leistung (4) Wärme (1 Punkt)

b.) Berechnen Sie "5 Prozent von 30" (0.5 Punkte)

c.) Finden Sie eine Funktion (Funktionsgleichung) $f(x)$ mit Nullstellen bei $x = 3$ und $x = -4$. (1 Punkt)

d.) Geben Sie eine Funktion (Funktionsgleichung) $f(x)$ an, die streng monoton steigend ist für $x < 1$ und streng monoton fallend für $x > 1$. (1 Punkt)

e.) Ein ideales Gas ist zunächst in einer Kammer eingeschlossen. Durch ein Loch in einer der Wände kann es jedoch ausströmen und sich auf ein größeres Volumen verteilen. Ändert sich dadurch seine Temperatur (mit Begründung)? Stimmt Ihre Argumentation auch noch für ein reales Gas (mit Begründung)? (1.5 Punkte)

### Aufgabe 2: Bewegungsgleichung (7 Punkte)

$V_0$, $a$ und $b$ sind Konstanten mit positiven Werten.
Ein Punktteilchen der Masse $m$ bewegt sich im eindimensionalen Potenzial (potenzielle Energie)

$$V(x) = V_0\,(x + a)^2.$$

a.) Skizzieren Sie $V(x)$ als Funktion von $x$. (1 Punkt)

b.) Stellen Sie die Bewegungsgleichung dieses Problems auf. (Hierzu gibt es mehrere Möglichkeiten).
(2 Punkte)

c.) Lösen Sie die Bewegungsgleichung unter den Anfangsbedingungen $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$. (2 Punkte)

Sollten Sie b.) nicht geschafft haben, lösen Sie ersatzweise folgende DGL (unter den gleichen Anfangsbedingungen). (Diese hat mit der gestellten Aufgabe nichts zu tun):

$$a\ddot{x} + b\dot{x} = a$$

d.) Um welches bekannte Problem der Mechanik handelt es sich beim gegebenen $V(x)$ (Begriff reicht)?
(1 Punkt)

e.) Welche Energie besitzt das beschriebene Teilchen? (1 Punkt)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie ohne den Ersatz (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Bitte wenden

**Aufgabe 3: Gekoppelte Schwingungen (6 Punkte)**


$k$ und $m$ sind positive Konstanten.

Gegeben sind 2 schwingende Massen, $m_1 = m$, $m_2 = 3m$, die mittels einer Feder $k$ untereinander verbunden sind und an den Rändern frei schwingen (siehe Abb.). Die Massen sollen waagrecht und frei schwingen (keine Schwerkraft, keine Reibung).

a.) Wie viele Eigenfrequenzen erwarten Sie (mit Begründung)? (1 Punkt)

b.) Stellen Sie die Bewegungsgleichung(en) der beiden Massen auf, wahlweise nach Newton oder Lagrange. (1 Punkt)

c.) Berechnen Sie alle Eigenfrequenz(en). (2 Punkte)

d.) Berechnen Sie für alle Eigenfrequenz(en) das Verhältnis der Amplituden und veranschaulichen Sie diese jeweils anhand einer kleinen Skizze. (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

**Aufgabe 4: Starrer Körper (8 Punkte)**

$\rho_0$, $a$, $b$, $c$ und $\Omega_0$ sind Konstanten mit positiven Werten.

Gegeben ist ein Quader der Seitenlängen $a$, $b$, $c$ (in $x$-, $y$- und $z$-Richtung) und der konstanten Massendichte $\rho = \rho_0$. Er soll mit einer Ecke im Koordinatenursprug liegen, genauer $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$, $z \in [0, c]$.

a.) Berechnen Sie Volumen $V$ und Masse $M$ des Quaders. (1 Punkt)

b.) Berechnen Sie den Trägheitstensor $\hat{J}$. Bezugspunkt soll der Koordinatenursprung sein. Mit richtiger Begründung dürfen Sie sich die Rechnung derjenigen Elemente sparen, die sich auf die bereits berechneten zurückführen lassen. (3 Punkte)

c.) Skizzieren Sie den Quader mit einer Drehachse Ihrer Wahl durch den Bezugspunkt. Geben Sie für diese Achse den Vektor von $\vec{\Omega}$ (für eine Rotation vom Betrag $\Omega_0$) in seinen drei Komponenten an. (1 Punkt)

d.) Berechnen Sie damit explizit die kinetische Energie $T_{rot}$ des Quaders bei Rotation um die gewählte Drehachse aus b.) mit Rotationsgeschwindigkeit $\Omega_0$. (1 Punkt)

e.) Erklären Sie in 1-2 verständlichen Sätzen, warum die kinetische Energie bei einem Wurf des Quaders mit Bahngeschwindigkeit $v$ nicht einfach $T = Mv^2/2$ beträgt. Die Begründung muss anschaulich vorstellbar sein. (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

## FORMELSAMMLUNG

Zylinderkoordinaten: $x = r_\perp \cos\varphi, \quad y = r_\perp \sin\varphi \quad z = z$

$\vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \qquad \vec{e}_z$ (müssen Sie kennen).

$$v^2 = \dot{r}_\perp^2 + r_\perp^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \qquad\qquad dV = r_\perp\, dr_\perp\, d\varphi\, dz$$

Kugelkoordinaten: $x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$

$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta)$, $\vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$, $\vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta)$.

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta, \qquad\qquad dV = r^2\,\sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

Kreisbewegung: $\vec{v}_{\rm rot} = \vec{\omega}\times\vec{r}, \quad \dot{\vec{e}}_{i'} = \vec{\omega}\times\vec{e}_{i'}$.

Reibungskräfte: Haftreibung $\vec{F}_{H,max} = -\mu_H|\vec{F}_\perp|\dfrac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$, Gleitreibung: $\vec{F}_G = -\mu_G|\vec{F}_\perp|\dfrac{\vec{v}}{v}$,

Viskose Reibung: Stokes'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_S\vec{v}$

Newton'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_N v\vec{v}$.

Eulersche Formeln: $\exp[\pm i\lambda t] = \cos[\lambda t] \pm i\sin[\lambda t]$

$\omega = 2\pi\nu, \quad \nu = 1/T,$ Oszillator: $\omega_0^2 = k/m$, Pendel: $\omega_0^2 = g/\ell$

Komplexe Zahlen:

$$\chi = |\chi|\exp[i\varphi], \quad |\chi| = \sqrt{\chi\chi^*}, \quad \mathrm{Re}\,\chi = \frac{1}{2}(\chi+\chi*), \quad \mathrm{Im}\,\chi = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\chi-\chi*), \quad \tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}\,\chi}{\mathrm{Re}\,\chi}$$

Arbeit: $W_{21} = -\displaystyle\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$, Potenzial (potenzielle Energie): $V(\vec{r}) = -\displaystyle\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{F}\cdot d\vec{r}$

$$V = -\int^x F_x\,dx + f(y,z), \quad V = -\int^y F_y\,dy + f(x,z), \quad V = -\int^z F_z\,dz + f(x,y).$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}, \quad \vec{N} = \vec{s}\times\vec{F}, \quad \vec{L} \equiv m(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) = \vec{r}\times\vec{p}, \quad \vec{N} = \frac{d}{dt}\vec{L}$$

Hamilton-Bewegungsgleichungen: $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t}$.

Hilfen zum Trägheitstensor:

$$J_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2), \quad J_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i$$

$$T_{\rm rot} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\Omega_\alpha\Omega_\beta J_{\alpha,\beta}, \qquad \vec{L} = \hat{J}\vec{\Omega}.$$