Zusammenfassung vom 14.12.2010

kritische Exponenten

Magnetisierung: (nahe bei $T_{C,N}$) $\quad T \leq T_{C,N} \quad M(T) \propto (T_{C,N} - T)^{\beta} \quad \beta_{exp} = 0.33 - 0.37$

(im Antiferromagnet: M = Untergittermagnetisierung)

Suszeptibilität: (nahe bei $T_{C,N}$) $\quad T \geq T_{C,N} \quad \chi(T) \propto (T - T_{C,N})^{-\gamma} \quad \gamma_{exp} = 1.3 - 1.4$

spez. Wärmekapazität: (nahe bei $T_{C,N}$) $\quad B_0 = 0 \quad c(T) \propto (T - T_C)^{-\alpha} \quad \alpha_{exp} \leq 0.1$

➔ *Molekularfeld-Theorie liefert* $\beta_{MF} = ½$ *und* $\gamma_{MF} = 1$

Heisenberg-Hamilton-Operator

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N} \vec{S}(\vec{r}_i)\cdot\vec{S}(\vec{r}_j)\, J(\vec{r}_i - \vec{r}_j) - g\mu_B B_0 \sum_{i=1}^{N} S_z(\vec{r}_i) \qquad \vec{B}_0 = B_0\,\hat{e}_z$$

N = *Anzahl Ionen, bzw. Spins*

Austauschkonstante

$$J(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = J(\vec{r}_j - \vec{r}_i) \geq 0$$

translations-invariant!

$\vec{S}(\vec{r}_i)$ = *Spin am Ort* $\vec{r}_i$

Erzeugungs- / Vernichtungsoperatoren

$$\vec{S}_{\pm}(\vec{r}_i) = \vec{S}_x(\vec{r}_i) \pm i\vec{S}_y(\vec{r}_i)$$

S = *maximale* S_z*-Komponente*

mit $\vec{S}_{\pm}(\vec{r}_i)\,|S_z\rangle_{\vec{r}_i} = \sqrt{(S \mp S_z)(S + 1 \pm S_z)}\;|S_z \pm 1\rangle_{\vec{r}_i}$

S_z = S_z*-Komponente* (m_s)

Heisenberg-Hamilton-Operator

$$\Rightarrow \quad H = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N} J(\vec r_i - \vec r_j) S_z(\vec r_i) S_z(\vec r_j) - g\mu_B B_0 \sum_{i=1}^{N} S_z(\vec r_i) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N} J(\vec r_i - \vec r_j) S_-(\vec r_j) S_+(\vec r_i)$$

mit $\vec B_0 = B_0\,\hat e_z$

Grundzustand des Heisenberg Ferromagneten

$$|0\rangle = \prod_{\vec r_i} |S\rangle_{\vec r_i} \quad \textit{mit} \quad S_z(\vec r_i)|S\rangle_{\vec r_i} = S\,|S\rangle_{\vec r_i}$$

Ein-Spin-Wellenfunktion

$$\Rightarrow \quad H|0\rangle = E_0|0\rangle$$

S = *maximale S_z-Komponente*

Grundzustandsenergie

$$E_0 = -\frac{1}{2} S^2 \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N} J(\vec r_i - \vec r_j) - N g\mu_B B_0 S \qquad \textit{da} \quad S_+(\vec r_i)|S\rangle_{\vec r_i} = 0$$

elementare Anregungen im Ferromagneten

*energetisch tiefste angeregte Zustände bei T > 0 im Ferromagneten sind **Spin-Wellen***

angeregter Zustand mit Spin S_z = S – 1 am Ort $\vec r$

$$|\vec r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2S}} S_-(\vec r)|0\rangle \qquad \textit{mit} \quad S_-(\vec r\,')S_+(\vec r)|\vec r\rangle = 2S|\vec r\,'\rangle$$

d.h. der Zustand mit S-1 verschiebt sich von $|\vec r\rangle$ *nach* $|\vec r\,'\rangle$

weiter ist

$$S_z(\vec r\,')|\vec r\rangle = S|\vec r\rangle, \quad \vec r\,' \neq \vec r \qquad S_z(\vec r\,')|\vec r\rangle = (S-1)|\vec r\rangle, \quad \vec r\,' = \vec r$$

$$S_+(\vec r\,')|\vec r\rangle = 0, \quad \vec r\,' \neq \vec r$$

Zusammenfassung vom 14.12.2010

$$\Rightarrow \quad H|\vec r\rangle = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N} J(\vec r_i-\vec r_j)\,S_z(\vec r_i)\,S_z(\vec r_j)|\vec r\rangle - g\mu_B B_0\sum_{i=1}^{N} S_z(\vec r_i)|\vec r\rangle - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N} J(\vec r_i-\vec r_j)\,S_-(\vec r_j)\,S_+(\vec r_i)|\vec r\rangle$$

$$= -\frac{1}{2}S^2\sum_{\vec r_i\neq\vec r}\ \sum_{\substack{\vec r_j\neq\vec r,\\ j\neq i}}^{N} J(\vec r_i-\vec r_j)|\vec r\rangle - \frac{1}{2}(S-1)\,S\sum_{\vec r_j\neq\vec r} J(\vec r-\vec r_j)|\vec r\rangle - \frac{1}{2}S\,(S-1)\sum_{\vec r_i\neq\vec r} J(\vec r_i-\vec r)|\vec r\rangle$$

$$- g\mu_B B_0 S\sum_{\vec r_i\neq\vec r}|\vec r\rangle - g\mu_B B_0(S-1)|\vec r\rangle - \frac{1}{2}\sum_{\vec r_i\neq\vec r}\sum_{j\neq i}^{N} J(\vec r_i-\vec r_j)\,S_-(\vec r_j)\underbrace{S_+(\vec r_i)|\vec r\rangle}_{=0\ \text{für}\ \vec r_i\neq\vec r} - \frac{1}{2}2S\sum_{\vec r_j\neq\vec r} J(\vec r-\vec r_j)|\vec r_j\rangle$$

$$= -\frac{1}{2}S^2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N} J(\vec r_i-\vec r_j)|\vec r\rangle + \underbrace{\frac{1}{2}S\sum_{\vec r_j\neq\vec r} J(\vec r-\vec r_j)|\vec r\rangle + \frac{1}{2}S\sum_{\vec r_i\neq\vec r} J(\vec r_i-\vec r)|\vec r\rangle}_{=S\sum_{\vec r_j\neq\vec r} J(\vec r-\vec r_j)|\vec r\rangle}$$

$$- g\mu_B B_0 S\underbrace{\sum_{i=1}^{N}|\vec r\rangle}_{N|\vec r\rangle} + g\mu_B B_0|\vec r\rangle - S\sum_{\vec r_j\neq\vec r} J(\vec r-\vec r_j)|\vec r_j\rangle$$

$$\Rightarrow \quad H|\vec r\rangle = E_0|\vec r\rangle + g\mu_B B_0|\vec r\rangle + S\sum_{\vec r'\neq\vec r} J(\vec r-\vec r')\big[|\vec r\rangle - |\vec r'\rangle\big] \qquad \textit{mit} \quad J(\vec r_i-\vec r_j) = J(\vec r_j-\vec r_i)$$

➔ *$|\vec r\rangle$ kein Eigenzustand von* **H**, *aber* **H** $|\vec r\rangle$ *ist Linearkombination von* $|\vec r\rangle$ *und anderen Zuständen* $|\vec r'\rangle$ *mit jeweils einem Spin auf* **S-1** *erniedrigt*

Zusammenfassung vom 14.12.2010

angeregter Eigenzustand von H

$$\left|\vec k\right\rangle = \frac{1}{\sqrt N}\sum_{\vec r} e^{i\vec k\cdot\vec r}\left|\vec r\right\rangle \quad \Rightarrow \quad H\left|\vec k\right\rangle = E_{\vec k}\left|\vec k\right\rangle$$

$$\Rightarrow \quad H\left|\vec k\right\rangle = E_0\left|\vec k\right\rangle + g\mu_B B_0\left|\vec k\right\rangle + S\sum_{\vec r'\neq\vec r} J(\vec r-\vec r')\frac{1}{\sqrt N}\sum_{\vec r} e^{i\vec k\cdot\vec r}\left[\left|\vec r\right\rangle - \left|\vec r'\right\rangle\right]$$

$$= E_0\left|\vec k\right\rangle + g\mu_B B_0\left|\vec k\right\rangle + S\underbrace{\frac{1}{\sqrt N}\sum_{\vec r} e^{i\vec k\cdot\vec r}\left|\vec r\right\rangle}_{\left|\vec k\right\rangle}\underbrace{\sum_{\vec r'\neq\vec r} J(\vec r-\vec r')}_{\text{setze } \vec r=0 \text{ für Summe über } \vec r'\text{, da nur von Differenz abhängig}} - S\underbrace{\frac{1}{\sqrt N}\sum_{\vec r'} e^{i\vec k\cdot\vec r'}\left|\vec r'\right\rangle}_{\left|\vec k\right\rangle}\underbrace{\sum_{\vec r\neq\vec r'} J(\vec r-\vec r')\,e^{i\vec k\cdot(\vec r-\vec r')}}_{\text{setze } \vec r'=0 \text{ für Summe über } \vec r\text{, da nur von Differenz abhängig}}$$

$$= \left[E_0 + g\mu_B B_0 + S\sum_{\vec r\neq 0} J(\vec r)\right]\left|\vec k\right\rangle - S\sum_{\vec r\neq 0} J(\vec r)\,e^{i\vec k\cdot\vec r}\left|\vec k\right\rangle$$

$$= \left[E_0 + g\mu_B B_0 + S\sum_{\vec r\neq 0} J(\vec r)\left(1-e^{i\vec k\cdot\vec r}\right)\right]\left|\vec k\right\rangle = E_{\vec k}\left|\vec k\right\rangle$$

$$\Rightarrow \quad E_{\vec k} = E_0 + g\mu_B B_0 + \frac{1}{2}S\sum_{\vec r\neq 0} J(\vec r)\left(1-e^{i\vec k\cdot\vec r}\right) + \frac{1}{2}S\sum_{\vec r\neq 0} J(-\vec r)\left(1-e^{-i\vec k\cdot\vec r}\right)$$

$$= E_0 + g\mu_B B_0 + \frac{1}{2}S\sum_{\vec r\neq 0} J(\vec r)\underbrace{\left(2-e^{i\vec k\cdot\vec r}-e^{-i\vec k\cdot\vec r}\right)}_{2\left(1-\cos\vec k\cdot\vec r\right)} = E_0 + g\mu_B B_0 + 2S\sum_{\vec r\neq 0} J(\vec r)\sin^2\left(\tfrac{1}{2}\vec k\cdot\vec r\right)$$

Eigenenergien $\quad E_{\vec k} = E_0 + g\mu_B B_0 + 2S\sum_{\vec r\neq 0} J(\vec r)\sin^2\left(\tfrac{1}{2}\vec k\cdot\vec r\right)$

Zusammenfassung vom 14.12.2010

Anregungsenergie $$E_{\vec{k}} - E_0 = 2S \sum_{\vec{r} \neq 0} J(\vec{r}) \sin^2\left(\tfrac{1}{2}\vec{k}\cdot\vec{r}\right) + g\mu_B B_0$$

- ***für jeden Teilzustand*** **$|\vec{r}\rangle$ *von* $|\vec{k}\rangle$ *ist der totale Spin* NS *um* 1 *erniedrigt, sodass er auch für* $|\vec{k}\rangle$ *den Wert* NS – 1 *hat***

- ***die Wahrscheinlichkeit den erniedrigten Spin*** **S-1 *auf* $|\vec{r}\rangle$ *zu finden ist* $|\langle\vec{r}\,|\,\vec{k}\rangle|^2 = 1/N$, *d.h. gleichverteilt über alle* $|\vec{r}\rangle$**