

Zusammenfassung vom 14.01.2011

Beitrag der kinetischen Energie

$$E_{\text{kin}} = 2 \sum_{\vec{k}} w_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}} \quad \xi_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} - E_F^0$$

$w_{\vec{k}}$ = Wahrscheinlichkeit, ein Cooper-Paar im Zustand \vec{k} zu finden

quantenmechanische Beschreibung des Cooper-Paares

$|1\rangle_{\vec{k}}$ \rightarrow Cooper-Paar $(\vec{k} \uparrow, -\vec{k} \downarrow)$ ist besetzt

$|0\rangle_{\vec{k}}$ \rightarrow Cooper-Paar $(\vec{k} \uparrow, -\vec{k} \downarrow)$ ist unbesetzt

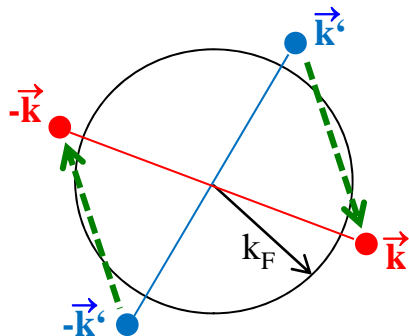
Cooper-Paar-Erzeugungs-/Vernichtungsoperator

$$\sigma_{\vec{k}}^+ |0\rangle_{\vec{k}} = |1\rangle_{\vec{k}} \quad \sigma_{\vec{k}}^+ |1\rangle_{\vec{k}} = 0 \quad \text{Erzeugungsoperator}$$

$$\sigma_{\vec{k}}^- |1\rangle_{\vec{k}} = |0\rangle_{\vec{k}} \quad \sigma_{\vec{k}}^- |0\rangle_{\vec{k}} = 0 \quad \text{Vernichtungsoperator}$$

Hamilton-Wechselwirkungsoperator

$$H_{\text{int}} = -V_0 \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \sigma_{\vec{k}}^+ \sigma_{\vec{k}'}^-$$



\rightarrow Summation findet nur in einer dünnen Energieschale um die Fermi-Kugel statt: $E_F^0 - \hbar\omega_D \leq \hbar^2 \vec{k}^2 / 2m \leq E_F^0 + \hbar\omega_D$

\rightarrow beschreibt die attraktive Streuung eines Cooper-Paares:

$$(\vec{k}' \uparrow, -\vec{k}' \downarrow) \Rightarrow (\vec{k} \uparrow, -\vec{k} \downarrow)$$

BCS-Grundzustand

$$|\Phi_{\text{BCS}}\rangle = \prod_{\vec{k}} [u_{\vec{k}}|0\rangle_{\vec{k}} + v_{\vec{k}}|1\rangle_{\vec{k}}] \quad v_{\vec{k}}^2 + u_{\vec{k}}^2 = 1 \quad \text{Normierung}$$

$$\rightarrow \langle \Phi_{\text{BCS}} | \Phi_{\text{BCS}} \rangle = 1 \quad \rightarrow v_{\vec{k}}^2 = w_{\vec{k}}$$

\rightarrow *Produktansatz über alle möglichen Cooper-Paare*

Energieabsenkung durch Streuprozess

$$\Delta E_{\text{WW}} = \langle \Phi_{\text{BCS}} | H_{\text{int}} | \Phi_{\text{BCS}} \rangle = -V_0 \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} v_{\vec{k}} u_{\vec{k}} u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'} \quad \text{Störungstheorie}$$

Gesamtenergie des BCS-Zustands

$$W_{\text{BCS}} = E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{WW}} = 2 \sum_{\vec{k}} v_{\vec{k}}^2 \xi_{\vec{k}} - V_0 \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} v_{\vec{k}} u_{\vec{k}} u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'}$$

Parametrisierung von $u_{\vec{k}}$ und $v_{\vec{k}}$

$$v_{\vec{k}} = \cos \theta_{\vec{k}} \quad u_{\vec{k}} = \sin \theta_{\vec{k}} \quad \rightarrow v_{\vec{k}}^2 + u_{\vec{k}}^2 = 1$$

$$\rightarrow W_{\text{BCS}} = 2 \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}} \cos^2 \theta_{\vec{k}} - \frac{V_0}{4} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \sin(2\theta_{\vec{k}}) \sin(2\theta_{\vec{k}'})$$

BCS-Grundzustandsenergie

$W_{\text{BCS}}^0 = \text{Minimum von } W_{\text{BCS}} \text{ als Funktion von } u_{\vec{k}}, v_{\vec{k}} \text{ unter der Nebenbedingung: } v_{\vec{k}}^2 + u_{\vec{k}}^2 = 1$

$$\rightarrow \frac{\partial W_{\text{BCS}}}{\partial \theta_{\vec{k}}} = 0 = -2\xi_{\vec{k}} \sin(2\theta_{\vec{k}}) - V_0 \cos(2\theta_{\vec{k}}) \sum_{\vec{k}'} \sin(2\theta_{\vec{k}'})$$

$$\rightarrow \xi_{\vec{k}} \tan(2\theta_{\vec{k}}) = -\frac{1}{2} V_0 \sum_{\vec{k}'} \sin(2\theta_{\vec{k}'}) = -\Delta$$

Anregungsenergien
(Δ , $E_{\vec{k}}$)

$$\Delta = \frac{1}{2} V_0 \sum_{\vec{k}'} \sin(2\theta_{\vec{k}'}) = V_0 \sum_{\vec{k}'} u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'}$$

$$E_{\vec{k}'} = \sqrt{\xi_{\vec{k}'}^2 + \Delta^2}$$

$$\rightarrow \tan(2\theta_{\vec{k}}) = -\frac{\Delta}{\xi_{\vec{k}}} \quad \rightarrow \sin(2\theta_{\vec{k}}) = 2u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} = \frac{\Delta}{E_{\vec{k}}}$$

$$\rightarrow \cos(2\theta_{\vec{k}}) = v_{\vec{k}}^2 - u_{\vec{k}}^2 = 2v_{\vec{k}}^2 - 1 = -\frac{\xi_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}} \quad \rightarrow v_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}} \right)$$

BCS-Grundzustands-
energie

$$\rightarrow W_{\text{BCS}}^0 = \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}} \left(1 - \frac{\xi_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}} \right) - \frac{\Delta^2}{V_0}$$

BCS-Kondensations-
energie

$$W_{\text{BCS}}^0 - W_n^0 \quad W_n^0 = \sum_{|\vec{k}| < k_F} 2\xi_{\vec{k}} \quad \mathbf{W_n^0} = \text{Energie des normal leitenden Grundzustands}$$

= *Energiedifferenz zwischen BCS-Grundzustand und normal leitendem Grundzustand*

$$\rightarrow W_{\text{BCS}}^0 - W_n^0 = -\frac{1}{2} Z(E_F^0) \Delta^2$$