

Zusammenfassung vom 18.01.2011

erster angeregter Zustand über dem BCS-Grundzustand

Aufbrechen eines Cooper-Paares $(\vec{k} \uparrow, -\vec{k} \downarrow)$ über die Bandlücke 2Δ , d.h. ein Elektron mit $(\vec{k} \uparrow)$ wird herausgestreut und es bleibt Einzelelektron mit $(-\vec{k} \downarrow)$ zurück

$$\rightarrow W_{\text{BCS}}^1 = -2 \sum_{\vec{k}' \neq \vec{k}} E_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'}^4$$

Anregungsenergie

$$\rightarrow \Delta E_1 = W_{\text{BCS}}^1 - W_{\text{BCS}}^0 = 2E_{\vec{k}} = 2\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}$$

Anregungslücke im Supraleiter

$$\xi_{\vec{k}} = 0 \rightarrow \Delta E = 2\Delta$$

\rightarrow minimale Anregungsenergie für $\xi_{\vec{k}} = 0$

Bemerkung: wenn nur ein Elektron zugeführt wird, dann ist seine Energie ebenfalls durch $E_{\vec{k}} = \sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}$ gegeben, sodass ein Einzelelektron mindestens die Energie Δ oberhalb von W_{BCS}^0 liegt.

für $\xi_{\vec{k}} \gg \Delta \rightarrow E_{\vec{k}} = \xi_{\vec{k}}$, d.h. ergibt sich freies Elektronengas-Verhalten.

Zustandsdichte im Supraleiter *beim Übergang von normal (n) zu supraleitend (s) dürfen keine Zustände verloren gehen*

$$\rightarrow dN_s = D_s(E_{\vec{k}})dE_{\vec{k}} = D_n(\xi_{\vec{k}})d\xi_{\vec{k}} = dN_n$$

$$\rightarrow \frac{D_s(E_{\vec{k}})}{D_n(E_F^0)} \cong \frac{D_s(E_{\vec{k}})}{D_n(\xi_{\vec{k}})} = \frac{d\xi_{\vec{k}}}{dE_{\vec{k}}} = \begin{cases} \frac{E_{\vec{k}}}{\sqrt{E_{\vec{k}}^2 - \Delta^2}}, & E_{\vec{k}} \geq \Delta \\ 0, & E_{\vec{k}} < \Delta \end{cases}$$

Kohärenzlänge *aus der Cooper-Paar-Bindungsenergie 2Δ ergibt sich eine Impulsunschärfe, die über die Heisenberg'sche Unschärfe-Relation als Ortsunschärfe, bzw. räumliche Ausdehnung gedeutet werden kann*

\rightarrow *Kohärenzlänge* ξ_{CP}

$$2\Delta = \delta E = \delta \left(\frac{p^2}{2m} \right) = \frac{p_F}{m} \delta p \quad \rightarrow \quad \delta x = \frac{\hbar}{\delta p} = \frac{\hbar p_F}{2m\Delta} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m\Delta} = \xi_{CP}$$

$$\xi_{CP} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m\Delta} = \frac{E_F}{k_F \Delta}$$

Kohärenzlänge des Cooper-Paar: $\xi_{CP} \approx 1 \mu m$

Bemerkung: *für die Kohärenzlänge eines Supraleiters gilt: $\xi_{coh} \geq \xi_{CP}$*

Cooper-Paar-Konzentration

$$\Delta/E_F = 10^{-4} \cong n_s/n_n \quad \rightarrow \quad n_s = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$$

\rightarrow *$\sim 10^6$ Cooper-Paare innerhalb von ξ_{CP}*

\rightarrow *Wechselwirkung zwischen Cooper-Paaren*

Temperaturabhängigkeit der Bandlücke $\Delta(T)$

betrachten zunächst bei $T = 0$ die Bestimmungsgleichung für

die Energielücke $\Delta(T = 0)$: $\Delta = V_0 \sum_{\vec{k}'} u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'} = \frac{1}{2} V_0 \sum_{\vec{k}} \Delta / E_{\vec{k}}$

mit $\sum_{\vec{k}} \Rightarrow \int_{\text{Kugelschale } 2\hbar\omega_D} Z(E) dE \cong Z(E_F^0) \int_{\text{Kugelschale } 2\hbar\omega_D} dE$

$\rightarrow 1 = \frac{1}{2} V_0 \sum_{\vec{k}} \frac{1}{E_{\vec{k}}} = \frac{1}{2} V_0 Z(E_F^0) \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}} = V_0 Z(E_F^0) \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}}$

Bestimmungsgleichung der Bandlücke

$\rightarrow \frac{1}{V_0 Z(E_F^0)} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}}$

Einbezug der Fermi-Verteilung ($T \neq 0$)

$\frac{1}{V_0 Z(E_F^0)} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}} \left[1 - 2f\left(\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta^2} + E_F^0, T\right) \right]$

\rightarrow Faktor 2, da beide Elektronen im Cooper-Paar berücksichtigt werden müssen

$\rightarrow [1-2f]$ beschreibt die leeren Zustände oberhalb von E_F^0

Temperaturabhängige Bandlücke (implizite Gleichung)

$\frac{1}{V_0 Z(E_F^0)} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta^2} + E_F^0}{2kT}\right) \rightarrow \Delta(T)$

Suprastrom $\vec{j}_s = -n_s e \vec{v}_s = -n_s e \frac{\vec{p}_s}{m} = -n_s e \frac{\hbar \vec{K}}{m} \quad \rightarrow \quad \vec{K} = -\frac{m}{\hbar n_s e} \vec{j}_s$

Cooper-Paar bei Stromfluss $\rightarrow (\vec{k} + \vec{K} \uparrow, -\vec{k} + \vec{K} \downarrow)$
 \rightarrow *der Stromfluss bewirkt im Cooper-Paar eine Impulsänderung um $2\vec{K}$*

Wellenfunktion des Cooper-Paares bei Stromfluss $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{2L^3} \sum_{\vec{k}} g(\vec{k}) e^{i(\vec{k}+\vec{K})\cdot\vec{r}_1} e^{i(-\vec{k}+\vec{K})\cdot\vec{r}_2} = \frac{1}{2L^3} \sum_{\vec{k}} g(\vec{k}) e^{i\vec{K}\cdot(\vec{r}_1+\vec{r}_2)} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}$
 $\rightarrow \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = e^{i2\vec{K}\cdot\vec{R}} \psi(\vec{K} = 0, \vec{r}_1, \vec{r}_2)$ mit $\vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$

BCS-Grundzustand bei Stromfluss $\rightarrow |\Phi_{\text{BCS}}\rangle = \left(\prod_{\nu} e^{i\vec{K}\cdot\vec{R}_{\nu}} \right) |\Phi_{\text{BCS}}(0)\rangle = e^{i\varphi(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3, \dots)} |\Phi_{\text{BCS}}(0)\rangle$
 mit $\varphi(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3, \dots) = \vec{K} \cdot \sum_{\nu} \vec{R}_{\nu}$