Zusammenfassung vom 17.01.2012

Modell der Cooper-Paare *zwei zusätzliche Elektronen werden zum freien Elektronengas im Grundzustand hinzugegeben (T = 0 K)*

attraktives Streupotential $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

➔ *es gilt Impulserhaltung:* $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_1' + \vec{k}_2' = \vec{K}$

➔ *Streuzustände nur in begrenztem Bereich:* $E_F \leq \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}, \frac{\hbar^2 \vec{k}'^2}{2m} \leq E_F + \hbar\omega_D$

➔ *maximale Wechselwirkung für:* $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2 = \vec{k}$ *Cooper-Paar*

Zweiteilchen-Wellenfunktion

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{L^3} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1} e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2} = \frac{1}{L^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \qquad (V = 0)$$

$$\psi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{1}{2L^3} \sum_{\vec{k}} g(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \qquad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \qquad (V \neq 0)$$

L^3 = Volumen, in dem periodische Randbedingungen gelten

Cooper-Paar-Wahrscheinlichkeitsdichte $\left|g(\vec{k})\right|^2$ *= Wahrscheinlichkeit, ein Cooper-Paar im Zustand ($\vec{k}$, -$\vec{k}$) zu finden*

Schrödinger-Gleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_1 + \Delta_2) + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\right]\psi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \left(\varepsilon + 2E_F^0\right)\psi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

ε = Energiedifferenz des Cooper-Paares relativ zur Energie bei V = 0 (=Fermi-Energie E_F^0)

Zusammenfassung vom 17.01.2012

Einsetzen des Ansatzes

$$\frac{1}{2L^3}\sum_{\vec{k}'}\left[\frac{\hbar^2 k'^2}{m}+V(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\right]g(\vec{k}')e^{i\vec{k}'(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}=\frac{1}{2L^3}\sum_{\vec{k}'}\left(\varepsilon+2E_F^0\right)g(\vec{k}')e^{i\vec{k}'(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}$$

Multiplikation mit $e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}=e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ *und Integration über das Volumen* L^3 *sowie Vertauschen von Integration und Summation:*

$$\rightarrow \sum_{\vec{k}'}\frac{\hbar^2 k'^2}{m}g(\vec{k}')\int_{L^3}e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{r}}\,d^3r+\sum_{\vec{k}'}g(\vec{k}')\int_{L^3}V(\vec{r})e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{r}}\,d^3r=\sum_{\vec{k}'}\left(\varepsilon+2E_F^0\right)g(\vec{k}')\int_{L^3}e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{r}}\,d^3r$$

mit $\frac{1}{L^3}\int_{L^3}e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{r}}\,d^3r=\delta_{\vec{k}',\vec{k}}$ *und* $V_{\vec{k},\vec{k}'}=\frac{1}{L^3}\int_{L^3}V(\vec{r})e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}}d^3r$

$$\rightarrow \frac{\hbar^2 k^2}{m}g(\vec{k})+\sum_{\vec{k}'}g(\vec{k}')V_{\vec{k},\vec{k}'}=\left(\varepsilon+2E_F^0\right)g(\vec{k})$$

Näherung attraktive konstante Wechselwirkung

$$V_{\vec{k},\vec{k}'}=\begin{cases}-V_0<0, & E_F^0\le\frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2m},\frac{\hbar^2\vec{k}'^2}{2m}\le E_F^0+\hbar\omega_D\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

$$\rightarrow \left[-\hbar^2k^2/m+\varepsilon+2E_F^0\right]g(\vec{k})=-A \quad \textit{mit} \quad A=V_0\sum_{\vec{k}'}g(\vec{k}')$$

Auflösen nach $\mathbf{g(\vec{k})}$ *und Summation über* $\vec{\mathbf{k}}$

$$\rightarrow \sum_{\vec{k}}g(\vec{k})=\frac{A}{V_0}=-\sum_{\vec{k}}\frac{A}{-\hbar^2k^2/m+\varepsilon+2E_F^0}$$

$$\rightarrow 1=V_0\sum_{\vec{k}}\frac{1}{-\varepsilon+\hbar^2k^2/m-2E_F^0}$$

Zusammenfassung vom 17.01.2012

mit Näherung $D(E_F^0+\xi)\cong D(E_F^0)$ $\quad \xi = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m} - E_F^0 << E_F^0$

und $Z(E_F^0) = \frac{1}{2} D(E_F^0)$ $\quad$ **Z(E$_F$^{0}) = *Elektronenpaar-Zustandsdichte***

und $\sum_{\vec{k}} \Rightarrow \dfrac{1}{2} \int_{\text{Kugelschale } \hbar\omega_D} D(\vec{k})\, d^3k \Rightarrow \dfrac{1}{2} \int_{\text{Kugelschale } \hbar\omega_D} D(E)\, dE \Rightarrow \dfrac{1}{2} \int_0^{\hbar\omega_D} D(\xi)\, d\xi$

➔ $1 = V_0\, Z(E_F^0) \int_0^{\hbar\omega_D} \dfrac{1}{2\xi - \varepsilon} d\xi = V_0\, Z(E_F^0) \dfrac{1}{2} \left[\ln(2\xi-\varepsilon)\right]_0^{\hbar\omega_D}$

➔ $1 = \dfrac{1}{2} V_0\, Z(E_F^0) \ln \dfrac{\varepsilon - 2\hbar\omega_D}{\varepsilon}$

Energie des Cooper-Paares ➔ $\varepsilon = \dfrac{2\hbar\omega_D}{1 - e^{\frac{2}{V_0 Z(E_F^0)}}} \cong -2\hbar\omega_D e^{-\frac{2}{V_0 Z(E_F^0)}} < 0$ ***da*** $V_0\, Z(E_F^0) << 1$

➔ ***ist ein gebundener Zustand, da ε < 0 für beliebig kleine V$_0$***

Spin des Cooper-Paares ***Singulett-Zustand, da*** $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \propto e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{r}_1} e^{i\vec{k}_2\cdot\vec{r}_2}$ ***symmetrisch bezüglich Vertauschung von*** $\vec{r}_1$ ***und*** $\vec{r}_2$ ***ist und die gesamte Wellenfunktion antisymmetrisch sein muss***

➔ $(\vec{k}\uparrow, -\vec{k}\downarrow)$ ***Cooper-Paar***