Zusammenfassung vom 24.01.2012

erster angeregter Zustand über dem BCS-Grundzustand

Aufbrechen eines Cooper-Paares $(\vec{k}\uparrow, -\vec{k}\downarrow)$ *über die Bandlücke 2Δ, d.h. ein Elektron mit* $(\vec{k}\uparrow)$ *wird heraus gestreut und es bleibt Einzelelektron mit* $(-\vec{k}\downarrow)$ *zurück*

➔ $$W^1_{BCS} = -2\sum_{\vec{k}'\neq\vec{k}} E_{\vec{k}'}\, v^4_{\vec{k}'}$$

Anregungsenergie

➔ $$\Delta E_1 = W^1_{BCS} - W^0_{BCS} = 2E_{\vec{k}} = 2\sqrt{\xi^2_{\vec{k}} + \Delta^2}$$

Anregungslücke im Supraleiter

$\xi_{\vec{k}} = 0$ ➔ $\Delta E = 2\Delta$

➔ *minimale Anregungsenergie für* $\xi_{\vec{k}} = 0$

Bemerkung: *wenn nur ein Elektron zugeführt wird, dann ist seine Energie ebenfalls durch* $E_{\vec{k}} = \sqrt{\xi^2_{\vec{k}} + \Delta^2}$ *gegeben, sodass ein Einzel-elektron mindestens die Energie* Δ *oberhalb von* W^0_{BCS} *liegt.*

für $\xi_{\vec{k}} >> \Delta$ ➔ $E_{\vec{k}} = \xi_{\vec{k}}$ *, d.h. ergibt sich freies Elektronen-gas-Verhalten.*

Zusammenfassung vom 24.01.2012

Zustandsdichte im Supraleiter

beim Übergang von normal (n) zu supraleitend (s) dürfen keine Zustände verloren gehen

➔ $$dN_s = D_s(E_{\vec{k}})dE_{\vec{k}} = D_n(\xi_{\vec{k}})d\xi_{\vec{k}} = dN_n$$

➔ $$\frac{D_s(E_{\vec{k}})}{D_n(E_F^0)} \cong \frac{D_s(E_{\vec{k}})}{D_n(\xi_{\vec{k}})} = \frac{d\xi_{\vec{k}}}{dE_{\vec{k}}} = \begin{cases} \dfrac{E_{\vec{k}}}{\sqrt{E_{\vec{k}} - \Delta^2}}, & E_{\vec{k}} \geq \Delta \\ 0, & E_{\vec{k}} < \Delta \end{cases}$$

Kohärenzlänge

aus der Cooper-Paar-Bindungsenergie 2Δ ergibt sich eine Impuls-unschärfe, die über die Heisenberg'sche Unschärfe-Relation als Ortsunschärfe, bzw. räumliche Ausdehnung gedeutet werden kann

➔ *Kohärenzlänge* ξ_{CP}

$$2\Delta = \delta E = \delta\left(\frac{p^2}{2m}\right) = \frac{p_F}{m}\delta p \quad ➔ \quad \delta x = \frac{\hbar}{\delta p} = \frac{\hbar p_F}{2m\Delta} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m\Delta} = \xi_{CP}$$

$$\xi_{CP} = \frac{\hbar^2 k_F}{2m\Delta} = \frac{E_F}{k_F\Delta}$$

Kohärenzlänge des Cooper-Paar: $\xi_{CP} \approx 1$ µm

Bemerkung: *für die Kohärenzlänge eines Supraleiters gilt:* $\xi_{coh} \geq \xi_{CP}$

Cooper-Paar-Konzentration

$\Delta/E_F = 10^{-4} \cong n_s/n_n$ ➔ $n_s = 10^{19}\,\mathrm{cm}^{-3}$

➔ *~10^6 Cooper-Paare innerhalb von ξ_{CP}*

➔ *Wechselwirkung zwischen Cooper-Paaren*

Temperaturabhängigkeit der Bandlücke Δ(T)

betrachten zunächst bei T = 0 die Bestimmungsgleichung für die Energielücke Δ(T = 0): $\Delta = V_0 \sum_{\vec{k}'} u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'} = \frac{1}{2} V_0 \sum_{\vec{k}} \Delta / E_{\vec{k}}$

mit $\sum_{\vec{k}} \Rightarrow \int_{\text{Kugelschale } 2\hbar\omega_D} Z(E)\, dE \cong Z(E_F^0) \int_{\text{Kugelschale } 2\hbar\omega_D} dE$

$$\rightarrow \quad 1 = \frac{1}{2} V_0 \sum_{\vec{k}} \frac{1}{E_{\vec{k}}} = \frac{1}{2} V_0\, Z(E_F^0) \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}} = V_0\, Z(E_F^0) \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}}$$

Bestimmungsgleichung der Bandlücke

$$\rightarrow \quad \frac{1}{V_0\, Z(E_F^0)} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}}$$

Einbezug der Fermi-Verteilung (T ≠ 0)

$$\frac{1}{V_0\, Z(E_F^0)} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}} \left[1 - 2f\left(\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta^2} + E_F^0, T\right)\right]$$

→ *Faktor 2, da beide Elektronen im Cooper-Paar berücksichtigt werden müssen*

→ [1-2f] *beschreibt die leeren Zustände oberhalb von* E_F^0

Temperaturabhängige Bandlücke ***(implizite Gleichung)***

$$\frac{1}{V_0\, Z(E_F^0)} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta^2} + E_F^0}{2kT}\right) \quad \rightarrow \quad \Delta(T)$$

Zusammenfassung vom 24.01.2012

Suprastrom

$$\vec{j}_s = -n_s e \vec{v}_s = -n_s e \frac{\vec{p}_s}{m} = -n_s e \frac{\hbar \vec{K}}{m} \quad \Rightarrow \quad \vec{K} = -\frac{m}{\hbar n_s e} \vec{j}_s$$

Cooper-Paar bei Stromfluss

➔ $\left(\vec{k} + \vec{K} \uparrow, -\vec{k} + \vec{K} \downarrow\right)$

➔ *der Stromfluss bewirkt im Cooper-Paar eine Impulsänderung um* $2\vec{K}$

Wellenfunktion des Cooper-Paares bei Stromfluss

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{2L^3} \sum_{\vec{k}} g(\vec{k}) e^{i(\vec{k}+\vec{K})\vec{r}_1} e^{i(-\vec{k}+\vec{K})\vec{r}_2} = \frac{1}{2L^3} \sum_{\vec{k}} g(\vec{k}) e^{i\vec{K}\cdot(\vec{r}_1+\vec{r}_2)} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}$$

➔ $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = e^{i2\vec{K}\cdot\vec{R}} \psi(\vec{K}=0, \vec{r}_1, \vec{r}_2)$ *mit* $\vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$

BCS-Grundzustand bei Stromfluss

➔ $$|\Phi_{BCS}\rangle = \left(\prod_{\nu} e^{i\vec{K}\cdot\vec{R}_\nu}\right) |\Phi_{BCS}(0)\rangle = e^{i\varphi(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3, \cdots)} |\Phi_{BCS}(0)\rangle$$

mit $\varphi(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3, \cdots) = \vec{K} \cdot \sum_{\nu} \vec{R}_\nu$