Zusammenfassung vom 27.01.2012

Kohärenzlänge

Cooper-Paar-Bindungsenergie 2Δ ➔ *Impulsunschärfe, die über Heisenberg-Unschärfe-Relation einer Ortsunschärfe, bzw. räumliche Ausdehnung entspricht* ➔ *Kohärenzlänge* ξ_{CP}

$$2\Delta = \delta E = \delta\left(\frac{p^2}{2m}\right) = \frac{p_F}{m}\delta p \quad \Rightarrow \quad \delta x \geq \frac{\hbar}{\delta p} = \frac{\hbar p_F}{2m\Delta} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m\Delta} = \xi_{CP}$$

$$\xi_{CP} = \frac{\hbar^2 k_F}{2m\Delta} = \frac{E_F}{k_F\Delta}$$

Kohärenzlänge des Cooper-Paar: $\xi_{CP} \approx 1\ \mu m$

Bemerkung: *für die Kohärenzlänge eines Supraleiters gilt:* $\xi_{coh} \geq \xi_{CP}$

Cooper-Paar-Konzentration

$$\Delta / E_F = 10^{-4} \cong n_s / n_n \quad \Rightarrow \quad n_s = 10^{19}\,\mathrm{cm}^{-3}$$

➔ *~10^6 Cooper-Paare innerhalb von* ξ_{CP}

➔ *Wechselwirkung zwischen Cooper-Paaren*

Temperaturabhängigkeit der Bandlücke Δ(T)

betrachten zunächst bei **T = 0** *die Bestimmungsgleichung für die Energielücke* **Δ(T = 0):** $\Delta = V_0 \sum_{\vec{k}'} u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'} = \frac{1}{2} V_0 \sum_{\vec{k}} \Delta / E_{\vec{k}}$

mit $\sum_{\vec{k}} \Rightarrow Z(E_F^0) \int_{\text{Kugelschale } \pm\hbar\omega_D} dE \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{2} V_0 \sum_{\vec{k}} \frac{1}{E_{\vec{k}}} = \frac{1}{2} V_0\, Z(E_F^0) \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + \Delta^2}}$

Zusammenfassung vom 27.01.2012

Bestimmungsgleichung der Bandlücke ➔ $$\frac{1}{V_0\, Z(E_F^0)} = \frac{1}{2}\int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2+\Delta^2}} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2+\Delta^2}}$$

Einbezug der Fermi-Verteilung (T ≠ 0) $$\frac{1}{V_0\, Z(E_F^0)} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2+\Delta^2}}\left[1-2f\left(\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2+\Delta^2}+E_F^0, T\right)\right]$$

➔ *Faktor 2, da beide Elektronen im Cooper-Paar berücksichtigt werden müssen*

➔ [1-2f] *beschreibt die leeren Zustände oberhalb von* E_F^0

temperaturabhängige Bandlücke *(implizite Gleichung)* $$\frac{1}{V_0\, Z(E_F^0)} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2+\Delta^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2+\Delta^2}}{2kT}\right)$$ ➔ $\Delta(T)$

Suprastrom $$\vec{j}_s = -n_s e \vec{v}_s = -n_s e \frac{\vec{p}_s}{m} = -n_s e \frac{\hbar \vec{K}}{m}$$ ➔ $$\vec{K} = -\frac{m}{\hbar n_s e}\vec{j}_s$$

Cooper-Paar bei Stromfluss ➔ $(\vec{k}+\vec{K}\uparrow, -\vec{k}+\vec{K}\downarrow)$

➔ *Stromfluss bewirkt im Cooper-Paar Impulsänderung um* $2\vec{K}$

Zusammenfassung vom 27.01.2012

Wellenfunktion des Cooper-Paares bei Stromfluss

$$\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\frac{1}{2L^3}\sum_{\vec{k}} g(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}+\vec{K})\vec{r}_1} e^{i(-\vec{k}+\vec{K})\vec{r}_2} = \frac{1}{2L^3}\sum_{\vec{k}} g(\vec{k})\, e^{i\vec{K}\cdot(\vec{r}_1+\vec{r}_2)} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}$$

$$\Rightarrow \psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=e^{i2\vec{K}\cdot\vec{R}}\,\psi(\vec{K}=0,\vec{r}_1,\vec{r}_2) \quad \textit{mit} \quad \vec{R}=\frac{1}{2}(\vec{r}_1+\vec{r}_2)$$

BCS-Grundzustand bei Stromfluss

$$\Rightarrow |\Phi_{BCS}\rangle=\left(\prod_{\nu} e^{i\vec{K}\cdot\vec{R}_\nu}\right)|\Phi_{BCS}(0)\rangle = e^{i\varphi(\vec{R}_1,\vec{R}_2,\vec{R}_3,\cdots)}|\Phi_{BCS}(0)\rangle$$

$$\textit{mit} \quad \varphi(\vec{R}_1,\vec{R}_2,\vec{R}_3,\cdots)=\vec{K}\cdot\sum_{\nu}\vec{R}_\nu$$

q.m. Strom-Operator

$$\vec{j}_s=\frac{q}{4m}\left(\psi\,\vec{p}^*\,\psi^*+\psi^*\,\vec{p}\,\psi\right)$$

$$\textit{mit} \quad \vec{p}=\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}-q\vec{A} \qquad \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad q=-2e$$

$$\Rightarrow \vec{j}_s=-\frac{2e}{4m}\left[\Phi_{BCS}\left(-\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}+2e\vec{A}\right)\Phi_{BCS}^*+\Phi_{BCS}^*\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}+2e\vec{A}\right)\Phi_{BCS}\right]$$

$$\textit{mit} \quad |\Phi_{BCS}\rangle=e^{i\varphi(\vec{R}_1,\vec{R}_2,\vec{R}_3,\cdots)}|\Phi_{BCS}(0)\rangle \qquad \vec{\nabla}=\sum_{\nu}\vec{\nabla}_{\vec{R}_\nu}$$

$$\Rightarrow \vec{j}_s=-\frac{e}{2m}\left[4e\vec{A}\,|\Phi_{BCS}(0)|^2+2\hbar\,|\Phi_{BCS}(0)|^2\sum_{\nu}\vec{\nabla}_{\vec{R}_\nu}\varphi(\vec{R}_1,\vec{R}_2,\vec{R}_3,\cdots)\right]$$

Stromdichte

$$\Rightarrow \vec{j}_s=-\left[\frac{e^2 n_s}{m}\vec{A}+\frac{e\hbar n_s}{2m}\sum_{\nu}\vec{\nabla}_{\vec{R}_\nu}\varphi(\vec{R}_1,\vec{R}_2,\vec{R}_3,\cdots)\right] \qquad \textit{mit} \quad |\Phi_{BCS}(0)|^2=\frac{n_s}{2}$$

Zusammenfassung vom 27.01.2012

Umlauf-Integral

$$\oint_{C_F} \vec{j}_s \cdot d\vec{s} = -\frac{e^2 n_s}{m} \oint_{C_F} \vec{A} \cdot d\vec{s} - \frac{e\hbar n_s}{2m} \sum_\nu \oint_{C_F} \vec{\nabla}_{\vec{R}_\nu} \varphi\left(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3, \cdots\right) \cdot d\vec{s}$$

➔ *Integration über geschlossenen Weg C_F, der eine Fläche* **F** *umschließt und vollständig im Innern des Supraleiters liegt*

➔ *stationären Zustand: Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Phi_{BCS}|^2$ eindeutig definiert*

➔ *Phase θ von $|\Phi_{BCS}|^2$ ändert sich pro Umlauf nur um ein Vielfaches von 2π*

Phasen-beziehung

➔ $$\sum_\nu \oint_{C_F} \vec{\nabla}_{\vec{R}_\nu} \varphi\left(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3, \cdots\right) \cdot d\vec{s} = \Delta\theta = 2\pi N, \quad N \in \mathbb{Z}$$

➔ $$\oint_{C_F} \vec{j}_s \cdot d\vec{s} + \frac{e^2 n_s}{m} \oint_{C_F} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \frac{e\hbar n_s}{2m} 2\pi N = \frac{e h n_s}{2m} N, \quad N \in \mathbb{Z}$$

Flussquantum $$\phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.0678 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{T\,m^2}$$

mit $$\oint_{C_F} \vec{A} \cdot d\vec{s} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_F \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{F} = \int_F \vec{B} \cdot d\vec{F}$$

Stromdichte ➔ $$\frac{m}{e^2 n_s} \oint_{C_F} \vec{j}_s \cdot d\vec{s} + \int_F \vec{B} \cdot d\vec{F} = N\phi_0, \quad N \in \mathbb{Z}$$

Flussquantisierung $\int_F \vec{B} \cdot d\vec{F} = N\phi_0, \quad N \in \mathbb{Z}$ *da* $\vec{j}_s = 0$ *im Innern eines Supraleiters*

➔ *magnetischer Fluss durch supraleitenden Ring ist quantisiert!*