9. Übung (Abgabe Di. 10. Januar 2012 zu Beginn der Vorlesung oder spätestens bis 16:00 im Briefkasten im Sekretariat bei Frau Badow)

---

29. Néel-Temperatur

In der Vorlesung wurde bei der Herleitung der Néel-Temperatur in der Molekularfeld-Näherung für den Antiferromagnetismus die ferromagnetische Kopplung innerhalb der Untergitter vernachlässigt. Betrachten Sie nun neben der antiferromagnetische Kopplung $\lambda_{AB} > 0$ zwischen den beiden magnetischen Untergitter *A* und *B* (mit gleicher Curie-Konstante *C*), auch eine ferromagnetische Kopplung $\lambda > 0$ innerhalb der beiden Untergittern *A* und *B* mit $\lambda < \lambda_{AB}$, d.h. die antiferromagnetische Kopplung dominiert. Zeigen Sie, dass dann die folgende Beziehung zwischen der Néel-Temperatur T_N und der über eine lineare Extrapolation von $\chi^{-1}(T)$ zu null erlangten Temperatur θ existiert:

$$\frac{\theta}{T_N} = \frac{\lambda_{AB} + \lambda}{\lambda_{AB} - \lambda}.$$

<u>Hinweis</u>: Benutzen Sie für die Herleitung den gleichen Ansatz, der in der Vorlesung für die Molekularfeld-Näherung für den Antiferromagnetismus verwendet wurde, wobei in der paramagnetischen Phase die Wirkung der aus der Austauschwechselwirkung resultierenden Molekularfelder λM_A *und* $\lambda_{AB} M_B$ *so angesetzt wird, dass sie eine antiferromagnetische Kopplung schwächt, d.h. die Néel-Temperatur wird tiefer als ohne Berücksichtigung der ferromagnetischen Kopplung. Bestimmen Sie dann die Néel-Temperatur, indem Sie das äußere Feld* $B_0 = 0$ *setzen. In einem zweiten Schritt wird* $B_0 > 0$ *angenommen und die Suszeptibilität* $\chi(T)$ *ausgerechnet.*

(4 Punkte)

30. Ferrimagnetische Ordnung

Zeigen Sie, dass aus drei antiferromagnetischen Austauschwechselwirkungen eine ferrimagnetische Ordnung resultieren kann. Betrachten Sie dazu ein Material mit zwei magnetischen Untergittern *A* (mit Curie-Konstante C_A) und *B* (mit Curie-Konstante C_B), wobei sowohl das Untergitter *A* als auch *B* für sich antiferromagnetisch koppelt (mit Molekularfeldkonstante λ_A bzw. λ_B) und zudem zwischen den beiden Untergittern *A* und *B* auch eine antiferromagnetische Kopplung (λ_{AB}) existiert.

(a) Zeigen Sie anhand der magnetostatischen potentiellen Energie U_{mag}, dass der Grundzustand eine antiferromagnetische Kopplung zwischen den Untergittern *A* und *B* aufweist, falls $\lambda_{AB} M_A M_B > \frac{1}{2}\left(\lambda_A M_A^2 + \lambda_B M_B^2\right)$ ist.

(b) Zeigen Sie weiter, dass für $\lambda_{A,\,B} = 0$ und $\lambda_{AB} > 0$ (entsprechend einer antiferromagnetischen Kopplung) eine ferrimagnetische Ordnung existiert und berechnen Sie die ferrimagnetische Suszeptibilität χ_{ferri}:

$$\chi_{ferri} = \mu_0 \frac{M_A + M_B}{B_0} = \frac{(C_A + C_B)T - 2\lambda_{AB} C_A C_B}{T^2 - T_C^2},$$ wobei T_C die Curie-Temperatur bedeutet.

<u>Hinweis</u>: Benutzen Sie für die Herleitung den gleichen Ansatz, der in der Vorlesung für die Molekularfeld-Näherung für den Antiferromagnetismus verwendet wurde. Gehen Sie dann ähnlich vor wie in Aufgabe 29.

(4 Punkte)

31. Spin-Erzeugungs- und -Vernichtungsoperator

Zeigen Sie, dass für den angeregten Zustand $\left|\vec{r}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2S}} S_-(\vec{r})\left|0\right\rangle$ gilt: $S_-(\vec{r}\,')S_+(\vec{r})\left|\vec{r}\right\rangle = 2S\left|\vec{r}\,'\right\rangle$, wobei $S_\pm(\vec{r})\left|S_z\right\rangle_{\vec{r}} = \sqrt{(S \mp S_z)(S+1 \pm S_z)}\left|S_z \pm 1\right\rangle_{\vec{r}}$, $\left|0\right\rangle = \prod_{\vec{r}_i}\left|S\right\rangle_{\vec{r}_i}$ der Grundzustand des Heisenberg-Ferromagneten und S der maximale Wert des S_z-Operators ist.

(2 Punkte)