13. Übung (Abgabe Di. 7. Februar 2012 zu Beginn der Vorlesung oder spätestens bis 16:00 im Briefkasten im Sekretariat bei Frau Badow)

---

40. Feldabhängigkeit in einem langen Vortex (Flussschlauch)

Diskutieren Sie die Feldabhängigkeit $B(\rho,\varphi,z)$ in einem langen Vortex, der genau ein Flussquantum ϕ_0 enthält. Lösen Sie dazu die London-Gleichung $\Delta B - B/\Lambda_L^2 = 0$ in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z), da diese der Symmetrie eines zylinderförmigen, geraden Schlauches angepasst sind. Beachten Sie, dass ein langer Flussschlauch radialsymmetrisch sein muss und keine Abhängigkeit in *z*-Richtung aufweisen darf.

(a) Zeigen Sie, dass die obige Differentialgleichung der Bessel'schen Differentialgleichung *n*-ter Ordnung $x^2\, d^2y(x)/dx^2 + x\, dy(x)/dx + (x^2 - n^2)\, y(x) = 0$ entspricht, wobei *x* eine einfache Funktion von ρ ist. Bestimmen Sie die Ordnung *n* der Gleichung sowie die Abhängigkeit $x(\rho)$. Die allgemeine Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung *n*-ter Ordnung ist $y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x)$, wenn *n* ganzzahlig ist. J_n und Y_n sind die Bessel-Funktionen erster und zweiter Gattung der Ordnung *n*.

(b) Wie lautet die Normierungsbedingung für $B(\rho,\varphi,z)$, damit der Vortex genau ϕ_0 enthält?

Hinweis: Der Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten ist $\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2}{d\varphi^2} + \frac{d^2}{dz^2}$.
Für die Normierung von $B(\rho,\varphi,z)$ *integriere man über einen Zylinder mit unendlich großem Radius. Das Integral kann stehen gelassen werden.*

(4 Punkte)

41. Gleichstrom-Josephson-Effekt

Betrachten Sie einen *S-I-S*-Kontakt (*S* = Supraleiter, *I* = Isolator) aus gleichen supraleitenden Materialien, durch den infolge einer angelegten variablen externen Spannung U_{ext} über einen Vorwiderstand *R* ein Gleichstrom *I*(*U*) fließe, wobei die Spannung *U* direkt über dem Kontakt an den beiden Supraleitern abgegriffen werde. Sei ψ_1, ψ_2 die BCS-Wellenfunktionen des supraleitenden Zustandes im linken, bzw. rechten Supraleiter mit der Normierung $|\psi_i|^2 = n_{s,i}/2$, dann kann sie wie folgt dargestellt werden: $\psi_i = \sqrt{n_{s,i}/2}\, e^{i\theta_i}$, wobei θ_i die Phase der BCS-Wellenfunktion und $n_{s,i}/2$ die Dichte der Cooper-Paare in den beiden Supraleitern bedeutet. Wenn U_{ext} hochgefahren wird, dann fließt bis zu einem Maximalwert zunächst ein Strom, ohne dass eine Spannung *U* am Kontakt abfällt. Dies ist der ***Gleichstrom-Josephson-Effekt***.

Unter dieser Voraussetzung lauten die Schrödinger-Gleichungen für ψ_i: $i\hbar\partial\psi_1/\partial t = \hbar T\psi_2$ und $i\hbar\partial\psi_2/\partial t = \hbar T\psi_1$, *T* beschreibt hier die Kopplungskonstante für das Tunneln von Cooper-Paaren durch den Isolator. Lösen Sie die gekoppelten Differentialgleichungen unter der Annahme, dass sowohl $n_{s,i}$ als auch θ_i zeitabhängig sind und dass $n_{s,1} \cong n_{s,2}$. Zeigen Sie, dass für $U = 0$ ein Josephson-Strom $I = I_0 \sin(\theta_2 - \theta_1)$ fließt.

Hinweis: Um die beiden Differentialgleichungen zu entkoppeln, führen Sie die relative Phase $\delta = \theta_2 - \theta_1$ *ein. Beachten Sie zudem, dass ein Gleichungssystem im komplexen Raum* $\mathbb{C}$ *für den Real- und den Imaginärteil der Gleichung unabhängig voneinander erfüllt sein muss.*

(4 Punkte)

Diskussion Supraleitung (zur Klausurvorbereitung) (*0 Punkte*)

(a) Diskutieren Sie die experimentellen Hinweise auf einen supraleitenden Zustand. Aus welchen Experimenten lässt sich auf die Existenz einer Bandlücke schließen? Welche Experimente deuten auf einen geordneten Zustand hin? Welche Experimente legen eine Elektron-Phonon-Wechselwirkung als Ursache für die Supraleitung nahe. Was unterscheidet einen Supraleiter von einem idealen Leiter (mit $\rho_{elekt}= 0$)? Aus welchen Experimenten kann man schließen, dass lediglich ca. 0.1‰ der Elektronen zur Supraleitung beitragen?

(b) Diskutieren Sie das Modell der Cooper-Paar-Bildung. Warum spielt die Coulomb-W.W. keine Rolle mehr? Aus welcher Überlegung folgt, dass die Impulse k_1 und k_2 im Cooper-Paar entgegengesetzt gleich sein müssen? Aus welcher Überlegung folgt, dass das Cooper-Paar ein Spin-Singulett-Zustand sein muss? Wie wird im Rahmen der Cooper-Paar-Theorie gezeigt, dass es selbst für eine verschwindend kleine attraktive Wechselwirkung immer eine Bandlücke gibt? Welche Ausdehnung haben Cooper-Paare und mit welcher Überlegung kann dies abgeschätzt werden? Wie dicht sind die Cooper-Paare verteilt bezogen auf ihre Ausdehnung? Was bedeutet das für den BCS-Grundzustand?

(c) Was unterscheidet das Modell, das den BCS-Grundzustand beschreibt, von demjenigen der Cooper-Paare? Was sind die angeregten Zustände des BCS-Grundzustands? Wie verhält sich die Bandlücke als Funktion der Temperatur? Welche Beziehung besteht zwischen Bandlücke und kritischer Temperatur, wie wird sie hergeleitet? Erklären Sie, warum z.B. optische Experimente eine Bandlücke von $\delta E = 2\Delta$ messen, Tunnelexperimente aber nur ein Lücke $\delta E' = \Delta$. Erklären Sie (nur qualitativ) das Phänomen der verlustfreien Stromleitung (= idealer Leiter) und des Meißner-Ochsenfeld-Effekts im Rahmen der BCS-Theorie. Erklären Sie das Phänomen der Flussquantisierung.

(d) Was unterscheidet Typ I von Typ II Supraleitern? Welche Parameter definieren, ob ein Material Typ I oder Typ II ist? Diskutieren Sie die magnetische Suszeptibilität im Falle von Typ I und Typ II Supraleitern. Welche Vorteile haben Typ II Supraleiter in Bezug auf ihre technische Anwendungen? Was versteht man unter der Shubnikov-Phase?

Zusatzaufgabe Klausurvorbereitung: Supraleitung (*0 Punkte*)

(a) Leiten Sie aus der Heisenberg'schen Unschärferelation die Kohärenzlänge ξ_{CP} eines Cooper-Paares her. (2 P)

(b) Zeigen Sie, dass in erster Ordnung Störungstheorie der Erwartungswert des Wechselwirkungs-Hamilton-Operators $H_{int} = -V_0 \sum_{\vec{k},\vec{k}'} \sigma^+_{\vec{k}}\, \sigma^-_{\vec{k}'}$, der die attraktive Streuung beschreibt, im BCS-Grundzustand $\left|\Phi_{BCS}\right\rangle = \prod_{\vec{k}} \left[u_{\vec{k}} \left|0\right\rangle_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} \left|1\right\rangle_{\vec{k}} \right]$ gegeben ist durch:

$$\left\langle \Phi_{BCS} \right| H_{int} \left| \Phi_{BCS} \right\rangle = -V_0 \sum_{\vec{k},\vec{k}'} v_{\vec{k}} u_{\vec{k}} u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'} \quad (2\ P)$$

(c) Zeichnen Sie die Zustandsdichte $D_s(E)$ eines Metalls im supraleitenden Zustand im Vergleich zu derjenigen bei normaler Leitung. (2 P)