7. Übung (Abgabe Mo. 7. Juni bis 16:00 Uhr im Sekretariat Frau Badow, Raum 1.2.31)

---

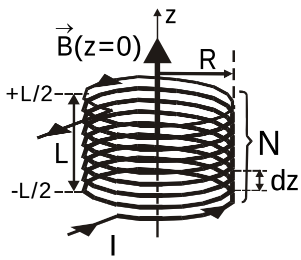
25. Kraft auf Leiterschleife (4 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes, dass das Magnetfeld eines dünnen, unendlich langen Leiters in dem der Strom *I* fließt gegeben ist durch $B(r) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$.

Hinweis: *Legen Sie den Leiter entlang der z-Achse. Da der Leiter ∞-lang ist, reicht es, das Magnetfeld $\vec{B}$ bei z = 0 zu berechnen. Überlegen Sie sich, dass $\vec{B}$ nur vom Abstand zum Leiter abhängen kann und tangential zu einem Kreis in der xy-Ebene liegen muss. Nun brauchen Sie nur noch den Betrag von $\vec{B}$ auszurechnen, indem Sie über die gesamte Leiterlänge integrieren. Das dabei auftretende Integral finden Sie in jeder Formelsammlung.*

26. Magnetfeld einer endlich langen Spule (4 Punkte)

Leiten Sie mit Hilfe des Gesetzes von Biot-Savart das Magnetfeld auf der Achse einer langen Spule her. Berechnen Sie zunächst das Feld im Mittelpunkt der Spule ($z = 0$) indem Sie über eine endlich lange, kreisförmige Spule der Länge L mit Radius R und N Windungen integrieren. Zeigen Sie, dass Sie für $L >> R$ die in der Vorlesung hergeleitete Formel $B = \mu_0 NI/L$ erhalten. Berechnen Sie zusätzlich das Feld an den Enden der Spule für L >> R.



Hinweis: Verwenden Sie als Ausgangspunkt Ihrer Herleitung das in der Vorlesung gerechnete Beispiel für das Magnetfeld auf der Achse einer Leiterschleife: $B(z) = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}$.

Benutzen Sie diesen Ansatz, um den Beitrag dB(z) zu berechnen, den der Strom dI *auf der Länge* dz *eines kleinen Teils der Spule erzeugt. Die Größe* dI *lässt sich mit Hilfe der Wicklungsdichte* n = N/L *durch* dz *ausdrücken, wobei Sie annehmen müssen, dass die Spule aus* N *Kreisringen besteht und in jedem der gleiche Strom* I *fließt. Mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes lässt sich nun der Magnetfeldbeitrag in der Mitte der z-Achse formulieren.*

27. Doppeltes Kreuzprodukt (4 Punkte)

a) Beweisen Sie den Entwicklungssatz für doppelte Kreuzprodukte:
$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c}.$$

b) Zeigen Sie die Gültigkeit dieses Satzes für den Differentialoperator $\vec{\nabla}$, indem Sie zeigen, dass gilt: $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \Delta\vec{A}$.

7. Übung (Abgabe Mo. 7. Juni bis 16:00 Uhr im Sekretariat Frau Badow, Raum 1.2.31)

---

28. Biot-Savart-Gesetz und Ampère'sches Gesetz **(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass aus der Integralform des Ampère'schen Gesetzes in Coulomb-Eichung,

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \, d^3r' \,,$$

wobei $\vec{A}_m(\vec{r})$ das Vektorpotential und $\vec{j}(\vec{r}\,')$ die Stromdichte ist, das Biot-Savart-Gesetz abgeleitet werden kann:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \, \frac{\vec{j}(r') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} .$$

Hinweis: Benutzen Sie die Definition des Vektorpotentials: $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}_m(\vec{r})$*, und zeigen Sie zuerst, dass folgende Beziehung gilt:* $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right) = -\frac{x - x'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$*, wobei* $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *und* $\vec{r}\,' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Zusatzaufgabe (freiwillig) **(0 Punkte)**

Können Sie in Aufgabe 26 auch das Magnetfeld an einem beliebigen Punkt der z-Achse einer endlich langen Spule berechnen?