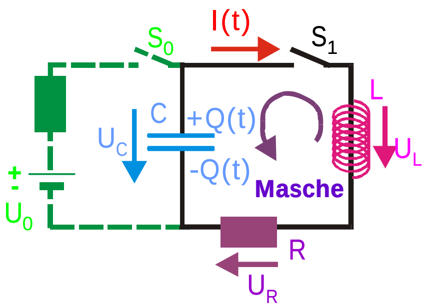
Zusammenfassung vom 21.06.2010

LCR-Kreis (freier, gedämpfter Schwingkreis):



$t < 0$: *Laden von Kondensator C auf Ladung Q_0*

$t = 0$: $Q(t=0) = Q_0 \quad I(t=0) = 0$

$t \geq 0$: *Kondensator C entlädt sich über Widerstand R und Spule L*

➜ $I(t) = -\dot{Q}(t)$ *Ladung nimmt ab für positiven Strom*

➜ $U_L(t) = L\,\dot{I}(t) = -L\ddot{Q}(t)$ *$U_L(t)$ ist zu Beginn ein Spannungsabfall (Lenz'sche Regel)*

➜ $U_C(t) - U_R(t) - U_L(t) = 0$ *Maschenregel*

➜ $Q(t) + RC\,\dot{Q}(t) + LC\,\ddot{Q}(t) = 0$ *Differentialgleichung für freien gedämpften Schwingkreis*

Ansatz: $Q(t) = \mathrm{Re}\{\tilde{Q}(t)\} = \mathrm{Re}\{\tilde{Q}_0 e^{\tilde{\mu} t}\}$ $\qquad \tilde{Q}_0 = Q_0' \, e^{i\delta} \in \mathbb{C}, \quad \tilde{\mu} \in \mathbb{C}$

einsetzen ➜ $1 + \tilde{\mu} RC + \tilde{\mu}^2 LC = 0$ $\qquad$ *mit* $\tau = \dfrac{2L}{R}$ *Abklingzeit*

➜ $\tilde{\mu}_{1,2} = -\tau^{-1} \pm \sqrt{\tau^{-2} - \omega_0^2}$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ *Resonanzfrequenz des ungedämpften Schwingkreises*

LC-Kreis (freier, ungedämpfter Schwingkreis):

$R = 0$

➜ $\tau^{-1} = 0 \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ *harmonische Schwingung mit Resonanzfrequenz ω_0*

➜ $\tilde{\mu} = \pm i\omega_0$

mit $\tilde{Q}_0 = Q_0' \, e^{i\delta}$ ➜ $Q(t) = \mathrm{Re}\left\{Q_0' \, e^{\pm i(\omega_0 t \pm \delta)}\right\} = Q_0' \cos(\omega_0 t + \delta)$

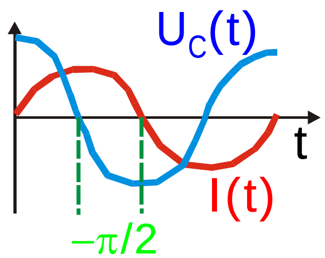
mit Randbedingung $Q(t=0) = Q_0$ ➜ $Q_0 = Q_0' \cos\delta$

$I(t=0) = 0$ ➜ $\sin\delta = 0$

➜ $Q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t)$

➜ $I(t) = I_0 \sin(\omega_0 t) \qquad I_0 = \omega_0 Q_0$

➜ $U_C(t) = U_0 \cos(\omega_0 t) = U_L(t) \qquad U_0 = Q_0 / C$



Energiebetrachtung: $E_{tot}(t=0) = E_{Kond}(t=0) = \frac{1}{2C} Q_0^2$ *bei t = 0*

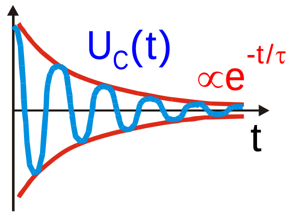
$$E_{tot}(t) = E_{Kond}(t) + E_{Spule}(t) = \mathrm{const} = \frac{1}{2C} Q_0^2$$ *Energiesatz!*

LCR-Kreis (freier, gedämpfter Schwingkreis): $R > 0$

$$\tilde{\mu}_{1,2} = -\tau^{-1} \pm \sqrt{\tau^{-2} - \omega_0^2} \qquad \tau = \frac{2L}{R} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$\omega_0 > \tau^{-1}$: ***schwach gedämpft***

$$\tilde{\mu}_{1,2} = -\tau^{-1} \pm i\omega \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \tau^{-2}}$$



$$\rightarrow \; Q(t) = Q_0' e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \delta)$$

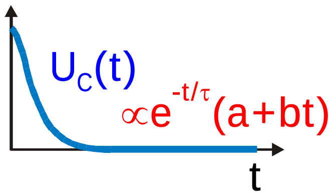
mit Randbedingung $\rightarrow \; Q_0 = Q_0' \cos\delta \qquad \tan\delta = -\frac{1}{\omega\tau}$

$$\rightarrow \; Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left[\cos(\omega t) + \frac{1}{\omega\tau} \sin(\omega t) \right]$$

$\omega_0 = \tau^{-1}$: ***kritisch gedämpft***

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \tau^{-2}} = 0$$

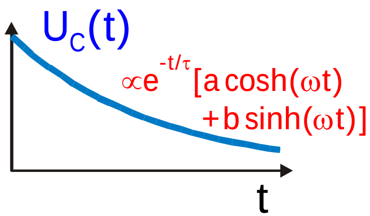
aperiodischer Grenzfall



$$\rightarrow \; Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left[1 + \frac{t}{\tau} \lim_{\omega \to 0} \frac{\sin(\omega t)}{\omega t} \right] = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 + \frac{t}{\tau} \right)$$

$\omega_0 < \tau^{-1}$: ***überkritisch gedämpft***

$$\omega^2 < 0 \quad \rightarrow \quad \omega = i\omega' \quad \textit{mit} \quad \omega' = \sqrt{\tau^{-2} - \omega_0^2}$$



$$\rightarrow \; Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left[\cosh(\omega' t) + \frac{1}{\omega'\tau} \sinh(\omega' t) \right]$$