Zusammenfassung vom 13.07.2011

XI Interferenz und Beugung

Abstand der Maxima: *sei y der Auftreffort der interferierenden Strahlen auf der y-Achse (= Abstand vom Punkt P zur Mittelachse der beiden Spalte)*

$$\rightarrow \tan\theta = \frac{y}{L} \cong \sin\theta \quad \Rightarrow \quad y = L\sin\theta \quad (\theta << 1)$$

$$\rightarrow \Delta y = y_{m+1} - y_m = L\frac{\lambda}{d}$$

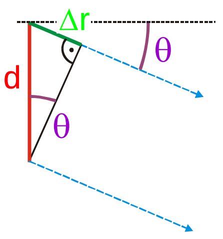
Abstand von zwei Streifen auf dem Schirm ist äquidistant (Beugungsmuster entlang y-Achse)

Huygens'sche Elementarwellen:

$$\vec{E}_{1,2} = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{r}\vec{E}_0 e^{i\left(kr-\omega t+\delta_{1,2}\right)}\right\}$$

$$L >> d,\ \theta << 1 \ \Rightarrow \ r \cong L$$

L = Abstand zum Schirm



Phasendifferenz:

$$\delta = \delta_2 - \delta_1 = k\,\Delta r = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta$$

Gesamtamplitude:

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \mathrm{Re}\left\{\tfrac{1}{L}\vec{E}_0 e^{i\left(kL-\omega t+\delta_1+\delta/2\right)}\left(e^{-i\delta/2} + e^{i\delta/2}\right)\right\}$$

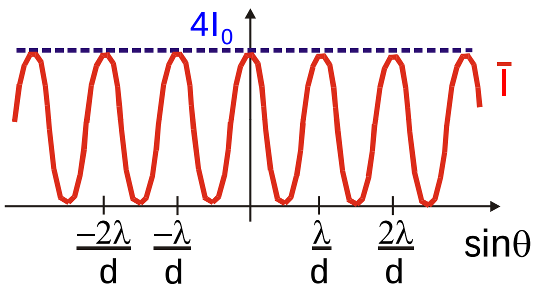
$$= \tfrac{1}{L} 2\vec{E}_0 \cos\left(kL-\omega t+\delta_1+\delta/2\right)\cos\left(\delta/2\right)$$

Intensität:

$$\bar{I} = \langle I\rangle_t == \left\langle \varepsilon_0 c \vec{E}^2 \right\rangle_t \rightarrow \bar{I} = 4 I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)$$

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0 c}{2L^2}\vec{E}_0^2$$

Intensität der Welle ohne Blende im Abstand L



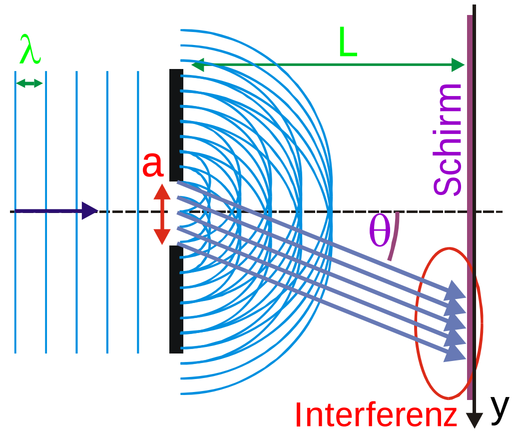
XI Beugung am endlich breiten Spalt

Voraussetzungen: *jeder Punkt im Spalt erzeugt eine Huygens'sche Elementarwelle*

Spaltbreite **a** *sehr klein* ($a \geq \lambda$)

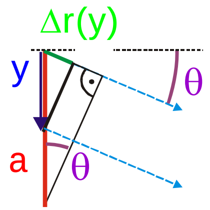
Spaltlänge ***b*** *sehr groß* ($b >> a$)

Abstand Schirm $L \to \infty$ ➜ $r \cong L$



Partialwellen:
$$d\vec{\Phi}(y') = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{a}\frac{\vec{E}_0}{r} e^{i[kr-\omega t+\delta(y')]} dy'\right\}$$

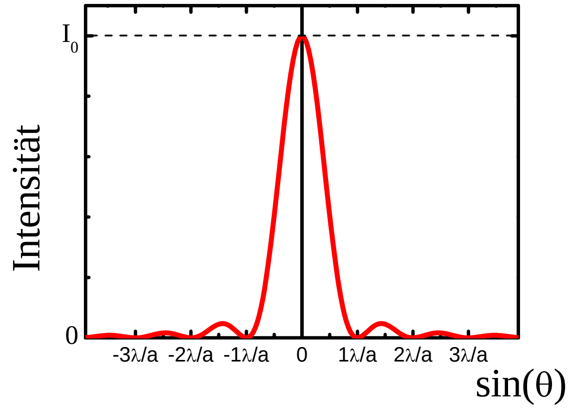
Phasendifferenz:
$$\delta(y') = k\,\Delta r \cong \frac{2\pi}{\lambda} y' \sin\theta$$



Gesamtamplitude: ***(r ≅ L)***
$$\vec{\Phi}(\sin\theta) = \mathrm{Re}\left\{\frac{\vec{E}_0}{a\,L}\int_{-a/2}^{+a/2} e^{i[kL-\omega t+\delta(y')]} dy'\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{\vec{E}_0}{a\,L} e^{i(kL-\omega t)}\int_{-a/2}^{+a/2} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta\, y'} dy'\right\}$$

➜
$$\vec{\Phi}(\sin\theta) = \mathrm{Re}\left\{\frac{\vec{E}_0}{a\,L}\frac{e^{i(kL-\omega t)}}{i\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta}\left(e^{i\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta} - e^{-i\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta}\right)\right\} = \frac{\vec{E}_0}{L}\cos(kL-\omega t)\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta}$$

Intensität: $$\bar{I}(\theta) = \left\langle \varepsilon_0 c \vec{\Phi}^2 \right\rangle_t = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2}$$



$$I_0 = \frac{\varepsilon_0 c}{2L^2} \vec{E}_0^2$$

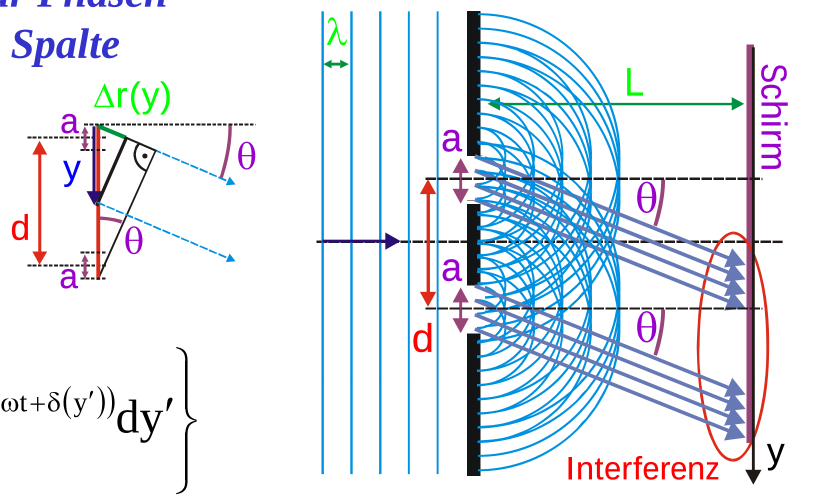
I_0 = Intensität der Welle ohne Spalt im Abstand L

XI Beugung am endlich breiten Doppelspalt

Problem im Prinzip gleich wie Beugung am endlich breiten Spalt, nur dass jetzt in beiden Spalten Huygens'sche Elementarwellen erzeugt werden.

➜ ***gleicher Ansatz für Partialwellen dϕ und für Phasen-differenz δ(y'), aber Integration über beide Spalte***

Phasendifferenz: $$\delta(y') = k\,\Delta r \cong \frac{2\pi}{\lambda} y' \sin\theta$$

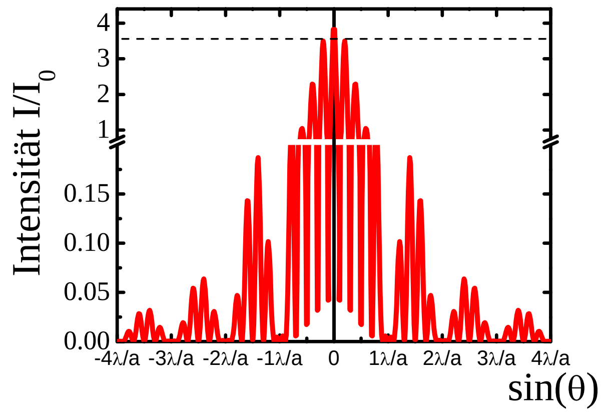


Gesamtamplitude: $$\vec{\Phi}(\sin\theta) = \mathrm{Re}\left\{ \frac{\vec{E}_0}{a\,L} \int_{\text{Spalte}} e^{i(kL - \omega t + \delta(y'))} dy' \right\}$$

$$\rightarrow\quad \vec{\Phi}(\sin\theta) = \frac{\vec{E}_0}{a\,L}\,\frac{e^{i(kL-\omega t)}}{\frac{i2\pi}{\lambda}\sin\theta}\left[\left(e^{i\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta}+e^{-i\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta}\right)\left(e^{i\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta}-e^{-i\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta}\right)\right]$$

$$= \frac{2\vec{E}_0}{L}\,e^{i(kL-\omega t)}\cos\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta}$$

Intensität: $$\bar{I}(\theta) = 4I_0\underbrace{\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}\;\underbrace{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2}}$$



Intensität der Interferenz am Doppelspalt

Intensität der Beugung am Einzelspalt

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0\,c}{2\,L^2}\vec{E}_0^{\,2}$$

***I_0* = Intensität der Welle ohne Doppelspalt im Abstand L**