FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
Fachbereich Physik
Übungen zur Vorlesung
''Einführung in die Physik der Atome und Moleküle I'' (SoSe 2008)
- Prof. Karsten Heyne -
Aufgabenblatt 6 vom 22.05.2008

Abgabe bei der Vorlesung oder per E-Mail an: fidder@physik.fu-berlin.de
vor Donnerstag 29.05.2008, 12h30.

Aufgabe 6–1 (1 + 1 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle Wasserstoffatom-Wellenfunktionen gilt:

(a) $< L_x >= 0$

(b) $< L_y >= 0$

Aufgabe 6–2 (1 + 1.5 + 1.5 Punkte)

Wir betrachten ein Atom mit zwei Energieniveaus $|1\rangle$ und $|2\rangle$ mit den Energien ϵ_1 und ϵ_2. Ein monochromatisches Strahlungsfeld koppelt die beiden Energieniveaus miteinander. Der Wechselwirkungsoperator ist $H_{12} = Ve^{i\chi}$, mit $\chi = k \cdot r - \omega t$ (V ist reell).
Der Hamilton-Operator für dieses System kann dargestellt werden als:

$$H = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & Ve^{i\chi} \\ Ve^{-i\chi} & \epsilon_2 \end{pmatrix}$$

(a) Trotz der impliziten Zeitabhängigkeit von χ kann man diesen Hamiltonian diagonalisieren. Berechnen Sie die Eigenwerte ϵ_+ und ϵ_- für die zwei Eigenzustände der diagonalisierten Matrix.

(b) Zeigen Sie, dass $|\Psi_+\rangle = cos\theta e^{-i\chi/2}|1\rangle + sin\theta e^{i\chi/2}|2\rangle$ und $|\Psi_-\rangle = -sin\theta e^{-i\chi/2}|1\rangle + cos\theta e^{i\chi/2}|2\rangle$ die Wellenfunktionen für die zwei Eigenzustände dieses Hamiltonians sind, wobei θ definiert ist als $tan2\theta = \frac{2V}{\epsilon_1 - \epsilon_2}$.

(c) Obwohl wir jetzt zwei neue Eigenzustände haben, können wir immer noch das quantenmechanische System als ein Zwei-Niveau-Atom und ein separates Strahlungsfeld betrachten. Es kann ein Zeitentwicklungsoperator konstruiert werden, der es erlaubt, für jede Linearkombination von $|1\rangle$ und $|2\rangle$ die Zeitabhängigkeit unter dem Wechselswirkungsoperator H_{12} zu beschreiben.

Dieser Zeitentwicklungsoperator ist definiert als
$U(t, t_0) = \left(|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+|e^{\frac{-i}{\hbar}\epsilon_+(t-t_0)}\right) + \left(|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-|e^{\frac{-i}{\hbar}\epsilon_-(t-t_0)}\right).$

Wenn sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ das Atom im Zustand $|1\rangle$ befindet, dann ist die Zeitabhängigkeit der Population des Zustands $|2\rangle$ gegeben durch:

$P_{21}(t) = |\langle 2|U(t,t_0)|1\rangle|^2$.

Zeigen Sie das $P_{21}(t)$ geschrieben werden kann als die Rabi-Formel:

$P_{21}(t) = \frac{4V^2}{4V^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2} sin^2(\Omega t)$,

wobei $\Omega = \frac{\left(4V^2+(\epsilon_1-\epsilon_2)^2\right)^{1/2}}{\hbar}$ die Rabi-Frequenz ist. Skizzen Sie diese Zeitabhängigkeit als Funktion von Ωt.

Aufgabe 6–3 (1.5 + 0.5 Punkte)

Ein Heliumatom hat zwei Elektronen, und damit gibt es insgesamt vier Elektronenspin-Wellenfunktionen für ein Heliumatom. Drei davon sind symmetrisch und eine ist antisymmetrisch unter Teilchenvertauschung.

(a) Generieren Sie durch Verwendung des Operators S_- aus der symmetrischen Elektronenspin-Wellenfunktion $\alpha(1)\alpha(2)$ die beiden anderen symmetrischen Elektronenspin-Wellenfunktionen und normieren Sie diese.

(b) Geben Sie die antisymmetrische Elektronenspin-Wellenfunktion für das Heliumatom an.

Aufgabe 6–4 (1 + 1 Punkte)

Die Spinoperatoren können dargestellt werden als $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$, wobei σ_i die Pauli-Spinmatrizen sind:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie unter Verwendung der Pauli-Spinmatrizen, dass analog zum Drehimpuls-Operator gilt:

(a) $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$,

(b) $[S_z, S^2] = 0$.