0.1 Raketenbewegung:

Eine Rakete wird beschleunigt und bewegt sich dadurch fort, dass sie Masse nach hinten mit hohem Impuls ausströmen lässt. Die Bewegungsrichtung sei in z Richtung. Sei v_a die konstante Ausströmgeschwindigkeit des Brennstoffgases, m die Masse der Rakete, m_{GAS} die Masse des auströmenden Gases, $\vec{v}(t)$ die Rakentengeschwindigkeit, $\vec{v}_{GAS}$ die Brennstoffgasgeschwindigkeit und $\vec{v}_a = (0, 0, -v_a)$.

Es gilt: $\vec{v}_{GAS}(t) = \vec{v}(t) + \vec{v}_a(t) \approx \vec{v}_a(t)$,
da der Treibstoff immer viel schneller austritt als die Rakete fliegt.

Mit den Impulsen:
$\frac{d\vec{p}_T}{dt} = \frac{d\vec{p}_R}{dt} + \frac{d\vec{p}_{GAS}}{dt} = 0$, (e1)
Füer den Raketenimpuls $\vec{p}_R$ gilt:
$\frac{d\vec{p}_R}{dt} = \frac{d}{dt}(m(t)\vec{v}(t)) = \vec{v}(t)\frac{dm}{dt} + m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 0$

$\frac{d\vec{p}_{GAS}}{dt} = \frac{dm_{GAS}}{dt}\vec{v}_{GAS} + m_{GAS}(t)\frac{d\vec{v}_{GAS}(t))}{dt} = -\vec{v}_{GAS}(t)\frac{dm}{dt}$,
da $\frac{dm_{GAS}}{dt} = -\frac{dm}{dt}$ und $\vec{v}_{GAS} \approx \vec{v}_a = const.$

Mit e1 folgt: $m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}(t)\frac{dm}{dt} - (\vec{v}(t) + \vec{v}_a)\frac{dm}{dt} = m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} - \vec{v}_a\frac{dm}{dt} = 0$,

Also insgesamt für den Raketenimpuls:

$\frac{d\vec{p}_T}{dt} = m\frac{\vec{v}}{dt} - \vec{v}_a\frac{dm}{dt} = 0$
Mit externer Kraft $\vec{F}_{ext} = \frac{\vec{p}_T}{dt} = m\vec{g}$ folgt:

$\frac{d\vec{p}_T}{dt} = \vec{F}_{ext} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_a\frac{dm}{dt} = 0$, in vektorieller Schreibweise.

Betrachtet man diese Bewegung in einer Dimension (in z-Richtung), so sind die Vorzeichen für Richtungsunterschiede der Vektoren zu beachten und es folgt:

$-mg = m\frac{d\vec{v}}{dt} + v_a\frac{dm}{dt}$
$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{v_a}{m}\frac{dm}{dt} = -g$

Durch Integration ergibt sich:

$\int_0^{v(T)} dv + v_a\int_{m_0}^{m(T)} \frac{dm}{m}dt = -g\int_0^T dt;$

$v(T) + v_a ln\frac{m(T)}{m_0} = -gT$, da $\int \frac{dx}{x} = lnx$

$v(T) = v_a ln(\frac{m_0}{m_0 - cT}) - gT$, mit $m(t) = m_0 + ct = m_0 + |\dot{m}|\, t$ und $c = const$ konstanter Massenstrom.

Sei t_B die Zeit zur der der Brennstoff verbraucht ist. Die Steighöhe $h(t_B)$ der Rakete ergibt sich aus:

$h(t_B) = \int_0^{t_B} v(t)dt = v_a t_B + v_a(\frac{m_0}{c} - t_B) ln(1 - \frac{c}{m_0} t_B) - \frac{1}{2} g t_B^2$ (e2)

Herleitung der Lösung (e2):

$v(t) = v_a ln(\frac{m_0}{m_0 - ct}) - gt = -v_a ln(1 - \frac{c}{m_0} t) - gt = -v_a ln(1 - qt) - gt$ mit $q = \frac{c}{m_0}$
$h(T) = \int_0^T v(t)dt = \int_0^T -v_a ln(1 - qt)dt - \frac{1}{2} g T^2$
$\frac{1}{2} g T^2 + h(T) = -v_a \int_0^T ln(1 - qt)dt$ Mit $\int lnx dx = xlnx - x$, ergibt sich mit folgender Substitution:
$\beta = 1 - qt$, also auch $\frac{d\beta}{dt} = -q$ und $dt = -\frac{1}{q} d\beta$,
Für die Integralgrenzen gilt: Aus $t = 0$ wird unten: $\beta = 1 - qt = 1 - q0 = 1$ und oben: $\beta = 1 - qt = 1 - qT$;

$\frac{1}{2} g T^2 + h(T) = \frac{v_a}{q} \int_1^{1-qT} ln(\beta) d\beta$
$\frac{1}{2} g T^2 + h(T) = \frac{v_a}{q} [\beta ln \beta - \beta|_1^{1-qT}$
$\frac{1}{2} g T^2 + h(T) = \frac{v_a}{q} [(1 - qT) ln(1 - qT) - (1 - qT) - 1 ln 1 + 1]$;
$\frac{1}{2} g T^2 + h(T) = \frac{v_a}{q} [(1 - qT) ln(1 - qT) + qT]$;
$h(T) = v_a T + v_a(\frac{1}{q} - T) ln(1 - qT) - \frac{1}{2} g T^2$;
$h(T) = v_a T + v_a(\frac{m_0}{c} - T) ln(1 - \frac{c}{m_0} T) - \frac{1}{2} g T^2$;
$h(T) = v_a T + v_a(\frac{m_0}{|\dot{m}|} - T) ln(1 - \frac{|\dot{m}|}{m_0} T) - \frac{1}{2} g T^2$; q.e.d.