Hydrostatik: ruhende Flüssigkeiten

In einer Flüssigkeit sind die Teilchen (Atome, Moleküle) fest aneinander gebunden durch sogenannte Kohäsionskräfte, die Teilchen lassen sich jedoch beliebig aneinander vorbeischieben. Dies führt dazu, daß sich das Volumen der Flüssigkeit nur schwer ändern läßt (Flüssigkeiten sind kaum komprimierbar!), die Form der Flüssigkeit aber beliebig ist (Volumenelastizität, aber keine Formelastizität).
Wirkt eine Kraft auf eine bewegliche Gefäßwand (»Stempel«), so wird sie innerhalb der Flüssigkeit als Druck übertragen. Der Druck wirkt allseitig und überall in der Flüssigkeit; er ist daher nicht eine Vektorgröße. Der Druck ist definiert als »Kraft pro Fläche«:

$$\text{Druck} = \frac{\text{wirkende Kraft}}{\text{Angriffsfläche}} \qquad P = \frac{F}{A}$$

Druckeinheit $= \mathrm{N/m^2} \equiv \mathrm{Pa}$ (Pascal), wobei die auf der Fläche A *senkrecht* stehende Kraftkomponente gemeint ist. (Zum Vergleich: der Atmosphärendruck, der auf der Erdoberfläche aufgrund des Gewichts der Lufthülle wirkt, beträgt etwa 100 000 Pa. Man definiert daher eine weitere Druckeinheit, das bar:

$$1\ \mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa}\ .$$

Wir sprechen von einer idealen Flüssigkeit, wenn das Volumen exakt konstant bleibt (keine Komprimierbarkeit) und die Formänderung (z. B. Fließen) ohne Widerstand geschieht (keine Formelastizität). Wirkliche Flüssigkeiten (reale Flüssigkeiten) haben diese idealen Eigenschaften nur annähernd; insbesondere zeigen sie einen Widerstand (Zähigkeit) gegenüber Formänderungen.

Der hydrostatische Druck: Schweredruck

Schweredruck

Der Schweredruck entsteht durch das Gewicht der Flüssigkeit, welche über dem Meßpunkt liegt. Er ist gegeben durch die Gewichtskraft, geteilt durch die Fläche des Behälters:

$$\Delta P(h) = \frac{mg}{A} = \frac{\rho V g}{A} = \frac{\rho g A h}{A} = \rho g h$$

wo ρ die Massendichte der Flüssigkeit bezeichnet. Der Schweredruck steigt also linear mit wachsender Tiefe in der Flüssigkeit an, bei der Tiefe h hat er den Wert:

$$P(h) = \rho g h$$

Der Stempeldruck

Der Gesamtdruck in einer ruhenden Flüssigkeit, der sogenannte hydrostatische Druck, ist die Summe vom Stempeldruck P_0 und Schweredruck $P(h)$:

$$P = P_0 + P(h)$$

Dieser Druck wirkt bei gegebener Tiefe überall gleich, er ist nicht richtungsabhängig und hängt auch nicht von der Form des Behälters ab (»hydrostatisches Paradoxon«).

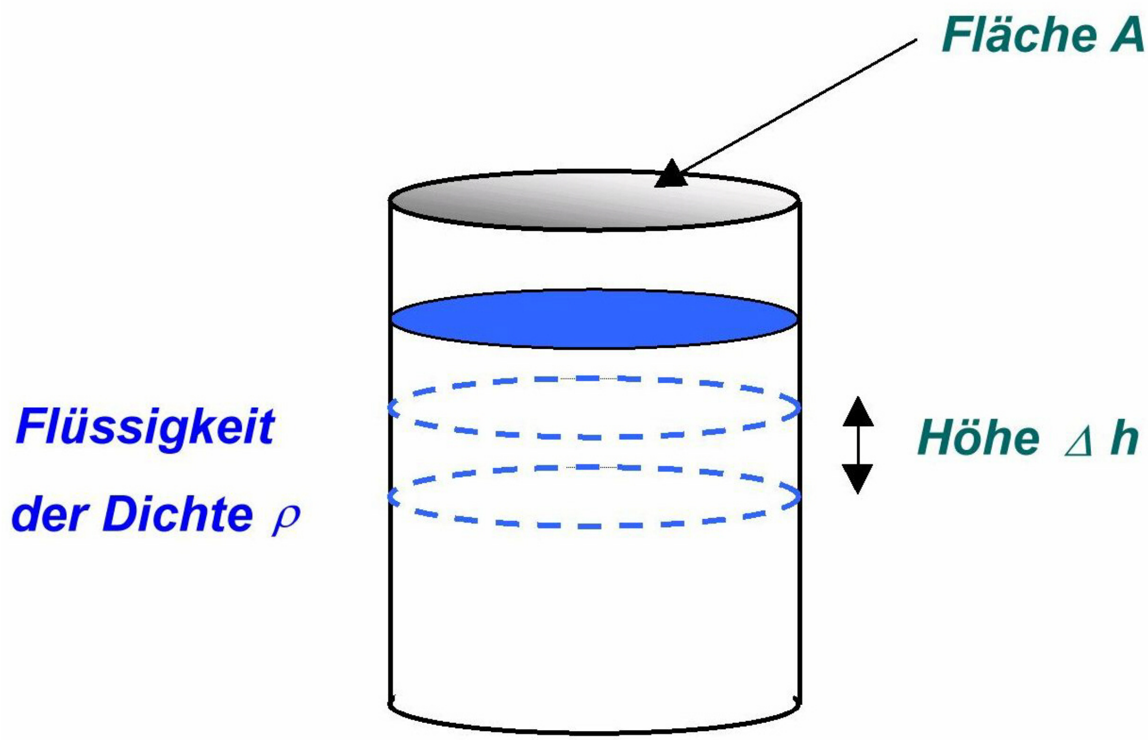


Abbildung 0.23. Schweredruck in einer Flüssigkeit der Dichte ρ

Auftrieb

Taucht ein Objekt in die Flüssigkeit ein, wirkt an seiner unteren Fläche aufgrund des Schweredrucks ein höherer Druck, als an der oberen Fläche. Dies führt zu einer Nettokraft, die das Objekt anzuheben versucht: sein Gewicht ist geringer in der Flüssigkeit. Diese Kraft nennt man Auftrieb F_A, sie ist gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit m_v (Prinzip von ARCHIMEDES, siehe Abb. 0.24 auf der folgenden Seite).

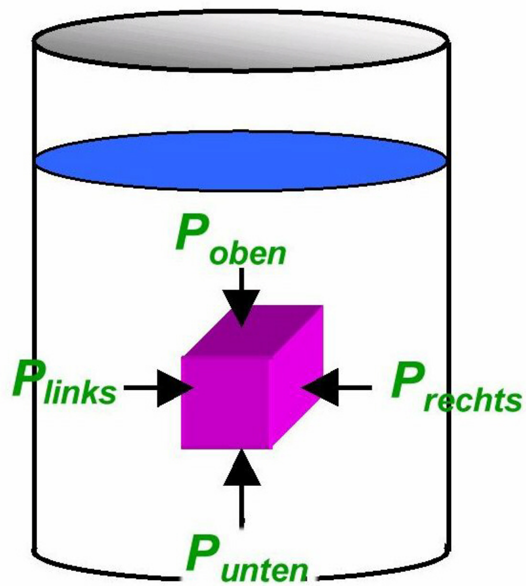


Abbildung 0.24. Druckverhältnisse um ein Objekt in einer Flüssigkeit; der Druck von unten ist um den Schweredruck der verdrängten Flüssigkeit größer als der Druck von oben

$$
\begin{aligned}
\vec{F_A} &= m_v \cdot \vec{g} = \rho_v \cdot \vec{g} \cdot V \\
\vec{F_{res}} &= m_K \cdot \vec{g} - m_v \cdot \vec{g} = (\rho_K - \rho_v)\vec{g} \cdot V
\end{aligned}
$$

Der Auftrieb $\vec{F_A}$ eines Körpers K ist gleich der Gewichtskraft der von ihm verdrängten Flüssigkeit $m_v \cdot \vec{g}$ und von der Gestalt und vom Material des Körpers unabhängig. Die resultierende Kraft $\vec{F_{res}}$, die entscheidet, ob ein Körper in der Flüssigkeit schwimmt, schwebt oder sinkt, ist die Differenz aus der Masse des verdrängten Volumens $\rho_v \cdot \vec{g} \cdot V$ und der Masse des verdrängenden Volumens $\rho_K \cdot \vec{g} \cdot V$.

n.b. In einer nicht-idealen (komprimierbaren) Flüssigkeit bzw. in einem Gas nimmt der Schweredruck nicht mehr linear mit wachsender Tiefe zu, da sich das Medium zunehmend komprimiert aufgrund des wachsenden Drucks; die Dichte nimmt damit auch zu. Dies führt bei einer komprimierbaren Fluide (Gas oder Flüssigkeit) zur barometrischen Höhenformel: Druck und Dichte nehmen exponentiell mit wachsender Tiefe zu. Diese Formel kann als wichtiges Beispiel des thermischen Gleichgewichtes (BOLTZMANN-Gleichgewicht) angesehen werden (s. Wärmelehre).

Grenz- und Oberflächen

Ein Flüssigkeitsteilchen innerhalb des Volumens der Flüssigkeit erfährt von allen Richtungen gleiche Kohäsionskräfte, es herrscht ein Kräftegleichgewicht. Bringt man das Teilchen an die Oberfläche, fehlen die Kräfte auf der einen Seite (Tafelbild!), das Gleichgewicht ist gestört. Es kostet also eine Kraftanstrengung, (bzw. Arbeit W muß geleistet werden), um ein Teilchen an die Oberfläche zu führen, seine (potentielle) Energie ist dort größer. Diese zusätzliche Energie, geteilt durch die entsprechende Fläche, nennt man die spezifische Oberflächenenergie ε:

$$\varepsilon = \frac{W}{A} \qquad \left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2}\right).$$

Diese spezifische Oberflächenenergie ist eine Eigenschaft der Flüssigkeit (und ggf. auch der gegenüberliegenden Materie an der Grenzfläche). Sie kann z. B. durch Aufheben eines Films aus der Flüssigkeit durch einen Drahtbügel gemessen werden. Dabei mißt man die nötige Arbeit W, um die Fläche des Films um den Betrag A zu erhöhen, bzw. (wahlweise) die dazu nötige Kraft, die man durch die Breite des Bügels l geteilt als Oberflächenspannung σ bezeichnet:

$$\varepsilon = \frac{W}{A} \doteq \sigma = \frac{F}{l} \qquad \left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2} \equiv \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right).$$

Da die Oberflächenenergie es allgemein energetisch ungünstig macht, eine freie Fläche zu vergrößern, bildet eine Flüssigkeit sog. »Minimalflächen« (vgl. Seifenblasen).

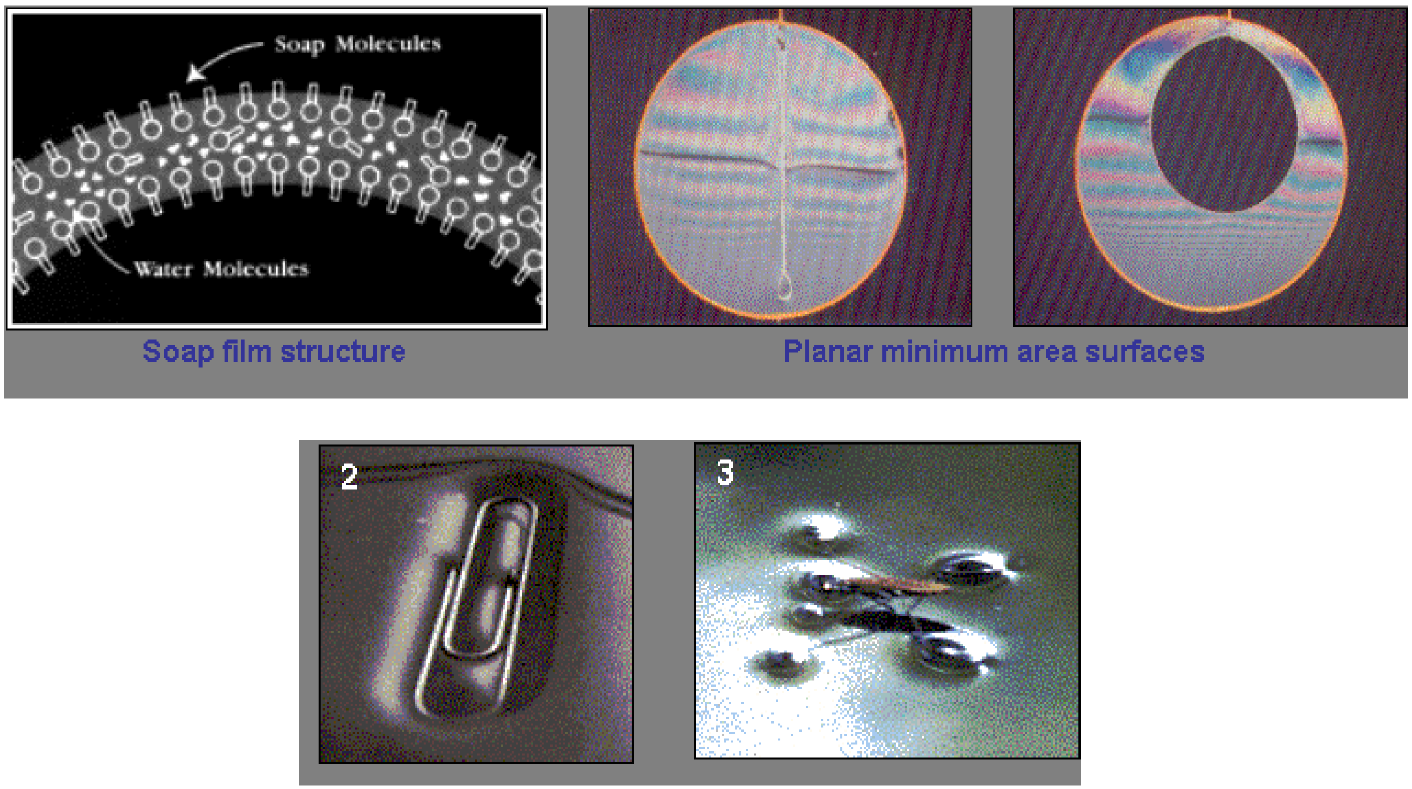
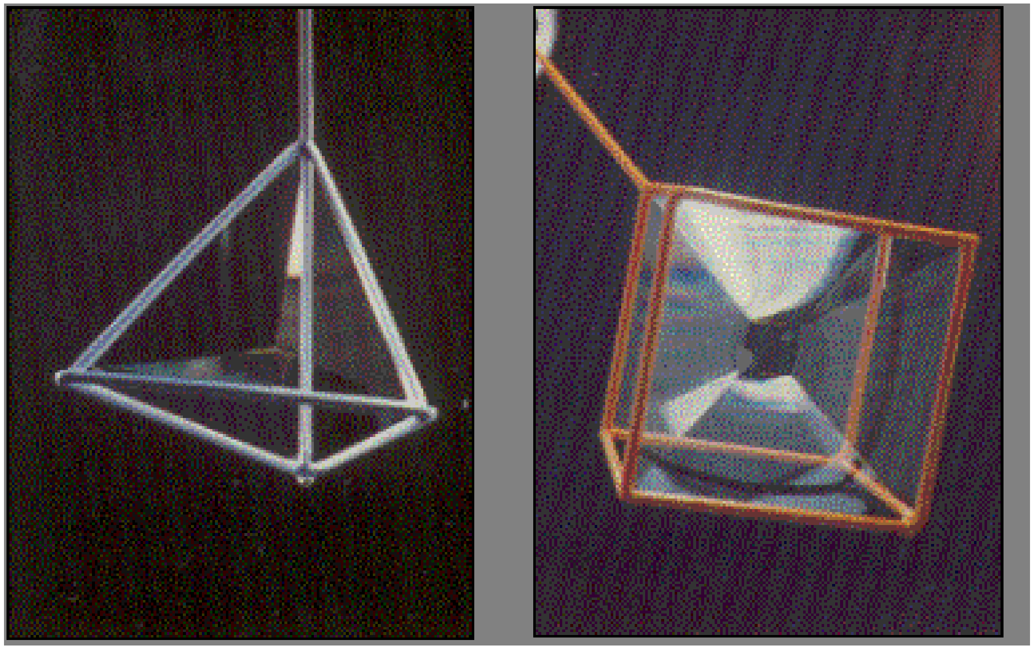
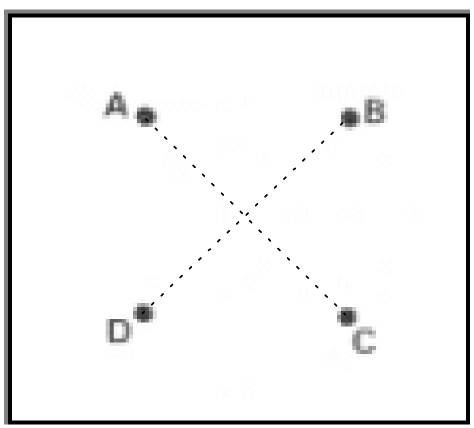
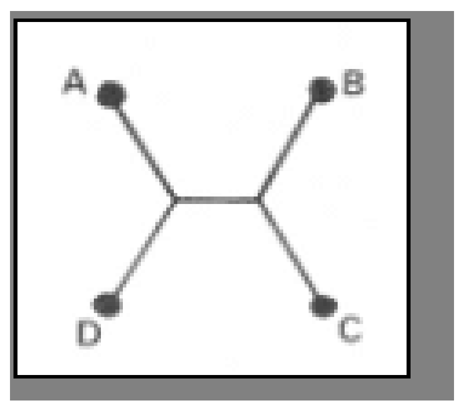


Abbildung 0.25. Seifenblasen und Oberflächenspannung

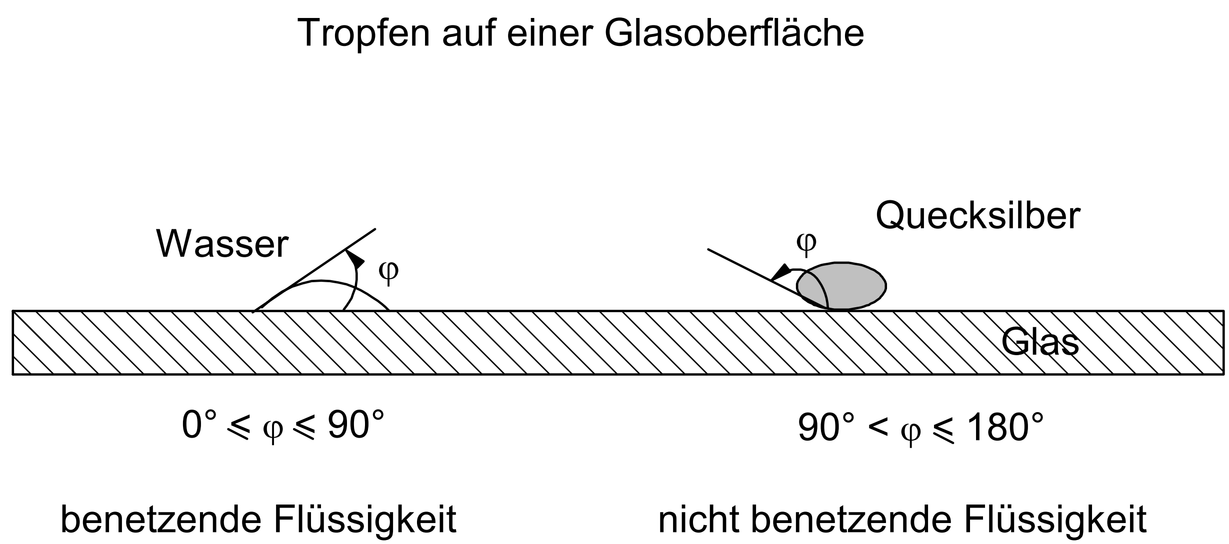






direkte Verbindung ~ 9,05 cm, bei s(AB)=3,2 cm
optimierte Lösung (rechts) ~ 8,7 cm

Falls die Flüssigkeit an der Grenzfläche in Kontakt mit einer anderen Materie tritt, kommt es auf die relative Stärke der Kohäsionskräfte zwischen den eigenen Flüssigkeitsteilchen und den Adhäsionskräften zwischen Flüssigkeit und angrenzender Materie an. Falls letztere stärker sind, spricht man von einer »benetzenden Flüssigkeit« $0 \leq \varphi \leq 90$; ein Tropfen breitet sich möglichst aus. Anderenfalls bleibt der Tropfen möglichst geschlossen (nicht-benetzende Flüssigkeit $90 > \varphi \geq 180$).



Dies erklärt auch die Kapillarwirkung bei einer Flüssigkeit in einem engen Rohr:

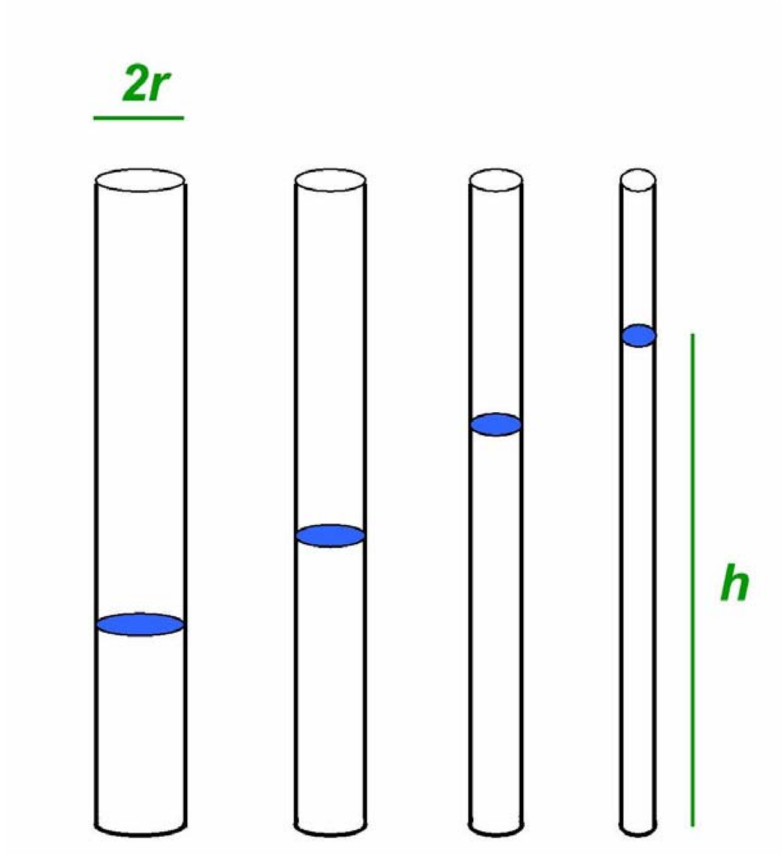
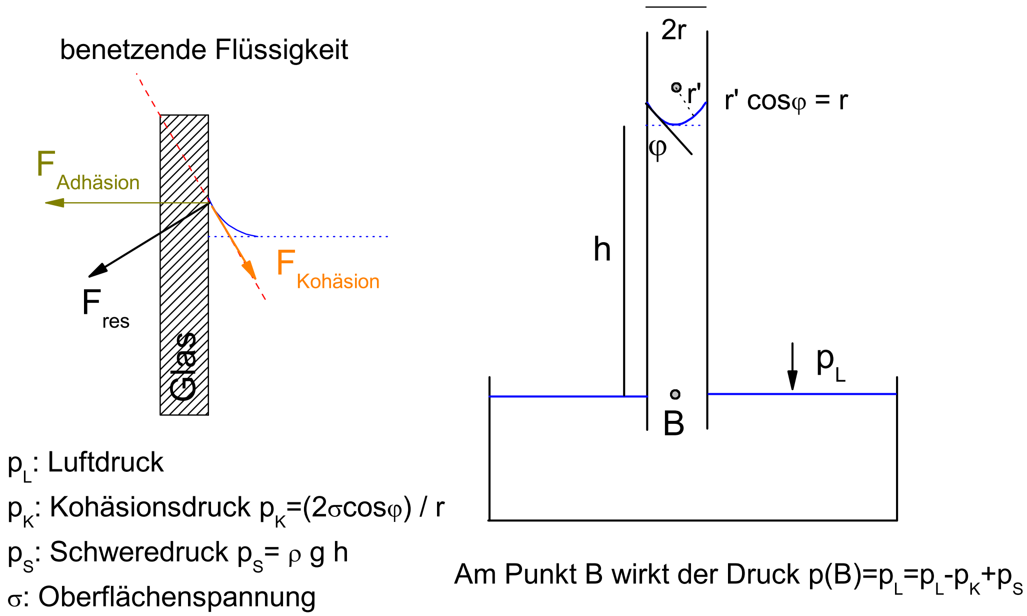


Abbildung 0.27. Die Steighöhe einer Flüssigkeit in einem Kapillarrohr (relativ zur Höhe der Flüssigkeit außerhalb des Rohrs) kann durch eine einfache Überlegung aus der spezifischen Grenzflächenenergie berechnet werden. Die Energieerhöhung $\Delta E_{\rm pot}$ durch das Anheben der Flüssigkeit um die Höhe h im Rohr ist gegeben durch $\Delta E_{\rm pot} = mgh = \rho V gh = \rho g \pi r^2 h^2$. Der Energiegewinn durch die Oberflächenenergie ist $\Delta E_{\rm obf} = \varepsilon A_{\rm kontakt} = \varepsilon 2\pi rh$. Aus der Energiebilanz $\Delta E_{\rm pot} = \Delta E_{\rm obf}$ erhalten wir: $\rho grh = 2\varepsilon$ oder $h = 2\varepsilon/\rho gr$ oder $h = 2\sigma/\rho gr$. Vgl. Skizze, oben.



Aus der Druckberechnung am Ort B ergibt sich für die kapillare Steighöhe h:

$$h = \frac{2\sigma\cos\varphi}{r\rho g}$$

$$h = \frac{2\sigma}{r\rho g} \quad f\ddot{u}r\, \varphi = 0$$

Hydrodynamik: bewegte Flüssigkeiten

Volumenstrom, Kontinuität

Wir betrachten eine stationäre Strömung, d. h. die Geschwindigkeit der Strömung an einem gegebenen Punkt bleibt konstant im Laufe der Zeit. Außerdem betrachten wir zunächst die Strömung einer idealen Flüssigkeit, die nicht komprimierbar ist und ohne Widerstand fließt.

Eine wichtige Größe, um die Strömung zu charakterisieren, ist die Volumenstromstärke I_V:

$$I_\mathrm{V} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \qquad \left(\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\right).$$

Bei der idealen Strömung ist das Geschwindigkeitsprofil in einem Rohr gleichmäßig, es bildet eine Ebene senkrecht zur Strömungsrichtung. Bei einem Rohr vom Querschnitt A ist das Volumen, welches in der Zeit Δt durch die Querschnittsfläche mit Geschwindigkeit v fließt, gegeben durch

$$\Delta V = Av\Delta t,$$

d. h. die Stromstärke ist

$$I_\mathrm{V} = Av\ .$$

Da die Flüssigkeit inkompressibel ist und auch im Laufe der Strömung nicht erzeugt oder vernichtet wird, gilt eine *Kontinuitätsbedingung*: Das Volumen ΔV, das in einer gegeben Zeit durch eine gegebene Querschnittsfläche im Rohr fließt, muß überall gleich sein – es kann z. B. nicht mehr Flüssigkeit in das Rohr hineinfließen, als am anderen Ende in der gleichen Zeit herausfließt. M. a. W. ist die Volumenstromstärke überall gleich. Ändert sich die Querschnittsfläche des Rohrs, so muß sich die Strömungsgeschwindigkeit

v entsprechend ändern, um I_V konstant zu halten:

$$A_1\,v_1 = A_2\,v_2 \qquad \mathit{oder} \qquad \frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

Wo der Querschnitt enger wird, muß die Flüssigkeit schneller fließen (siehe Abb. 0.28).

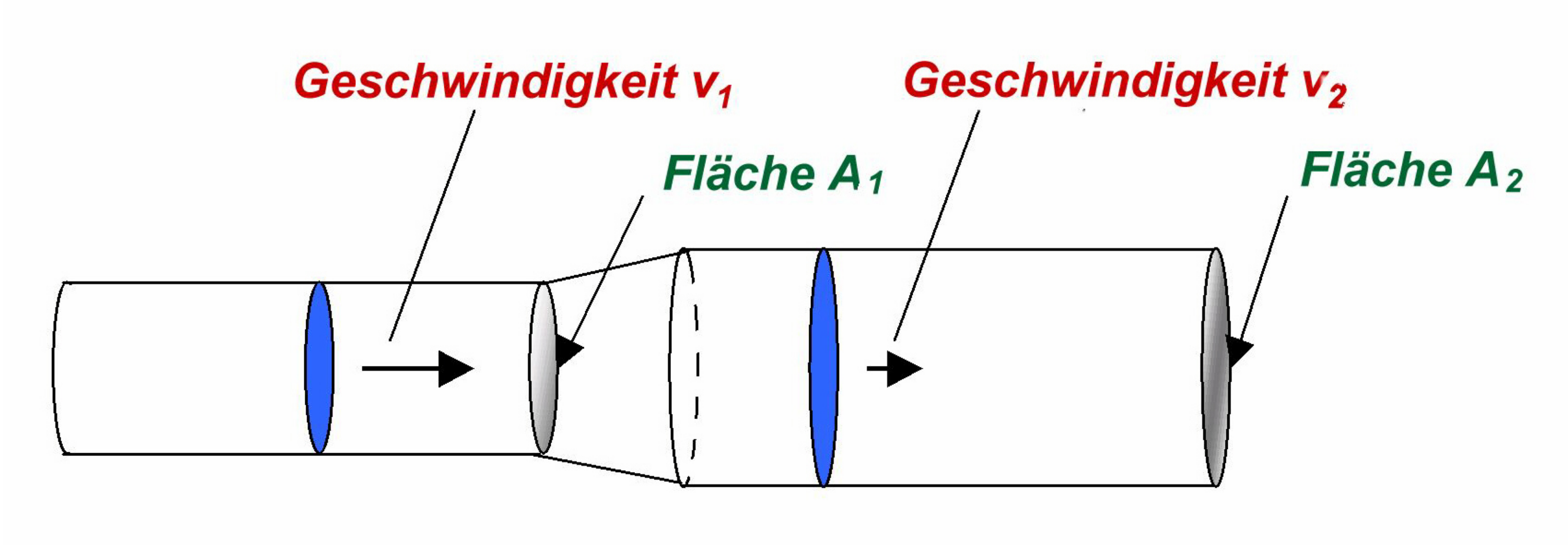


Abbildung 0.28.

Druck in der Strömung

In der strömenden Flüssigkeit herrscht an jeder Stelle ein Druck, nun aber heißt er hydrodynamischer Druck. Er besteht nicht nur aus Stempeldruck und Schweredruck, wie in der ruhenden Flüssigkeit, sondern enthält auch einen weiteren Betrag, der durch die Strömung (kinetische Energie!) zustandekommt. Wir betrachten die Energie eines Probevolumens ΔV an zwei verschiedenen Stellen (1 und 2) innerhalb einer strömenden Flüssigkeit in einem Rohr. Das Rohr soll eine Querschnittsfläche A_1 an Stelle 1 und A_2 an Stelle 2 haben. Die Arbeit, die zur Bewegung des Volumens um eine Strecke Δs_1 bzw. Δs_2 an den Stellen

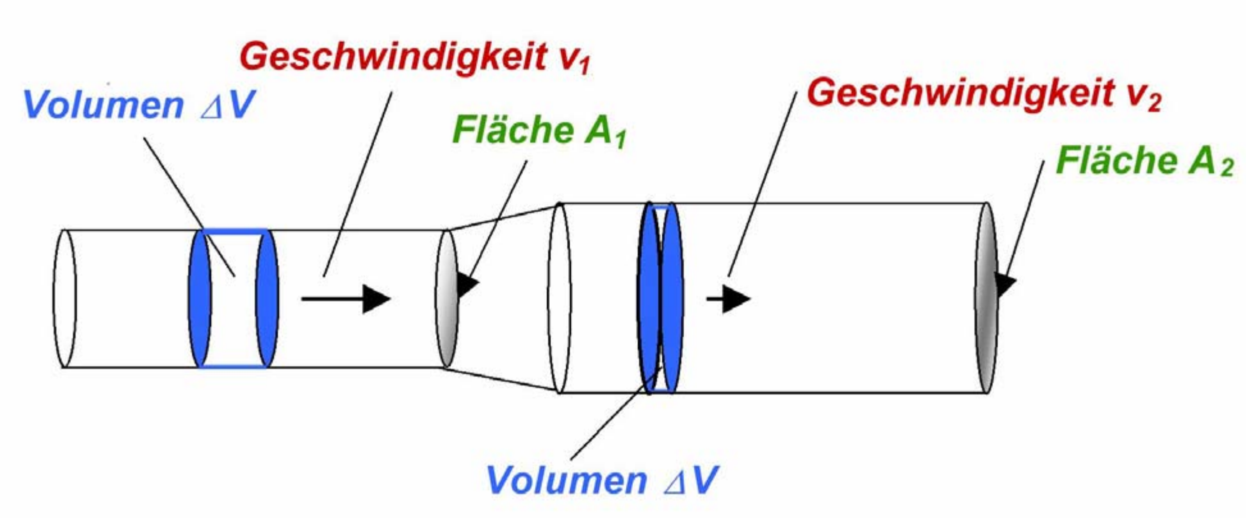


Abbildung 0.29.

1 bzw. 2 geleistet werden muß, ist:

$$\begin{aligned}\Delta W &= F_1 \Delta s_1 - F_2 \Delta s_2 \\ &= P_1 A_1 \Delta s_1 - P_2 A_2 \Delta s_2 \\ &= P_1 \Delta V - P_2 \Delta V = (P_1 - P_2)\Delta V\end{aligned}$$

Die Energiedifferenz, die durch diese Verschiebung entsteht, ist;

$$\Delta E = mg(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

Setzen wir die geleistete Arbeit gleich die resultierende Energiedifferenz (Energieerhaltung!), so erhalten wir:

$$(P_1 - P_2)\Delta V = m\left[g\left(h_2 - h_1\right)\right] + \frac{m}{2}\left[\left(v_2^2 - v_1^2\right)\right]$$

oder, mit $m = \rho\Delta V$ ($\rho =$ Massendichte), nach Umordnung:

$$\left[P_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2\right]\Delta V = \left[P_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2\right]\Delta V\,.$$

Dies heißt, die Größe $\left[P + \rho g h + \frac{\rho}{2}v^2\right]$ ist überall konstant (wir können die willkürlich gewählten Stellen 1 und 2 weglassen):

$$\left[P + \rho g h + \frac{\rho}{2}v^2\right] = konst.$$

Diese Gleichung nennt man den Satz von Bernoulli. Er drückt die Energieerhaltung bei der Strömung aus, und gilt streng nur für die stationäre, ideale Strömung. Er besagt:

> Der Druck einer strömenden Flüssigkeit nimmt ab, wenn sie schneller und/oder aufwärts strömt und umgekehrt.

Die drei Terme in der Bernoulli-Gleichung sind Stempeldruck, Schweredruck sowie der Druck, der durch die Strömung selbst zustandekommt ($\rho/2v^2$); dieser wird *Staudruck* genannt. Eine andere Formulierung des Bernoulli-Satzes wäre daher:

> Die Summe von Stempeldruck, Schweredruck, und Staudruck in einer idealen, stationär strömenden Flüssigkeit ist konstant.

Die reale Strömung

Reale Flüssigkeiten haben eine Zähigkeit oder Viskosität; sie lassen sich nicht beliebig leicht verformen und leisten deshalb einen Widerstand gegen die Strömung. Dies nennt man auch »innere Reibung«. Der einfachste Fall ist die Bewegung einer Platte der Fläche A parallel zu einer Gefäßwand in einer Flüssigkeit, mit Abstand d zur Wand und konstanter Geschwindigkeit v.

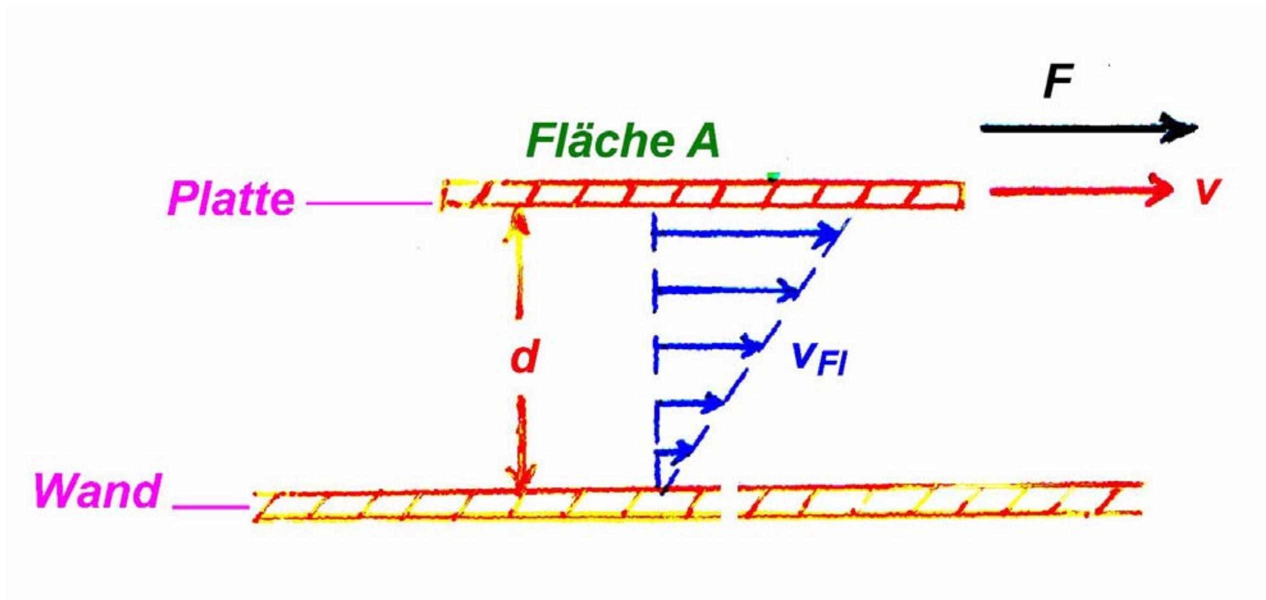


Abbildung 0.30.

Das Geschwindigkeitsprofil ist linear (siehe Abb. 0.30, dort geneigte, gestrichelte Linie), die Flüssigkeit bewegt sich am schnellsten neben der bewegten Platte und am langsamsten neben der Wand. Um die Bewegung aufrecht zu erhalten, muß eine Kraft F auf die Platte in Richtung seiner Geschwindigkeit v

ständig wirken, welche die innere Reibung überwindet:

$$F = \eta\, A\, \frac{v}{d}\,,$$

wobei η eine Materialkonstante der (realen) Flüssigkeit, ihre *Viskosität*, angibt. Die innere Reibung setzt Bewegungsenergie in Wärme um. Die Viskosität von Flüssigkeiten nimmt i. a. mit steigender Temperatur ab (bei Gasen umgekehrt!).

In einem runden Rohr (Radius r, Länge l) ist das Geschwindigkeitsprofil parabelförmig (höchste Geschwindigkeit in der Mitte). Für die Volumenstromstärke gilt das Hagen-Poiseuille'sche Gesetz:

$$I_{\mathrm{V}} = \left(\frac{\pi}{8}\right) \left(\frac{r^4}{l}\right) \frac{(P_2 - P_1)}{\eta}$$

wobei die Material- und geometrischen Größen zum Strömungswiderstand R_{S} zusammengefaßt werden können:

$$I_{\mathrm{V}} = \frac{\Delta P}{R_{\mathrm{S}}} \qquad \text{mit} \qquad R_{\mathrm{S}} = \left(\frac{8}{\pi}\right) \left(\frac{l}{r^4}\right) \eta\,.$$

Die erste Gleichung definiert den allgemeinen Strömungswiderstand R_{S} ("Ohm'sches Gesetz" für die Strömng). Eine weitere Anwendung der Viskosität ist das Stokes'sche Gesetz für die Bewegung eines kugelförmigen Körpers (Radius r) innerhalb einer ruhenden Flüssigkeit:

$$F_{\mathrm{S}} = -6\,\pi\,\eta\,r\,v\,.$$

Zusammenfassung, Strömung

Wichtig für die Strömungslehre sind einige Grundbegriffe:

$$\text{Volumenstromstärke} \qquad I_\mathrm{V} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \text{ bzw.} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}, \qquad \text{wobei} \qquad I_\mathrm{V} = A\,v\ .$$

($A \ \widehat{=}\ $ Querschnittsfläche der Strömung, $v \ \widehat{=}\ $ Strömungsgeschwindigkeit).

Kontinuitätsgleichung: bei der stationären Strömung ist I_V überall gleich, d. h. $Av = \text{konst.}$ Vergrößerung der Querschnittsfläche erniedrigt die Geschwindigkeit und umgekehrt.

Bernoulli-Gleichung (Energieerhaltung)

$$P + \rho g h + \frac{\rho}{2} v^2 = \text{konst.}$$

Das gilt für eine ideale Strömung; bei realer Strömung ist die Summe von Stempel-, Schwere-und Staudruck zeitabhängig und gegeben durch einen »Reibungsdruck« $P_\mathrm{R}(t)$.

Reale Strömung einer Flüssigkeit der Viskosität η in einem runden Rohr (Hagen-Poiseuille'sches Gesetz):

$$I_\mathrm{V} = \left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\frac{r^4}{l}\right)\frac{(P_2 - P_1)}{\eta}$$

oder allgemein: $I_\mathrm{V} = \Delta P / R_\mathrm{S}$ mit $R_\mathrm{S} \ \widehat{=}\ $ Strömungswiderstand.

Der Blutkreislauf

Einige Zahlenwerte zum Blutkreislauf

- Eigenschaften des Bluts: $\rho \approx 1{,}06\ \mathrm{g/cm^3},\ \eta \approx 2{,}1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa \cdot s}$
- Drücke
  - systolischer Druck $\approx$ 16,0 kPa (Aorta, Herzklappe offen)
  - diastolischer Druck $\approx$ 10,7 kPa (Aorta, Herzklappe zu)
  - rechter Kammerdruck $\approx$ 2,7 kPa (Lungenarterie)
- Umsatz Δ V $\approx$ 70 $\mathrm{cm^3}$/Herzschlag, $I_\mathrm{V} \approx 70\ \mathrm{cm^3/s}$ (Pulsrate $\approx$ 1 Hz), d. h. $I_\mathrm{V} \approx 7 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^3/s}$ oder ca. 4,2 l/min.
- (Volumen)arbeit des Herzens $\Delta V\, P \approx 1{,}3$ J/Schlag, Leistung $P_\mathrm{H} \approx 1{,}3$ W
- Tagesarbeit $\approx$ 130 kJ, entspricht etwa 1,5 % des metabolischen Grundumsatzes (ca. 8 000 kJ pro Tag).

Strömungswiderstand und -geschwindigkeit für den gesamten Kreislauf: aus $\Delta P \approx 13{,}0$ kPa, $I_\mathrm{V} \approx 7 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^3/s}$ sowie $R_\mathrm{S} = \Delta P / I_\mathrm{V}$ ergibt sich:

$$R_\mathrm{S} \approx 1{,}9 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{Pa \cdot s}}{\mathrm{m^3}}\,.$$

In der Aorta: $R_{\mathrm{S}} = 8\, l\, \eta / \pi r^4$ (HAGEN-POISEUILLE) $\approx 3{,}7 \cdot 10^4 \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s/m}^3$; damit ist

$$\Delta P_{\mathrm{Aorta}} = I_{\mathrm{V}} \cdot R_{\mathrm{S}} \approx 2{,}6 \text{ Pa (sehr klein!)}$$

und

$$v = \frac{I_{\mathrm{V}}}{A} \approx 0{,}13 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

(Aorta, mit $r = 1{,}3$ cm, $l = 0{,}2$ m).

Blutdruckmessung

Aufgrund des geringen Druckabfalls in der Aorta und anderen großen Arterien ist es zulässig, den Blutdruck in der Armarterie zu messen. Der Manschettendruck (gemessen z.B. mit einem Flüssigkeitsmanometer) wird erhöht, bis keine Strömungsgeräusche in der Armbeuge zu hören sind (Manschettendruck gleich systolischer Druck, Arterie zusammengepreßt). Langsames Senken des Manschettendrucks führt zu hörbaren Stoßgeräuschen (Herzschläge), die beim Erreichen des diastolischen Drucks in kontinuierliche Geräusche übergehen. Typische Werte: 16,0/10,7 kPa (entspricht 120/80 mm Hg – alte Einheit!)

Schweredruck im Blutkreislauf: aus der Dichte ρ sowie den Höhendifferenzen (typ. Herz-Fuß $\approx 1{,}3$ m, Herz-Kopf $\approx 0{,}4$ m) erhalten wir für den Schweredruck $\rho g h$ beim stehenden Menschen:

$$\begin{aligned} \Delta P \text{ Herz} - \text{Fuss} &\approx 13{,}5 \text{ kPa} \\ \Delta P \text{ Herz} - \text{Kopf} &\approx 4{,}2 \text{ kPa} \end{aligned}$$

d. h. der Gesamtdruck ist etwa

$$\begin{aligned} 13{,}0 + 13{,}5 &= 26{,}5 \text{ kPa} \quad &&\text{in den Füßen, und} \\ 13{,}0 - 4{,}2 &= 8{,}8 \text{ kPa} \quad &&\text{im Gehirn}. \end{aligned}$$