

Skript zur Vorlesung 20 800:
Physik für Studierende der Biologie, Biochemie, Chemie,
Geowissenschaften, Informatik, Mathematik und Pharmazie

erstellt von Prof. W. D. Brewer

mit Modifikationen von Prof. K. Heyne und Prof. W. Kuch

11. Februar 2010



Dieses Skript ist im **Internet** unter
<http://users.physik.fu-berlin.de/~kuch/skript/>

Dieses Skript wurde mit dem Textsatzsystem
TeX/L^ATeX erstellt von Jens Berger

Inhalt

1	Einführung	1
1.1	Organisation	1
1.2	Vorkenntnisse	1
1.3	Wozu denn Physik?	1
1.4	Struktur des Physikstudiums	2
1.5	Aufgabe der Physik	2
1.6	Traditionelle Einteilung der Physik	3
1.7	Griechische Buchstaben	4
2	Mechanik	5
2.1	SI-Maßsystem	6
2.2	Drei einfache Bewegungsformen	8
2.3	Kinematik der geradlinigen Bewegung	9
2.3.1	Geradlinige, gleichförmige Bewegung	9
2.3.2	Geradlinige, gleichmäßig beschleunigte Bewegung	10
2.3.3	Zusammenfassung, geradlinige Bewegung	10
2.4	Dynamik der geradlinigen Bewegung	12
2.4.1	Newton'sche Axiome	12
2.4.2	Gravitationskraft	13
2.4.3	Mathematischer Einschub: Vektoraddition	14
2.5	Der Impulsbegriff	15
2.5.1	Der Impulserhaltungssatz	16
2.5.2	Trägheitskräfte	17
2.5.3	Schiefer Wurf	17
2.6	Der Energiebegriff	19
2.6.1	Definition der (mechanischen) Arbeit	19
2.6.2	»Die Bewegung des großen Steins«	20
2.6.3	Drei Arten der mechanischen Arbeit	20
2.6.4	Energieformen	25
2.6.5	Energieerhaltung	26
2.6.6	Leistung	26
2.7	Geschwindigkeitsabhängige Reibung	28
2.8	Stöße	29
2.9	Kreis- und Drehbewegungen	31
2.9.1	Kinematik der ebenen Kreisbewegung	31
2.9.2	Das Drehmoment	32
2.9.3	Statik	33
2.10	Dynamik der ebenen Kreisbewegung	40
2.10.1	Newtonsche Axiome für die Drehbewegung	40
2.10.2	Trägheitsmomente	40
2.10.3	Der Drehimpuls	41

2.11	Bezugssysteme	45
2.11.1	Beschleunigte Bezugssysteme	45
2.11.2	Rotierendes Bezugssystem	46
2.12	Verformung, Elastizität	48
3	Hydrostatik	50
3.1	Ruhende Flüssigkeiten	50
3.1.1	Der hydrostatische Druck	50
3.1.2	Auftrieb	51
3.1.3	Grenz- und Oberflächen	52
3.2	Hydrodynamik: bewegte Flüssigkeiten	54
3.2.1	Volumenstrom, Kontinuität	54
3.2.2	Druck in der Strömung	55
3.2.3	Die reale Strömung	57
4	Wärmelehre	60
4.1	Temperatur	60
4.2	Gase	60
4.2.1	Temperaturabhängigkeiten	61
4.2.2	Das allgemeine Gasgesetz	61
4.2.3	Ideales Gas	62
4.3	Wärmemessungen	65
4.3.1	Wärmetransport	66
4.3.2	Erster Hauptsatz der Wärmelehre	66
4.4	Entropie	67
4.4.1	Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre	67
4.4.2	Beispiele für Entropieänderungen	68
4.4.3	Einzelprozesse	69
4.4.4	Kreisprozesse	70
4.5	Reale Gase	73
4.5.1	Phasenübergänge	73
4.5.2	Beschreibung des realen Gases	73
4.6	Transportphänomene	77
5	Elektrizitätslehre	78
5.1	Die elektrische Ladung	78
5.2	Elektrostatik	81
5.2.1	Das elektrische Feld	81
5.2.2	Das elektrische Potential	82
5.2.3	Der Plattenkondensator	84
5.2.4	Materie im elektrischen Feld	85
5.3	Der elektrische Strom	87
5.3.1	Bewegte Ladungen – der elektrische Strom	87
5.3.2	Analogie: Elektrischer Strom, Flüssigkeitsströmung	87
5.3.3	Elektrische Stromkreise	90

5.3.4	Wirkungen des elektrischen Stromes	91
5.4	Magnetfelder	93
5.4.1	Magnetische Felder einfacher Stromverteilungen	94
5.4.2	Die elektromagnetischen Feldgleichungen	95
5.4.3	Materie im magnetostatischen Feld	97
5.4.4	Biomagnetismus	100
5.5	Zeitlich veränderliche Spannungen und Ströme	101
5.5.1	Das Induktionsgesetz	101
5.5.2	Selbstinduktion einer Spule	102
5.5.3	Wechselspannung	104
5.5.4	Wechselstromwiderstände	105
5.5.5	Der elektrische Schwingkreis	106
5.5.6	Der Transformator	106
6	Schwingungen und Wellen	109
6.1	Die Schwingungsbewegung	109
6.1.1	Beschreibung der Schwingungsbewegung	109
6.1.2	Vergleich von elektrischen und mechanischen Schwingungen	110
6.1.3	Die gedämpfte Schwingung	110
6.1.4	Erzwungene Schwingungen	112
6.1.5	Vergleich verschiedener Oszillatoren	114
6.2	Wellenlehre	116
6.2.1	Gekoppelte Schwingungen	116
6.2.2	Wellen, allgemeine Beschreibung	116
6.2.3	Wellentypen	117
6.2.4	Interferenz von Wellen, stehende Wellen	119
6.2.5	Fourier-Analyse	121
6.3	Akustik	123
6.3.1	Schallstärke und Lautstärke	123
6.3.2	Akustische Schwebungen	124
6.3.3	Ultraschall	124
6.4	Elektromagnetische Wellen	125
6.4.1	Feldgleichungen bei zeitlich veränderlichen Feldern	125
6.4.2	Allgemeine Eigenschaften elektromagnetischer Wellen	127
6.4.3	Entstehung elektromagnetischer Wellen	128
6.4.4	Das elektromagnetische Spektrum	128
6.4.5	Polarisation elektromagnetischer Wellen	129
6.4.6	Beugung und Interferenz	130
6.4.7	Beispiele für Beugung/Interferenz	132
7	Optik	137
7.1	Reflexion und Brechung	137
7.1.1	Optische Elemente	137
7.2	Geometrische Optik	139
7.2.1	Reflexion und Brechung an gekrümmten Flächen	139

7.3	Optische Instrumente	143
7.3.1	Das menschliche Auge	143
7.3.2	Die Lupe	144
7.3.3	Das Mikroskop	145
7.3.4	Auflösungsvermögen	147
7.3.5	Spektralapparate	148
7.4	Entstehung der Polarisierung	151
7.4.1	Doppelbrechung	151
7.4.2	Optische Aktivität	151
7.4.3	Brewsterwinkel	152
7.5	Einheiten und Lichtstärken	153
8	Aufbau der Materie: Kernphysik	154
8.1	Kern-Zerfallstypen	154
8.2	Energie der Kern-Zerfälle	155
8.2.1	Drei Gesetze der Radioaktivität	157
8.3	Wechselwirkung Strahlung-Materie	159
8.3.1	Biologische Wirkung der Strahlung	161
8.3.2	Dosimetrie	162
8.3.3	Strahlenschutz	163

1 Einführung

1.1 Organisation

- Die Vorlesung findet Di. und Do. 8.00 Uhr bis 10.00 Uhr in der Arnimallee 22, Gr. HS statt. In der Regel fängt sie um 08.15 Uhr an; ca. von 9.00 Uhr bis 9.10 Uhr gibt es eine Pause. Schluss wird um ca. 09.55 Uhr sein.
- Es werden keine Skripte verteilt (allein aufgrund der großen Hörerzahl); eine kumulierte Version ist im Internet unter der Adresse (URL):

<http://users.physik.fu-berlin.de/~kuch/skript/>

zu finden.

- Das Niveau der Vorlesung kann nicht für alle Hörer gleichzeitig passend sein, da erfahrungsgemäß eine breite Streuung in den vorhandenen Kenntnissen existiert. Ein mittleres Niveau wird angestrebt, wobei für die Experten gelegentlich ein Paar »Rosinen« eingestreut werden. Rückkopplung erwünscht!

1.2 Vorkenntnisse

Sie sollten schon eine gewisse Bekanntschaft mit folgenden Themen gemacht haben:

1. physikalische Größen und Einheiten, z. B. Längen, Flächen, Volumina, ebene und räumliche Winkel, Maßeinheiten;
2. Messen und Messfehler, Fehlerrechnung;
3. mathematische Grundlagen mit Bezug auf Physik, z. B. einfache Funktionen (Sinus, Kosinus, e -Funktion, Logarithmus), Vektoren, Differenzieren, Integrieren.

Die jetzt beginnende Vorlesung baut auf dieser Einführung auf!

1.3 Wozu denn Physik?

- Fachbezug
- Allgemeinbildung (naturwiss. Anspruch!)
- nötige Grundkenntnisse für die tägliche Praxis (z. B. elektr. Strom und Spannung, Strahlungsdosis, Umgang mit Geräten...)

1.4 Struktur des Physikstudiums

Praktikum

- selbst messen und Versuch auswerten an einigen Beispielen sowie Einführungs-experimente und Übungen (Scheinplicht!)

Vorlesung

- Übersicht des Stoffes
- Anschauungsbeispiele (Demonstrationsversuche)
- »roter Faden« zum Literaturstudium

Selbststudium

- unerlässlich, wenn man wirklich etwas lernen möchte
- Vertiefung des Stoffes, Vollständigkeit
- Ergänzung nach eigenem Interesse

1.5 Aufgabe der Physik

1. Beobachtung der Erscheinungen der unbelebten Welt [neuerdings auch der belebten Welt (Biophysik!)]
2. Ordnung der vielfältigen Beobachtungen durch Aufstellen von Zusammenhängen (»physikalischen Gesetzen«)
3. Aufstellen von Theorien über diese Zusammenhänge
4. Aus den Theorien weitere Phänomene vorhersagen und diese im Experiment verifizieren (Allgemeingültigkeit)

Manche Theorien haben einen begrenzten Anwendbarkeitsbereich z. B.

klassische Mechanik → relativistische Mechanik
Gültigkeitskriterium: $v \ll c$.

Zwei Dinge sind besonders wichtig für die Aufstellung von Naturgesetzen (»wissenschaftliche Methode«):

1. *Formulierung von physikalischen Begriffen zur Beschreibung des Sachverhalts (kreativster Schritt; Kriterium für geeignete/ungeeignete Begriffe):*
die Begriffsbildung beschränkt sich auf den Teil der Erscheinungen, der quantitativ und reproduzierbar beobachtet werden kann und sich mit Hilfe der Mathematik in Form quantitativer Zusammenhänge zwischen Begriffen beschreiben lässt.

Vorteil	Nachteil
ergibt ein präzises Begriffssystem, z. B. Impuls, Kraft, Energie usw., das leicht mathematisch behandelt werden kann	Physik erfaßt nur Teilaspekte der Naturerscheinungen, z. B. <i>Farbe</i> physikalisch erfaßt werden: Wellenlänge, Intensität des Lichts; aber das Phänomen <i>Farbe</i> beinhaltet viel mehr: Psychologie, Physiologie, Kunst, Empfindungen . . .

2. *Durchführung von Experimenten zur Verifizierung von Vorhersagen bzw. Entdeckung von neuen Phänomenen:*

beinhaltet die Schaffung wohldefinierter Bedingungen für den Ablauf von Naturvorgängen, vgl. »Experimente« in anderen Wissenschaften, z. B. Marktanalyse, Verhaltensforschung.

- *Physik:* Volumenänderung eines idealen Gases bei gegebener Temperaturänderung mit konstantem Druck. . .
- *Verhaltensforschung:* Änderung der Trinkgewohnheiten der Berliner bei steigenden Preisen mit konstanter Sozialleistung . . .

Die moderne Physik ist eine *messende* Wissenschaft. Sie kann bei bekannten Voraussetzungen exakte Aussagen (in bestimmten Bereichen) machen. Sie entstand in früheren Jahrhunderten aus der Philosophie/Theologie (»Naturphilosophie«) und hat sich nur langsam davon abgekoppelt.

1.6 Traditionelle Einteilung der Physik

1. Mechanik (Bewegungen, starre Körper, Verformung, Strömung)
2. Wärmelehre
3. Elektrizität u. Magnetismus
4. Wellenlehre: Optik, Akustik
5. Aufbau der Materie (Atome, Atomkerne, Röntgenstrahlung, Kernstrahlung, Moleküle)

Tabelle 1.1. Das griechische Alphabet

kleine Buchstaben		große Buchstaben	
α	alpha	A	Alpha
β	beta	B	Beta
γ	gamma	Γ	Gamma
δ	delta	Δ	Delta
ε	epsilon	E	Epsilon
ϕ, φ	phi	Φ	Phi
χ	chi	X	Chi
η	eta	H	Eta
ι	iota	I	Iota
κ	kappa	K	Kappa
λ	lambda	Λ	Lambda
μ	mu	M	Mu
ν	nu	N	Nu
o	omicron	O	Omicron
π	pi	Π	Pi
θ, ϑ	theta	Θ	Theta
ρ	rho	P	Rho
σ	sigma	Σ	Sigma
τ	tau	T	Tau
υ	upsilon	Υ	Upsilon
ξ	xi	Ξ	Xi
ζ	zeta	Z	Zeta
ψ	psi	Ψ	Psi
ω	omega	Ω	Omega

1.7 Griechische Buchstaben

Die vielen physikalischen Größen, die wir selbst in einem einführenden Studium verwenden müssen, werden mit Buchstaben gekennzeichnet. Die Zahl der üblichen römischen Buchstaben reicht bei weitem nicht aus, um alle Größen eindeutig zu benennen; daher verwenden wir (insbesondere für Winkelgrößen) auch griechische Buchstaben. Diese wirken für viele Studierende relativ fremd und daher verwirrend; aus diesem Grunde geben wir hier eine Liste der großen und kleinen griechischen Buchstaben mit ihren Namen. Selbst mit beiden Alphabeten reicht die Zahl der Buchstaben noch nicht aus, so daß manche mehrfach Verwendung finden [z. B. t als Zeit (s, min., Std.) oder Temperatur ($^{\circ}\text{C}$); α als Einfallswinkel, als Beugungswinkel, oder als Proportionalitätskonstante zwischen Volumen und Temperatur eines Gases ...]. Die Identifizierung der jeweiligen Größe muß aus dem Kontext geschehen; dabei soll aber Tabelle 1.1 eine Hilfe geben.

2 Mechanik

Die Mechanik behandelt *Bewegungen*, ihre Abläufe und ihre Erzeugung. Sie hat etliche Anwendungen in den biomedizinischen Wissenschaften, aber noch wichtiger, sie bietet eine recht anschauliche Grundlage für die restliche Physik sowie Beispiele für die Anwendung der »wissenschaftlichen Methode«. Sie ist deshalb vergleichsweise anschaulich, weil unsere täglichen Erfahrungen mit mechanischen Abläufen gemacht worden sind, wir haben alle dafür ein »Gefühl«. Zunächst ein Überblick über physikalische Größen und Basiseinheiten:

Basisgrößen, abgeleitete Größen

Die Physik – wie die anderen Naturwissenschaften – ist eine messende Wissenschaft – sie beschäftigt sich ausschließlich mit quantitativ, reproduzierbar meßbaren Größen, sogenannten physikalischen Größen, die als Produkt einer Maßzahl mit einer Einheit definiert sind:

$$\text{Physikalische Größe} = \text{Maßzahl} \cdot \text{Einheit}$$

Die Maßzahl ist das (numerische) Ergebnis einer Messung oder Berechnung (oft mit Messfehler oder Unsicherheit versehen); die Einheit legt die Meßskala fest durch ein verabredetes Meßverfahren (Grundgröße, Basiseinheit) oder als Kombination von schon definierten Einheiten (abgeleitete Größe od. Einheit). Die abgeleiteten Einheiten haben oft Eigennamen. Beispiele siehe Tabelle 2.1.

Tabelle 2.1. Beispiele für physikalische Einheiten

Länge oder Strecke s	$s = 1,55 \text{ m}$	(m $\hat{=}$ Meter)
elektr. Stromstärke I	$I = 23,2 \text{ A}$	(A $\hat{=}$ Ampère)
Geschwindigkeit v	$v = 55 \text{ km/h}$	(Kilometer/Stunde)
elektr. Spannung U	$U = 220 \text{ V}$	(Volt $\hat{=}$ J/As)

2.1 SI-Maßsystem

Das z. Z. international gültige Maßsystem ist das Système International d'Unités (kurz SI), welches sieben Grundgrößen mit entsprechenden Basiseinheiten definiert (siehe Tabelle 2.2 auf der rechten Seite). Aus diesen sieben Grundgrößen werden alle anderen (abgeleiteten) Größen zusammengesetzt.

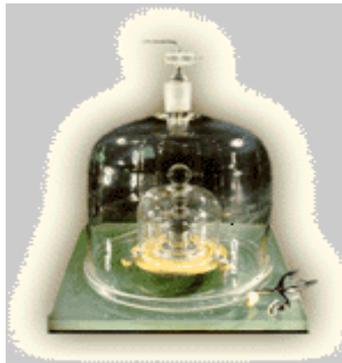
Beispiele

- Geschwindigkeit:

$$v = \frac{\text{Strecke}}{\text{Zeit}}, \frac{ds}{dt}; \quad \text{Einheit}[v] \hat{=} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- kinetische Energie:

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}v^2; \quad \text{Einheit}[E_{\text{kin}}] \hat{=} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} \equiv \text{Joule}$$



Urkilogramm: siehe auch <http://physics.nist.gov/cuu/Units/kilogram.html>

Üblicherweise beginnt man das Studium der Mechanik mit der Kinematik, d. h. mit der Beschreibung von Bewegungen. Wir werden zunächst einen Überblick der verschiedenen Bewegungsformen geben, dann die Kinematik der geradlinigen Bewegung zusammenfassen:

Tabelle 2.2. SI-Einheiten

Grundgröße	Basiseinheit	Realisierung (Genauigkeit)	Bemerkungen
Länge l (s,d)	Meter (m), (auch mm, μm , nm, km)	Wellenlänge eines Jod-stabilisierten He-Ne-Lasers ($2 \cdot 10^{-9}$)	Lichtgeschwindigkeit $c = 2,99792456$ km/s; $c = \lambda \cdot \nu$
Zeit t	Sekunde (s), (auch ms, μs , ns, min, h)	^{133}Cs Frequenz ν^{Cs} CH ₄ -stabilisierter He-Ne-Laser ($< 10^{-11}$)	Übertragung auf Quarzuhren
Masse m	Kilogramm(kg), (auch g, mg, μg , t)	Massenprototyp (ca. 10^{-8})	
elektrische Stromstärke I	Ampère (A)	magnetische Spulenswaage ($< 10^{-6}$) (neu: Quanten-Halleffekt)	(auch Spannungsnormale)
Lichtstärke S	Candela (cd)	Hohlraumstrahler (ca. $2 \cdot 10^{-3}$) (neu: Synchrotronstrahlung)	Übertragung auf Glühlampen
Temperatur T	Kelvin (K) ($1^\circ\text{C} = 1\text{ K}$)	absoluter Nullpunkt: $0\text{ K} \equiv -273,15^\circ\text{C}$ (typ. 10^{-4})	Fixpunkte; Tripelpunkt von H ₂ O: 273,16 K
Stoffmenge n (oder ν)	Mol (mol) $1\text{ mol} = N_{\text{A}}$ Teilchen	Röntgenstreuung-Si-Einheitszelle (10^{-6})	

2.2 Drei einfache Bewegungsformen

1. Das bewegte Objekt läuft eindimensional entlang einer Geraden. Die Bewegung kann gleichförmig (mit konstanter Geschwindigkeit) oder beschleunigt sein. Beinhaltet kinetische (Translations-) Energie.
2. Das bewegte Objekt läuft auf einer Kreisbahn (Radius = konstant). Der Betrag der Bahngeschwindigkeit kann konstant bleiben (gleichförmige Kreisbewegung), jedoch ändert sich ständig ihre Richtung (Radial- oder Zentripetalbeschleunigung). Beinhaltet Rotationsenergie.
3. Das bewegte Objekt läuft hin und her um einen festen Punkt, die Bewegung wiederholt sich zyklisch (nach der Schwingungsdauer). Einfachste Art: die Bewegung beschreibt eine Sinus- oder Kosinusfunktion (harmonische Schwingung). Beschleunigungen treten in jedem Zyklus auf, die Energie wechselt hin und her zwischen kinetischer und potentieller Energie.

Eine beliebige, allgemeine Bewegung kann als Überlagerung dieser drei Bewegungsformen beschrieben werden.

- *Kinematik*: Beschreibung der Bewegung selbst: Ort, Zeit, Geschwindigkeit, Beschleunigung
- *Dynamik*: Ursache der Bewegung: Kräfte, Wechselwirkungen

2.3 Kinematik der geradlinigen Bewegung

Wir beginnen mit der Kinematik der geradlinigen Bewegung. Zur Beschreibung einer Bewegung, d. h. für die Kinematik, brauchen wir die Zeitabhängigkeit von drei Größen: vom Ort (Strecke) s (s - t -Diagramm), von der Geschwindigkeit v (v - t -Diagramm) sowie von der Beschleunigung a (a - t -Diagramm).

Um vom s - t -Diagramm zum v - t -Diagramm zum a - t -Diagramm zu gelangen, nehmen wir jeweils die zeitliche Ableitung (geometrisch: die *Steigung* der Kurve zum jeweiligen Zeitpunkt):

$$v(t) = \frac{ds}{dt},$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

[der letzte Ausdruck heißt »zweite zeitliche Ableitung von s nach t «, die Ableitung wird zweimal verwendet. Dies ist die *Krümmung* der Kurve $s(t)$.]

In umgekehrter Richtung, vom a - t -Bild zum v - t -Bild zum s - t -Bild, verwenden wir die Umkehrung der Ableitung, d. h. die *Integration* (geometrisch: die Fläche unter der jeweiligen Kurve): $v(t) = \int a \, dt$; $s(t) = \int v \, dt$.

2.3.1 Geradlinige, gleichförmige Bewegung

Der einfachste Fall ist die *geradlinige, gleichförmige Bewegung*: Die Geschwindigkeit $v = v_0 = \text{konstant}$, sie ist die »Konstante der Bewegung«. Die Beschleunigung verschwindet: $a(t) = dv_0/dt = 0$ (siehe Abb. 2.1).

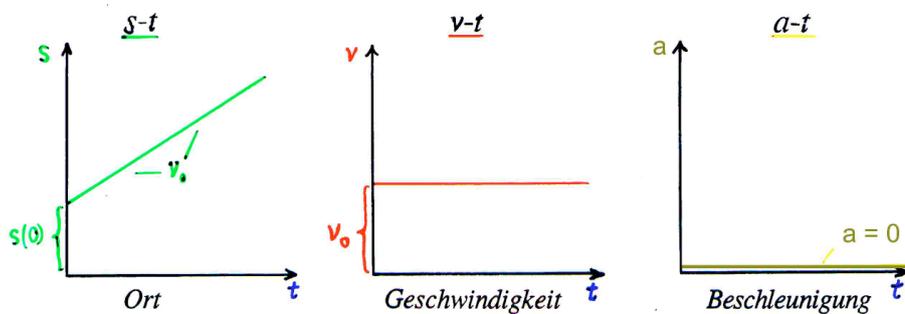


Abbildung 2.1.

Das Integral $\int v \, dt$ (Rechteckfläche) ergibt

$$s(t) = v_0 t + s_0.$$

Der Ort wächst linear mit der Zeit. Die Konstante s_0 (Anfangsort) ist eine Anfangsbedingung (Integrationskonstante). Mathematisch ist $s(t) = v_0 t + s_0$ die Lösung der Bewegungsgleichung $v(t) = ds/dt$, mit $v(t) = v_0$.

2.3.2 Geradlinige, gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Der zweit-einfachste Fall ist die *geradlinige, gleichmäßig beschleunigte Bewegung*: Die Beschleunigung $a = a_0 = \text{konstant}$, sie ist nun die »Konstante der Bewegung« (siehe Abb. 2.2).

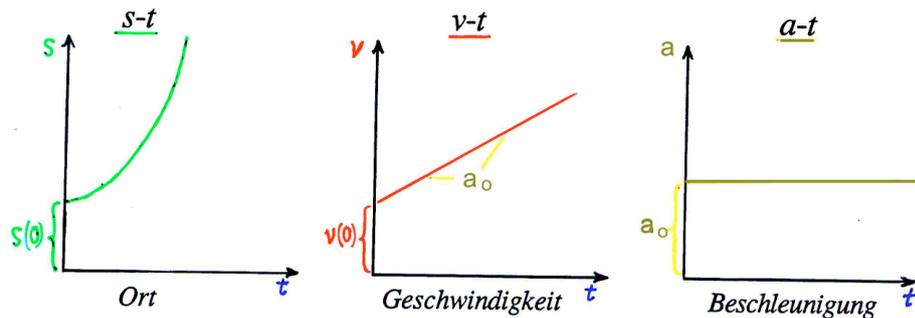


Abbildung 2.2.

Das Integral $\int a \, dt$ (Rechteckfläche) ergibt $v(t) = a_0 t + v_0$; die Geschwindigkeit wächst nun linear mit der Zeit. Die Konstante v_0 (Anfangsgeschwindigkeit) ist wieder eine Anfangsbedingung. Eine weitere Integration der v - t -Kurve (Dreiecksfläche) ergibt

$$s(t) = \frac{a_0}{2} t^2 + v_0 t + s_0.$$

Diese Lösung der Bewegungsgleichung $a(t) = a_0 = d^2 s/dt^2$ enthält nun zwei Integrationskonstanten, die Anfangsbedingungen s_0 und v_0 , wegen der zweimaligen Integration. Die Zeitabhängigkeit des Orts $s(t)$ ist parabelförmig.

Ein Beispiel der geradlinigen, gleichförmig beschleunigten Bewegung ist die *Fallbewegung* eines Körpers durch die Schwerkraft der Erde.

Der *allgemeine* Fall entspricht einer zeitabhängigen Beschleunigung $a(t)$. Die Lösung erfolgt im Prinzip wie oben beschreiben, entweder grafisch (Integral als Fläche unter der Kurve!) oder mathematisch durch Lösen der Bewegungsgleichung $a(t) = d^2 s/dt^2$ (Differentialgleichung 2. Ordnung). Die Form der Lösung hängt von der speziellen Zeitabhängigkeit $a(t)$ ab.

2.3.3 Zusammenfassung, geradlinige Bewegung

Die geradlinige Bewegung – kinematische Größen

Alle Größen stehen parallel zueinander, wir können auf die Vektorschreibweise verzich-

ten! (Ansonsten werden Vektorgrößen hier mit Fettdruck gekennzeichnet: \mathbf{s} = Strecke als Vektor, s oder $|s|$ = Betrag der Strecke.)

- $s(t)$ =Bewegungsstrecke [auch $x(t)$ genannt; i.a. eine Vektorgröße] (m)
- $v(t)$ =Geschwindigkeit = ds/dt (m/s): Steigung der s - t -Kurve
- $a(t)$ =Beschleunigung = $dv/dt = d^2s/dt^2$ (m/s²): Krümmung der s - t -Kurve

Bewegungsgleichungen und deren Lösungen

- *gleichförmige Bewegung:*

$$v(t) = v_0; \frac{ds}{dt} = v_0 ;$$

Lösung:

$$s(t) = v_0 t + s_0 .$$

v_0 -Konstante der Bewegung

s_0 -Anfangsbedingung

- *gleichmäßig beschleunigte Bewegung:*

$$a(t) = a_0; \frac{d^2s}{dt^2} = a_0 ;$$

Lösung:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} t^2 + v_0 t + s_0 .$$

2.4 Dynamik der geradlinigen Bewegung

2.4.1 Newton'sche Axiome

NEWTON, bauend auf die Ergebnisse GALILEIS, stellte in den 1687 veröffentlichten "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" drei Axiome auf, welche die Dynamik von Bewegungen allgemein und insbesondere der geradlinigen Bewegung beschreiben:

Trägheitsprinzip ein (massives) Objekt, worauf keine Kräfte wirken, beharrt in seinem jeweiligen Zustand der geradlinigen, gleichförmigen Bewegung.

Aktionsprinzip wenn eine Kraft \mathbf{F} auf eine Masse m wirkt, erzeugt sie eine Beschleunigung \mathbf{a} , nach

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} .$$

actio = reactio eine wirkende Kraft \mathbf{F} ruft immer eine gleich große, entgegengerichtete Gegenkraft (Reaktionskraft)

$$\mathbf{F}_R = -\mathbf{F}$$

hervor.

Die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

kann als Definition der Kraft angesehen werden (»wenn eine Masse m eine Beschleunigung a erfährt, wirkt auf sie eine Kraft F nach $F = ma$ «). Die SI-Einheit der Kraft ist somit $\text{kg m/s}^2 = \text{N}$ (Newton).

Sie kann aber auch als Spezialfall des 3. Axioms interpretiert werden, wobei die Reaktionskraft hier die Trägheitskraft der (trägen) Masse m darstellt.

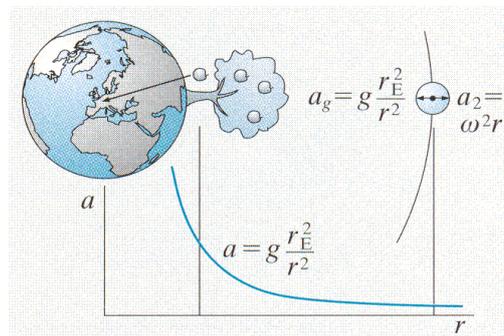
Sie ist eine Differentialgleichung ($a =$ zweifache zeitliche Ableitung vom Ort s), die eine Bewegung mathematisch beschreibt.

Durch die Newtonschen Bewegungsgleichung ist es im Prinzip möglich, bei bekannten Anfangsbedingungen und bekannten Kraftgesetzen die Bewegung eines Körpers für alle Zeiten exakt vorherzuberechnen (Determinismus). Bei komplizierteren Kraftgesetzen kann es allerdings passieren, dass infinitesimal kleinste Abweichungen in den Anfangsbedingungen zu signifikanten Abweichungen in der Entwicklung der Bewegung mit der Zeit führen (deterministisches Chaos).

Beispiel für actio = reactio Fig. 2.3 zeigt eine Skizze Caspar Schotts zum Experiment von Otto von Guericke im Jahre 1657. Es wurde die Kraft des auf evakuierten Halbkugeln lastenden äußeren Luftdrucks demonstriert. Im Bild zieht die Kraft von 8 Pferden an den Halbkugeln, nicht von 16. Das eine Ende des Seils hätte genauso gut an einem stabilen Baum befestigt werden können.



Abbildung 2.3. Experiment von Otto von Guericke. Im Bild zieht die Kraft von 8 Pferden an den Halbkugeln, nicht von 16.



2.4.2 Gravitationskraft

Ein Beispiel der geradlinigen, gleichförmig beschleunigten Bewegung ist die *Fallbewegung* eines Körpers durch die Schwerkraft der Erde.

Gravitationsgesetz:

$$\vec{F}_G = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|r|}; \quad \text{wobei } G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \quad (\text{Gravitationskonstante})$$

Für Vorgänge an der Erdoberfläche setzen wir $m_1 = M_E$ mit Masse der Erde $M_E = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg und $r = r_E = 6370$ km (Erdradius). Damit erhält man

$$F = m g \quad (\text{mit } m = m_2),$$

wobei

$$g = G \frac{M_E}{r_e^2} \approx 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{Erdbeschleunigung}).$$

2.4.3 Mathematischer Einschub: Vektoraddition

Viele physikalische Größen lassen sich durch Vektoren beschreiben. Beispiele sind: Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Impuls, Kraft,...

Ein Vektor wird beschrieben durch einen Betrag (Länge) und eine Richtung. Die Addition von Vektoren erhält man graphisch durch ein Hintereinanderzeichnen:

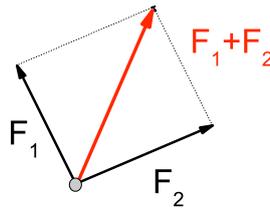


Abbildung 2.4. Beispiel für die Addition von Vektoren. Zwei Kräfte, die am gleichen Massenpunkt angreifen, setzen sich zur Diagonalen des von ihnen gebildeten Parallelogramms zusammen.

Ein anderes Beispiel: Kräftegleichgewicht an einer schiefen Ebene (Fig. 2.5). Hier zerlegt man die Gewichtskraft \vec{F}_G des Gegenstands in zwei Vektoren (die addiert die Gewichtskraft ergeben): eine Auflagekraft \vec{F}_A und eine Hangabtriebskraft \vec{F}_H . Der Betrag der Hangabtriebskraft ergibt sich geometrisch zu

$$F_H = F_G \sin \alpha = m g \sin \alpha.$$

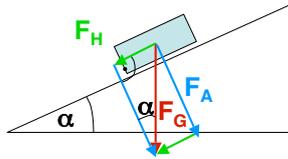


Abbildung 2.5. Weiteres Beispiel für die Addition von Vektoren. Die Auflagekraft \vec{F}_A und die Hangabtriebskraft \vec{F}_H addieren sich zur Gewichtskraft \vec{F}_G des Gegenstands auf der Schiefen Ebene.

2.5 Der Impulsbegriff

Weitere Betrachtungen zur Newton'schen Bewegungsgleichung:

Wir betrachten die Newton'sche Gleichung

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

nochmals ein wenig näher. Wir haben gesehen, daß sie als Definition der Kraft \mathbf{F} oder auch als Bewegungsgleichung angesehen werden kann. Die Lösungen der Bewegungsgleichung erhalten wir durch Integration; in zwei Fällen ist das sehr einfach:

1. die Kraft \mathbf{F} ist gleich Null, $\mathbf{F} = 0$. Dann ist die Geschwindigkeit konstant, $v = v_0$ (Trägheitsgesetz!), wir brauchen nur einmal zu integrieren: $[s(t) = v_0 t + s_0]$. Die Konstante s_0 (Anfangsort) ist eine Integrationskonstante.
2. die Kraft \mathbf{F} ist konstant, z. B. gleich der Gewichtskraft \mathbf{F}_G . Dann ist auch die Beschleunigung konstant, wir haben:

$$\mathbf{a} = \left(\frac{\mathbf{F}_G}{m} \right) = \mathbf{g} = \frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2}$$

und zweimaliges Integrieren ergibt:

$$\mathbf{s}(t) = \frac{\mathbf{g}}{2}t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{s}_0$$

(freier Fall). Hier erhalten wir zwei Integrationskonstanten, \mathbf{v}_0 (Anfangsgeschwindigkeit) und \mathbf{x}_0 (Anfangsort).

Diese letzte Betrachtung geht von der Gleichung

$$\mathbf{F}_G = m\mathbf{a}$$

oder

$$m\mathbf{g} = m\mathbf{a}$$

aus, wobei vorausgesetzt wird, daß die Masse links (die Schweremasse) gleich der Masse rechts (die Trägemasse) ist. Dies ist experimentell oft geprüft worden (GALILEI am schiefen Turm von Pisa, EÖTVÖS-Versuch) und wurde von EINSTEIN zu einer Grundannahme der allgemeinen Relativität gemacht (Äquivalenz-Prinzip).

Wie ist es aber, wenn die Masse m nicht zeitlich konstant ist? Beispiele sind: ein fliegendes Flugzeug oder eine Rakete (die Masse nimmt während des Fluges wegen Treibstoffverbrauch ständig ab) oder ein Teilchen, das zu hoher Geschwindigkeit beschleunigt wurde (Massenzunahme aufgrund der relativistischen Beziehung $E = mc^2$). In solchen Fällen muß man die Zeitabhängigkeit der Masse berücksichtigen, indem man sie in die Zeitableitung hineinnimmt:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \rightarrow \quad \mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} .$$

Die Größe in Klammern ist eine Eigenschaft des Bewegungszustandes, wie die kinetische Energie, hat jedoch eine Richtung (Vektorgröße). Sie wird »Impuls« genannt (hier: Linearimpuls, da es sich um eine geradlinige Bewegung handelt), und erhält das Symbol \mathbf{p} :

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

mit der Einheit kg m/s. Der Impuls ist auch dann nützlich, wenn die Masse des bewegten Systems *konstant* bleibt. Die Newton'sche Gleichung nimmt damit folgende (allgemeine) Form an:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

d. h. die Kraft ist die *zeitliche Änderung des Impulses*.

Bei Stoßprozessen (z. B. Schlagen eines Tennisballs durch den Schläger, Stößen von Billardkugeln) benutzt man den sogenannten Kraftstoß, um den Vorgang zu beschreiben:

$$\mathbf{F} dt = d\mathbf{p} = d(m\mathbf{v}) = m d\mathbf{v}$$

(momentan; letzte Gleichung gilt, wenn m konstant ist), oder (für den gesamten Vorgang):

$$\int \mathbf{F}(t) dt = \int d\mathbf{p} = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(0)$$

(Kraftstoß = Impulsänderung). Dies ist nützlich, weil man meistens nicht die Einzelheiten der Kraftwirkung als Funktion der Zeit, $\mathbf{F}(t)$, kennt, aber die *Impulsänderung* leicht messen kann.

2.5.1 Der Impulserhaltungssatz

Es gilt für den Impuls auch ein Erhaltungssatz (vgl. Energieerhaltung):

Impulserhaltungssatz

In einem abgeschlossenen (mechanischen) System (keine Kräfte wirken von oder nach außen) bleibt der Gesamtimpuls (Vektorsumme aller einzelnen Impulse) konstant.

Anders gesagt: in einem abgeschlossenen System kann Impuls weder erzeugt noch vernichtet werden.

Man kann die Impulserhaltung – zusammen mit der Energieerhaltung – verwenden, um Stoß- und Streuprozesse aller Art zu beschreiben. Impulserhaltung ist für das Funktionieren von Reaktionsmotoren (Düsenantrieb, Raketen) verantwortlich und spielt (meistens unbemerkt) im täglichen Leben eine entscheidende Rolle. [Impulserhaltung: Versuche– Impulsübertragung am Wagen; Rakete; Stöße auf der Luftkissenbahn; elastische und inelastische Stöße.]



Abbildung 2.6. Beispiel für Impulserhaltung: Bei der Explosion eines Gegenstands (hier ein Feuerwerkskörper) ändert sich der Gesamtimpuls (= die Summe der Impulse der einzelnen Teilstücke) nicht. Ist der Körper vor der Explosion in Ruhe ($p = 0$), so addieren sich die Impulse der einzelnen Bruchstücke nach der Explosion vektoriell zu Null.

2.5.2 Trägheitskräfte

Wir können die Newton'sche Gleichung auch in einer weiteren Weise interpretieren, als Kräftebilanz (*actio = reactio*): jede wirkende Kraft \mathbf{F} ruft eine gleich große, entgegengerichtete Reaktionskraft hervor. Bei einem Objekt der Masse m ist dies die Trägheitskraft $-\mathbf{ma}$, die jeder Änderung des Bewegungszustandes (Beschleunigung) widerstrebt.

2.5.3 Schiefer Wurf

Wirkt eine Kraft nicht in Richtung der Bewegung, so muss das Zweite Newtonsche Gesetz in vektorieller Form betrachtet werden. Es ändert sich dann sowohl der Betrag als auch die Richtung der Geschwindigkeit mit der Zeit. In diesem Fall ist es zweckmäßig, die Geschwindigkeit vektoriell in zwei Komponenten aufzuteilen, einen Anteil in Richtung der Kraft (und somit der Beschleunigung) und einen Anteil senkrecht dazu. Beide können dann separat als geradlinige Bewegungen behandelt werden. Abb. 2.7 zeigt das Beispiel eines schiefen Wurfs. Durch Mehrfachbelichtung in identischen Zeitabständen wird hier der Ablauf der Bewegung photographisch sichtbar gemacht. Man erkennt,

durch senkrechte Striche mit gleichen Abständen verdeutlicht, dass die Bewegung des Balls in horizontaler Richtung gleichförmig ist, während die Bewegung in vertikaler Richtung (horizontale Striche) die gleichförmig beschleunigte Bewegung eines freien Falls, hier mit einer Anfangsgeschwindigkeit entgegen der Beschleunigungsrichtung, ist.

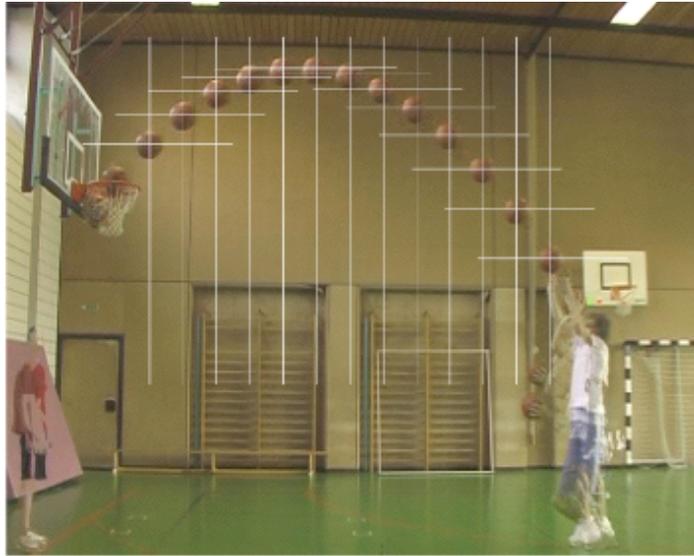


Abbildung 2.7. Beispiel eines schiefen Wurfs: Die Bewegung lässt sich am einfachsten beschreiben, indem man eine vektorielle Zerlegung der Geschwindigkeit in eine horizontale und eine vertikale Komponente vornimmt. Die Gewichtskraft wirkt dann nur auf die vertikale Komponente.

2.6 Der Energiebegriff

Nun schauen wir einen wichtigen Begriff an, der Anwendung in vielen Gebieten der Naturwissenschaften findet, den wir auch schon (ohne genaue Definition) verwendet haben, nämlich den Begriff der *Energie*. Historisch ist der Energiebegriff relativ neu; er ist aus dem Begriff der Arbeit abgeleitet worden, der schon am Anfang der Mechanik zur Zeit Newtons stand.

Wir schauen uns deshalb die Begriffe *Arbeit*, *Energie*, *Leistung* in dieser Reihenfolge an. Alle drei Worte hört man häufig in der Umgangssprache, wo sie jedoch keine genaue Definition haben oder vielmehr mit verschiedenen Bedeutungen eingesetzt werden. In der Physik haben sie präzise Definitionen im Sinne der Einführung (»physikalischer Begriff«: genau und wiederholbar zu messen, durch Mathematik zu beschreiben).

2.6.1 Definition der (mechanischen) Arbeit

Mechanische Arbeit beschreibt die Wirkung einer Kraft F , welche eine Bewegung erzeugt. Diese Wirkung ist proportional der Stärke der Kraft und auch proportional der Länge der Bewegungsstrecke s . Wir definieren deshalb die Arbeit W mit

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft} \cdot \text{Strecke}$$

oder

$$W = Fs$$

Einheit der Arbeit Nach der obigen Definition hat die Arbeit die gleiche Einheit wie [Kraft · Strecke]. Die Einheit der Kraft F folgt aus $F = ma$ als

$$[F] = [m][a] = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \equiv \text{Newton}$$

Damit ist die Einheit der Arbeit gleich **Newton · Meter** = Nm = kg $\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$. Diese Einheit erhält auch einen eigenen Namen, **Joule**:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} \equiv 1 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Wir haben sie schon in Zusammenhang mit Energiedosis und Äquivalentdosis verwendet.

Nun gibt es einige Feinheiten, die in manchen Fällen die Definition der Arbeit noch komplizierter machen, als sie oben erscheint:

1. Die Größen Kraft und Strecke sind beide *gerichtete* Größen (Vektoren); sie haben sowohl einen Betrag $|F|, |s|$ als auch eine Richtung. Falls die Richtungen nicht übereinstimmen, ist nur die Kraftkomponente $F_{||}$ *parallel* zur Strecke wirksam bei der Berechnung der Arbeit. Wir müssen das Produkt Fs so definieren, daß nur diese Komponente berücksichtigt wird, und aus einem Produkt zweier Vektorgrößen eine skalare Größe machen. Genau dies tut das Skalarprodukt: $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = |F||s| \cos \varphi = F_{||}|s|$ (wo φ den Winkel zwischen den Vektoren \mathbf{F} und \mathbf{s} bezeichnet).

2. Die Kraft ist nicht immer konstant über die Strecke s . Wir müssen einen geeigneten Mittelwert finden, um das Produkt von Kraft und Strecke zu berechnen. Dies ist möglich, wenn wir die Strecke s in viele, beliebig kurze differentiellen Teilstrecken ds aufteilen; in jeder Teilstrecke ist F dann annähernd konstant, es gilt dann: $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ für die entsprechende differentielle Arbeit dW . Um die gesamte Arbeit über die Strecke so zu erhalten, müssen wir integrieren (summieren über Teilstrecken):

$$W(s_0) = \int dW = \int_{s_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Dies ist die allgemeine Definition der Arbeit. Wir schauen nun einige Beispiele an.

2.6.2 »Die Bewegung des großen Steins«

Ein Mensch wird damit beauftragt, einen großen Steinblock von einem Ort zu einem anderen zu bewegen. Er fängt optimistisch an ...

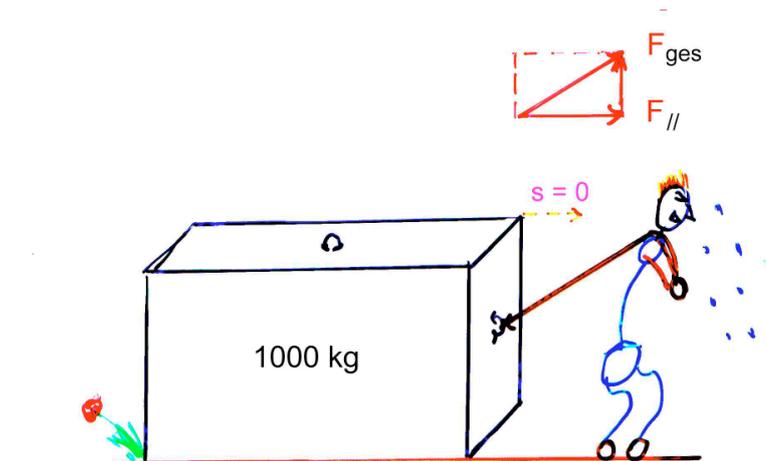


Abbildung 2.8. Tag 1 – die Kraft reicht einfach nicht aus ... Eine parallele Kraft $F_{||}$ ist da, sie reicht aber nicht aus, die Strecke s bleibt Null. Damit ist die physikalische Arbeit gleich Null; die physiologische Arbeit ungleich Null; und die Lohnarbeit gleich Null

2.6.3 Drei Arten der mechanischen Arbeit

Es ist hilfreich, die mechanische Arbeit zu klassifizieren, je nach den Bedingungen, unter denen sie geleistet wird:

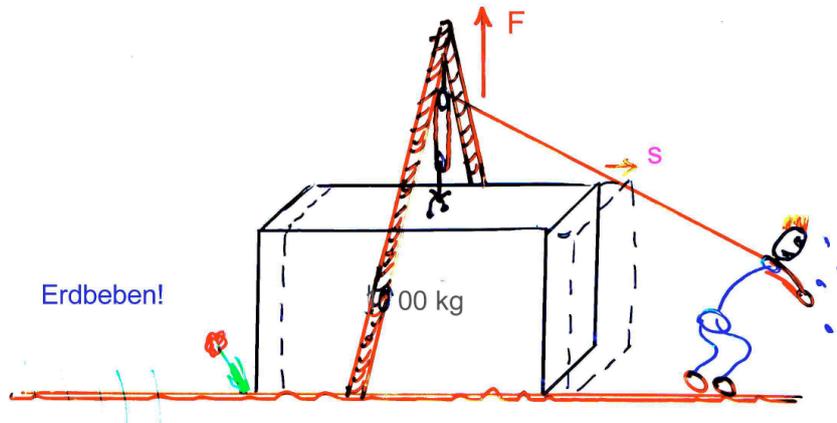


Abbildung 2.9. Tag 2 – ein anderer Versuch (mit Erdbeben...) Eine parallele Kraft $F_{||}$ ist nicht vorhanden. Durch Zufall ergibt sich eine Bewegungsstrecke in der erwünschten Richtung, die aber nicht durch die Arbeit des Menschen zustande kam. Daher ist die physikalische Arbeit gleich Null; die physiologische Arbeit ungleich Null; und die Lohnarbeit ungleich Null (zufällig)

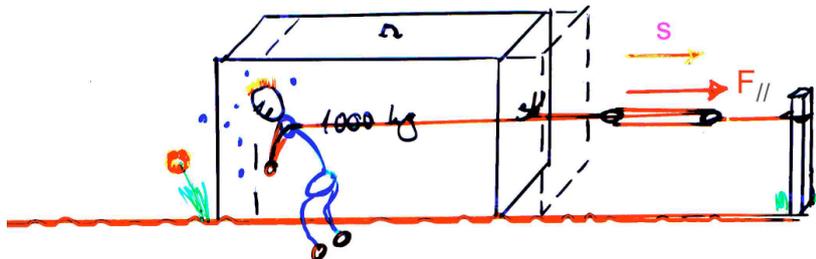


Abbildung 2.10. Tag 3 – endlich der richtige Weg ... Eine parallele Kraft $F_{||}$ und eine Bewegungsstrecke sind vorhanden, die Kraft hat die Bewegung (gegen Reibungskräfte) verursacht. Daher ist die physikalische Arbeit ungleich Null; die physiologische Arbeit ungleich Null; und die Lohnarbeit ungleich Null

1. Beschleunigungsarbeit – der einfachste Fall ist der, daß keine weiteren Kräfte (außer der »äußeren« Kraft \mathbf{F}) wirken. Dann erzeugt die Kraft \mathbf{F} eine Bewegung der Masse m , ausgedrückt durch die Newton'sche Gleichung $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ (\mathbf{a} = Beschleunigung = dv/dt). Die Beschleunigung (und die Bewegungsstrecke \mathbf{s}) sind immer parallel zur Kraft \mathbf{F} . Wir können die (differentielle) Arbeit schreiben als:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = ma \, ds = m \left(\frac{dv}{dt} \right) ds = m \, dv \left(\frac{ds}{dt} \right) = mv \, dv .$$

Die gesamte Arbeit, für eine Beschleunigung vom Stand ($v = 0$) bis zu einer Endgeschwindigkeit $v = v_0$, ist gegeben durch Integration von dW :

$$W(0 \rightarrow v_0) = \int dW = m \int_{v_0} v \, dv = \frac{m}{2} v_0^2$$

(Das Integral kann durch Anwendung der Potenzregel oder grafisch als Fläche unter der Kurve $y = v$ gelöst werden). Die Beschleunigungsarbeit ändert den Bewegungszustand des Objektes der Masse m , sie wird in dem Zustand (Bewegung mit Geschwindigkeit v_0) gespeichert. Beispiel: ein Radfahrer beschleunigt vom Stand bis zur Geschwindigkeit v_0 . Danach fährt er mit konstanter Geschwindigkeit weiter (die Reibung sei vernachlässigbar). Er hat die Beschleunigungsarbeit $(m/2)v_0^2$ geleistet, wo m die Gesamtmasse (Rad + Fahrer) ist (vgl. Abb. 3.6):

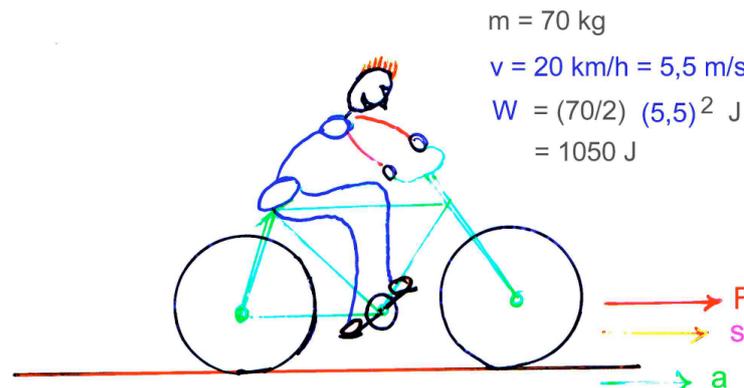


Abbildung 2.11. Zahlenbeispiel: Fahrrad + Fahrer haben eine Gesamtmasse von 70 kg; der Fahrer beschleunigt vom Stand ($v = 0$) bis zur Endgeschwindigkeit $v_0 = 20 \text{ km/h}$ (entsprechend $5,5 \text{ m/s}$). Die geleistete Beschleunigungsarbeit beträgt $\frac{70 \text{ kg}}{2} \cdot (5,5 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 = 1050 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} (\text{J})$

2. Verschiebungsarbeit – die externe Kraft \mathbf{F} wirkt gegen eine Gegenkraft \mathbf{F}_G . Nach dem Arbeitsprozeß kommt das System zum Stillstand, es wird nur wenig Beschleunigungsarbeit geleistet; aber die Lage des Systems ändert sich durch die Arbeit (Verschiebung!), die geleistete Arbeit kann in der Lage gespeichert und später wieder freigesetzt werden.

Beispiele:

- a) *Hubarbeit* – die Gegenkraft ist die *Schwerkraft*; z. B. wird ein Gewicht der Masse m um die Höhe h angehoben. Die Schwerkraft $m\mathbf{g}$ wirkt senkrecht nach unten (\mathbf{g} = Erdbeschleunigung, eine Konstante, die die Stärke der Schwerkraft in der Nähe der Erdoberfläche angibt). Die wirkende Kraft \mathbf{F} muß nur geringfügig größer als $m\mathbf{g}$ sein, sie wirkt senkrecht nach oben, parallel zur Bewegungsstrecke \mathbf{s} . Da die Kraft auch konstant ist, können wir die einfache Formel für die Arbeit benutzen:

$$W(0 \rightarrow h) = Fs = mgh .$$

Diese Arbeit ist in der Lage h des Gewichtes gespeichert, sie kann (durch Hinunterlassen des Gewichtes) *wieder freigesetzt* werden. Für ein Gewicht der Masse 1 kg beträgt die Hubarbeit zum Heben um $h = 1$ m:

$$W = mgh = 1 \text{ kg} \cdot 9,82 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ m} = 9,82 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 9,82 \text{ J} .$$

Ähnlich ist es mit dem Radfahrer, wenn er bergauf fährt. Falls der Berg eine



Abbildung 2.12. In einem Wasserkraftwerk wird potentielle Energie des Wassers zunächst in kinetische Energie und anschließend in elektrische Energie umgewandelt.

konstante Steigung des Winkels α hat, steigt er um die Höhe $h = s \sin \alpha$, wenn er die Strecke s zurücklegt. Die Gegenkraft ist die Parallelkomponente der Schwerkraft, $F_{G\parallel} = mg \sin \alpha$ (siehe Abb. 2.13!). Da die Kraft konstant ist, können wir für die Arbeit schreiben:

$$W = F_{G\parallel} s = mgs \sin \alpha = mgh ,$$

genau wie für das Heben eines Gewichtes. Diese Hubarbeit wird in der Lage des Fahrrads gespeichert und kann wieder freigesetzt werden (bergab fahren!).

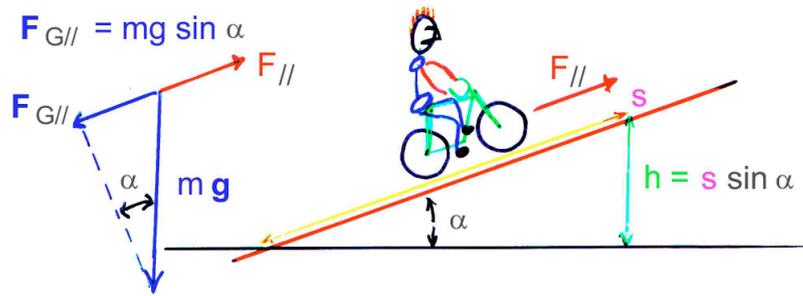


Abbildung 2.13.

- b) *elastische Arbeit* – wenn ein elastisches Objekt (z. B. eine Schraubenfeder) verformt wird, reagiert es mit einer Gegenkraft, $\mathbf{F}_{\text{el}} = -D\mathbf{x}$, wo \mathbf{x} die Verformungsstrecke (Auslenkung aus der Ruhelage) und D eine Konstante (»Federkonstante«) sind. Die Auslenkung \mathbf{x} ist parallel zur extern wirkenden Kraft \mathbf{F} , die die Auslenkung erzeugt. Die differentielle Arbeit (Auslenkung um eine geringe Strecke $d\mathbf{x}$) ist dann:

$$dW = \mathbf{F} d\mathbf{x} = D x dx$$

und die Gesamtarbeit ist

$$W(x = 0 \rightarrow x_0) = \int dW = D \int_{x_0} x dx = \frac{1}{2} D x_0^2$$

(Integral s. oben!). Diese Arbeit ist in der Feder gespeichert, sie kann beim Entspannen freigesetzt werden.

3. *Reibungsarbeit* – wenn Reibungskräfte überwiegen, dient die externe Kraft F nur, um sie zu überwinden. Es wird weder Beschleunigungsarbeit noch Verschleibungsarbeit geleistet, das System kommt zur Ruhe, sobald die Kraft nicht mehr wirkt, und die ganze geleistete Arbeit geht schließlich in Wärme über. Sie ist meistens nicht im System gespeichert und kann nie (vollständig) wieder in mechanische Arbeit zurückverwandelt werden. Beispiel: ein Radfahrer fährt auf ebenem aber schlammigem Boden, die Reibung der Räder mit dem Boden ist groß. Sobald er aufhört zu treten bleibt er stehen. Er gewinnt weder an Höhe noch an Geschwindigkeit, seine Arbeit wird nur verwendet, um die Reibung zu überwinden (siehe Abb. 2.14 auf der gegenüberliegenden Seite).

Zahlenbeispiel: Das menschliche Herz leistet Reibungsarbeit, um das Blut gegen den Strömungswiderstand der Gefäße zu pumpen. Es macht typisch 100 000 Schläge pro Tag und leistet dabei eine Arbeit von ca. 130 000 J. Bei einem 60-jährigen Menschen hat das Herz eine Gesamtarbeit von rund $4 \cdot 10^9$ J geleistet – das würde reichen, um 400 000 l Wasser (400 t!) um 1 000 m hochzuheben.

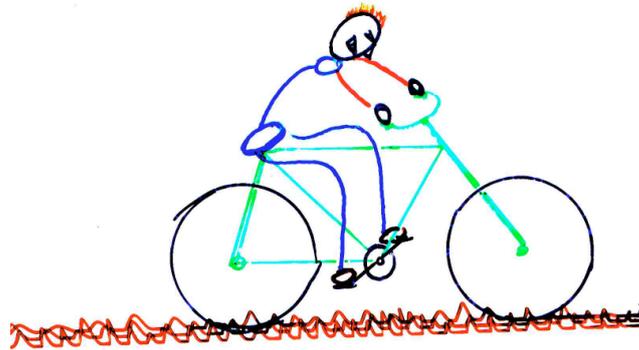


Abbildung 2.14.

Die meisten Arbeitsprozesse bestehen aus einer Kombination der o.g. Arten der Arbeit, z. B. aus Hubarbeit, Beschleunigungsarbeit und Reibungsarbeit gleichzeitig. Das Radfahren oder Gehen sind Beispiele dafür (vgl. Versuche auf der Luftkissenschiene).

2.6.4 Energieformen

Nun kommen wir zur zentralen Größe, zur *Energie*. Wir haben gesehen, daß die Arbeit eine Prozeßgröße ist – sie hängt von dem detaillierten Ablauf des Vorgangs ab. Aber geleistete Arbeit kann den Zustand des Systems verändern; dieser Zustand hängt dann nicht mehr vom Ablauf ab. Es ist beispielsweise völlig unerheblich, ob ein Wagen auf der Luftkissenschiene durch schnelles, kräftiges Entspannen einer Feder, durch gleichmäßiges Fallen eines Gewichtes, oder durch die sanfte Kraft eines Luftzuges auf einem kleinen Segel bis zur Endgeschwindigkeit v_0 gebracht wurde – er hat in jedem Fall den gleichen Zustand. Die entsprechende *Zustandsgröße* – die man als »gespeicherte Arbeit« bezeichnen könnte – ist die Energie. Sie enthält weniger Informationen, als die Arbeit, da sie nicht mehr vom Ablauf des Arbeitsprozesses abhängt. Dafür ist sie allgemein einsetzbar, um einen Zustand zu beschreiben. Sie hat die gleiche Einheit wie die Arbeit, d. h. Joule. Entsprechend der drei Arten der Arbeit gibt es verschiedene Typen von Energie:

1. Bewegungsenergie (*kinetische* Energie) ist gespeicherte *Beschleunigungsarbeit*; sie ist gegeben durch (s. oben)

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2$$

für eine Masse m , die sich mit Geschwindigkeit v bewegt, egal, wie die Masse bis zu dieser Geschwindigkeit beschleunigt wurde.

2. Lageenergie (*potentielle* Energie) ist gespeicherte Verschiebungsarbeit; sie ist gegeben z. B. durch

$$E_{\text{pot}} = mgh$$

für die potentielle Energie eines Gewichtes der Masse m in der Höhe h über der Erdoberfläche; oder durch

$$E_{\text{pot}} = \frac{D}{2} x^2$$

für die elastische Energie einer Feder der Federkonstanten D , die um den Betrag x von ihrer Ruhelage ausgelenkt wurde.

- Die Energieform, die durch Reibungsarbeit entsteht, ist die ungeordnete mikroskopische Bewegungsenergie, die wir *Wärme* nennen. Sie kann, im Gegensatz zu den rein mechanischen Energieformen, nicht frei und vollständig in andere Energieformen umgewandelt werden.

Es ist bemerkenswert, daß der Nullpunkt der Energie einigermaßen willkürlich gewählt werden kann ($v = 0$ hängt vom Bezugssystem ab, Höhe $h = 0$ kann im 1. Stock oder im Keller sein, die Ruhelage einer Feder läßt sich durch eine konstante externe Kraft verschieben).

2.6.5 Energieerhaltung

Der Energieerhaltungssatz (»Energie-Satz«) Dies ist ein Erfahrungssatz, der erst in der Mitte des 19. Jh. formuliert wurde. Er besagt, daß man Energie weder erzeugen noch vernichten kann, nur umverteilen bzw. in andere, äquivalente Energieformen umwandeln kann. Eine Formulierung lautet:

In einem abgeschlossenen System (keine Kräfte wirken von oder nach außen) bleibt die Summe aller Energieformen konstant.

Diese rein mechanische Aussage wird in der Wärmelehre ergänzt durch die Einbeziehung der Wärme als weitere Möglichkeit, die Energie eines Systems zu verändern. Die makroskopisch übertragene Wärme dQ ist, wie die Arbeit, eine Prozeßgröße; beide können zu einer Änderung der Energie (»inneren Energie« U) eines Systems beitragen. Dies nennt man den 1. Hauptsatz der Wärmelehre; mehr dazu später.

2.6.6 Leistung

Die Leistung ist eine vergleichsweise einfache Größe: sie gibt an, wie schnell Arbeit geleistet wird. Wenn die Rate konstant ist, kann man sie einfach definieren als:

$$P = \frac{W_{\text{ges}}}{t_0}$$

wo W_{ges} die gesamte in der Zeit t_0 geleistete Arbeit ist. Ihre Einheit ist J/s oder **Watt**:

$$1 \text{ W} \equiv 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3}$$

Falls die Rate, mit der die Arbeit geleistet wird, nicht konstant ist (dies ist der übliche Fall), muß man die momentane Leistung $P(t)$ verwenden:

$$P(t) = \frac{dW}{dt},$$

wobei die in der Zeit t_0 geleistete Gesamtarbeit durch Integration über die Zeit zu berechnen ist:

$$W_{\text{ges}} = \int_{t_0} P(t) dt$$

Die momentane Leistung bei einer Bewegung mit Geschwindigkeit \mathbf{v} , verursacht durch eine Kraft \mathbf{F} , ist gegeben durch:

$$P(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{v}(t).$$

2.7 Geschwindigkeitsabhängige Reibung

Es gibt Reibungsformen, bei denen die Reibungskraft von der Geschwindigkeit abhängt. Ist ein Körper einer konstanten Kraft (z.B. der Gewichtskraft) und gleichzeitig einer geschwindigkeitsabhängigen Reibungskraft ausgesetzt, so stellt sich nach hinreichend langer Zeit eine konstante Geschwindigkeit ein. Diese ist dadurch gekennzeichnet, dass sich die Reibungskraft und die konstante Kraft bei dieser Geschwindigkeit genau kompensieren. Nach dem Zweiten Newtonschen Gesetz findet dann keine Beschleunigung des Körpers mehr statt.

Beispiele:

1. Fall einer Kugel in viskoser Flüssigkeit ohne Verwirbelung (Stokes-Reibung): Hier beobachtet man eine Reibungskraft von

$$F_R = 6 \pi \eta r v.$$

Hierbei ist η die Viskosität (Einheit $\text{kg}/[\text{m s}]$), eine Materialkonstante der Flüssigkeit, und r der Radius der Kugel. Wir schreiben die Masse der Kugel als Produkt aus ihrem Volumen $4/3 \pi r^3$ und ihrer Dichte ρ_{Kugel} (Einheit kg/m^3). Die effektive Gewichtskraft $F_{G,eff}$ ergibt sich aus der Gewichtskraft minus der Auftriebskraft. Man erhält $F_{G,eff} = 4/3 \pi g r^3 (\rho_{Kugel} - \rho_{Fl})$. Dabei ist ρ_{Fl} die Dichte der Flüssigkeit. Gleichsetzen der Beträge der effektiven Gewichtskraft $F_{G,eff}$ und der Reibungskraft F_R liefert uns

$$v = \frac{2 r^2 g (\rho_{Kugel} - \rho_{Fl})}{9 \eta}.$$

2. Bewegung eines Körpers mit turbulenter Strömung, z.B. schnelle Bewegung in Luft: Hier beobachtet man eine Reibungskraft von

$$F_R = \frac{1}{2} c_W A \rho v^2.$$

Hierbei ist ρ die Dichte der Luft (etwa $1,2 \text{ kg}/\text{m}^3$), A die Querschnittsfläche des Körpers in Bewegungsrichtung und c_W eine dimensionslose Größe, die den Grad der Verwirbelung bei der Bewegung angibt. Im Gegensatz zur Stokes-Reibung ist hier die Reibungskraft proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit. Gleichsetzen der Beträge der Gewichtskraft $F_G = m g$ und der Reibungskraft F_R liefert uns

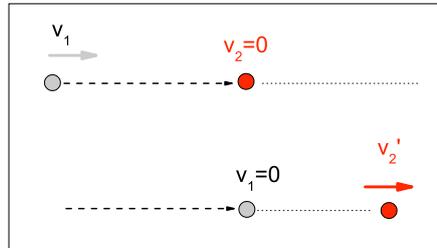
$$v = \sqrt{\frac{2 m g}{c_W A \rho}}.$$

Für einen Menschen beim Fallschirmsprung ($m \approx 70 \text{ kg}$, $A \approx 0,5 \text{ m}^2$ und $c_W \approx 0,8$) ergibt sich damit vor dem Öffnen des Fallschirms eine Gleichgewichtsgeschwindigkeit von etwa 50 m/s (im Sturzflug mit $A \approx 0,15 \text{ m}^2$ kann die Geschwindigkeit auch über 100 m/s sein).

2.8 Stöße

Man kann die Impulserhaltung zusammen mit der Energieerhaltung verwenden, um Stoß- und Streuprozesse aller Art zu beschreiben. Man spricht von *ideal elastischen* Stößen, wenn die Summe aus kinetischer und potentieller Energie gleich bleibt, wenn also keine Reibungsarbeit geleistet wird. Zentraler ideal elastischer Stoß:

Abbildung 2.15. Zentraler ideal elastischer Stoß



Anfangsbedingung: v_1 mit Masse m_1 in x-Richtung; $v_2 = 0$ m/s mit Masse m_2 .

$$p_1 = p_1' + p_2' \quad \text{Impulserhaltung}$$

$$\frac{1}{2m_1}p_1^2 = \frac{1}{2m_1}p_1'^2 + \frac{1}{2m_2}p_2'^2 \quad \text{Energieerhaltung}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_1' &= p_1 - p_2' \\ \Rightarrow p_1'^2 &= p_1^2 + p_2'^2 - 2p_1p_2' \\ \Rightarrow \frac{1}{2m_1}p_1^2 &= \frac{1}{2m_1}(p_1^2 + p_2'^2 - 2p_1p_2') + \frac{1}{2m_2}p_2'^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{m_1}p_1p_2' &= p_2'^2\left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right) \end{aligned}$$

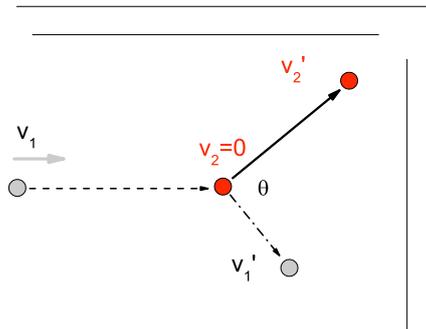
$$\begin{aligned} \Rightarrow p_2' &= p_1 \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \\ \Rightarrow p_1' &= p_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

oder mit $p_1 = m_1 v_1$, $p'_1 = m_1 v'_1$, $p_2 = m_2 v_2$ und $p'_2 = m_1 v'_2$

$$v'_2 = v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_2}$$

$$v'_1 = v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.$$

Abbildung 2.16. Ideal elastischer Stoß



Bei gleichen Massen $m_1 = m_2$, $v_2 = 0 \text{ m/s}$ und ideal elastischem Stoß (nicht zentral) gilt:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \quad \text{Impulserhaltung}$$

$$\frac{1}{2m_1} p_1^2 = \frac{1}{2m_1} p_1'^2 + \frac{1}{2m_2} p_2'^2 \quad \text{Energieerhaltung}$$

$$\Rightarrow p_1^2 = p_1'^2 + p_2'^2 \quad \text{da } m_1 = m_2$$

$$\Rightarrow p_1^2 = p_1'^2 + p_2'^2 + 2\vec{p}'_1 \cdot \vec{p}'_2$$

$$\Rightarrow 2\vec{p}'_1 \cdot \vec{p}'_2 = 0$$

Also gilt: Stoßen zwei gleiche Massen ideal elastisch, wovon eine vorher ruhte, so bewegen sie sich unter einem Winkel von 90 oder 270 Grad zueinander weiter oder aber eine ruht nach dem Stoß.

2.9 Kreis- und Drehbewegungen

2.9.1 Kinematik der ebenen Kreisbewegung

Hier ist es sinnvoll, neben den linearen Größen s, v, a (die als Bahnstrecke s_B , Bahngeschwindigkeit v_B bzw. Bahnbeschleunigung a_B auftreten), auch *Winkelgrößen* zu verwenden: Bewegungswinkel φ [rad], Winkelgeschwindigkeit ω [rad/s], sowie Winkelbeschleunigung α [rad/s²].

Tabelle 2.3. Kinematik der ebenen Kreisbewegung

Winkelgröße	lineare Größe	Verknüpfung
$\varphi(t) =$ Drehwinkel	$s_B =$ Kreisbogen (Strecke auf der Bahn)	$s_B = \varphi r $, $\varphi = s_B/r$ $r =$ Radius = konst.
$\omega(t) =$ Winkelgeschwindigkeit $\omega = d\varphi/dt$	$v_B =$ Bahn-oder Tangentialgeschw. $v_B = ds_B/dt$	$ v_B = \omega r $, $\omega = v_B/r$ (vektoriell: $v_B = \omega \times r$)
$\alpha(t) =$ Winkelbeschleunigung $\alpha = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2$	$a_B =$ Bahn-oder Tangentialbeschl. $a_B = dv_B/dt = d^2s_B/dt^2$ Betragänderung von v_B	$ a_B = \alpha r $, $\alpha = a_B/r$ (vektoriell: $a_B = \alpha \times r$)

Auch **ohne Winkelbeschleunigung** gibt es eine *Zentripetalbeschleunigung* a_{ZP} :

$$a_{ZP} = |v_B| \frac{d\varphi}{dt}$$

aufgrund der ständigen *Richtungsänderung* von v_B . Sie ist im Betrag gegeben durch:

$$|a_{ZP}| = \frac{v_B^2}{r} = \omega^2 r$$

und zeigt immer zum Kreismittelpunkt hin ($a_{ZP} \parallel -r$, daher »zentripetal«).

Zusammenfassung – Kinematik der ebenen Kreisbewegung

Bewegungsgleichungen und Lösungen

- gleichförmig:

$$\omega(t) = \omega_0; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0;$$

Lösung:

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0 \quad \text{oder} \quad s_B(t) = v_{B0} t + s_{B0}$$

- gleichmäßig beschleunigt:

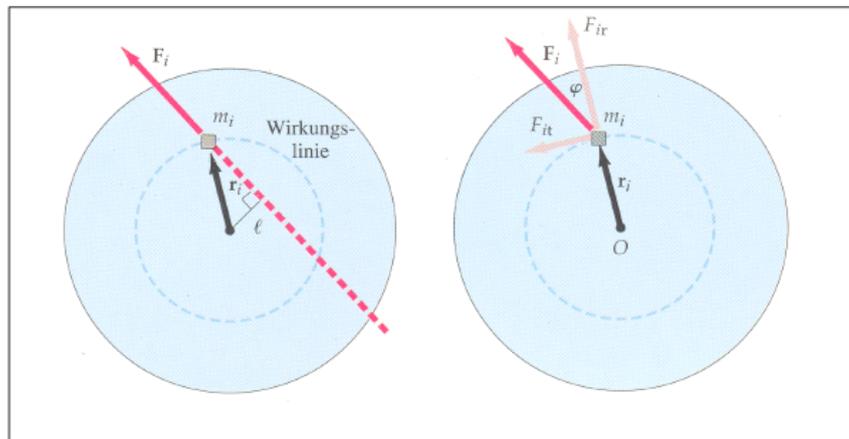
$$\alpha(t) = \alpha_0; \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \alpha_0;$$

Lösung:

$$\varphi(t) = \left(\frac{\alpha_0}{2}\right) t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$

2.9.2 Das Drehmoment

Drehmoment



Eine Kreis- oder Rotationsbewegung entsteht, wenn ein *Drehmoment*

$$\mathbf{M} = \text{Kraftarm} \times \text{Kraft} = \mathbf{r}\mathbf{F}$$

um den Aufhängungspunkt des Kraftarms \mathbf{r} (von der Drehachse) wirkt; die Einheit des Drehmoments \mathbf{M} ist Nm oder $\text{kg m}^2/\text{s}^2$. Um den vektoriellen Charakter von \mathbf{F} , \mathbf{r} und \mathbf{M} auszudrücken und die Richtungsabhängigkeit von \mathbf{F} und \mathbf{r} zu beruckichtigen, verwenden wir das *Vektorprodukt*:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

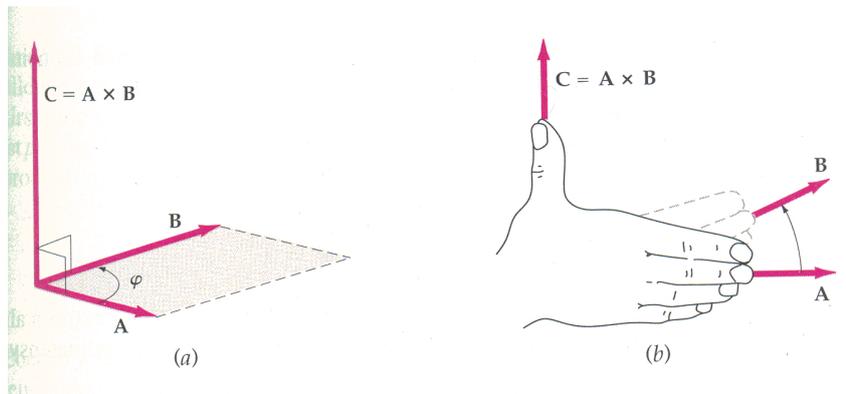
wobei $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ bedeutet: » \mathbf{C} ist ein Vektor, der senkrecht auf \mathbf{A} und \mathbf{B} steht und den Betrag $|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \vartheta$ besitzt, mit $\vartheta =$ Winkel zwischen \mathbf{A} und \mathbf{B} «. Die Richtung von \mathbf{M} ist also parallel zur Drehachse.

Um komplizierte Bewegung im Gravitationsfeld der Erde in Drehbewegung und translatorische Bewegung zu zerlegen, definiert man den Schwerpunkt x_S des Systems:

$$x_S = \sum_i \frac{m_i \cdot x_i}{m_{ges}}$$

Der Schwerpunkt ist der Punkt, an dem die Gewichtskraft, die auf den Körper wirkt zum Drehmoment Null führt. Damit ist die Schwerpunktsbewegung eine reine translatorische Bewegung.

Kreuzprodukt



2.9.3 Statik

Die Statik behandelt die Kräfte und Drehmomente die wirken, wenn sich ein Körper im **ruhenden Zustand** oder im **Gleichgewicht** befindet. Hierbei handelt es sich stets um ein Gleichgewicht der Kräfte \mathbf{F} und der Drehmomente \mathbf{M} , die sich gegenseitig aufheben:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0$$

$$\sum_i \mathbf{M}_i = 0$$

Die Kräfte und Drehmomente im Gleichgewicht wirken auf den Körper (z.B. Baum, Leiter) und müssen von diesem übertragen werden. Werden die Kräfte zu groß, kann der Körper irreversibel verformt und sogar zerstört werden.

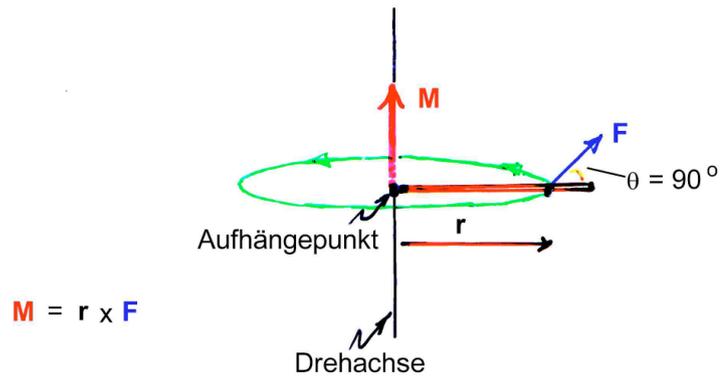


Abbildung 2.17. Rechte-Hand-Regel: (hier abgebildet für den speziellen Fall, daß die Kraft \mathbf{F} senkrecht zum Kraftarm \mathbf{r} steht, d. h. $\vartheta = 90^\circ$)

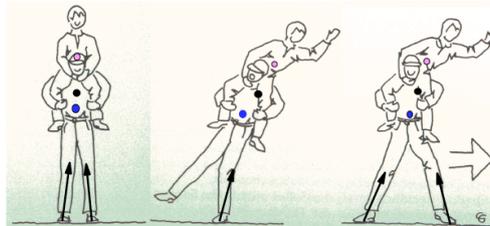
Schiefer Baum



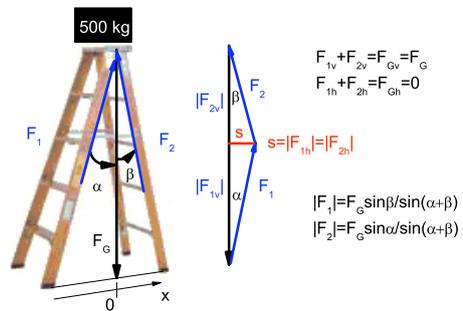
Wird das Gleichgewicht gestört, findet Bewegung statt.

Eine Leiter, die mit einem Gewicht von 500 kg belastet ist, überträgt die Gewichtskraft durch die Leiterfüsse auf den Boden. Die Leiter erzeugt somit eine Gegenkraft zur Gewichtskraft. Es gilt:

Gleichgewicht und Störung des Gleichgewichtes



Kraftverteilung



$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_G \quad \mathbf{F}_G : \text{Gewichtskraft}$$

$$|F_{1v}| + |F_{2v}| = |F_{Gv}| = |F_G|$$

$$F_{1h} = -F_{2h}$$

$$\frac{s}{|F_{1v}|} = \tan \alpha, \quad \frac{s}{|F_{2v}|} = \tan \beta$$

$$\frac{|\mathbf{F}_1|}{|\mathbf{F}_2|} = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha}$$

$$|\mathbf{F}_1| = \frac{|F_{1v}|}{\cos \alpha}, \quad |\mathbf{F}_2| = \frac{|F_{2v}|}{\cos \beta}$$

$$|\mathbf{F}_2| = F_G \left(\frac{\tan \alpha}{\cos \beta} \right)$$

$$\sin \alpha + \beta = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$|\mathbf{F}_2| = F_G \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \beta} \right)$$

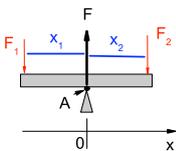
$$|\mathbf{F}_1| = F_G \left(\frac{\sin \beta}{\sin \alpha + \beta} \right)$$

Mit Hilfe der Gleichgewichtsgleichungen kann die wirkende Kraft auf Teile eines Gesamtkörpers berechnet werden. Dies ist wichtig z.B. beim Bau eines Fachwerkhäuses oder eines Gerüsts (Statiker). Um die Stabilität von Gebäuden zu gewährleisten, müssen die Kräfte und Drehmomente stets so gering sein, dass das Gebäude nicht stark verformt oder gar zerstört wird.

Für den Fall des einarmigen Hebels lassen sich aus den Gleichgewichtsbedingungen

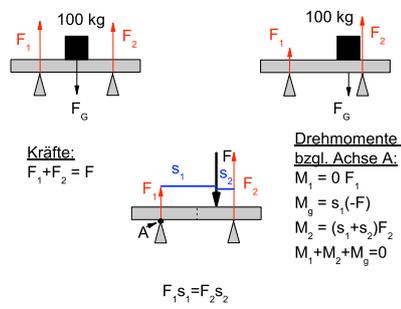
Gleichgewicht einer Wippe

2 Personen auf einer Wippe im Gleichgewicht:

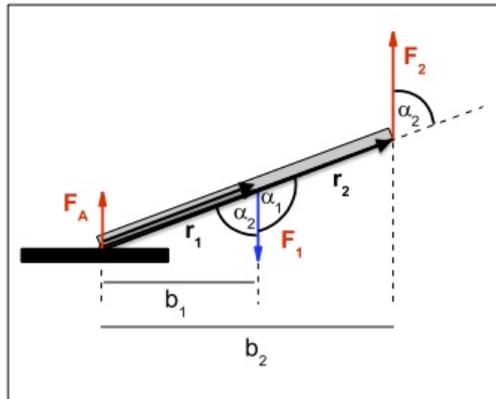
<p><u>Kräfte:</u> $F_1 + F_2 - F = 0$ $F_1 s_1 = F_2 s_2$</p>		<p><u>Drehmomente bzgl. Achse A:</u> $M_1 = -x_1 F_1$ $M_g = 0 \text{ (-F)}$ $M_2 = x_2 F_2$ $M_1 + M_2 + M_g = 0$</p>
---	---	--



Krafteinwirkung auf Auflagen



Einarmiger Hebel

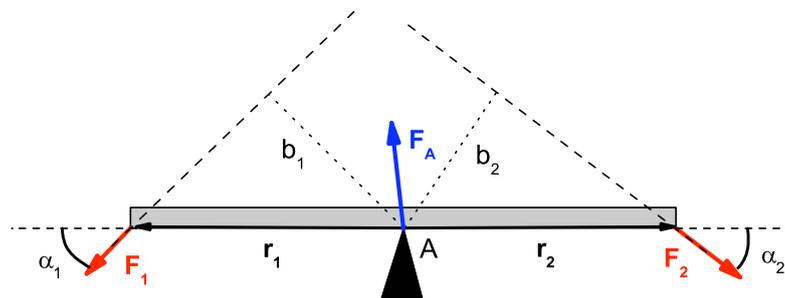


folgende Kraftverhältnisse herleiten:

$$\begin{aligned}
 \sum_i \mathbf{F}_i &= \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0 \\
 \Rightarrow \mathbf{F}_A &= -(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \\
 \sum_i \mathbf{M}_i &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = 0 \\
 &= r_1 F_1 \sin \alpha_1 - r_2 F_2 \sin \alpha_2 \\
 &= r_1 F_1 \sin \alpha_2 - r_2 F_2 \sin \alpha_2 = 0 \\
 \text{mit } r_1 \sin \alpha_2 &= b_1 \\
 \text{und } r_2 \sin \alpha_2 &= b_2 \\
 \Rightarrow b_1 F_1 &= b_2 F_2
 \end{aligned}$$

Für einen zweiarmigen Hebelarm folgt:

Zweiarmiger Hebel



$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$$

$$\sum_i \mathbf{M}_i = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = 0$$

$$= r_1 F_1 \sin \alpha_1 - r_2 F_2 \sin \alpha_2$$

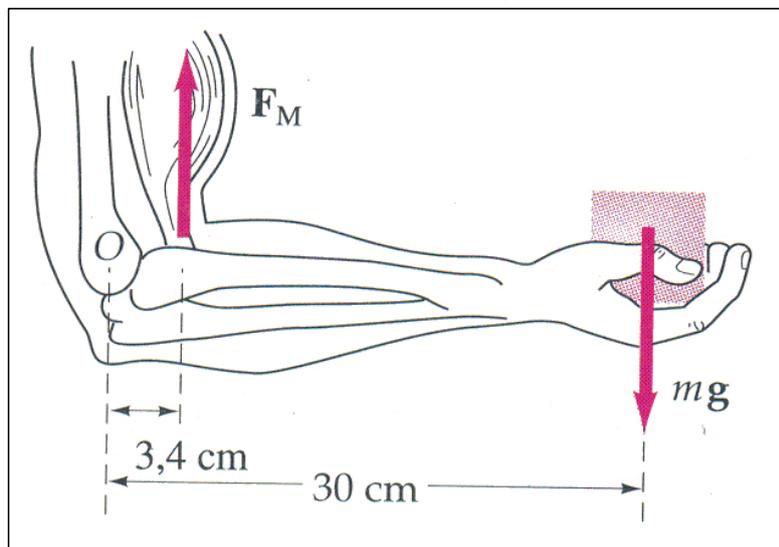
Kraftarme: $b_1 = r_1 \sin \alpha_1$

$$b_2 = r_2 \sin \alpha_2$$

$$\Rightarrow F_1 b_1 = F_2 b_2$$

Also gilt das Hebelgesetz: $F_1 b_1 = F_2 b_2$

Der menschliche Arm



2.10 Dynamik der ebenen Kreisbewegung

2.10.1 Newtonsche Axiome für die Drehbewegung

Trägheitsprinzip ein (massives) Objekt, worauf keine Drehmomente wirken, beharrt in seinem jeweiligen Zustand der gleichförmigen Drehbewegung.

Aktionsprinzip wenn ein Drehmoment \mathbf{M} auf ein Objekt wirkt, erzeugt es eine Winkelbeschleunigung α (rad/s²), nach der Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M} = \Theta \alpha$$

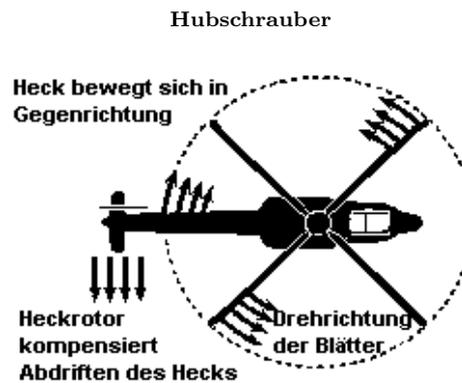
Hierbei ist Θ das Trägheitsmoment des Objektes. Aus den Einheiten der obigen Bewegungsgleichung sieht man, daß Θ die Einheit Nm s² = kg m² haben muß. Für eine Punktmasse m im Abstand r von der Drehachse gilt

$$\Theta = m r^2$$

actio = reactio ein wirkendes Drehmoment \mathbf{M} ruft immer ein gleich großes, entgegengerichtetes Gegenmoment (Reaktionsmoment)

$$\mathbf{M}_R = -\mathbf{M}$$

hervor (z. B. Gegendrehung eines Hubschraubers).



2.10.2 Trägheitsmomente

Das Trägheitsmoment Θ eines Körpers, der durch ein System von Massepunkten beschrieben werden kann, ist:

$$\Theta = \sum_i m_i r_i^2$$

Besteht ein Körper nicht aus einzelnen diskreten Massepunkten, sondern hat eine kontinuierliche Masseverteilung, so ist die Summation durch Integration zu ersetzen:

$$\Theta = \int_{\text{Volumen}} r^2 dm$$

Beispiel Vollzylinder:

$$dm = 2\pi r h \rho dr \quad h: \text{Höhe } \rho: \text{konstante Dichte}$$

$$\Theta = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi R^4 h \rho$$

$$\Theta = \frac{1}{2} m R^2 \quad m: \text{Gesamtmasse } R: \text{Radius}$$

Weitere Beispiele finden Sie in Abb. 2.18.

2.10.3 Der Drehimpuls

Die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M} = \Theta \boldsymbol{\alpha}$$

für die Drehbewegung kann analog zur Newton'schen Gleichung für eine lineare Bewegung durch 2-maliges Integrieren gelöst werden.

Analog zum Linearimpuls $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ definieren wir auch den Drehimpuls:

$$\mathbf{L} = \Theta \boldsymbol{\omega} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v}_B$$

(die letzte Definition gilt für eine Punktmasse m auf einer Kreisbahn vom Radius \mathbf{r} mit der Bahngeschwindigkeit \mathbf{v}_B). Hier gilt ebenfalls ein Erhaltungssatz, die *Drehimpulserhaltung*. Die allgemeine Form der Bewegungsgleichung für die Drehbewegung lautet nun:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}.$$

Wird der Drehimpuls \mathbf{L} eines Gegenstandes (z.B. ein Kreisel) durch ein Drehmoment \mathbf{M} verändert, so kann die Änderung in Richtung von \mathbf{L} zeigen, und damit den Betrag des Drehimpulses erhöhen, oder senkrecht zu \mathbf{L} wirken und nur die Richtung ändern. $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, der Wirkung dieser Kraft weicht der Kreisel senkrecht zur Krafrichtung aus. Er führt eine **Präzession** mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_p$ aus, wobei $\boldsymbol{\omega}_p$ senkrecht auf \mathbf{M} und \mathbf{L} steht.

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{L} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\omega}_p = \frac{\mathbf{M}}{\Theta \boldsymbol{\omega}}.$$

Dies hilft zum Beispiel beim Fahrradfahren. Will das Rad nach rechts kippen, so würde die Vorderachse durch das Drehmoment $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_G$ im Uhrzeigersinn gedreht. Die Vorderachse weicht dieser Drehung aber durch eine Präzession mit lotrechter Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_p$ aus, d.h. die Radachse dreht sich von oben gesehen nach rechts und verhindert so das Umkippen.

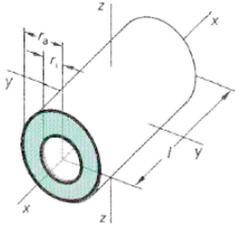
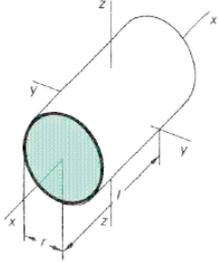
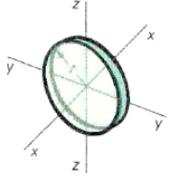
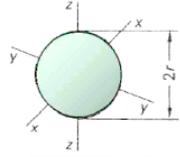
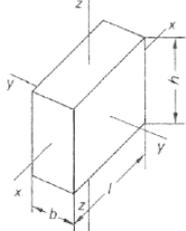
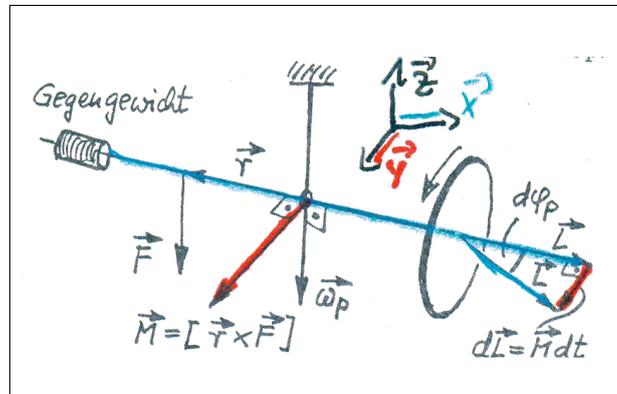
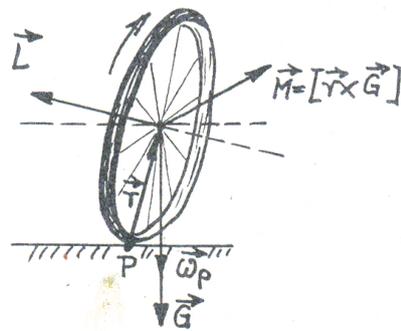
	Hohlzylinder	$\Theta_x = (m/2)[r_2^2 + r_1^2]$ $\Theta_y = \Theta_z = (m/4)[r_2^2 + r_1^2 + l^2/3]$
	dünnwandiger Hohlzylinder	$\Theta_x = mr^2$ $\Theta_y = \Theta_z = (m/4)[2r^2 + l^2/3]$
	Vollzylinder	$\Theta_x = (m/2)r^2$ $\Theta_y = \Theta_z = (m/4)r^2 + (m/12)l^2$
	dünne Scheibe ($l \ll r$)	$\Theta_x = (m/2)r^2$ $\Theta_y = \Theta_z = (m/4)r^2$
	dünnes Stab ($l \gg r$) unabhängig von der Form des Querschnitts	$\Theta_x = (m/2)r^2$ $\Theta_y = \Theta_z = (m/12)l^2$
	dünner Ring	$\Theta_x = mr^2$ $\Theta_y = \Theta_z = (m/2)r^2$
	Kugel, massiv	$\Theta_x = \Theta_y = \Theta_z = (2m/5)r^2$
	dünne Kugelschale	$\Theta_x = \Theta_y = \Theta_z = (2m/3)r^2$
	Quader	$\Theta_x = (m/12)[b^2 + h^2]$ $\Theta_y = (m/12)[l^2 + h^2]$ $\Theta_z = (m/12)[l^2 + b^2]$

Abbildung 2.18. Beispiele für das Trägheitsmoment Θ verschiedener Körper.

Kreisel



Freihändig Fahrrad fahren



Analogie Translation (geradlinige Bewegung) und Rotation (Drehbewegung)

Tabelle 2.4. Größen und Einheiten für die Translation (links) und die Rotation (rechts).

Größe	Einheit	Größe	Einheit
Weg s, ds	m	Winkel $\varphi, d\varphi$	Radian (rad)
Geschwindigkeit $v = ds/dt$	m/s	Winkel- geschwindigkeit $\omega = d\varphi/dt$	rad/s = 1/s
Beschleunigung $a =$ $dv/dt = d^2s/dt^2$	m/s ²	Winkel- beschleunigung $a =$ $d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2$	rad/s ² = 1/s ²
Masse (Trägheit) m	kg	(Massen)- Trägheitsmoment $\Theta = \sum mr^2$	kg m ²
Kraft $F = ma = dp/dt$	N = kg m/s ²	Drehmoment $M = \Theta\alpha = dL/dt$	Nm = kg m ² /s ²
(Linear-)Impuls $p = mv$	kg m/s	Drehimpuls $L = \Theta\omega$	kg m ² /s = Nms
Arbeit $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$	J = N m	Arbeit $dW = \mathbf{M} \cot d\varphi$	J = N m
kinetische Energie $E_{\text{kin}} = (m/2)v^2$	J = kg(m/s) ²	Rotationsenergie $E_{\text{rot}} = (\Theta/2)\omega^2$	J = (kgm ²)/s ²
Leistung $P = dW/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$	W = J/s	Leistung $P = dW/dt = \mathbf{M} \cdot \omega$	W = J/s
Kraftkonstante $D = F/s $	N/m	Winkel- richtmoment $D^* = M/\varphi $	Nm
Spannarbeit $W = (D/2)s^2$	Nm = J	Spannarbeit $W = (D^*/2)\varphi^2$	Nm = J

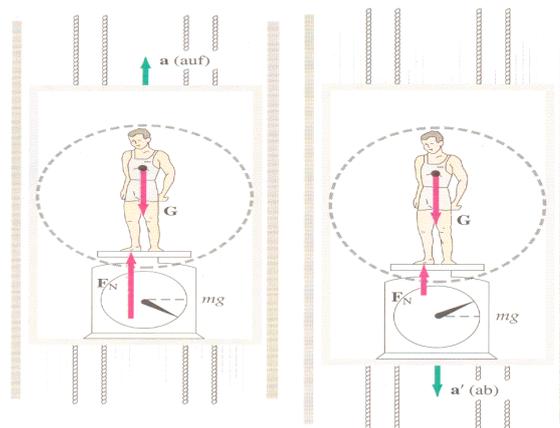
2.11 Bezugssysteme

Im Beobachtungssystem eines **Beobachters A** (z.B. ein im fahrenden Zug stehender Schaffner) bleibt ein ruhender Gegenstand (z.B. ein schlafender Fahrgast), auf den keine äußeren Kräfte wirken, nach dem ersten Newtonschen Axiom in Ruhe. Für einen zweiten **Beobachter B**, der sich in einem Beobachtungssystem befindet, welches sich relativ zum ersten Beobachtungssystem mit **konstanter Geschwindigkeit \vec{v}** bewegt (z.B. ein Zeitungsverkäufer auf dem Bahnsteig), gilt ebenfalls das erste Newtonsche Axiom für den Fahrgast und Schaffner, da der Impuls, bzw. die Geschwindigkeit konstant bleibt.

Bewegt sich B **nicht** mehr mit **konstanter Geschwindigkeit**, sondern beschleunigt er, so wird es für B so aussehen, als würden Fahrgast und Schaffner beschleunigt, obwohl keine äußeren Kräfte wirken. Hier **gilt das erste Newtonsche Axiom** offensichtlich **nicht** mehr.

Bezugssysteme, in denen das erste Newtonsche Axiom gültig ist, heißen **Inertialsysteme**.

Beschleunigte Bezugssysteme



2.11.1 Beschleunigte Bezugssysteme

In beschleunigten Bezugssystemen werden also zusätzliche Kräfte beobachtet. Diese nennt man **Scheinkräfte**, da sie nur aus der Position des Beobachters im beschleunigten Bezugssystem auftreten. Die Person im aufwärts beschleunigten Fahrstuhl erfährt zur Erdbeschleunigung g zusätzlich die Aufwärtsbeschleunigung a . Die Waage, auf der die Person im Fahrstuhl steht, zeigt dann eine Normalkraft F_N die gegeben

ist durch:

$$\vec{F}_N = m \cdot \vec{g} + m \cdot \vec{a} \Rightarrow F_N = m(g + a)$$

Im abwärts beschleunigten Fahrstuhl erfährt der Fahrgast die Abwärtsbeschleunigung a' . Damit ist die Normalkraft F_N :

$$\vec{F}_N = m \cdot \vec{g} + m \cdot \vec{a}' \Rightarrow F_N = m(g - a').$$

Im Grenzfall eines frei fallenden Fahrstuhls ($a' = g$) hätte der Fahrgast also keine Normalkraft mehr, die Waage würde $F_N = 0$ anzeigen (vgl. Experiment mit Gewicht an Federwaage und Sprung vom Tisch).

2.11.2 Rotierendes Bezugssystem

Ruhende Körper erfahren in einem rotierenden Bezugssystem ständig eine Kraft, die dafür sorgt, dass der Körper in der Rotationsbewegung bleibt. Diese Kraft heisst **Zentripetalkraft** (vgl. Kapitel 2.9.1). Für den Beobachter im rotierenden Bezugssystem ist dies eine Scheinkraft, die Zentrifugalkraft. Setzt die Zentripetalkraft bzw. Zentrifugalkraft schlagartig aus, dann bewegen sich die Körper nach dem ersten Newtonschen Gesetz geradlinig und gleichförmig weiter.

Für die Zentrifugalkraft für einen Massenpunkt m , der im Kreis mit dem Radius r bewegt wird gilt:

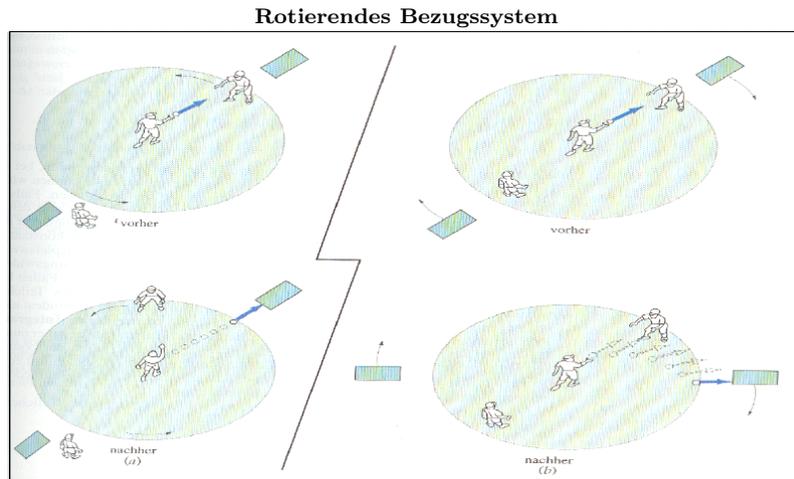
$$\vec{F}_Z = -m \cdot a_{Zp} = -m \cdot [\vec{\omega} \times v_B] = m \frac{v_B^2}{r} \vec{r}$$

Hierbei zeigt die Zentripetalbeschleunigung a_{Zp} immer zum Kreismittelpunkt (daher zentripetal) und ist \vec{r} entgegengerichtet. Die Richtung der Bahngeschwindigkeit ändert sich stetig aufgrund der Zentripetalkraft. Die Kreisbewegung wird deshalb durch die Winkelgeschwindigkeit ω beschrieben:

$$\vec{\omega}(t) = \frac{\text{Drehwinkeländerung}}{\text{Zeitänderung}} = \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Verläuft die Drehung im Antiuhrzeigersinn, so ist die Winkelgeschwindigkeit positiv, verläuft sie im Uhrzeigersinn, so ist sie negativ. Der Richtungsvektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ ist parallel zur Drehachse.

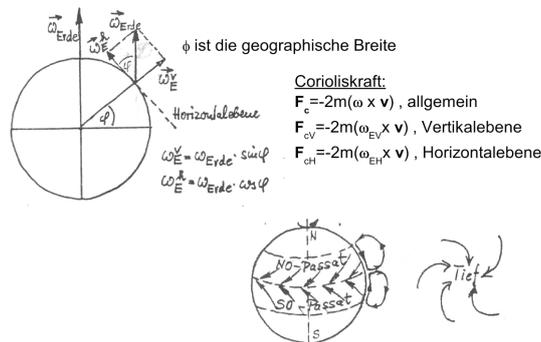
Eine zweite Scheinkraft in rotierenden Bezugssystemen ist die **Corioliskraft** F_C . Sie wirkt auf Körper, die im rotierenden Bezugssystem eine Bewegung senkrecht zur



Rotationsachse ausführen oder deren Bewegung eine Komponente senkrecht zur Rotationsachse aufweist. Ursache ist die sich ändernde Bahngeschwindigkeit, die mit einer Änderung des Abstands von der Rotationsachse einhergeht. \vec{F}_C ergibt sich zu:

$$\vec{F}_C = 2 m \vec{v} \times \vec{\omega}.$$

Corioliskraft



Die vertikale Komponente der Corioliskraft führt auf der Nordhalbkugel zu einer Rechtsablenkung der Winde aus den Subtropen zum Äquator (NO-Passat). Winde im Tiefdruckgebiet laufen auf der Nordhalbkugel gegen den Uhrzeigersinn. Die horizontale Komponente führt dazu, dass ein lotrecht fallender Körper nach Westen und ein nach oben bewegter Körper nach Osten abgelenkt wird. (Siehe auch Foucaultsches Pendel.)

Tabelle 2.5. Aggregatzustände und ihre Elastizitäten

Aggregatzustand	Formelastizität	Volumenelastizität
fest	Ja	Ja
flüssig	Nein	Ja
gasförmig	Nein	Nein

2.12 Verformung, Elastizität

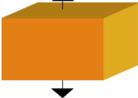
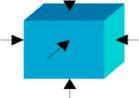
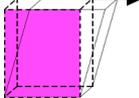
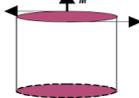
Wie biegen sich die Balken? Bisher haben wir angenommen, dass die Materie entweder aus punktförmigen Massen besteht (geradlinige Bewegung, Kreisbewegung) oder vollständig starr ist (Drehbewegung des »starren Körpers«). In Wirklichkeit hat feste (sowie z.T. auch flüssige) Materie eine gewisse Elastizität; das heißt, sie widerstrebt Form- bzw. Volumenänderungen durch eine äußere Kraft und gewinnt ihre ursprüngliche Form und Größe wieder, sobald diese Kraft nicht mehr wirkt. Dabei wird die aufgewendete Arbeit (Spannarbeit, Volumenarbeit) wieder freigesetzt.

Die drei verschiedenen Aggregatzustände der Materie (fest, flüssig, gasförmig) zeigen sehr unterschiedliche Eigenschaften bzgl. ihrer Elastizität (siehe Tabelle 2.5). Den flüssigen sowie den gasförmigen Zustand werden wir später betrachten; zuerst schauen wir die Elastizität der festen Materie an. Grundsätzlich gibt es vier Arten der Verformungskräfte:

1. Eine Zugkraft oder Druckkraft, die eindimensional (in einer bestimmten Richtung) wirkt. Diese produziert eine Dehnung oder Stauchung Δl (oder relative Dehnung $\varepsilon = \Delta l/l$) der Materie;
2. Ein dreidimensionaler Druck (allseitiger Druck), der eine Kompression ΔV (relative Kompression $\Delta V/V$) erzeugt;
3. Eine Scher- oder Schubkraft, die tangential zu einer Fläche der Materie wirkt und eine Scherung (Scherwinkel α) zur Folge hat; sowie
4. Die Torsion: eine Drillung der Materie um den Winkel φ_0 durch ein Drehmoment.

Diese Vorgänge sind charakterisiert durch Materialkonstanten, die miteinander zusammenhängen. Sie sind in der Tabelle 2.6 auf der gegenüberliegenden Seite zusammengefasst.

Tabelle 2.6. Materialkonstanten

Dehnung	allseitiger Druck	Scherung	Torsion
			
<i>Beobachtungen</i> $F_n \sim \Delta l$	$\Delta V \sim \Delta P$	$\alpha \sim F_{tg}$	$\varphi_0 \sim M$
<i>Verformung</i> $\varepsilon = \Delta l/l$ (relative Dehnung)	$\Delta V/V$ (relative Kompression)	α (Scherwinkel)	φ_0 (Torsionswinkel)
<i>Kraftgröße</i> $\sigma = F_n/A$ (mech. Spannung)	$P = F_n/A$ (Druck)	$\tau = F_{tg}/A$ (Schubspannung)	$M = F_{tg} r$ (Torsionsmoment)
<i>Gesetze</i> $\sigma = E\varepsilon$ (E = Elastizitätsmodul)	$\Delta P = -K\Delta V/V$ (K = Kompressionsmodul; $\kappa = 1/K =$ Kompressibilität)	$\tau = G\alpha$ (G = Schubmodul)	$M = (\pi R^4/2l) G \varphi_0$
<i>Querkontraktion</i> $\varepsilon_Q = \Delta b/b = -\varepsilon\nu$ ($\nu =$ Poissonzahl)	Relationen zwischen Konstanten: $K = E/3(1-2\nu)$	$G = E/2(1+\nu)$	
<i>makroskopische Beziehungen</i> $F_{el} = -D\Delta l$, $D = AE/l$			$M_{tor} = -D^* \varphi_0$ $D^* = (A/l)(R^2/2) \cdot G$
<i>elastische Energie</i> $E_{el} = (VE/2)\varepsilon^2$ $[E_{el} = (\frac{D}{2}) \Delta l^2]$	Volumenarbeit $-P\Delta V$		$E_{el} = (D^*/2)\varphi_0^2$

3 Hydrostatik

3.1 Ruhende Flüssigkeiten

In einer Flüssigkeit sind die Teilchen (Atome, Moleküle) fest aneinander gebunden durch sogenannte Kohäsionskräfte, die Teilchen lassen sich jedoch beliebig aneinander vorbeischieben. Dies führt dazu, dass sich das Volumen der Flüssigkeit nur schwer ändern läßt (Flüssigkeiten sind kaum komprimierbar!), die Form der Flüssigkeit aber beliebig ist (Volumenelastizität, aber keine Formelastizität).

Wirkt eine Kraft auf eine bewegliche Gefäßwand (»Stempel«), so wird sie innerhalb der Flüssigkeit als Druck übertragen. Der Druck wirkt allseitig und überall in der Flüssigkeit; er ist daher nicht eine Vektorgröße. Der Druck ist definiert als »Kraft pro Fläche«:

$$\text{Druck} = \frac{\text{wirkende Kraft}}{\text{Angriffsfläche}} \quad P = \frac{F}{A}$$

Druckeinheit = N/m² ≡ Pa (Pascal), wobei die auf der Fläche A senkrecht stehende Kraftkomponente gemeint ist. (Zum Vergleich: der Atmosphärendruck, der auf der Erdoberfläche aufgrund des Gewichts der Lufthülle wirkt, beträgt etwa 100 000 Pa. Man definiert daher eine weitere Druckeinheit, das bar:

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa .)}$$

Wir sprechen von einer idealen Flüssigkeit, wenn das Volumen exakt konstant bleibt (keine Komprimierbarkeit) und die Formänderung (z. B. Fließen) ohne Widerstand geschieht (keine Formelastizität). Wirkliche Flüssigkeiten (reale Flüssigkeiten) haben diese idealen Eigenschaften nur annähernd; insbesondere zeigen sie einen Widerstand (Zähigkeit) gegenüber Formänderungen.

3.1.1 Der hydrostatische Druck

Schweredruck

Der Schweredruck entsteht durch das Gewicht der Flüssigkeit, welche über dem Messpunkt liegt. Er ist gegeben durch die Gewichtskraft, geteilt durch die Fläche des Behälters:

$$\Delta P(h) = \frac{mg}{A} = \frac{\rho Vg}{A} = \frac{\rho gAh}{A} = \rho gh,$$

wobei ρ die Massendichte der Flüssigkeit bezeichnet. Der Schweredruck steigt also linear mit wachsender Tiefe in der Flüssigkeit an, bei der Tiefe h hat er den Wert:

$$P(h) = \rho gh$$

Der Stempeldruck

Der Gesamtdruck in einer ruhenden Flüssigkeit, der sogenannte hydrostatische Druck, ist die Summe vom Stempeldruck P_0 und Schweredruck $P(h)$:

$$P = P_0 + P(h)$$

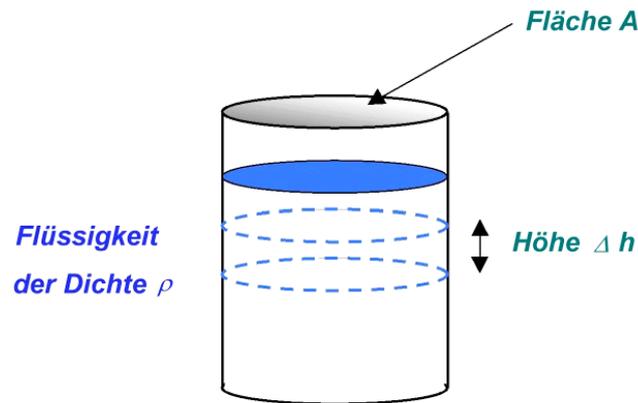


Abbildung 3.1. Schweredruck in einer Flüssigkeit der Dichte ρ

Dieser Druck wirkt bei gegebener Tiefe überall gleich, er ist nicht richtungsabhängig und hängt auch nicht von der Form des Behälters ab (»hydrostatisches Paradoxon«).

3.1.2 Auftrieb

Taucht ein Objekt in die Flüssigkeit ein, wirkt an seiner unteren Fläche aufgrund des Schweredrucks ein höherer Druck als an der oberen Fläche. Dies führt zu einer Nettokraft, die das Objekt anzuheben versucht: sein Gewicht ist geringer in der Flüssigkeit. Diese Kraft nennt man Auftrieb F_A , sie ist gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit m_{fl} (Prinzip von ARCHIMEDES, siehe Abb. 3.2).

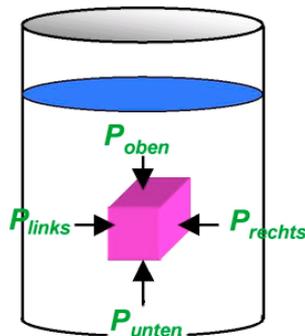


Abbildung 3.2. Druckverhältnisse um ein Objekt in einer Flüssigkeit; der Druck von unten ist um den Schweredruck der verdrängten Flüssigkeit größer als der Druck von oben.

$$\begin{aligned}\vec{F}_A &= m_{fl} \cdot \vec{g} = \rho_{fl} \cdot \vec{g} \cdot V \\ \vec{F}_{res} &= m_K \cdot \vec{g} - m_{fl} \cdot \vec{g} = (\rho_K - \rho_{fl}) \vec{g} \cdot V\end{aligned}$$

Der Auftrieb \vec{F}_A eines Körpers K ist gleich der Gewichtskraft der von ihm verdrängten Flüssigkeit $m_{fl} \cdot \vec{g}$ und von der Gestalt und vom Material des Körpers unabhängig. Die resultierende Kraft \vec{F}_{res} , die entscheidet, ob ein Körper in der Flüssigkeit schwimmt, schwebt oder sinkt, ist die Differenz aus der Masse des verdrängten Volumens $\rho_{fl} \cdot \vec{g} \cdot V$ und der Masse des verdrängenden Volumens $\rho_K \cdot \vec{g} \cdot V$.

Beispiele:

1. Der Auftrieb kann verwendet werden, um mit zwei Messungen die Dichte eines unbekanntes Stoffes zu bestimmen, sofern diese größer als die einer Flüssigkeit ist. Mit einer Messung wird die Gewichtskraft des Körpers außerhalb der Flüssigkeit bestimmt, mit einer zweiten die resultierende Kraft (Gewichtskraft minus Auftriebskraft) des Körpers in der Flüssigkeit. Aus der Differenz beider Messungen kann man das Volumen des Körpers bestimmen und damit aus der Gewichtskraft die Dichte.
2. Ein Schiff, das schwimmend über eine Brücke fährt, wie man sie gelegentlich bei Kanälen findet, belastet diese nicht. Die Gewichtskraft des Schiffs ist gleich der Gewichtskraft des (von der Brücke) verdrängten Wassers.
3. Ein Körper, der eine größere Dichte als die einer Flüssigkeit hat, kann trotzdem darin schwimmen, wenn seine Form so ist, dass er die Menge an Wasser verdrängt, die die gleiche Gewichtskraft wie der Körper selbst hat (Boot aus Metall).
4. Wenn ein in einem Boot liegender Stein aus dem Boot genommen und im Wasser versenkt wird, erniedrigt sich der Wasserspiegel ein klein bisschen. Der Stein im Boot verdrängt nämlich die Menge an Wasser, die die gleiche Gewichtskraft wie der Stein hat. Der Stein versenkt im Wasser verdrängt dagegen nur die Menge an Wasser, die das gleiche Volumen wie der Stein hat.

n.b. In einer nicht-idealen (komprimierbaren) Flüssigkeit bzw. in einem Gas nimmt der Schweredruck nicht mehr linear mit wachsender Tiefe zu, da sich das Medium zunehmend komprimiert aufgrund des wachsenden Drucks; die Dichte nimmt damit auch zu. Dies führt bei einer komprimierbaren Fluide (Gas oder Flüssigkeit) zur barometrischen Höhenformel: Druck und Dichte nehmen exponentiell mit wachsender Tiefe zu. Diese Formel kann als wichtiges Beispiel des thermischen Gleichgewichtes (BOLTZMANN-Gleichgewicht) angesehen werden (s. Wärmelehre).

3.1.3 Grenz- und Oberflächen

Ein Flüssigkeitsteilchen innerhalb des Volumens der Flüssigkeit erfährt von allen Richtungen gleiche Kohäsionskräfte, es herrscht ein Kräftegleichgewicht. Bringt man das

Teilchen an die Oberfläche, fehlen die Kräfte auf der einen Seite (Tafelbild!), das Gleichgewicht ist gestört. Es kostet also eine Kraftanstrengung, (bzw. Arbeit W muß geleistet werden), um ein Teilchen an die Oberfläche zu führen, seine (potentielle) Energie ist dort größer. Diese zusätzliche Energie, geteilt durch die entsprechende Fläche, nennt man die spezifische Oberflächenenergie ε :

$$\varepsilon = \frac{W}{A} \quad \left(\frac{\text{J}}{\text{m}^2} \right).$$

Diese spezifische Oberflächenenergie ist eine Eigenschaft der Flüssigkeit (und ggf. auch der gegenüberliegenden Materie an der Grenzfläche). Sie kann z. B. durch Aufheben eines Films aus der Flüssigkeit durch einen Drahtbügel gemessen werden. Dabei mißt man die nötige Arbeit W , um die Fläche des Films um den Betrag A zu erhöhen, bzw. (wahlweise) die dazu nötige Kraft, die man durch die Breite des Bügels l geteilt als Oberflächenspannung σ bezeichnet:

$$\varepsilon = \frac{W}{A} \doteq \sigma = \frac{F}{2l} \quad \left(\frac{\text{J}}{\text{m}^2} \equiv \frac{\text{N}}{\text{m}} \right).$$

Da die Oberflächenenergie es allgemein energetisch ungünstig macht, eine freie Fläche zu vergrößern, bildet eine Flüssigkeit sog. »Minimalflächen« (vgl. Seifenblasen). Falls die Flüssigkeit an der Grenzfläche in Kontakt mit einer anderen Materie tritt, kommt es auf die relative Stärke der Kohäsionskräfte zwischen den eigenen Flüssigkeitsteilchen und den Adhäsionskräften zwischen Flüssigkeit und angrenzender Materie an. Falls letztere stärker sind, spricht man von einer »benetzenden Flüssigkeit«, ein Tropfen breitet sich möglichst aus. Anderenfalls bleibt der Tropfen möglichst geschlossen (nicht-benetzende Flüssigkeit). Dies erklärt auch die Kapillarwirkung bei einer Flüssigkeit in einem engen Rohr. Für die kapillare Steighöhe h ergibt sich (siehe Abb. 3.3):

$$h = \frac{2\varepsilon}{r\rho g}$$

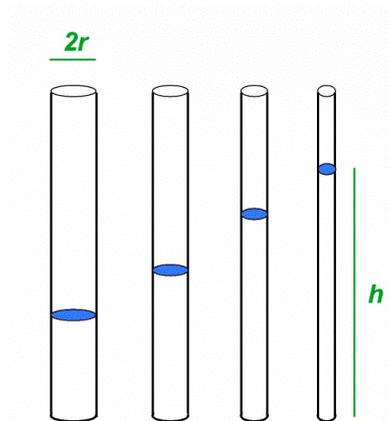


Abbildung 3.3. Die Steighöhe einer Flüssigkeit in einem Kapillarrohr (relativ zur Höhe der Flüssigkeit außerhalb des Rohrs) kann durch eine einfache Überlegung aus der spezifischen Grenzflächenenergie berechnet werden. Die Energieerhöhung ΔE_{pot} durch das Anheben der Flüssigkeit um die Höhe h im Rohr ist gegeben durch $\Delta E_{\text{pot}} = mgh = \rho Vgh = \rho g \pi r^2 h^2$. Der Energiegewinn durch die Oberflächenenergie ist $\Delta E_{\text{obf}} = \varepsilon A_{\text{kontakt}} = \varepsilon 2\pi r h$. Aus der Energiebilanz $\Delta E_{\text{pot}} = \Delta E_{\text{obf}}$ erhalten wir: $\rho g r h = 2\varepsilon$ oder $h = 2\varepsilon/\rho g r$ oder $h = 2\sigma/\rho g r$. Vgl. Skizze oben.

3.2 Hydrodynamik: bewegte Flüssigkeiten

3.2.1 Volumenstrom, Kontinuität

Wir betrachten eine stationäre Strömung, d. h. die Geschwindigkeit der Strömung an einem gegebenen Punkt bleibt konstant im Laufe der Zeit. Außerdem betrachten wir zunächst die Strömung einer idealen Flüssigkeit, die nicht komprimierbar ist und ohne Widerstand fließt.

Eine wichtige Größe, um die Strömung zu charakterisieren, ist die Volumenstromstärke I_V :

$$I_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad \left(\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right).$$

Bei der idealen Strömung ist das Geschwindigkeitsprofil in einem Rohr gleichmäßig, es bildet eine Ebene senkrecht zur Strömungsrichtung. Bei einem Rohr vom Querschnitt A ist das Volumen, welches in der Zeit Δt durch die Querschnittsfläche mit Geschwindigkeit v fließt, gegeben durch

$$\Delta V = Av\Delta t,$$

d. h. die Stromstärke ist

$$I_V = Av.$$

Da die Flüssigkeit inkompressibel ist und auch im Laufe der Strömung nicht erzeugt oder vernichtet wird, gilt eine *Kontinuitätsbedingung*: Das Volumen ΔV , das in einer gegebenen Zeit durch eine gegebene Querschnittsfläche im Rohr fließt, muss überall

gleich sein – es kann z. B. nicht mehr Flüssigkeit in das Rohr hineinfließen, als am anderen Ende in der gleichen Zeit herausfließt. M. a. W. ist die Volumenstromstärke überall gleich. Ändert sich die Querschnittsfläche des Rohrs, so muss sich die Strömungsgeschwindigkeit v entsprechend ändern, um I_V konstant zu halten:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \text{oder} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

Wo der Querschnitt enger wird, muß die Flüssigkeit schneller fließen (siehe Abb. 3.4).

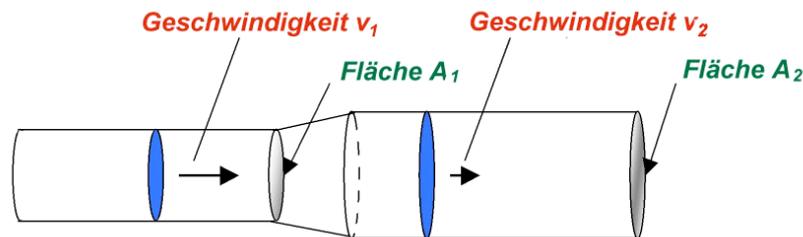


Abbildung 3.4.

3.2.2 Druck in der Strömung

In der strömenden Flüssigkeit herrscht an jeder Stelle ein Druck, nun aber heißt er hydrodynamischer Druck. Er besteht nicht nur aus Stempeldruck und Schweredruck, wie in der ruhenden Flüssigkeit, sondern enthält auch einen weiteren Betrag, der durch die Strömung (kinetische Energie!) zustandekommt. Wir betrachten die Energie eines Probevolumens ΔV an zwei verschiedenen Stellen (1 und 2) innerhalb einer strömenden Flüssigkeit in einem Rohr. Das Rohr soll eine Querschnittsfläche A_1 an Stelle 1 und A_2 an Stelle 2 haben. Die Arbeit, die zur Bewegung des Volumens um eine Strecke Δs_1

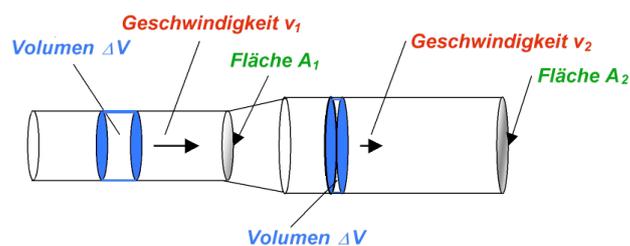


Abbildung 3.5.

bzw. Δs_2 an den Stellen 1 bzw. 2 geleistet werden muß, ist:

$$\begin{aligned}\Delta W &= F_1 \Delta s_1 - F_2 \Delta s_2 \\ &= P_1 A_1 \Delta s_1 - P_2 A_2 \Delta s_2 \\ &= P_1 \Delta V - P_2 \Delta V = (P_1 - P_2) \Delta V\end{aligned}$$

Die Energiedifferenz, die durch diese Verschiebung entsteht, ist;

$$\Delta E = mg(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

Setzen wir die geleistete Arbeit gleich die resultierende Energiedifferenz (Energieerhaltung!), so erhalten wir:

$$(P_1 - P_2) \Delta V = m [g(h_2 - h_1)] + \frac{m}{2} [(v_2^2 - v_1^2)]$$

oder, mit $m = \rho \Delta V$ (ρ = Massendichte), nach Umordnung:

$$\left[P_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 \right] \Delta V = \left[P_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 \right] \Delta V.$$

Dies heißt, die Größe $\left[P + \rho g h + \frac{\rho}{2} v^2 \right]$ ist überall konstant (wir können die willkürlich gewählten Stellen 1 und 2 weglassen):

$$\left[P + \rho g h + \frac{\rho}{2} v^2 \right] = konst.$$

Diese Gleichung nennt man den Satz von BERNOULLI. Er drückt die Energieerhaltung bei der Strömung aus, und gilt streng nur für die stationäre, ideale Strömung. Er besagt:

Der Druck einer strömenden Flüssigkeit nimmt ab, wenn sie schneller und/oder aufwärts strömt und umgekehrt.

Die drei Terme in der BERNOULLI-Gleichung sind der hydrostatische Druck (Schweredruck und Stempeldruck wie in Abschnitt 3.1), ein Druckterm, der die potenzielle Energie der Flüssigkeit im Gravitationsfeld der Erde widerspiegelt sowie der Druck, der durch die Strömung selbst zustandekommt ($\rho/2v^2$); letzterer wird *Staudruck* genannt.

Hinweis: In der Bernoulli-Gleichung bedeutet h die Höhe über einem gewählten Bezugspunkt, wie bei der potenziellen Energie in Abschnitt 2.6.4, während in Abschnitt 3.1 h die Tiefe, also die Länge der Flüssigkeitssäule über dem Messpunkt, bedeutete. Man erhält den hydrostatischen Druck als $P = -\rho g h$, wenn man in der Bernoulli-Gleichung $v = 0$ setzt.

Beispiele: Schiff in engem Kanal, Ball im Luftstrom, Luftstrom zwischen zwei Kugeln, Profil der Tragfläche eines Flugzeugs, Flugbahn eines rotierenden Balls.

3.2.3 Die reale Strömung

Reale Flüssigkeiten haben eine Zähigkeit oder Viskosität; sie lassen sich nicht beliebig leicht verformen und leisten deshalb einen Widerstand gegen die Strömung. Dies nennt man auch »innere Reibung«. Der einfachste Fall ist die Bewegung einer Platte der Fläche A parallel zu einer Gefäßwand in einer Flüssigkeit, mit Abstand d zur Wand und konstanter Geschwindigkeit v .

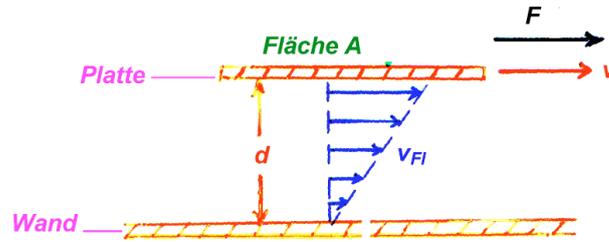


Abbildung 3.6.

Das Geschwindigkeitsprofil ist linear (siehe Abb. 3.6, dort geneigte, gestrichelte Linie), die Flüssigkeit bewegt sich am schnellsten neben der bewegten Platte und am langsamsten neben der Wand. Um die Bewegung aufrecht zu erhalten, muss eine Kraft F auf die Platte in Richtung seiner Geschwindigkeit v ständig wirken, welche die innere Reibung überwindet:

$$F = \eta A \frac{v}{d},$$

wobei η eine Materialkonstante der (realen) Flüssigkeit, ihre *Viskosität*, angibt. Die innere Reibung setzt Bewegungsenergie in Wärme um. Die Viskosität von Flüssigkeiten nimmt i. a. mit steigender Temperatur ab (bei Gasen umgekehrt!).

In einem runden Rohr (Radius r , Länge l) ist das Geschwindigkeitsprofil parabelförmig (höchste Geschwindigkeit in der Mitte). Für die Volumenstromstärke gilt das Hagen-Poiseuille'sche Gesetz:

$$I_V = \left(\frac{\pi}{8}\right) \left(\frac{r^4}{l}\right) \frac{(P_2 - P_1)}{\eta}$$

wobei die Material- und geometrischen Größen zum Strömungswiderstand R_S zusammengefasst werden können:

$$I_V = \frac{\Delta P}{R_S} \quad \text{mit} \quad R_S = \left(\frac{8}{\pi}\right) \left(\frac{l}{r^4}\right) \eta.$$

Die erste Gleichung definiert den allgemeinen Strömungswiderstand R_S ("Ohm'sches Gesetz" für die Strömung). Eine weitere Anwendung der Viskosität ist das Stokes'sche

Gesetz für die Bewegung eines kugelförmigen Körpers (Radius r) innerhalb einer ruhenden Flüssigkeit:

$$F_S = -6\pi\eta r v.$$

Zusammenfassung, Strömung

Wichtig für die Strömungslehre sind einige Grundbegriffe:

$$\text{Volumenstromstärke} \quad I_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} \text{ bzw. } \frac{dV}{dt}, \quad \text{wobei} \quad I_V = A v.$$

($A \hat{=}$ Querschnittsfläche der Strömung, $v \hat{=}$ Strömungsgeschwindigkeit).

Kontinuitätsgleichung: bei der stationären Strömung ist I_V überall gleich, d. h. $Av = \text{konst.}$ Vergrößerung der Querschnittsfläche erniedrigt die Geschwindigkeit und umgekehrt.

Bernoulli-Gleichung (Energieerhaltung)

$$P + \rho gh + \frac{\rho}{2}v^2 = \text{konst.}$$

Das gilt für eine ideale Strömung; bei realer Strömung ist die Summe von Stempel-, Schwere- und Staudruck zeitabhängig und gegeben durch einen »Reibungsdruck« $P_R(t)$.

Reale Strömung einer Flüssigkeit der Viskosität η in einem runden Rohr (Hagen-Poiseuille'sches Gesetz):

$$I_V = \left(\frac{\pi}{8}\right) \left(\frac{r^4}{l}\right) \frac{(P_2 - P_1)}{\eta}$$

oder allgemein: $I_V = \Delta P/R_S$ mit $R_S \hat{=}$ Strömungswiderstand.

Der Blutkreislauf

Einige Zahlenwerte zum Blutkreislauf

- Eigenschaften des Bluts: $\rho \approx 1,06 \text{ g/cm}^3$, $\eta \approx 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- Drücke
 - systolischer Druck $\approx 16,0 \text{ kPa}$ (Aorta, Herzklappe offen)
 - diastolischer Druck $\approx 10,7 \text{ kPa}$ (Aorta, Herzklappe zu)
 - rechter Kammerdruck $\approx 2,7 \text{ kPa}$ (Lungenarterie)
- Umsatz $\Delta V \approx 70 \text{ cm}^3/\text{Herzschlag}$, $I_V \approx 70 \text{ cm}^3/\text{s}$ (Pulsrate $\approx 1 \text{ Hz}$), d. h. $I_V \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$ oder ca. 4,2 l/min.

- (Volumen)arbeit des Herzens $\Delta V P \approx 1,3 \text{ J/Schlag}$, Leistung $P_H \approx 1,3 \text{ W}$
- Tagesarbeit $\approx 130 \text{ kJ}$, entspricht etwa 1,5 % des metabolischen Grundumsatzes (ca. 8000 kJ pro Tag).

Strömungswiderstand und -geschwindigkeit für den gesamten Kreislauf: aus $\Delta P \approx 13,0 \text{ kPa}$, $I_V \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$ sowie $R_S = \Delta P/I_V$ ergibt sich:

$$R_S \approx 1,9 \cdot 10^8 \frac{\text{Pa} \cdot \text{s}}{\text{m}^3}.$$

In der Aorta: $R_S = 8l\eta/\pi r^4$ (HAGEN-POISEUILLE) $\approx 3,7 \cdot 10^4 \text{ Pa} \cdot \text{s}/\text{m}^3$; damit ist

$$\Delta P_{\text{Aorta}} = I_V \cdot R_S \approx 2,6 \text{ Pa (sehr klein!)}$$

und

$$v = \frac{I_V}{A} \approx 0,13 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(Aorta, mit $r = 1,3 \text{ cm}$, $l = 0,2 \text{ m}$).

Blutdruckmessung

Aufgrund des geringen Druckabfalls in der Aorta und anderen großen Arterien ist es zulässig, den Blutdruck in der Armarterie zu messen. Der Manschettendruck (gemessen z.B. mit einem Flüssigkeitsmanometer) wird erhöht, bis keine Strömungsgeräusche in der Armbeuge zu hören sind (Manschettendruck gleich systolischer Druck, Arterie zusammengepreßt). Langsames Senken des Manschettendrucks führt zu hörbaren Stoßgeräuschen (Herzschläge), die beim Erreichen des diastolischen Drucks in kontinuierliche Geräusche übergehen. Typische Werte: 16,0/10,7 kPa (entspricht 120/80 mm Hg – alte Einheit!)

Schweredruck im Blutkreislauf: aus der Dichte ρ sowie den Höhendifferenzen (typ. Herz-Fuß $\approx 1,3 \text{ m}$, Herz-Kopf $\approx 0,4 \text{ m}$) erhalten wir für den Schweredruck ρgh beim stehenden Menschen:

$$\Delta P \text{ Herz – Fuss} \approx 13,5 \text{ kPa}$$

$$\Delta P \text{ Herz – Kopf} \approx 4,2 \text{ kPa}$$

d. h. der Gesamtdruck ist etwa

$$13,0 + 13,5 = 26,5 \text{ kPa} \quad \text{in den Füßen, und}$$

$$13,0 - 4,2 = 8,8 \text{ kPa} \quad \text{im Gehirn.}$$

4 Wärmelehre

4.1 Temperatur

In der Wärmelehre brauchen wir, zusätzlich zu den drei mechanischen Größen/Einheiten Länge (Meter), Zeit (Sekunde) und Masse (Kilogramm) auch zwei weitere: die Temperatur (»Potentialgröße der Wärme«) sowie die Stoffmenge (Molzahl n oder ν , siehe Seite 7). Wir beginnen mit einer kurzen Chronik der Temperatur:

Tabelle 4.1. Chronik der Temperatur

1700-1720	NEWTON und FAHRENHEIT überlegen sich, wie man eine Temperaturskala festlegen kann. Fahrenheit setzt den Siedepunkt von Wasser $t_{\text{sp}} = 212^\circ\text{F}$ und den Eispunkt $t_{\text{Ep}} = 32^\circ\text{F}$, so dass der Lebensbereich der Menschen etwa von 0°F bis 100°F reicht.
1702	AMONTONS stellt fest, daß der Druck eines Gases mit der Temperatur steigt. Bei ca. $t = -240^\circ$ ginge der Druck gegen Null (absoluter Nullpunkt!).
1738	BERNOULLI findet, dass die Temperatur in einem Gas mit dem Quadrat der mittleren Geschwindigkeit der Gasteilchen wächst: Anfang der kinetischen Gastheorie.
1742	CELSIUS definiert eine Temperaturskala, wonach $t_{\text{Sp}} = 100^\circ\text{C}$ und $t_{\text{Ep}} = 0^\circ\text{C}$ sind (moderne Celsiuskala).
1848	KELVIN stellt fest, dass der absolute Nullpunkt $t_{\text{np}} = -273,15^\circ\text{C}$ beträgt (durch Messungen an idealen Gasen). Dies definiert die absolute oder Kelvinskala: $T = 0\text{ K}$ entspricht $t = -273,15^\circ\text{C}$, $1\text{ K} = 1^\circ\text{C}$.
1908	HEIKE KAMMERLINGH ONNES verflüssigt zum ersten Mal Helium ($T_{\text{Sp}} = 4,2\text{ K}$): Beginn der Tieftemperaturphysik.
1911	KAMMERLINGH ONNES entdeckt die Supraleitung von Quecksilber: elektrischer Strom fließt ohne Widerstand.

4.2 Gase

Im Gegensatz zu Flüssigkeiten haben Gase keine Volumenelastizität. Sie ändern ihr Volumen (fast) beliebig, je nach äußerem Druck und Temperatur.

Bei gegebener Temperatur hat man folgendes Verhalten beobachtet: Druck und Volumen sind einander umgekehrt proportional, d. h. das Produkt PV bleibt konstant:

$$PV = \textit{konst.} \quad (\text{bei konstanter } T) .$$

Dies nennt man das *Gesetz von BOYLE-MARIOTTE*; strenggenommen gilt es nur für »ideale« Gase.

Aufgrund dieses Gesetzes ist die Dichte eines Gases nicht – wie bei Flüssigkeiten – konstant, sondern proportional dem wirkenden Druck. Eine weitere Konsequenz davon ist, dass der Schweredruck nicht mit wachsender Tiefe linear ansteigt, sondern exponentiell, da die Dichte des Gases zunimmt und die Masse der darüberliegenden Schichten daher immer mehr ansteigt mit wachsender Tiefe. [Barometrische Höhenformel: $P(h) = P_0 e^{-h/H_0}$, $P_0 =$ Druck am Boden, $P(h) =$ Druck in der Höhe h , $H_0 =$ Skalenhöhe $\hat{=}$ Funktion von T, g, ρ , für $T = \text{const.}$ ist $H_0 = P_0/(g\rho_0)$].

Außer dem *Druck* und dem *Volumen* ist eine dritte Größe für den Zustand eines Gases wichtig, nämlich die *Temperatur*. Die Temperatur spielt in der klassischen Mechanik keine Rolle, ist aber eine anschauliche Größe aufgrund des menschlichen Empfindungsvermögens dafür. Eine verwandte Größe ist die *Wärmemenge*, die als mikroskopische Bewegungsenergie der Materieteilchen angesehen werden kann und daher die Einheit [J] besitzt, wie die Energie und die Arbeit. Als makroskopische Größe ist die Wärme allerdings nicht eine Zustandsgröße, sondern – wie die Arbeit auch – eine Prozeßgröße.

4.2.1 Temperaturabhängigkeiten

Eine ganze Reihe physikalischer, chemischer, und biologischer Messgrößen und Prozesse hängen von der Temperatur ab. Im Prinzip kann jede solche Messgröße benutzt werden, um eine Temperaturskala festzulegen. In erster Linie verwendet man die Volumenausdehnung eines (idealen) Gases dazu, nach den *Gesetzen von GAY-LUSSAC*:

$$V(T) = \alpha T \quad (P = \text{konst.})$$

und

$$P(T) = \beta T \quad (V = \text{konst.}) .$$

Die praktische Temperaturskala wird durch zwei Fixpunkte definiert, und zwar sind dies der Gefrierpunkt sowie der Siedepunkt von reinem Wasser bei Normaldruck. Die Celsiusskala setzt den Gefrierpunkt gleich $0\text{ }^\circ\text{C}$, den Siedepunkt gleich $100\text{ }^\circ\text{C}$, und teilt die dazwischenliegenden Temperaturen in 100 gleiche Einheiten (»Grad Celsius«). Die absolute Temperaturskala geht von der selben Einheit aus, nennt sie aber »1 Kelvin« und setzt den Nullpunkt dort an, wo ein ideales Gas nach GAY-LUSSAC »verschwinden« würde, d. h. wo $P(T) = 0$ wird. Dieser absoluter Nullpunkt liegt bei $-273,15\text{ }^\circ\text{C}$ aufgrund des Koeffizienten β , der den Wert $1/273,15$ pro $^\circ\text{C}$ hat.

4.2.2 Das allgemeine Gasgesetz

Die Kombination der beiden Gesetze von GAY-LUSSAC mit dem Gesetz von BOYLE-MARIOTTE gibt den Zusammenhang der drei Zustandsgrößen Druck, Volumen, und Temperatur für ein ideales Gas, die sog. *allgemeine Gasgleichung*:

$$PV = K_0 T$$

(K_0 eine Konstante, proportional der Gasmenge). Die Konstante K_0 teilt man üblicherweise in einen Faktor ν , der die Stoffmenge (Molzahl) angibt, sowie einen Faktor

R , die allgemeine Gaskonstante, die als Naturkonstante die Proportionalität zwischen Energie (PV , Volumenarbeit zum »Zusammensetzen« des Gases) und Temperatur angibt. Sie hat die Einheit

$$[R] = \frac{\text{J}}{\text{Mol Kelvin}}$$

und den Wert $8,314 \text{ J/mol K}$. Damit ergibt sich die übliche Schreibweise der Gasgleichung:

$$PV = \nu RT$$

wobei der Druck in N/m^2 , das Volumen in m^3 , und die Temperatur in K gemessen werden. Die Stoffmenge (Molzahl) ν ist mit der Teilchenzahl N durch $1 \text{ mol} = N_A$ Teilchen verknüpft mit $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$.

Andere Meßmethoden für die Temperatur (Thermometrie) basieren auf mechanischen (Längen- oder Volumenausdehnung), elektrischen (Änderung des elektrischen Widerstandes, Thermospannung) oder optischen (Wärmestrahlung) Eigenschaften der Materie.

4.2.3 Ideales Gas

Wir haben gesehen, dass ein sogenanntes »ideales Gas« durch die Zustandsgleichung

$$PV = \nu RT \quad (4.1)$$

beschrieben wird; wir wollen nun verstehen, welcher physikalische Hintergrund zu dieser Gleichung führt und wie man sich ein Gas mikroskopisch vorzustellen hat. Wir betrachten ein ein-atomiges Gas (d. h. hier: ein Gas, dessen Teilchen aus nur *einem* Atom bestehen!). Es befindet sich in einem Behälter des Volumens V ($V = \text{Endfläche } A \cdot \text{Länge } l$) und bewegt sich in Längs-($+y$)-Richtung mit der Geschwindigkeit $+v_y$ auf eine Wand zu: Erreicht das Atom die Endwand, so stößt es elastisch mit der Wand und wird »reflektiert«, bewegt sich also nach dem Stoß in $-y$ -Richtung mit der Geschwindigkeit $-v_y$. Dabei bleibt seine kinetische Energie konstant, der *Impuls* ändert sich jedoch um den Betrag $\Delta p_y = 2mv_y$, wo m die Masse des Atoms ist (dies ist der auf die rechte Wand übertragene Impuls). Nach der Zeit $\Delta t = 2l/v_y$ kehrt das Atom, das inzwischen von der gegenüberliegenden (linken) Wand nochmals reflektiert wurde, wieder an die rechte Wand zurück und der Vorgang wiederholt sich; d. h. es wird ständig Impuls an die Wand übertragen, wobei

$$\frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \frac{2mv_y}{\frac{2l}{v_y}} = \frac{mv_y^2}{l}.$$

Nach NEWTON ist aber eine zeitliche Impulsänderung gleich einer Kraft,

$$\frac{\Delta p_y}{\Delta t} = F_y ;$$

die wiederholten Stöße des Atoms mit der Wand erzeugen eine Kraft F_y auf die Endwand (nach außen). Dies ist der Ursprung des Gasdrucks P , wobei Druck =

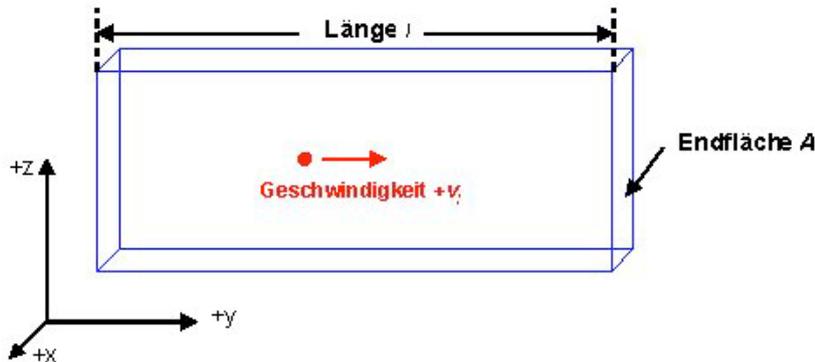


Abbildung 4.1.

Kraft/Fläche:

$$P = \frac{F_y}{A} = \frac{mv_y^2}{lA} = \frac{mv_y^2}{V}.$$

Wir erhalten also für das Produkt PV :

$$PV = mv_y^2 = 2 E_{\text{kin},y}.$$

In einem wirklichen Gas haben die Atome Geschwindigkeiten nicht nur bei einem festen Wert $\pm v_y$; die Geschwindigkeiten sind vielmehr verteilt über die Raumrichtungen x, y, z und über einen großen Bereich von Geschwindigkeitsbeträgen (MAXWELL-BOLTZMANN-Verteilung). Außerdem hat ein wirkliches Gas viele Atome (Anzahl $N = \nu N_A$, mit ν = Molzahl und N_A = Avogadro'scher Zahl).

Wir müssen daher die rechte Seite der obigen Gleichung mit N multiplizieren und $E_{\text{kin},y}$ durch die gesamte mittlere kinetische Energie $\langle E_{\text{kin}} \rangle$ ersetzen.

Da alle Raumrichtungen äquivalent sind, verteilt sich die Energie gleichmäßig über die drei Richtungen (»Gleichverteilungssatz«): es gilt

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \langle E_{\text{kin},x} \rangle + \langle E_{\text{kin},y} \rangle + \langle E_{\text{kin},z} \rangle$$

und

$$\langle E_{\text{kin},x} \rangle = \langle E_{\text{kin},y} \rangle = \langle E_{\text{kin},z} \rangle$$

d. h.

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{m}{2} \langle v^2 \rangle = 3 \langle E_{\text{kin},y} \rangle.$$

($\langle v^2 \rangle$ = mittlere quadratische Geschwindigkeit aller N Gasatome). Wir haben dann schließlich für PV in einem wirklichen Gas:

$$PV = \frac{2}{3} N \langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{2}{3} U \quad (4.2)$$

wobei $U = N \langle E_{\text{kin}} \rangle$ die innere Energie (gesamte kinetische Energie aller Atome) des Gases ist. Der Faktor 3 kommt von den 3 Raumrichtungen der Bewegung; er heißt »Anzahl der Freiheitsgrade« f . Für molekulare Gase mit inneren Freiheitsgraden (Rotation, Schwingungen) wird $f > 3$. Wir sehen, dass das Produkt PV proportional der inneren Energie des Gases und daher ein Maß für seine Gesamtenergie ist. Gleichung (4.2) verbindet die makroskopische Größe PV mit der mikroskopischen Größe $\langle E_{\text{kin}} \rangle$. Setzen wir nun die Gasgleichung (4.1) für PV ein, so erhalten wir

$$\nu RT = \frac{2}{f} N \langle E_{\text{kin}} \rangle$$

oder

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{f}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{f}{2} kT$$

wo $k = R/N_A \hat{=}$ Gaskonstante/Teilchen als »BOLTZMANN-Konstante« bekannt ist und wir uns auf ein Mol des Gases ($N = N_A, \nu = 1$) festgelegt haben. Die Gasteilchen haben eine mittlere kinetische Energie von $kT/2$ pro Freiheitsgrad. Die innere Energie des Gases/Mol ($\nu = 1$) ist dann:

$$U \equiv N \langle E_{\text{kin}} \rangle = N_A \frac{f}{2} kT = \frac{f}{2} RT .$$

Sie hängt nur von der Temperatur T ab.

4.3 Wärmemessungen

Der Wärmehalt eines Körpers ist eine eindeutige Funktion seiner Temperatur (dies läßt sich für ein ideales Gas relativ einfach aus der Mechanik sowie der Gasgleichung ableiten: *kinetische Gastheorie*). Die Proportionalitätskonstante zwischen Wärmemenge ΔQ und Temperaturänderung ΔT heißt »Wärmekapazität« und ist eine Eigenschaft des Materials:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \quad \left(\text{Einheit: } \frac{\text{J}}{\text{K}} \right).$$

Die so definierte Wärmekapazität gilt für einen bestimmten Körper. Man definiert auch die sog. spezifische Wärmekapazität c_m , die auf ein Gramm der Substanz bezogen ist:

$$c_m = \frac{C}{m}$$

(m = Masse des Körpers in g; Einheit: J/g K) sowie die molare Wärmekapazität C_M , die für ein Mol der Substanz gilt:

$$C_M = \frac{C}{\nu}$$

(ν = Molzahl, Einheit von $C_M \hat{=} \text{J/mol K}$).

Messung der Wärmekapazität bzw. einer definierten Wärmemenge heißt »Kalorimetrie«. Sie wird mit Hilfe eines Kalorimeters durchgeführt, eines Behälters, der möglichst gut von der Umgebung isoliert ist und eine wohlbekannte eigene Wärmekapazität hat. Probe und Kalorimeter werden mit einer bekannten Wärmemenge erwärmt (elektrisch, mittels Reibung, oder aus einer chemischen Reaktion) und die Temperaturerhöhung gemessen.

Alternativ dazu wird die Probe, bei einer bekannten Anfangstemperatur, mit einer Vergleichssubstanz bei einer anderen Ausgangstemperatur in Gleichgewicht gebracht und die Endtemperatur gemessen (Mischkalorimeter; Vergleichssubstanz häufig Wasser).

Die molare Wärmekapazität C_V (bei konstantem Volumen, $dV = 0$) des idealen Gases ist gegeben durch

$$C_V = \frac{dQ}{dT}(V = \text{konst.}) = \frac{dU}{dT} = \frac{f}{2} R.$$

Die molare Wärmekapazität bei konstantem Druck, C_P , ist größer, da Arbeit gegen die Außenwelt (Ausdehnung des Gases bei konstantem Druck P) geleistet werden muß:

$$C_P = \frac{dU}{dT} + \frac{PdV}{dT} = \frac{fR}{2} + \frac{P(RdT)}{PdT} = \frac{fR}{2} + R$$

(wobei für dV die Gasgleichung benutzt wurde); d. h. es gilt

$$C_P = C_V + R.$$

4.3.1 Wärmetransport

Wärme kann auf drei Arten transportiert werden:

- *Wärmeleitung*: In einem Material wird Wärme durch Stöße von Teilchen zu Teilchen weitergegeben. Für den Wärmestrom (transportierte Wärme pro Zeit) erhält man

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\lambda \frac{A}{\ell} \Delta T. \quad (4.3)$$

Hierbei ist A die Querschnittsfläche des Materials, durch das die Wärme geleitet wird, ℓ dessen Länge, ΔT der Temperaturunterschied über diese Länge und λ die Wärmeleitfähigkeit (Einheit $\text{J}/(\text{s K m})$), eine Materialkonstante.

- *Konvektion*: Durch Bewegung und Austausch von Gas oder Flüssigkeit unterschiedlicher Temperatur, z.B. durch Durchmischung oder Strömung.
- *Strahlung*: Durch Abstrahlung elektromagnetischer Wellen (Temperaturabhängigkeit $\Delta Q/\Delta t \propto T^4$).

4.3.2 Erster Hauptsatz der Wärmelehre

Eine Änderung der Inneren Energie kann nach dem 1. Hauptsatz der Wärmelehre durch Arbeit, durch Wärmeaustausch oder durch beides bewirkt werden:

$$dU = \delta Q + \delta W = \delta Q - PdV.$$

(δW für ein Gas $\hat{=}$ Volumenarbeit $= -PdV$).

Im abgeschlossenen System ist U konstant, also $dU = 0$ (Energieerhaltung).

Die Innere Energie ist also eine Zustandsgröße. Egal auf welchem Weg wir unser System in einen bestimmten Zustand bringen, die Innere Energie wird jedesmal die gleiche sein. Das bedeutet auch, dass es keine Maschine gibt, die durch wiederholte zyklische Nacheinanderausführung von Zustandsänderungen Energie erzeugt und dabei immer wieder in denselben Zustand des Systems zurückkommt (Perpetuum Mobile erster Art).

4.4 Entropie

Der Begriff »Entropie« geht auf den französischen Ingenieur S. CARNOT sowie den deutschen Physiker R. CLAUSIUS zurück. Sie untersuchten den Wirkungsgrad von Wärmekraftmaschinen (z. B. Dampfmaschinen) und erfanden dabei ein Maß für die »Güte« eines Wärmebades (z. B. Dampfkessel). Wenn eine Wärmemenge ΔQ bei einer festen Temperatur T reversibel übertragen wird, lautet dieses Maß (»Entropieänderung ΔS «):

$$\Delta S = \frac{\Delta Q_{\text{rev}}}{T} .$$

Dabei ist »reversibel« ein Idealitätsbegriff, wie »reibungsfrei« in der Mechanik – er bedeutet, der Vorgang läuft immer fast bei Gleichgewicht und könnte jederzeit umgekehrt werden. Bei nicht-reversiblen Vorgängen (die Regel in der realen Welt) lautet die Formel:

$$\Delta S \geq \frac{\Delta Q_{\text{irrev}}}{T}$$

d. h. die Entropie bleibt entweder gleich (bei reversiblen, adiabatischen Vorgängen) oder sie nimmt zu.

4.4.1 Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre

Dies ist der Inhalt des 2. Hauptsatzes der Wärmelehre:

Die Entropie in einem abgeschlossenen System bleibt entweder gleich (wenn alle ablaufenden Prozesse reversibel sind) oder sie nimmt zu.

Wichtig ist dabei, dass diese Aussage für abgeschlossene Systeme gilt, für einen einzelnen Gegenstand kann die Entropie, z. B. bei Abkühlung, durchaus auch abnehmen.

Die Entropie ist eine thermodynamische Zustandsfunktion und hat die Einheit

$$[S] = \frac{[Q]}{[\text{Mol}][T]} = \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$$

(wie eine Wärmekapazität).

Der zweite Hauptsatz gibt die Richtung an, in der irreversible Prozesse ablaufen. Beispiele sind die Umwandlung von mechanischer Arbeit in Wärme durch Reibung oder das Anstreben eines Gleichgewichtszustands in einem abgeschlossenen System, das durch räumlich konstante Temperatur und Druck gekennzeichnet ist. Obwohl es nach dem ersten Hauptsatz erlaubt wäre, tritt es niemals auf, dass Wärme vom kälteren zum wärmeren Körper fließt oder dass ein Körper sich spontan abkühlt und die dabei gewonnene Wärmemenge in mechanische Energie umwandelt. Man bezeichnet eine Vorrichtung, die genau dieses täte, also eine völlige Umwandlung von Wärme in mechanische Energie vollbrächte, auch als Perpetuum Mobile zweiter Art. Der Zweite Hauptsatz der Thermodynamik kann daher auch als die Unmöglichkeit eines Perpetuum Mobile zweiter Art formuliert werden.

Später hat L. BOLTZMANN eine statistische Interpretation der Entropie eingeführt: sie verbindet die Entropieänderung ΔS mit der relativen Wahrscheinlichkeit der Anfangs- und Endzustände, und zwar *logarithmisch* (da sich Wahrscheinlichkeiten *multiplikativ*, Entropien aber *additiv* kombinieren):

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = -R \ln \left[\frac{w_1}{w_2} \right] .$$

Die Entropie ist demnach ein Maß für die Wahrscheinlichkeit des Zustands, oder aber auch ein Maß für die *Ordnung* des Zustands (da geordnete Zustände weniger wahrscheinlich sind).

Eine noch allgemeinere Interpretation kam in den 30er Jahren aus der Informationstheorie (SHANNON, JAYNES). Dort ist die Entropie ein Maß für den (fehlenden) Informationsgehalt einer Messung; die Entropie S_M einer Messung M mit möglichen Meßwerten m , die mit Wahrscheinlichkeit w_m beobachtet werden, ist gegeben durch:

$$S_M = -R \sum_m w_m \ln[w_m] .$$

Sie gibt also die *Unsicherheit* oder fehlende *Information* des Zustands an.

4.4.2 Beispiele für Entropieänderungen

Beispiel: adiabatische Ausdehnung des idealen Gases

Unter einer *adiabatischen* Zustandsänderung versteht man eine Zustandsänderung, die ohne Austausch von Wärme mit der Umgebung durchgeführt wird. Dies kann entweder erfolgen, indem die Zustandsänderung hinreichend schnell durchgeführt wird oder indem das System von der Umgebung geeignet wärmeisoliert ist. Für adiabatische Zustandsänderungen eines idealen Gases gilt die *Poissonsche Gleichung*:

$$P V^\kappa = \text{const}$$

Hierbei ist $\kappa = C_P/C_V$ der *Adiabateneindex*, auch genannt *Isentropenindex*. Für ein ideales Gas, in dem die Teilchen f Freiheitsgrade haben, ist $C_V = f/2 \cdot R$ und $C_P = f/2 \cdot R + R$, somit also $\kappa = (f + 2)/f$.

Wir berechnen nun zunächst allgemein die *molare Entropie* eines *idealen Gases*. Umschreiben des 1. Hauptsatzes (für ein Gas) ergibt:

$$\delta Q = dU + PdV$$

und damit

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T} .$$

Einsetzen des gaskinetischen Ausdrucks $dU = f/2 R dT$ sowie Verwendung der allgemeinen Gasgleichung für $P, P = RT/V$, ergibt:

$$dS = \frac{f}{2} R \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} = \frac{f}{2} R d \ln[T] + R d \ln[V] .$$

Die Entropieänderung $\Delta S_{1 \rightarrow 2}$ bei der Zustandsänderung von Zustand 1 zu Zustand 2 (mit $T = T_1$ bzw. T_2 , $V = V_1$ bzw. V_2) erhalten wir durch Integrieren:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = R \left\{ \frac{f}{2} \ln \left[\frac{T_2}{T_1} \right] + \ln \left[\frac{V_2}{V_1} \right] \right\} . \quad (4.4)$$

Wir betrachten nun zwei solcher Prozesse: Die reversible und die irreversible adiabatische Ausdehnung eines idealen Gases, also ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung, siehe Tabelle 4.2.

(Vorstellen kann man sich dies als zwei Kästchen je mit Volumen V , mit je 1 Mol eines idealen Gases in der linken Hälfte (Volumen $V_1 = V/2$) bei der Temperatur T_1 . Beide Kästchen sind wärmeisoliert, beide enthalten Vakuum in der rechten Hälfte. Eines hat als Trennwand eine Berstscheibe, das andere hat einen reibungsfrei verschiebbaren Kolben. Platzen der Berstscheibe erlaubt irreversible Ausdehnung des Gases, langsames Herauslassen des Kolbens gegen äußere Kraft erlaubt reversible Ausdehnung. Dabei wird die äußere Kraft langsam reduziert, so dass sich das System immer quasi im Gleichgewicht befindet.)

Tabelle 4.2.

Größe	reversible Ausdehnung	irreversible Ausdehnung
Arbeit δW	$= -PdV$	$= 0$ (keine Arbeit gegen Vakuum!)
Wärme δQ	$= 0$ (adiabatisch!)	$= 0$ (adiabatisch!)
Energie dU	$= -PdV$; T sinkt $\rightarrow T_2!$ ^a	$= 0$; T bleibt konstant bei $T_1!$
Entropie dS	$= \delta Q_{\text{rev}}/T = 0$	$dS > \delta Q/T > 0!$ ^b

^a T_2 berechnen durch Einsetzen von $dU = f/2 R dT$ und $P dV = RT dV/V$, dann Integration zwischen V_1 und $2V_1 = V$ entspr. T_1 und T_2 .

^b ΔS berechnen mit Gl. (4.4), oder mit der BOLTZMANN-Formel, oder durch Erwärmen des Zustandes nach der reversiblen Ausdehnung auf die Temperatur T_1 .

Anmerkung: Diese Tabelle gilt nur für ein Ideales Gas. Eine vollkommen irreversible adiabatische Expansion führt dabei nicht zu einer Temperaturerniedrigung, da auch keine mechanische Arbeit verrichtet wird. Der in der Vorlesung vorgeführte Joule-Thomson-Effekt, bei dem Kohlendioxid bei der irreversiblen adiabatischen Expansion aus einer Druckgasflasche so kalt wird, dass es in den festen Zustand (Trockeneis) übergeht, beruht auf der Anziehungskraft zwischen den Gasteilchen. Diese ist im Modell des Idealen Gases nicht enthalten. Bei der Expansion muss Energie aufgewendet werden, um diese Anziehungskraft zu überkommen (die Gasteilchen sind nach der Expansion im Mittel weiter voneinander entfernt), diese Energie wird dem System als Wärme entzogen. Der Joule-Thomson-Effekt tritt also nur bei realen Gasen auf.

4.4.3 Einzelprozesse

Wir betrachten Prozesse in einem idealen Gas, wobei die Zustandsgrößen P, V , und/oder T sich bei Konstanthaltung einer externen Bedingung ändern.

1. Der *isotherme* Prozess: die *Temperatur* T wird konstantgehalten. Es gilt das Gesetz von BOYLE-MARIOTTE, $PV = \text{konst.} = RT$ (1 Mol). Eine Arbeit wird geleistet, $\delta W = -PdV$. Integration zwischen dem Anfangs- und dem Endvolumen ergibt

$$\Delta W = -RT \ln \left[\frac{V_A}{V_B} \right].$$

Um T konstant zu halten, muß eine Wärmemenge ΔQ übertragen werden; da aber $\Delta U = 0$ (T konstant!), ist $\Delta Q = -\Delta W = RT \ln[V_A/V_B]$. Bei einem reversiblen Prozess ist dann die Entropieänderung gegeben durch

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = R \ln \left[\frac{V_A}{V_B} \right]$$

(bei konstanter T).

2. Der *isobare* Prozess: der *Druck* P wird konstantgehalten. Die Arbeit ist dann einfach $\Delta W = -P\Delta V$. Die übertragene Wärmemenge ist gegeben durch $\delta Q = C_P dT$, die Änderung der inneren Energie durch $dU = C_V dT$. *Beispiel*: C_P -Messung. Der 1. Hauptsatz ist mit dem 1. Gay-Lussac'schen Gesetz identisch:

$$RdT = PdV \quad (P = \text{konst.}).$$

3. Der *isochore* Prozess: das *Volumen* V wird konstantgehalten. Hier wird keine Arbeit geleistet, der 1. Hauptsatz lautet einfach $dU = \delta Q$, oder $C_V = dU/dT$ ($= f/2R$ beim idealen Gas). *Beispiel*: C_V -Messung. Das 2. Gay-Lussac'sche Gesetz gilt: $dU = f/2 R dT = f/2 V dP$ ($V = \text{konst.}$).
4. *Adiabatische* Prozesse: es wird keine Wärme übertragen, $\delta Q = 0$. Hier ist die Ausführung des Prozesses (reversibel/irreversibel) entscheidend; beim reversiblen adiabatischen Prozess ist die Entropie konstant, $dS = 0$, aber die innere Energie U ändert sich ($dU = \delta W$). Beim vollständig irreversiblen Prozess gibt es immer eine Entropieproduktion, $dS > 0$, jedoch keine Arbeit, U und T bleiben dann konstant, siehe Abschnitt 4.4.2.

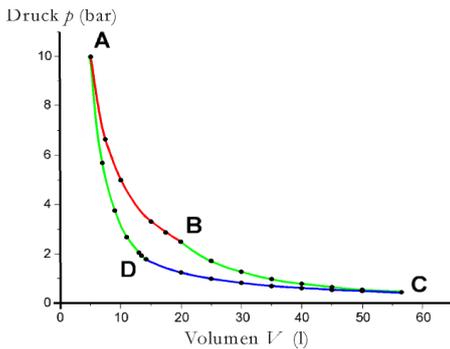
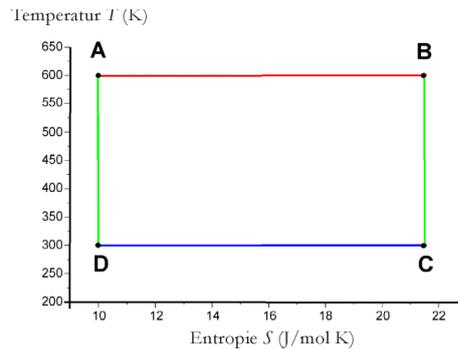
4.4.4 Kreisprozesse

Kreisprozesse sind (z. T. idealisierte) thermodynamische Zyklen, bestehend aus mehreren Einzelprozessen, die zum Ausgangszustand zurückführen.

Der *Carnot'sche Kreisprozess* hat den höchsten Wirkungsgrad. Er besteht aus zwei Isothermen ($T = \text{const.}$) und zwei Adiabaten ($\delta Q = 0$). Die Einzelprozesse werden als vollständig reversibel angenommen. Als Arbeitssubstanz betrachtet man sinnvollerweise ein Mol eines idealen Gases (nicht nötig, aber zweckmäßig, da die Zustandsgleichung einfach und exakt bekannt ist: die allgemeine Gasgleichung: $PV = RT$).

Die »Carnotmaschine« läßt sich in einem P - V -Diagramm darstellen; die *Nettoarbeit* ist dann die Fläche innerhalb der geschlossenen Kurve, die von den beiden Isothermen (rot, blau) und den beiden Adiabaten (grün) eingegrenzt wird (da $\delta W = -PdV$). Man kann auch ein entsprechendes T - S -Diagramm zeichnen, die Nettowärme ist hier gegeben durch die eingeschlossene Fläche (da $\delta Q = TdS$).

Bei der Carnotmaschine hat das T - S -Diagramm die einfache Form eines Rechtecks ($T = \text{konst.}$ bei den Isothermen, $S = \text{konst.}$ bei den Adiabaten). Die Form des P - V -Diagramms ist durch die Gasgesetze gegeben ($PV = \text{konst.}$ bei den Isothermen, $PV^\kappa = \text{konst.}$ bei den Adiabaten, wo $\kappa \hat{=} \text{Adiabatexponent } (f + 2)/f$ wobei $f = \text{Anzahl der Freiheitsgrade}$):

Abbildung 4.2. P - V -DiagrammAbbildung 4.3. T - S -Diagramm

Bei den Isothermen (z. B. isotherme Ausdehnung des idealen Gases vom Anfangszustand $[P_A, V_A]$ bis zum Zwischenzustand $[P_B, V_B]$ mit $T = T_1 = \text{konst.}$, wobei $P_A V_A = P_B V_B$) gelten folgende Bedingungen:

$$dU = 0 \quad (\text{innere Energie} = \frac{f}{2}RT = \text{konst.})$$

und

$$\delta W = -\delta Q = -PdV = -RT \frac{dV}{V} .$$

Bei den Adiabaten (z. B. adiabatische Ausdehnung des idealen Gases vom Zustand $[P_B, V_B]$ bei $T = T_1$ zum Zustand $[P_C, V_C]$ bei $T = T_2$, mit $T_1 > T_2$) gilt:

$$\delta Q = 0, \quad \delta W = dU = \frac{f}{2}RdT .$$

Integration der Gleichungen $\delta W = dU$ für die Adiabaten zeigt, dass $\Delta W_{BC} = -\Delta W_{DA}$ (da ΔT umgekehrt gleich ist für beide), sowie dass

$$\frac{V_A}{V_D} = \frac{V_B}{V_C} \quad (4.5)$$

gelten muß. Damit folgt für die Arbeiten bei den Isothermen:

$$\frac{\Delta W_{AB}}{T_1} = \frac{-\Delta W_{CD}}{T_2} \quad (4.6)$$

und daraus

$$\frac{-\Delta Q_{AB}}{T_1} = \frac{-\Delta Q_1}{T_1} = \frac{\Delta Q_{CD}}{T_2} = \frac{\Delta Q_2}{T_2}. \quad (4.7)$$

ΔQ_1 ist hier die im 1. Einzelprozess (der isothermen Ausdehnung bei T_1) aufgenommene Wärme, ΔQ_2 die im 3. Einzelprozess (der isothermen Kompression bei T_2) abgegebene Wärme (»Abwärme«). Die innere Energie ändert sich nach einem gesamten Zyklus nicht ($\Delta U_{AB} = \Delta U_{CD} = 0$ und $\Delta U_{BC} = -\Delta U_{DA}$ – dies muß so sein, da die Energie eine *Zustandsfunktion* ist!).

Eine weitere Größe, der Quotient $\Delta Q/T$, ändert sich auch nicht – sie ist Null bei den Adiabaten und umgekehrt gleich bei den Isothermen (s.o.). Sie ist daher auch eine Zustandsfunktion und wird Entropie S genannt. Es gilt:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q_{\text{rev}}}{T} \quad (\text{bei reversiblen Prozessen}).$$

Für den Wirkungsgrad η des gesamten Zyklus haben wir

$$\eta = \frac{[\text{netto geleistete Arbeit}]}{[\text{gesamt aufgenommene Wärme}]}$$

(die Abwärme zählt nicht, da sie im Prozess nicht weiter genutzt werden kann). Somit ist

$$\eta = \frac{[\Delta W_{CD} + \Delta W_{AB}]}{\Delta Q_1} = \frac{[\Delta Q_1 + \Delta Q_2]}{\Delta Q_1} \quad (4.8)$$

oder, aufgrund von (4.7) auf Seite 72,

$$\eta = \frac{[T_1 - T_2]}{T_1}.$$

Dieser Wirkungsgrad ist immer ≤ 1 , er kann nur 1 werden (100 % der Wärme in Arbeit umgewandelt), wenn $T_2 = 0$ (absoluter Nullpunkt!).

4.5 Reale Gase

4.5.1 Phasenübergänge

Die übliche Materie kommt in drei Aggregatzuständen vor: gasförmig, flüssig und fest. Die letzten beiden werden »kondensierte Phasen« genannt. Übergänge zwischen den Zuständen heißen »Phasenübergänge«; sie sind:

- Kondensieren (gasförmig → flüssig oder fest),
- Verdampfen (Flüssigkeit → Gas),
- Gefrieren oder Erstarren (Flüssigkeit → fest),
- Schmelzen (fest → flüssig) sowie
- Sublimieren (fest → gasförmig).

Weitere Phasenübergänge finden zwischen strukturellen Phasen (verschiedene Kristallstrukturen innerhalb einer kondensierten Phase, z. B. Diamant → Graphit, normalflüssig → supraflüssig) bzw. zwischen magnetischen oder elektronischen Zuständen statt (paramagnetisch → ferromagnetisch, normalleitend → supraleitend).

Um Phasenübergänge zu verstehen, nehmen wir als Beispiel das Kondensieren eines Gases zur Flüssigkeit. Dies geschieht nicht beim idealen Gas; das ideale Gas hat weder Eigenvolumen noch Wechselwirkungskräfte zwischen seinen Teilchen, die Zustandsgleichung sagt voraus, dass es bei größer werdendem Druck und tieferen Temperaturen nur allmählich »verschwindet«. Ein reales Gas hat dagegen ein Eigenvolumen und intermolekulare Kräfte (Kohäsionskräfte, meistens elektrische, sogenannte VAN-DER-WAALS-Kräfte).

4.5.2 Beschreibung des realen Gases

Wirkliche Gase bestehen aus Atomen oder Molekülen, die nicht Massenpunkte sind, sondern ein Eigenvolumen haben (Kovolumen b pro Mol); sie üben auch (anziehende) Wechselwirkungskräfte aufeinander aus, welche die mittlere Gasdichte und damit den Gasdruck erhöhen (Binnendruck a/V_m^2). Eine näherungsweise Beschreibung des Zustands, die dies berücksichtigt, erhält man damit mit der »VAN DER WAALS-Gleichung«:

$$\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right) (V_m - b) = RT$$

für ein Mol des realen Gases. (Der Faktor V_m^2 im Nenner des »Binnendrucks« stammt aus der Dichteabhängigkeit der Energie des realen Gases aufgrund der Wechselwirkungskräfte zwischen den Teilchen. Hier ist a eine Stoffkonstante mit der Einheit Pa m^6).

Dieses Gas zeigt einen Phasenübergang (Kondensieren zur flüssigen Phase). Die Isothermen dieser Gleichung sind bei hohen Temperaturen ähnlich denen der idealen Gasgleichung. Bei tieferen Temperaturen zeigen sie erst einen und dann zwei Wendepunkte— dies bezeichnet den Bereich des Kondensierens. Dabei bleibt der Druck

konstant (Dampfdruck), das Volumen verringert sich um einen Faktor von ca. 1000. In der Van der Waals-Gleichung wird dieser Bereich nicht wiedergegeben; dort muss man sich die Isothermen im Zweiphasenexistenzbereich durch waagrechte Linien (blaue Linien in Abb. 4.4) ersetzt denken. Die Entropie und die Energie des Gases nehmen beim Kondensieren ab, letztere um einen relativ großen Betrag (die latente Wärme oder Kondensationswärme).

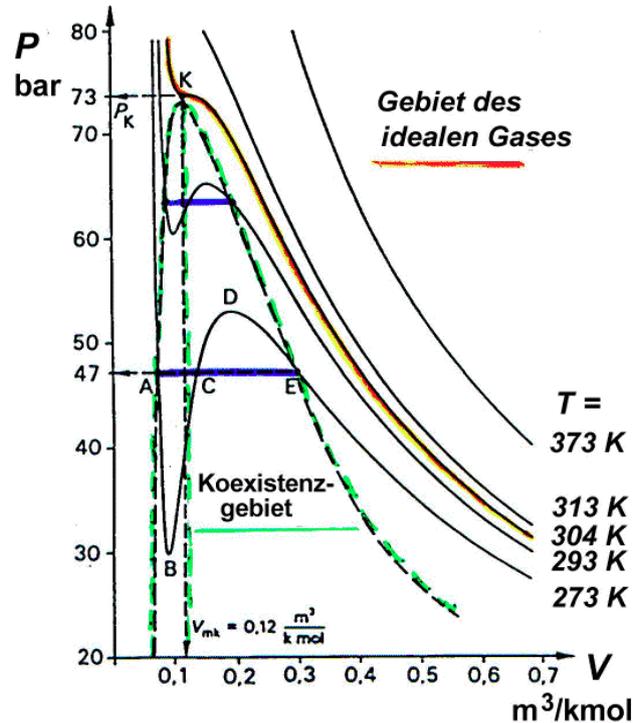


Abbildung 4.4. P - V -Diagramm eines realen Gases nach der VAN-DER-WAALS-Gleichung. Oberhalb der rot-gelben Linie verhält sich das Gas wie ein ideales Gas. K bezeichnet den kritischen Punkt: unterhalb der entsprechenden Temperatur beginnt das Gas zu kondensieren. Im Bereich der grün-gestrichelten Linien (Koexistenzgebiet) existieren Gas und Flüssigkeit nebeneinander beim konstanten Dampfdruck (blaue Linien). Der kritische Druck P_k und das kritische Molvolumen V_{mk} sind angegeben

Wenn sich ein reales Gas durch einen Drossel von einem Bereich höheren Drucks P_1 in einen Bereich niedrigeren Drucks P_2 ausdehnt (*ohne* externe Arbeitsleistung!), dann kann es sich infolge der »internen Arbeit« (Arbeit gegen die Anziehungskräfte im Gas) abkühlen. Dies heißt *Joule-Thompson-Effekt*, und kann zur Kühlung verwendet werden (Linde-Verfahren zur Luftverflüssigung; siehe Abb. 4.5 auf der gegenüberliegenden Seite.)

Diese Methode hat einen begrenzteren Temperaturbereich und niedrigeren Wirkungsgrad als die Expansionsmaschine (CARNOT-Maschine), ist aber leichter zu realisieren (Beispiel: CO_2 -Schnee). Hier wächst wieder die Unordnung (Entropie), sie wird

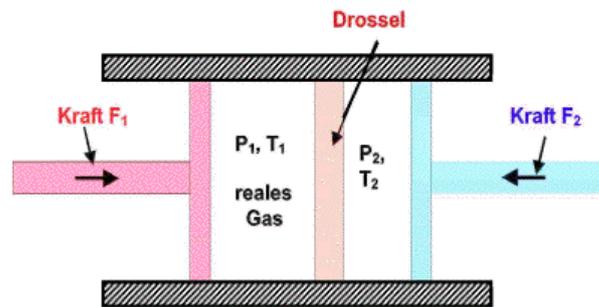


Abbildung 4.5. Joule-Thomson-Effekt. Das reale Gas strömt bei dem hohen konstanten Druck P_1 von der linken Kammer durch den Drossel in die rechte Kammer (niedriger konstanter Druck P_2), es kühlt sich dabei ggf. ab. Die Enthalpie bleibt konstant in diesem Prozess.

nur *teilweise* von der Temperaturabnahme kompensiert.

Trägt man den Druck gegen T auf, so erscheinen die Phasengrenzen als Kurven, man nennt dies ein Phasendiagramm (siehe Abb. 4.6). Die höchste Temperatur, bei

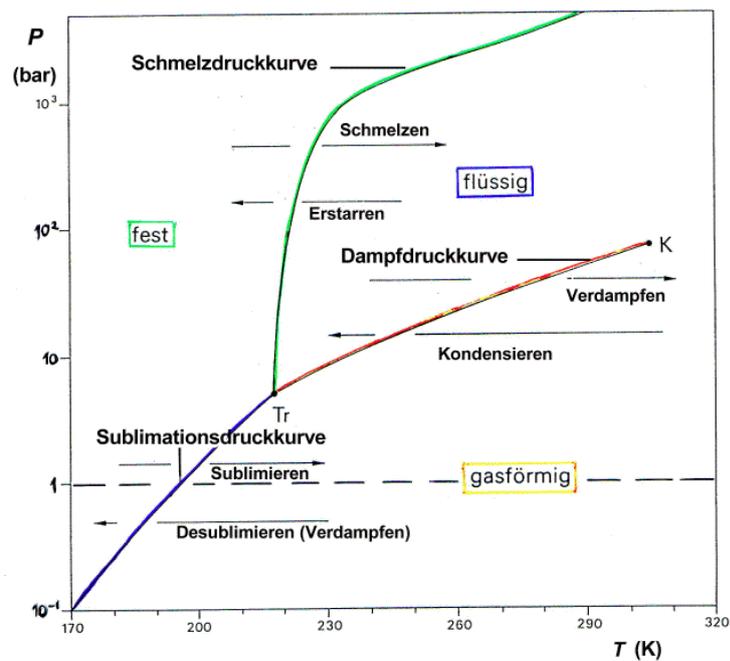


Abbildung 4.6. Phasendiagramm für CO_2 . Der Punkt, wo alle drei Phasen koexistieren, heißt »Tripelpunkt« T_r ; der Punkt, oberhalb dessen kein Kondensieren mehr möglich ist, heißt »kritischer Punkt« K . Bei Normaldruck (1 bar) existiert CO_2 nur in der Gasphase oder als Festkörper.

Tabelle 4.3.

Prozeß	Stromgröße	Materialkonstante	Transportgleichung
Wärmeleitung	Wärmemenge Q ; Wärmestrom $I_Q = dQ/dt$	Wärmeleitfähigkeit λ (J/ms K)	$I_Q = -A\lambda dT/dx$
Diffusion	Konzentration n ; Materiestrom $I_n = dn/dt$	Diffusions- konstante D (1/ms)	$I_n = -AD dn/dx$
Strömung	Impuls p ; Impulsstrom $dp/dt = -F_R$ (Reibungskraft)	Viskosität η (Ns/m ²)	$F_R = -A\eta dv_0/dx$
elektrische Stromleitung	elektrische Ladung q (As); elektrischer Strom $I = dq/dt$	elektrische Leit- fähigkeit σ (A/V m)	$I = -A\sigma dU/dx$ ($U =$ Spannung) (V)

der Kondensieren noch möglich ist, heißt »kritischer Punkt«; die Temperatur, bei der die gasförmige, die flüssige und die feste Phase alle koexistieren heißt »Tripelpunkt« (Tafelbild, Versuche).

Als »Relative Feuchte« bezeichnet man das Verhältnis des Partialdrucks von Wasser in der Luft $P_{\text{H}_2\text{O}}$ zum Sättigungsdampfdruck von Wasser $P_{s,\text{H}_2\text{O}}$ (meist in Prozent angegeben):

$$R = \frac{P_{\text{H}_2\text{O}}}{P_{s,\text{H}_2\text{O}}}.$$

Da der Sättigungsdampfdruck mit steigender Temperatur steigt (vgl. die Dampfdruckkurve in Abb. 4.6), kann wärmere Umgebungsluft mehr Wasserdampf aufnehmen als kältere. Kühlt Luft ab, erhöht sich somit die Relative Feuchte, da der Partialdruck des gasförmigen Wassers gleich bleibt. Erreicht der Partialdruck den Sättigungsdampfdruck (Relative Feuchte: 100%), so kommt es zur Kondensation (Nebel, Wolken, beschlagene Oberflächen).

4.6 Transportphänomene

Als Transportphänomene bezeichnet man eine Reihe von Prozessen, in denen eine Größe innerhalb der Materie bewegt wird. Ursache der Bewegung ist eine Nicht-Homogenität (meistens von der transportierten Größe selbst) innerhalb der Materie. Der Transport wird durch die thermische Bewegung der Atome oder Moleküle der Materie ermöglicht.

Gemeinsam haben alle Transportphänomene die Existenz einer Stromstärke, welche die pro Zeiteinheit transportierte Menge beschreibt, eine Materialkonstante, die die Transportgeschwindigkeit (meist als Funktion der Temperatur) angibt, sowie eine Transportgleichung (Differentialgleichung), die den Zusammenhang zwischen Stromstärke, Materialkonstante und Inhomogenität (Gradient) beschreibt.

Als Beispiele nehmen wir den Transport der Wärme (Wärmeleitung), der Materie (Diffusion), des Impulses (viskose Strömung) sowie der elektrischen Ladung (elektrische Leitung); A ist hier die Querschnittsfläche der Materie (siehe Tabelle auf Seite 76).

Die Materialkonstanten können mit Hilfe der mikroskopischen Größen v (Teilchengeschwindigkeit), n (Teilchendichte), l (mittlere freie Weglänge) und m (Teilchenmasse) ausgedrückt werden:

$$\lambda = \frac{f}{6} k n \langle v \rangle l \quad D = \frac{1}{3} v l n$$

$$\eta = \frac{1}{3} n m v l \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{2 n e_o^2 l}{m v}$$

wobei k die BOLTZMANN-konstante, e_o die Elementarladung, und f die Anzahl der Freiheitsgrade sind; die Ladungsdichte der freien Ladungsträger ist $\rho_e = e_o n$.

Bereits diskutierte Beispiele sind die Hagen-Poiseuille-Gleichung (Kap. 3.2.3) und die Wärmeleitung (Kap. 4.3.1).

5 Elektrizitätslehre

5.1 Die elektrische Ladung

Das Wort »Elektrizität« ist abgeleitet von dem griechischen »elektra« = Bernstein. Es ist nämlich seit dem Altertum bekannt, dass das Reiben von Materialien wie Bernstein, Glas usw. mit einem Tuch oder Fell eine (scheinbar schwache) Kraftwirkung auf leichte Objekte (Papierschnipsel usw.) hervorrufen kann.

Erst im 18. Jh. wurde es klar, dass es sich hierbei um eine *Ladungstrennung* handelt. Alle Materie enthält elektrische Ladungen, die man (in geringem Maße) durch Reibung freisetzen kann. Die Ladungen üben aufeinander eine elektrische Kraft aus, die COULOMB-Kraft. Diese hat die gleiche Form wie die Gravitationskraft, ist jedoch viel stärker:

$$F_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \quad (\text{COULOMB-Gesetz})$$

wobei q_1 und q_2 die beiden Ladungen und r ihr Abstand sind; die Richtung der Kraft von Ladung 1 auf Ladung 2 liegt entlang ihrer Verbindungslinie:

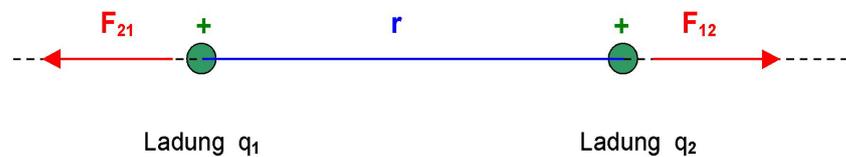


Abbildung 5.1. Coulombkraft

Im Gegensatz zur Gravitation, wo es nur eine Sorte Schweremasse gibt, existieren zwei Ladungstypen: positive und negative. (Früher unterschied man dementsprechend zwei Sorten der Elektrizität, genannt »Glaselektrizität« und »Harzelektrizität«, weil sie durch Reiben der entsprechenden Materialien produziert werden konnten.) Gleichnamige Ladungen stoßen sich gegenseitig ab (siehe Abb. 5.1), während unterschiedliche Ladungen sich gegenseitig anziehen.

Die Einführung des Begriffs der elektrischen Ladung macht es sinnvoll, eine weitere Basiseinheit zu definieren. Die Einheit der Ladung heißt Coulomb (C) und ist definiert durch das Coulomb-Gesetz zusammen mit der Naturkonstante $1/4\pi\epsilon_0$ (der Faktor 4π wird aus geometrischen Gründen verwendet – 4π ist der Raumwinkel um eine

Punktladung). Diese Konstante hat den Wert

$$8,988 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

und verbindet die schon definierten mechanischen Größen Kraft (N) und Abstand (m) mit der elektrischen Größe Ladungsmenge (C).

Später wurde die Basiseinheit als die Einheit des elektrischen Stromes I definiert; diese Einheit heißt Ampère und wird gemessen über die magnetische Kraftwirkung zweier Ströme aufeinander. Der elektrische Strom I ist analog zu anderen Stromgrößen wie dem Volumenstrom I_V oder dem Wärmestrom I_Q definiert:

$$I = \frac{dq}{dt}; \quad I_V = \frac{dV}{dt}; \quad I_Q = \frac{dQ}{dt}.$$

Demnach gilt: $1 \text{ C} = 1 \text{ As}$; letztere ist die moderne Einheit der elektrischen Ladung. Für die Ladung gilt ein Erhaltungsgesetz (Ladungserhaltung):

Die Summe aller Ladungen in der Welt bleibt konstant.

Man kann zwar Ladungen aus Energie erzeugen oder vernichten, jedoch immer nur paarweise (+/-); die Summe der Ladungen bleibt konstant. Dieses Gesetz hängt mit der Invarianz des elektrischen Potentials unter Verschiebung seines Nullpunktes (»Eichinvarianz«) zusammen. Ladungen können über ihre Kraftwirkung mit einem Elektrometer gemessen werden.

Die elektrische Ladung ist auch *quantisiert*: es gibt eine kleinste Ladung, die *Elementarladung* e_0 . Kleinere (freie) Ladungen treten in der Natur nicht auf. Das *Elektron* trägt eine negative Elementarladung, $-e_0$; das Proton eine positive Elementarladung. Die Elementarladung beträgt $1,609 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Als Beispiel für die Coulomb-Kraft rechnen wir sie aus für die sogenannten *Leitungselektronen*, die sich in einem 1-Ct.-Stück befinden, für den Fall, dass man sie herausziehen und in 1 m Entfernung aufstellen könnte. Jedes Material enthält Elektronen; in Metallen löst sich ein Teil der Elektronen von den Atomen und bildet ein (fast) freies »Elektronengas«. Die einzelnen Teilchen in diesem »Gas« heißen »Leitungselektronen«, da sie einen elektrischen Strom leiten können. In einem Ct.-Stück aus Kupfer gibt es *ein* Leitungselektron pro Atom; diese können sich im Metall fast frei bewegen, können aber nur mit größerem Energieaufwand (»Austrittsarbeit«) das Metallstück verlassen. Wenn wir sie um 1 Meter entfernen könnten, würde die gleiche positive Ladungsmenge in dem Stück zurückbleiben, wir hätten dann die Anziehungskraft:

$$F_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

mit $r = 1 \text{ m}$. Die Ladung q ist gleich 1 Elementarladung/Atom, d. h. $q = Ne_0 = \nu N_A e_0 = (m/M_A)N_A e_0$ mit m die Masse des Ct.-Stücks mit N Atomen, M_A der Molmasse von Cu, ν der Molzahl und N_A der AVOGADRO-Zahl. Mit $m = 2 \text{ g}$ und $M_A = 63,55 \text{ g/mol}$ erhalten wir

$$q = 3,04 \cdot 10^3 \text{ C}$$

und damit

$$F_c = 8,988 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{(3,04 \cdot 10^3)^2}{1^2} \frac{\text{C}^2}{\text{m}^2} = 8,3 \cdot 10^{16} \text{ N} !!$$

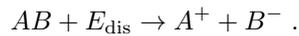
Dies ist die Gewichtskraft von $8,5 \cdot 10^{12}$ Tonnen, etwa das Gewicht eines großen Berges der Höhe 3000 m und Basisdurchmesser 50 km! Die Coulomb-Kraft ist tatsächlich sehr stark, sie erscheint schwach im täglichen Leben nur deshalb, weil es nie gelingt, eine größere Ladungsmenge zu trennen oder »freizusetzen«.

Diese Kraft bindet die Elektronen in den Atomen und hält die Materie zusammen; sie bildet die Grundlage für die chemische Bindung.

Mikroskopisch ist es möglich, mit einem Energieaufwand einzelne Ladungen von Atomen oder Molekülen zu trennen oder zurückzugeben; dies nennt sich »Ionisation« bzw. »Rekombination«:



Die Energie E_{B} nennt sich »Bindungsenergie«; Bindungsenergien sind immer negativ. Bei Molekülen wie AB kann die Ionisation mit einer Aufspaltung der chemischen Bindung einhergehen (»Dissoziation«):



Makroskopische Körper, die bewegliche Ladungen enthalten, heißen »elektrische Leiter«. Alle Metalle sind mehr oder weniger gute Leiter. Andere Materialien (Glas, Kunststoffe, ionische Kristalle wie NaCl) sind »Isolatoren« oder »Dielektrika«: sie enthalten nur *gebundene* Ladungen, die nicht beweglich sind und keinen Strom leiten können. Dazwischen liegen die »Halbleiter« wie die Elemente Si, Ge oder die Verbindungen GaAs, CdS, die durch eine geringe Energiezufuhr (Licht, Erwärmung) leitend gemacht werden können. Auch Flüssigkeiten, wenn sie gelöste Ionen enthalten (»Elektrolytlösungen«), sowie ionisierte Gase (»Plasmen«) können einen elektrischen Strom leiten.

5.2 Elektrostatik

5.2.1 Das elektrische Feld

Die Elektrostatik ist die Untersuchung von nicht-beweglichen Ladungen. Solange man nur mit Paaren von Ladungen zu tun hat, ist die Berechnung der COULOMB-Kraft nach dem COULOMB-Gesetz einfach. Mit vielen Ladungen oder ausgedehnten Ladungsverteilungen wird dies sehr schwierig; dazu führt man den Begriff des elektrischen Feldes E ein. Das elektrische Feld ist eine Vektorgröße, welche die *Kraftwirkung auf eine Probeladung* q_0 zu jedem Punkt im Raum angibt. Die Feldstärke ist definiert als Kraft/Ladung:

$$E(x, y, z) = \frac{F_c(x, y, z)}{q_0} .$$

Ihre Einheit ist N/C (oder V/m, sh. später). Elektrische Felder addieren sich vektoriell wie Kräfte. Man kann sie »sichtbar« machen, in dem man die Kraftlinien mit einem feinen Pulver nachzeichnet, oder durch Messen mit einem Meßinstrument. Per Konvention beginnen die Feldlinien an positiven Ladungen und enden an negativen; Ladungen sind die Quellen des elektrischen Feldes.

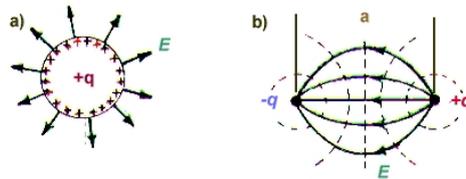


Abbildung 5.2. Elektrische Feldverteilungen: a) ein elektrischer Monopol [punktförmige oder kugelförmige Einzelladung]. Sein elektrisches Feld (Coulombfeld) zeigt radial vom Mittelpunkt nach außen und nimmt wie $1/(\text{Abstand})^2$ ab. b) Der elektrische Dipol [zwei entgegengesetzte Ladungen im festen Abstand a]. Sein Feld ist gekrümmt und zeigt eine Symmetrieebene (gestrichelt).

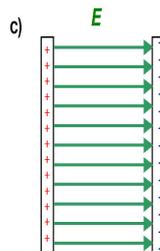


Abbildung 5.3. c) Das homogene Feld zwischen den Platten eines geladenen Plattenkondensators; es hat überall die gleiche Stärke und Richtung.

5.2.2 Das elektrische Potential

Wir gehen nun genauso wie in der Mechanik vor: Nachdem wir die elektrische Kraft diskutiert und durch eine Feldgröße beschrieben haben (elektrisches Feld E), betrachten wir nun die Prozessgröße Arbeit sowie die Zustandsgröße Energie. Eine Probeladung q_0 im Feld E erfährt eine Kraft; Bewegung der Ladung gegen diese Kraft benötigt die Verrichtung von Arbeit, während umgekehrt die Ladung Arbeit verrichten kann, wenn sie sich in Feldrichtung bewegt. Wir schreiben

$$\Delta W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta W}{q_0} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} .$$

Dieses Integral hat z. B. für das Feld einer Punktladung q_1 eine einfache Form:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\text{Coulomb-Feld}) ,$$

und

$$\frac{\Delta W}{q_0} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r} .$$

Die Arbeit/Ladung $\Delta W/q_0$ ist ein Maß für die Arbeit, die verrichtet werden müsste, wenn wir die Ladung q_0 zu einer gleichnamigen Ladung q_1 hinbewegten. Sie heißt »COULOMB-Potential« der Punktladung q_1 .

Die potentielle Energie E_{pot} ändert sich natürlich auch dabei; wir können die Größe E_{pot}/q_0 ebenfalls betrachten. Die Arbeit bzw. die Energie einer Ladung, geteilt durch die Ladungsmenge, nennt man allgemein das elektrische *Potential* φ . Sie läßt sich aus der Feldstärke E durch Integration über eine Strecke errechnen:

$$\Delta\varphi = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} .$$

Man kann das elektrische Potential direkt messen, mit einem Voltmeter, welches eine kleine Ladung fließen läßt und die resultierende Arbeit anzeigt.

Eine elektrische »Potentiallandschaft« gleicht einer Höhenlandschaft in der Mechanik (siehe Abb. 5.4 auf der gegenüberliegenden Seite): eine Probemassee in der Höhenlandschaft besitzt eine bestimmte potentielle Energie E_{pot} , je nach Höhe. Sie erfährt eine Kraft, die sie nach unten rollen läßt, je nach Steigung des Bodens. Die Höhenkontourlinien sind Linien gleicher Höhe, ihre Dichte zeigt die jeweilige Steigung an.

Ebenfalls kann man »Kontourlinien« des elektrischen Potentials definieren, sie heißen »Äquipotentiallinien« (bzw. -Flächen). Auf einer Äquipotentiallinie ist die potentielle Energie einer Ladung konstant, sie bewegt sich ohne Arbeitsaufwand.

Die Kraftlinien (d. h. das elektrische Feld E) zeigen immer senkrecht zu den Äquipotentiallinien, d. h. in die Richtung, in der die »Steigung« am größten ist (und die Arbeit deshalb auch maximal).

Wir können die obige Beziehung zwischen Potential und Feld umkehren, um das Feld aus dem Potential zu berechnen:

$$E(r) = -\frac{d}{dr}[\varphi(r)]$$

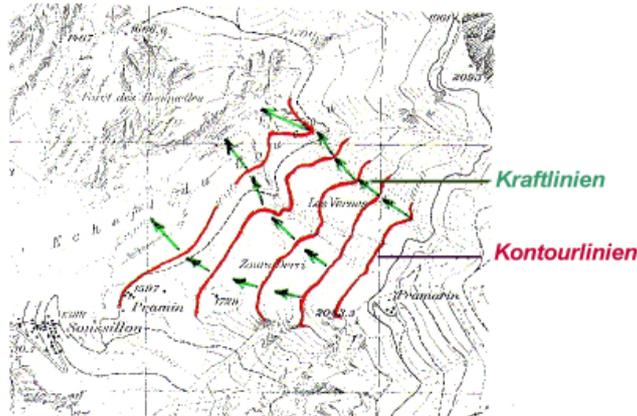


Abbildung 5.4. Auszug aus einer Höhenkontour-Karte. Die Höhenkontourlinien (rot) verbinden Punkte der gleichen Höhe h ; darauf bewegt sich eine Masse m ohne (Hub-) Arbeit, ihre potentielle Energie mgh bleibt konstant. Linien der maximalen Steigung (grün) zeigen senkrecht zu den Höhenkonturen, eine Masse würde entlang solcher Linien hinunterrollen. Die Hangabtriebskraft zeigt entlang der maximalen Steigung und wächst mit wachsender Steigung (d. h. wenn die Höhenkonturen dichter zusammenliegen). Die Äquipotentiallinien verhalten sich analog zu den Höhenkontourlinien, die elektrische Feldvektoren analog zur Hangabtriebskraft.

(eindimensional; z. B. beim Feld einer Punktladung oder homogenem Feld in Richtung \mathbf{r}) bzw. dreidimensional:

$$E(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}).$$

(∇ ist die Abkürzung für eine dreidimensionale Ableitung, die als Vektor in die Richtung maximaler Steigung zeigt.) Man nennt dies »Gradientenbildung« und schreibt auch

$$E(\mathbf{r}) = -\text{grad}[\varphi(\mathbf{r})].$$

Wie auch die potentielle Energie hat das elektrische Potential keinen festgelegten Nullpunkt. Die Erdoberfläche bildet eine Äquipotentialfläche mit einer fast unerschöpflichen Ladungsreserve, daher verbindet man oft einen Punkt in einem elektrischen Kreis mit der Erde (»Masse« oder »Erdung«) und benutzt diesen Punkt als Potential-Nullpunkt. Im Vakuum kann man als Nullpunkt das Potential bei $r \rightarrow \infty$ nehmen (Atomphysik).

Für Messungen und Anwendungen ist immer nur die Potentialdifferenz $\Delta\varphi$ wichtig; diese nennt man die »elektrische Spannung« U . Die Einheit von Potential und Spannung ist [Energie]/[Ladung], d. h. J/C oder J/As; sie heißt (als abgeleitete Einheit) auch »Volt« (nach ALESSANDRO VOLT):

$$1 \text{ V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{As}} \quad \text{bzw.} \quad 1 \text{ J} = 1 \text{ VAs}.$$

Elektrische Leistung (Arbeit/Zeit) misst man daher in $W = J/s = VA$.

5.2.3 Der Plattenkondensator

Ein gutes und relativ einfaches Beispiel für Feld und Potentiallinien liefert der Plattenkondensator, der außerdem bei Anwendungen (Elektronik) und für Messungen (Dielektrizitätskonstanten) wichtig ist. Wir haben bereits gesehen, dass das elektrische Feld zwischen zwei parallelen, geladenen Platten homogen (konstante Stärke und Richtung) und durch die Flächenladungsdichte q/A auf den Platten gegeben ist:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{q}{A}.$$

Der Kondensator dient als »Ladungsspeicher«, genauso wie ein heißer Körper Wärme speichert. Analog zur Wärmekapazität definiert man daher die elektrische Kapazität C :

$$C = \frac{\text{Ladung}}{\text{Potentialdifferenz}} = \frac{q}{U} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dq}{dU}$$

(Einheit $\hat{=} C/V$ oder $As/V \equiv \text{Farad (F)}$ [nach MICHAEL FARADAY]). Die Potentialdifferenz U zwischen den Platten (Ladespannung) ist wie oben gegeben durch ein Integral entlang des (konstanten) Feldes, d. h.

$$U = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = E d = \frac{1}{\varepsilon_0} q \frac{d}{A}$$

(mit Plattenabstand d , Plattenfläche A und gespeicherte Ladung q); damit ist die Kapazität $C = q/U$ gegeben durch

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}.$$

Es ist egal, ob eine Platte geerdet ist (entgegengesetzte Ladung fließt von der Erde nach), oder beide Platten isoliert und entgegengesetzt geladen sind.

Bringen wir einen Isolator (Dielektrikum) zwischen die Platten, so werden im elektrischen Feldatomare oder molekulare Dipole erzeugt bzw. ausgerichtet. Dies führt zu einem Gegenfeld, das gesamte Feld (und daher die Spannung) wird abgeschwächt; so steigt die Kapazität des Kondensators. Das Verhältnis der Kapazitäten mit Dielektrikum und ohne Dielektrikum ist eine Materialkonstante des Dielektrikums, die »relative Dielektrizitätskonstante« ε_r . Für den Kondensator mit Dielektrikum schreibt man daher:

$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d}.$$

Die im Kondensator gespeicherte Ladung hat eine hohe potentielle Energie (man sagt auch, das elektrische Feld E speichert Energie). Diese kann man aus der Potentialdifferenz sowie der Ladung errechnen:

$$dW = U dq = U C dU \quad \text{und} \quad E_{\text{pot}} = \Delta W = \int CU dU = \frac{CU^2}{2}$$

[Energie im Kondensator! (Einheit $FV^2 = (As/V)V^2 = VAs \equiv J$).]

5.2.4 Materie im elektrischen Feld

Die Materie kann – elektrisch gesehen – grob in zwei Klassen geteilt werden: *leitende Materie* (Metalle, Plasmen, Elektrolytlösungen ...) und *isolierende Materie* (alle anderen Materialien).

1. *Leitende Materie* enthält eine große Anzahl an (fast) frei beweglichen Ladungen – die *freien* Ladungen
2. *Isolatoren* enthalten *gebundene* Ladungen, die an den Atomen oder Molekülen der Materie festsitzen, jedoch immer noch mikroskopisch verschoben werden können. Sie bilden dabei Dipole, mit Dipolmomenten $\mathbf{p} = q\mathbf{a}$, wobei q die verschobene Ladungsmenge und a die Verschiebungsstrecke sind (der Vektor \mathbf{a} zeigt von dem negativen Ende zum positiven hin)

Wirkt ein elektrostatisches Feld $|E_0| = |D_0|/\epsilon_0 = \sigma_0/\epsilon_0$ (σ_0 = freie Flächenladungsdichte) auf einen Isolator, so wird es nicht im Inneren der Materie vollständig abgeschirmt wie beim Leiter; es wirkt auf die dort vorhandenen (gebundenen) Ladungen und produziert ausgerichtete Dipolmomente (durch Ladungsverschiebung bzw. Orientierung vorhandener Dipole). Diese heben sich innerhalb der Materie gegenseitig auf, lassen aber eine Polarisationsflächenladungsdichte σ_P auf den Oberflächen der Materie übrig. Man definiert die Polarisation der Materie als Gesamtdipolmoment pro

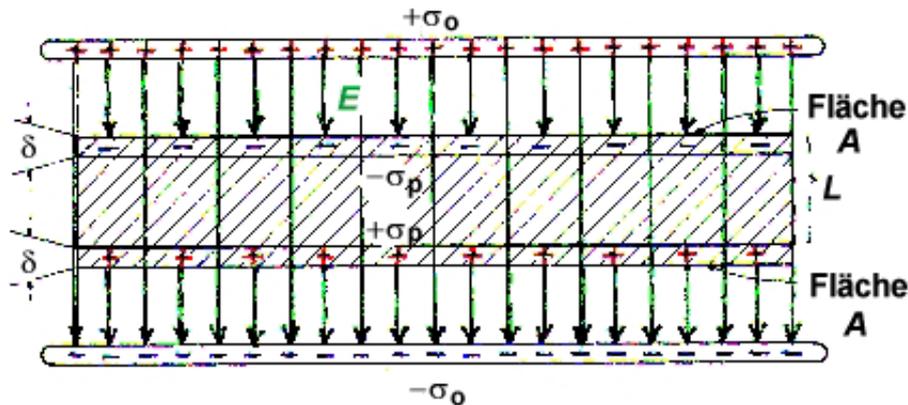


Abbildung 5.5. Ein Plattenkondensator mit einem Dielektrikum (Scheibe aus isolierender Materie) der Fläche A und der Dicke L zwischen den Platten. Auf den Platten befindet sich die freie Flächenladungsdichte σ_0 , die das elektrische Feld E_0 erzeugt. Dieses Feld produziert eine Polarisation der Materie (ausgerichtete Dipole innerhalb der Materie), die ihrerseits zu einer Oberflächenladungsdichte σ_P an den Oberflächen des Dielektrikums (innerhalb einer dünnen Schicht der Dicke δ) führt. Das Feld E wird innerhalb der Materie abgeschwächt, die Kapazität des Kondensators entsprechend erhöht.

Volumen:

$$|P| = \frac{\sum p_i}{V} = \frac{q_P L}{V} = \frac{\sigma_P A L}{V} = \sigma_P$$

analog zum Verschiebungsfeld D ; A ist die Fläche der Materie, L ihre Dicke.

Es existieren nun drei Felder:

1. P nur innerhalb der Materie, mit $|P| = \sigma_P$;
2. D überall gleich, mit $|D| = \sigma_0$;
3. $E = E_0$ außerhalb der Materie, $E = E_m < E_0$ (Normalfall) innerhalb der Materie

[E macht einen Sprung an der Oberfläche der Materie in der einfachen Geometrie eines Plattenkondensators mit einer Materiescheibe (Dielektrikum) zwischen den Platten.]

Im Allgemeinen gilt

$$E = \frac{(D_0 - P)}{\epsilon_0} = \frac{D_m}{\epsilon_0}.$$

Eine alternative Beschreibung dieses Vorgangs basiert auf die Reduktion der E -Feldstärke in der Materie:

$$\frac{E_0}{E_m} = \epsilon_r \quad (\text{eine dimensionslose Zahl, relative Dielektrizitätszahl}).$$

Die Kapazität eines Kondensators, welcher Materie der relativen Dielektrizitätszahl ϵ_r enthält, ist gegeben (entsprechend der Reduktion der Feldstärke E) durch:

$$C_m = \epsilon_r C_0 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} = \epsilon \frac{A}{d}.$$

(die letzten beiden Formeln gelten für einen Plattenkondensator mit Plattenfläche A , Plattenabstand d , Füllfaktor für die Materie = 100%, d. h. $L = d$.)

Wir unterscheiden vier Typen der Materie:

1. Dielektrika, mit $\epsilon_r > 1$ schwächen das elektrische Feld E ;
2. Ferroelektrika besitzen ein spontanes elektrisches Feld E unterhalb ihrer 'kritischen Temperatur' T_C ;
3. Paraelektrika, mit $\epsilon_r \gg 1$, sind Ferroelektrika bei $T > T_C$;
4. sowie Leiter, mit $\epsilon_r \rightarrow \infty$; sie schirmen das Feld E vollständig ab.

Bei der Verschiebungspolarisation ist P proportional E : $P = n \alpha E$, n = Teilchendichte der polarisierbaren Teilchen; hier ist P relativ schwach, kann aber dem Feld E sehr schnell folgen. Bei der Orientierungspolarisation ist P eine Funktion von E und T , sie ist meistens viel stärker, aber folgt dem Feld E nur langsam.

5.3 Der elektrische Strom

5.3.1 Bewegte Ladungen – der elektrische Strom

Bisher haben wir statische Ladungen betrachtet, die als freie oder Überschussladungen an einer festen Stelle sitzen; dabei haben wir gesehen, dass es aufgrund der starken Coulomb-Kräfte sehr schwierig ist, eine größere Ladungsmenge zu trennen und als freie Ladung zu erhalten.

Der für allerlei Anwendungen weitaus wichtigere Fall ist jedoch der der bewegten Ladungen, d. h. des elektrischen Stroms. In einem nach außen elektrisch neutralen Leiter lassen sich relativ große Ladungsmengen in Bewegung setzen; die Bewegung wird durch den elektrischen Strom $I = q/t$ bzw. dq/dt beschrieben, in exakter Analogie zu einer Flüssigkeitsströmung.

Ein elektrischer Leiter kann irgendein Material sein, welches bewegliche Ladungen enthält. Diese sind die Elektronen in Metallen und Halbleitern, die Ionen in Elektrolytlösungen und festen Ionenleitern, und Elektronen plus Ionen in geladenen Gasen (Plasmen).

Wieder in Analogie zur Flüssigkeitsströmung beobachtet man beim elektrischen Strom immer einen Widerstand; ein Teil der Bewegungsenergie der Ladungen wird in eine ungeordnete Atombewegung umgesetzt, d. h. in Wärme. Dieser elektrische Widerstand R hängt von der Geometrie und von Materialeigenschaften des Leiters ab. [n.b.: Wie auch bei der Flüssigkeitsströmung hat die Natur *bei tiefen Temperaturen* eine Ausnahme geschaffen. Dort gibt es den *supraflüssigen* Zustand (beim flüssigen Helium), wo eine Strömung ohne Widerstand, d. h. eine ideale Strömung, möglich ist. Auch eine Reihe von Metallen, Legierungen und Verbindungen zeigt bei tiefen Temperaturen ein *Verschwinden des elektrischen Widerstandes*, genannt Supraleitung.]

5.3.2 Analogie: Elektrischer Strom, Flüssigkeitsströmung

Als Beispiel für den elektrischen Strom/Flüssigkeitsströmung vergleichen wir das Auslaufen eines Behälters durch einen Strömungswiderstand R_S mit der Entladung eines Kondensators durch einen elektrischen Widerstand R (RC -Kreis). In beiden Fällen haben wir einen nicht-stationären Strom: die Stromstärke I_V bzw. I nimmt mit der Zeit ab, weil die »treibende Kraft« (Druckdifferenz Δp bzw. elektrische Spannung U) abnimmt, je weiter sich der »Speicher« ausleert (siehe Abb. 5.6).

In beiden Fällen gilt das gleiche Gesetz:

$$I_V = \frac{\Delta p}{R_S} \quad \text{und} \quad I = \frac{U}{R} .$$

Letzteres wird »Ohm'sches Gesetz« in der Elektrizitätslehre genannt; ein Widerstand, der unabhängig von Stromstärke und Spannung ist, heißt »ohm'scher Widerstand«.

Wir können in beiden Fällen die Beziehung zwischen der »gespeicherten Menge« (Volumen der Flüssigkeit, Ladungsmenge) und der »treibenden Kraft« (Druckdifferenz, elektrischer Spannung) einsetzen:

$$\Delta p = \rho gh = \rho g \frac{V}{A} \quad \text{und} \quad U = \frac{q}{C} = \frac{qd}{\varepsilon_0 A} .$$

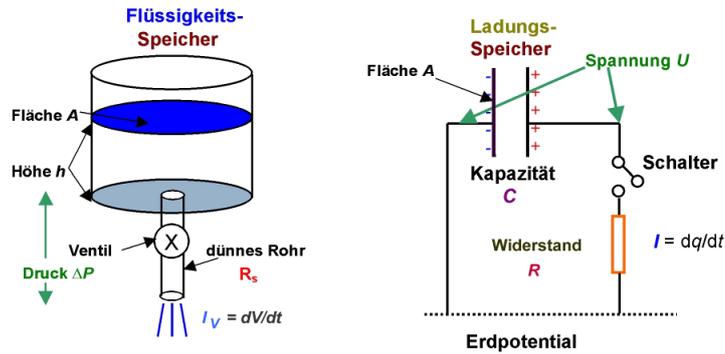


Abbildung 5.6. Analogie zwischen Flüssigkeitsströmung (links: Auslaufen eines Behälters durch ein Rohr mit Reibung) und dem elektrischen Strom (rechts: Entladen eines Kondensators durch einen ohmschen Widerstand R).

Die Größen sind in beiden Fällen einander proportional, die Proportionalitätskonstante enthält geometrische Größen und Materialkonstanten:

$$\frac{\rho g}{A}, \quad \frac{d}{\varepsilon_0 A}.$$

Einsetzen in die Gleichung für die Stromstärke ergibt

$$I_V = \frac{dV}{dt} = -\frac{\rho g}{R_S} V$$

und

$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC} q$$

(das Minuszeichen resultiert daraus, dass das gespeicherte Volumen bzw. die Ladung mit der Zeit abnimmt.) Umstellen dieser Gleichungen liefert:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{\rho g}{AR_S} dt \quad \text{und} \quad \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} dt.$$

Integration dieser Differentialgleichungen ergibt als Lösungen eine Exponentialfunktion der Zeit:

$$V(t) = V(0) \cdot e^{-t/\tau_s} \quad \text{und} \quad q(t) = q(0) \cdot e^{-t/\tau}$$

mit den Zeitkonstanten $\tau_s = R_S A / \rho g$ bzw. $\tau = RC$.

Einheiten: den elektrischen Strom mißt man in Einheiten $C/s \equiv As/s = A$ (Ampère), die Spannung in Einheiten $J/As \equiv V$ (Volt), den Widerstand in Einheiten $V/A \equiv \text{Ohm}$ (abgekürzt Ω). Man definiert auch die elektrische Leitfähigkeit L als Kehrwert des Widerstandes R :

$$L = \frac{1}{R}$$

mit der Einheit $1/\Omega$ (= Siemens, $1 \text{ S} \hat{=} 1 \Omega^{-1}$).

Tabelle 5.1. Vergleich von Flüssigkeitsströmung und elektrischem Strom

Größe	Flüssigkeitsströmung	elektrischer Strom
Menge, Stromgröße	Volumen V ; Volumenstrom $I_V = dV/dt$	Ladung q ; elektrischer Strom $I = dq/dt$
»treibende Kraft«	Druckdifferenz ΔP	Potentialdifferenz $\Delta\varphi =$ elektrische Spannung U
»Quelle«	Pumpe, Durchsatz I_{V0} ; Druckdifferenz P_0	Stromquelle, Strom I_0 ; Spannung U_0
Leistung	$I_{V0} \cdot P_0$	$I_0 \cdot U_0$
»Speicher«	Flüssigkeitsspeicher, Querschnittsfläche A : $\Delta P = \rho gh = [\rho g/A]V$	Kondensator: $U = q/C$
E_{pot} (Speicher)	$[\rho gV]h/2 = [\rho gA]h^2/2 =$ $([A/\rho g]/2) \Delta P^2$ oder $V^2/2[A/\rho g]$	$(C/2)U^2$ oder $q^2/2C$
»Trägheitskraft«	Druck durch Beschleunigung: $\Delta P = (m/A) dv/dt =$ $(m/A^2) dI_V/dt =$ $[l\rho/A] dI_V/dt$	Spule: $U = -L dI/dt$
E_{kin} (Trägheit)	$(V\rho/2)v^2 = ([l\rho/A]/2) I_V^2$	$(L/2) I^2$
Widerstand	Rohr: $R_S =$ $(l/A)(8\pi/R^2)$; $I_V =$ $\Delta P_R/R_S$	$R = (l/A)\rho_E$; $I = U_R/R$
E-Erhaltung:	Bernoulli: $P_0 + \rho gh +$ $(\rho/2)v^2 = \Delta P_R$	Kirchhoff, Maschenregel: $U_0 + q/C + LdI/dt = U_R$
Kontinuität:	$I_V = \text{konst.}$ (Erhaltung der Flüssigkeitsmenge)	Knotenregel: $\sum I_i = 0$ (Ladungserhaltung)

5.3.3 Elektrische Stromkreise

- Kirchhoffsche »Knotenregel«:

$$\sum_{i \text{ am Punkt}} I_i = 0 \quad (\text{Ladungserhaltung})$$

wobei

- Ströme zum Punkt hinein negativ,
- Ströme vom Punkt hinaus positiv zu nehmen sind.

- Kirchhoffsche »Maschenregel«:

$$\sum_{i \text{ um Kreis}} U_i = 0 \quad (\text{Energieerhaltung})$$

wobei

- Spannungen in Stromrichtung positiv,
- Spannungen in Gegenstromrichtung negativ und
- Spannungen von Stromquellen negativ zu nehmen sind.

Anwendungen: Parallel- und Reihenschaltungen

- Bei der Reihenschaltung gilt:

$$U_0 = U_1 + U_2 \quad (\text{Maschenregel})$$

und

$$I_0 = I_1 = I_2 \quad (\text{Knotenregel}) ;$$

d. h.: spannungsproportionale Größen (R, L, U_{Quelle}) addieren sich einfach; aber strom- oder ladungsproportionale Größen (C) addieren sich reziprok.

(Beispiele: der Gesamtwiderstand von drei 100Ω -Widerständen, die in Reihe geschaltet sind, beträgt $R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + R_3 = 100 + 100 + 100 = 300 \Omega$; die Kapazität von zwei $10 \mu\text{F}$ -Kondensatoren in Reihe beträgt $C_{\text{ges}} = 1/[1/C_1 + 1/C_2]$, $C_{\text{ges}} = 1/[1/10 \mu\text{F} + 1/10 \mu\text{F}] = 5 \mu\text{F}$.)

- Bei der Parallelschaltung gilt:

$$U_0 = U_1 = U_2 \quad (\text{Maschenregel})$$

und

$$I_0 = I_1 + I_2 \quad (\text{Knotenregel}) ;$$

d. h. spannungsproportionale Größen (R, L) addieren sich reziprok; aber strom- oder ladungsproportionale Größen (C, I_{Quelle}) addieren sich einfach.

(Beispiele: der Gesamtwiderstand von zwei 150Ω -Widerständen, die Parallel geschaltet sind, beträgt $R_{\text{ges}} = 1/[1/R_1 + 1/R_2]$, $R_{\text{ges}} = 1/[1/150 + 1/150] = 75 \Omega$; die Kapazität von zwei $20 \mu\text{F}$ -Kondensatoren in Parallelschaltung beträgt $C_{\text{ges}} = C_1 + C_2 = 20 \mu\text{F} + 20 \mu\text{F} = 40 \mu\text{F}$.)

Innenwiderstand Jede Stromquelle und jedes Meßinstrument besitzt einen Innenwiderstand. Man versucht ihn bei Stromquellen wie auch bei Ampèremetern (die in Reihe geschaltet werden) möglichst klein zu halten.

Bei Spannungsquellen sowie bei Voltmetern (die parallel geschaltet werden) soll er möglichst groß werden, um Messfehler zu vermindern.

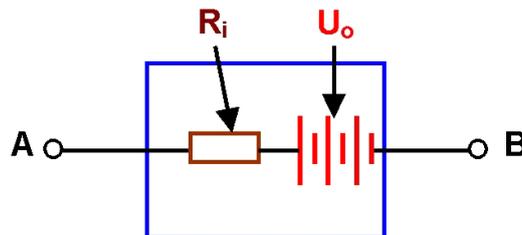


Abbildung 5.7. Schematische Darstellung des Innenwiderstandes: Das »Gerät« (blaues Kästchen) enthält eine Spannungsquelle der Ausgangsspannung U_0 und einen Widerstand R_i (den Innenwiderstand). An den externen Klemmen A und B misst man in »Leerlauf« (wenn kein Strom fließt) die volle Spannung U_0 ; fließt ein Strom I nach außen, so vermindert sich die Klemmspannung um den Betrag IR_i (die Spannung, die am Innenwiderstand R_i abfällt, wenn der Strom I durch ihn fließt).

5.3.4 Wirkungen des elektrischen Stromes

Ein elektrischer Strom hat drei Wirkungen; zwei davon in Verbindung mit der Materie, in der er fließt, die dritte auch im Vakuum:

- Wärmeproduktion (»Joule'sche Wärme«) aufgrund des elektrischen Widerstandes des Leiters;
- eine chemische Wirkung (Oxidation, Reduktion) aufgrund der Ladungsübertragung an Ionen (Elektrolyse, Galvanisieren, Photosynthese);
- die Erzeugung eines Magnetfeldes um einen stromdurchflossenen Leiter oder Stromfaden, auch im Vakuum.

Die Wärmeproduktion haben wir bereits erwähnt; sie ist gegeben durch die Stromstärke I , die durch einen Widerstand R fließt, mal Spannungsabfall U am Widerstand (Ladung · Potentialdifferenz/Zeit = Arbeit/Zeit → Wärme/Zeit):

$$\text{elektrische Leistung} = IU = \frac{U^2}{R} = I^2R \rightarrow \frac{dQ}{dt}$$

(Einheit VA = J/s \equiv W, Wärmeproduktion).

Die elektrochemische Wirkung ist äußerst wichtig für die Technik (Chemie, Bau von Batterien und Akkus, Galvanik), aber auch für die Biochemie und Biophysik sowie die Physiologie (Gleichgewicht in Elektrolytlösungen, Membranspannungen, Leitung von Nervenimpulsen, Photosynthese, Sinnesorgane ...)

Die Beziehung zwischen Strom und Magnetfeldern wurde von H.C. OERSTED im Jahre 1811 entdeckt. Sie basiert letztlich auf einem relativistischen Effekt: die Ladungsdichte einer *bewegten* Ladungsverteilung ändert sich relativ zu der einer ruhenden Ladungsverteilung und hängt auch davon ab, ob der Beobachter sich bewegt. Dies bewirkt eine kleine Zusatzkraft zur üblichen Coulombkraft, welche wir als magnetische Kraft bezeichnen.

5.4 Magnetfelder

Jede bewegte Ladung erzeugt eine Kraftwirkung auf eine andere bewegte Ladung – zusätzlich zur Coulombkraft F_C . Diese Zusatzkraft ist die magnetische oder Lorentzkraft. Sie definiert auch das magnetische Kraftfeld B :

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

[Einheit von B : $\text{N}/\text{Am} \equiv \text{J}/\text{Am}^2 \equiv \text{Vs}/\text{m}^2$, genannt »Tesla« (T)].

Das Feld \mathbf{B} wird auch das magnetische *Induktionsfeld* bzw. die magnetische Flussdichte genannt; die Einheit Vs/m^2 heißt auch Tesla (s.o.). Die Kraft \mathbf{F}_L steht senkrecht zum Magnetfeld \mathbf{B} sowie zur Geschwindigkeit \mathbf{v} der bewegten Ladung.

Im Unterschied zum elektrischen Feld gibt es zwei wichtige Unterschiede:

- man hat keine magnetischen (Einzel-)Ladungen (Monopole) gefunden; daher haben die magnetischen Feldlinien keinen Anfang und kein Ende – sie bilden in sich geschlossene Kurven, ihre Quellen sind Ströme, nicht Ladungen;
- das Magnetfeld ist ein Wirbelfeld. Die magnetischen Kraftfeldlinien um einen stromführenden Leiter sind kreisförmig (Richtung: rechte-Hand-Regel!). Die Feldstärke des Magnetfeldes B ist durch das Ampèresche Gesetz gegeben:

$$I_{(\text{durch } A)} = \int_{K \text{ um } A} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}.$$

Das Integral wird entlang einer Kurve K um die Fläche A gerechnet; der Strom I ist der Gesamtstrom, der durch diese Fläche fließt. Die Magnetfeldstärke um einen Leiter mit Strom I nimmt mit Abstand r wie $1/r$ ab, sie ist gegeben durch

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

(folgt aus Lösung des Integrals um einen Kreis K mit Radius r).

Die Konstante μ_0 (Magnetfeldkonstante oder Permeabilität des Vakuums) ist eine Naturkonstante analog zu ε_0 , wobei μ_0 den Wert $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs}/\text{Am}$ oder $12,57 \cdot 10^{-7} \text{ Vs}/\text{Am}$ hat. Die beiden Feldkonstanten μ_0 und ε_0 sind nicht unabhängig voneinander (relativistischer Ursprung des Magnetismus!), sondern hängen über die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c zusammen:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}.$$

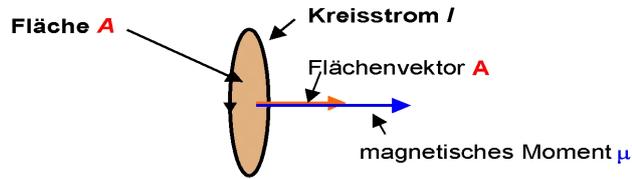


Abbildung 5.8. Magnetisches Moment als Kreisstrom.

5.4.1 Magnetische Felder einfacher Stromverteilungen

Das magnetische Dipolmoment (analog zum elektrischen Dipolmoment): Man definiert ein magnetisches Dipolmoment durch einen Kreisstrom, als Produkt der Stromstärke I mit der eingeschlossenen Fläche A (ein Vektor in Richtung der Flächennormale; siehe Abb. 5.8).

Damit ist:

$$\mu = I A$$

[Einheit: Am^2].

Magnetische Dipolmomente werden von einem homogenen B -Feld ausgerichtet (vgl. p, E).

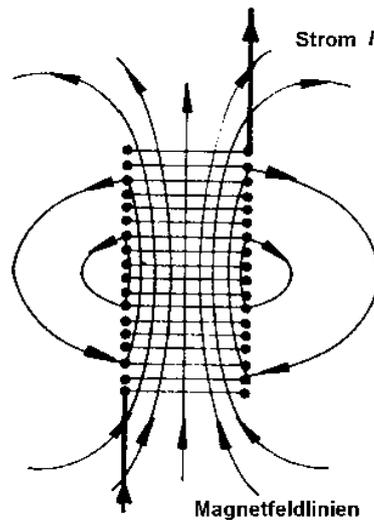


Abbildung 5.9. Stromführende Spule im Querschnitt. Das Magnetfeld B innerhalb der Spule ist nahezu homogen (überall gleiche Stärke und Richtung)

Außer dem Feld eines langen, geraden Stromes (konzentrische Kreise) sowie dem Feld eines Kreisstromes (Dipolfeld) hat das Feld im Inneren einer langen Spule (Abb. 5.9) eine einfache Form: Es ist ein homogenes Feld (vgl. E -Feld des Plattenkondensators). Die Richtung des Feldes ist parallel zur Spulennachse, die Feldstärke in der Mitte der Spule ist gegeben durch (Herleitung aus Ampèreschem Gesetz):

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

mit $N/l =$ Windungszahl/Länge.

Die Spule ist also ein einfaches Bauelement, das eine analoge Rolle für Magnetfelder spielt wie der Plattenkondensator für elektrische Felder (siehe Abb. 5.9).

5.4.2 Die elektromagnetischen Feldgleichungen

Wir haben nun einige (geometrische) Eigenschaften des elektrischen (E) und des magnetischen Felds (B) gefunden, die man in vier Feldgleichungen für statische Felder im Vakuum zusammenfassen kann:

1. Wirbelfreiheit des statischen E -Feldes (Energieerhaltung!):

$$\oint_{K \text{ um } A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 .$$

2. Ströme erzeugen das B -Feld (Ampèresches Gesetz):

$$\oint_{K \text{ um } A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_{(\text{durch } A)}$$

3. Ladungen sind Quellen des E -Feldes (Gaußsches Gesetz):

$$\oint_{A \text{ um } V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{(\text{in } V)}$$

4. Es gibt keine magnetischen Ladungen (magnetische Monopole), das B -Feld hat keine Quellen:

$$\oint_{A \text{ um } V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 .$$

Die Integrale werden in den ersten beiden Gleichungen entlang einer geschlossenen Kurve K gerechnet, welche die Fläche A umschließt; in den letzten beiden Gleichungen werden die Integrale über die geschlossene Fläche A gerechnet, die das Volumen V umschließt. Diese Gleichungen beschreiben vollständig die statischen Felder, die durch Ladungen und Ströme entstehen (aber ohne den Einfluß von Materie). Wir werden sehen, dass diese Gleichungen noch ergänzt werden müssen, wenn wir eine *Zeitabhängigkeit* der Felder zulassen.

Tabelle 5.2. Magnetfeldstärken im Vergleich

relative Magnetfeldstärke	Feldquelle
1 000 000 000 000	Neutronensterne
100 000 000 000	Pulsare
10 000 000 000	
1 000 000 000	
100 000 000	Forschung (kurzzeitig)
10 000 000	
1 000 000	Forschung (Dauerbetrieb)
100 000	Technik; Sterne
10 000	Sonnenflecken
1 000	
100	Norm-Grenzwert
10	Planeten-Feld, Jupiter
1	Planeten-Feld, Erde ($B \simeq 50 \mu\text{T}$)
0.1	Elektrogeräte
0.01	Magnetsturm
0.001	Planeten-Feld, Mars; Fernsehgerät
0.000 1	
0.0 000 1	Mond, interplanetares Feld
0.00 000 1	Herz
0.000 000 1	interstellares Feld
0.0 000 000 1	Gehirn
0.00 000 000 1	Augen; intergalaktisches Feld

5.4.3 Materie im magnetostatischen Feld

Ähnlich wie im elektrostatischen Feld reagiert die Materie im statischen Magnetfeld durch Bildung mikroskopischer Dipolmomente; nun sind es aber nicht elektrische, sondern magnetische Dipole.

Im Gegensatz zum elektrischen Fall gibt es in der Magnetostatik keine Ladungen – und daher keine magnetischen Leiter. Die magnetischen Feldlinien bilden geschlossene Kurven, ohne Anfang und Ende. Außerdem ist das Magnetfeld B etwas anders definiert als das elektrische Feld E . Ansonsten verläuft die Behandlung von Materie im Magnetfeld genau analog zur Behandlung der Materie im elektrischen Feld.

Die magnetischen Dipole werden mit Hilfe von Dipolmomenten beschrieben, definiert als $\mu = I\mathbf{A}$, wobei I die Stärke eines (mikroskopischen) Ringstromes und A die vom Ringstrom eingeschlossene Fläche sind (der Vektor \mathbf{A} zeigt in Richtung der Flächennormale, Richtungssinn durch die Rechte-Hand-Regel gegeben!). Die Einheit des magnetischen Dipolmomentes, $[\mu]$, ist Am^2 .

Wirkt ein statisches Magnetfeld $B_0 = \mu_0 H_0 = \mu_0 I_0(N/l)$ (I_0 = Strom von freien Ladungen in einer Spule mit N Windungen und der Länge l), so produziert dieses ausgerichtete magnetische Dipolmomente (durch Induktion von mikroskopischen Ringströmen bzw. Orientierung vorhandener Dipole). Diese heben sich innerhalb der Materie gegenseitig auf, wie im elektrischen Fall, und können insgesamt durch Flächenströme I_M beschrieben werden (Magnetisierungsströme).

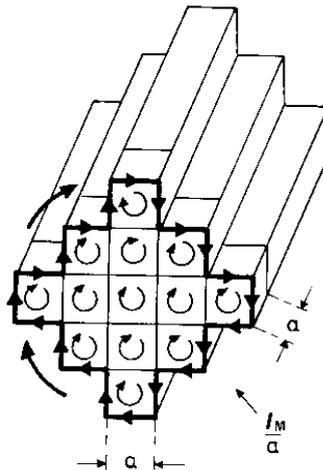


Abbildung 5.10. Schematische Darstellung von Materie in einem Magnetfeld. Atomare Dipole sind durch kleine Kreisströme symbolisiert; der Abstand der Atome ist gegeben durch die Gitterkonstante a . Sie fügen sich an den Enden des Materiestücks zu einem gesamten Flächenstrom I_M zusammen. Außerhalb der Materie entsteht durch die gerichtete Dipole ein äußeres Magnetfeld (gekrümmte Pfeile).

Man definiert die Magnetisierung der Materie als Gesamtdipolmoment pro Volumen,

ganz analog zur elektrischen Polarisierung:

$$|M| = \frac{\sum \mu_i}{V} = \frac{I_M A}{V} = \frac{I_M}{d};$$

A ist die Fläche der Materie, d ihre Dicke.

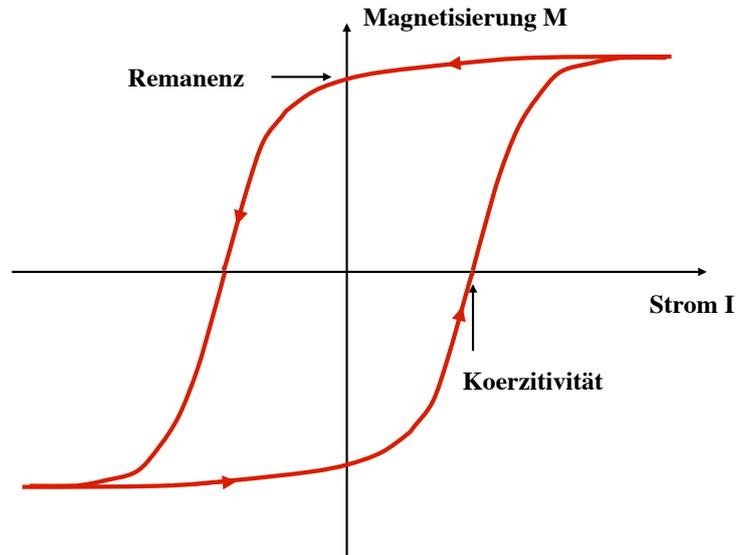


Abbildung 5.11. Hysterese eines Ferromagneten: Aufgetragen ist die Magnetisierung als Funktion des Stroms, mit dem z.B. mit Hilfe einer Spule ein äußeres Magnetfeld angelegt wird. Die dabei im Material hervorgerufene Magnetisierung hat ein „Gedächtnis“, d.h. je nach der Vorgeschichte (zuvor fließender Strom positiv oder negativ) erhält man eine andere Magnetisierung (durch Pfeile in der Kurve angedeutet). Dies nutzt man z.B. bei der magnetischen Datenspeicherung. Als Remanenz bezeichnet man die Magnetisierung, die im Material ohne Stromfluss durch eine umgebende Spule vorliegt, als Koerzitivität den Strom, der nötig ist, eine vorhandene Magnetisierung wieder auf Null zu bringen.

Allgemein gilt

$$B = \mu_0(H_0 + M) = \mu_0 H_m.$$

Eine alternative Beschreibung des Vorgangs basiert auf der Änderung der B -Feldstärke in der Materie:

$$\frac{B_m}{B_0} = \mu_r \quad (\text{dimensionslose Zahl, relative Permeabilitätszahl}).$$

Die Feldstärke im Inneren einer langen Spule, welche Materie der relativen Permeabilität μ_r enthält, ist gegeben durch:

$$B = \mu_0 \mu_r I \left(\frac{N}{l} \right).$$

(gilt für eine lange Spule der Länge l , Windungszahl N , Füllfaktor für die Materie = 100%).

Wir finden drei Typen der Materie bzgl. magnetischem Verhalten:

1. Diamagnetika, mit $\mu_r < 1$ schwächen das magnetische Feld B ;
2. Paramagnetika, mit $\mu_r > 1$ verstärken das Feld B ;
3. Ferromagnetika, mit $\mu_r \rightarrow \infty$ besitzen ein eigenes spontanes Feld B (und daher eine spontane Magnetisierung!)

Die Magnetisierung M in Ferromagneten ist i. a. eine Funktion von B_0 und T sowie der Vorgeschichte (Hysterese, siehe Abb. 5.11). Als Hysterese bezeichnet man dabei die in der Kurve von Abb. 5.11 eingeschlossene Fläche. Für Anwendungen als Permanentmagnet will man eine möglichst große Hysterese haben, Remanenz und vor allem Koerzitivität sollen möglichst groß sein, damit evtl. vorliegende Felder keinen Einfluss haben und der Magnet seine Remanenz nicht verliert. Bei Material, das man in Spulen einbaut, um das entstehende Feld um den Faktor μ_r zu erhöhen, will man eine möglichst kleine Hysterese, damit die Magnetisierung des Materials dem Strom immer folgt. (Anmerkung: Die Näherung in der Beschreibung mit μ_r gilt streng nur für einen linearen Zusammenhang zwischen der Magnetisierung und dem Strom. Dies ist generell nur bis zu einer bestimmten maximalen Magnetisierung möglich, die nicht überschritten werden kann, der *Sättigungsmagnetisierung*.)

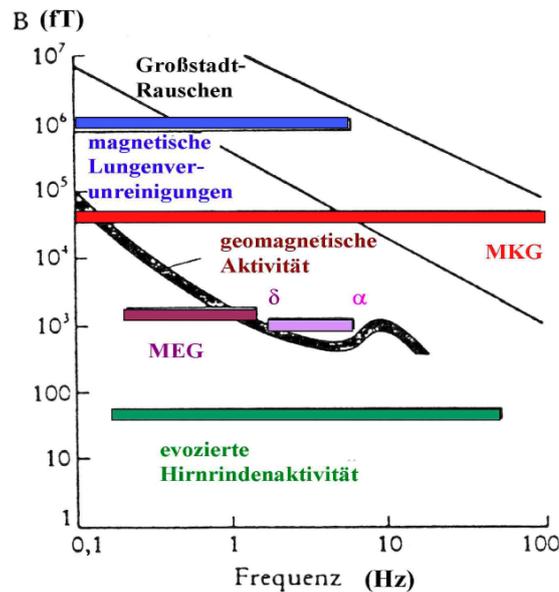


Abbildung 5.12. Biomagnetismus

5.4.4 Biomagnetismus

Unter Biomagnetismus versteht man die Magnetfelder, die in Lebewesen entstehen durch magnetische Substanzen in ihren Organen bzw. durch elektrische Ströme physiologischen Ursprungs. Die Tabelle 5.2 sowie die Abbildung 5.12 gibt eine Übersicht der Werte [als Induktionsfeld $B = \mu_0 H$, Einheit $\text{Vs}/\text{m}^2 \equiv \text{T}$ (Tesla)], die am menschlichen Körper gemessen werden.

Eine Messung dieser Felder (Magnetokardiogramm MKG, Magnetoencephalogramm MEG) ergibt komplementäre und oft detailliertere Informationen als die entsprechenden elektrischen Messungen (EKG, EEG); sie ist aber noch aufwendiger und schwieriger zu interpretieren.

5.5 Zeitlich veränderliche Spannungen und Ströme

Nun betrachten wir zeitabhängige elektrische Vorgänge, bei denen sich Strom und Spannung verändern. Dabei kommt ein neues Phänomen zum Vorschein: Die *Induktion*.

5.5.1 Das Induktionsgesetz

MICHAEL FARADAY entdeckte, dass ein sich zeitlich veränderndes Magnetfeld eine elektrische Spannung in einer Schleife oder Spule aus leitendem Material erzeugt: Die Induktionsspannung U_i . Weitere Versuche zeigten, dass diese Spannung proportional zur zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses $\Phi(A)$ durch die Fläche A der Spule oder Schleife ist.

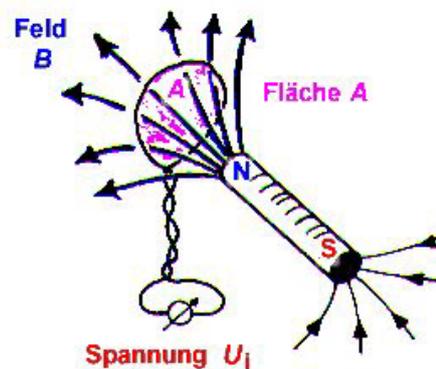


Abbildung 5.13. Drahtschleife im B -Feld eines Stabmagneten. Bewegung oder Drehung der Schleife induziert die Spannung U_i in der Schleife, nach dem Faraday'schen Induktionsgesetz.

Der Fluss ist dabei die Anzahl der Magnetfeldlinien, die die Fläche A durchschneiden:

$$\Phi_B(A) = \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}.$$

Das Induktionsgesetz lautet nun:

$$U_i = - \frac{d\Phi_B}{dt} ;$$

die Induktionsspannung ist gegeben durch die zeitliche Änderung des Flusses (d. h. des Produktes aus B und A) und ist stets ihrer Ursache entgegengerichtet (Minuszeichen).

Es gibt verschiedene Wege, eine zeitliche Änderung des Flusses zu produzieren: Das Feld B kann sich ändern (Änderung des Stromes durch eine Feldspule, Bewegung eines Dauermagneten), die Fläche A kann sich ändern (Zusammenziehen einer Drahtschleife), oder die relative Einstellung der Fläche zum Feld kann sich ändern (Drehung

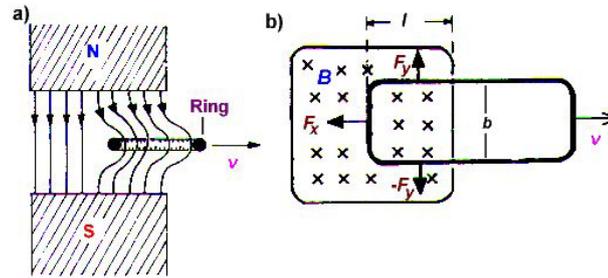


Abbildung 5.14. Induktion durch Bewegung: Ein Metallring wird aus dem Feldbereich eines Dauermagneten mit der Geschwindigkeit v in x -Richtung gezogen. Die dabei entstehende Änderung des magnetischen Flusses Φ durch den Ring induziert die Spannung U_i im Ring und führt zu einem Induktionsstrom I_i . Dieser erzeugt wiederum ein eigenes Induktionsfeld B_i , das sich zum äußeren Feld B addiert. Das Gesamtfeld wirkt der Ursache der Induktion entgegen, d. h. der Fluss in dem Ring tendiert dazu, konstant zu bleiben [die Feldlinien werden »mitgezogen«, siehe Teilbild a)]. Im Teilbild b) (Draufsicht) sieht man den Ring von oben, die Fläche $A = lb$ im Feld ändert sich und bewirkt die Änderung des Flusses Φ . Der Induktionsstrom erzeugt eine Kraftwirkung (Lorentzkräfte) im Feld B , die Kraft F_x wirkt der Bewegung v entgegen

einer Drahtschleife). Die letzte Methode wird in elektrischen Generatoren (Dynamos, Lichtmaschinen) angewandt.

Dreht man eine Spule mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in einem konstanten, homogenen Magnetfeld, so verläuft die Induktionsspannung U_i in der Spule sinusförmig:

$$U_i(t) = U_0 \sin[\omega t] .$$

5.5.2 Selbstinduktion einer Spule

Wenn ein Strom durch eine Spule ein- oder ausgeschaltet wird oder ein Wechselstrom durch die Spule fließt, erzeugt diese ein zeitlich veränderliches magnetisches Feld $B(t)$; dieses (zeitlich veränderlicher Fluß durch die Spule, $B(t) \cdot A$!) induziert wiederum eine Spannung $U_i(t)$, die proportional der zeitlichen Ableitung des Feldes $B(t)$ ist.

Bei einer Spule der Länge l , Windungszahl N und des Radius r ist:

$$\begin{aligned} U_i(t) &= - \frac{d[B(t)A]}{dt} \\ &= - \frac{d \left[\left(\frac{\mu_0 N}{l} \right) I(t) (\pi r^2 N) \right]}{dt} \\ &= - \left[\frac{\mu_0 \pi r^2 N^2}{l} \right] \frac{dI(t)}{dt} \\ &= -L \frac{dI(t)}{dt} . \end{aligned}$$

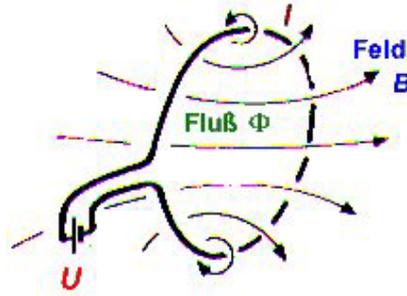


Abbildung 5.15. Drahtschleife mit einer externen Spannungsquelle. Der Strom I im Draht erzeugt das Magnetfeld B und somit den Fluß $\Phi = BA$ ($A =$ Fläche der Schleife). Ändert sich die Spannung U zeitlich (z. B. $U(t) = U_0 \sin[\omega t]$), so werden B und Φ auch zeitlich verändert, eine Induktionsspannung $U_i = -d\Phi/dt$ erscheint zwischen den Enden der Drahtschleife [entgegengesetzt zur momentanen externen Spannung $U(t)$].

Die Konstante $L = [\mu_0 \pi r^2 N^2 / l]$ nennt man die Selbstinduktivität der Spule (Einheit $Vs/A = \text{Hy}$ (Henry)). Die Spule zeigt eine Art »elektrische Trägheit«: Sie widerstrebt jeglicher Änderung des Stroms $I(t)$, indem sie eine Gegenspannung $U_i(t)$ aufbaut. (Enthält die Spule in ihrem Inneren Materie mit der relativen Permeabilitätszahl μ_r , muss man anstatt μ_0 das Produkt $\mu = \mu_0 \mu_r$ in L einsetzen.)

Beim Verbinden einer Spule mit einer Induktivität L über einen Widerstand R mit einer Spannungsquelle der Spannung U_0 steigt der Strom nicht sofort, sondern allmählich von 0 auf U_0/R an: $I(t) = (U_0/R)(1 - e^{-t/\tau_L})$, mit der Zeitkonstante $\tau_L = L/R$. Entsprechend baut sich beim Verbinden der Spule mit der Spannungsquelle zunächst schlagartig eine Spannung an der Spule auf, die mit der selben Zeitkonstante τ_L verschwindet (eine ideale Spule hat unter *zeitlich konstanten* Bedingungen keinen Widerstand). Beim Trennen der Verbindung mit der Strom-/Spannungsquelle wird in der Spule eine Spannung induziert, die dem Abschalten des Stroms entgegenwirkt. Wenn innerhalb sehr kurzer Zeit kein Strom mehr fließen kann, weil z.B. der Stromkreis geöffnet wurde, kann diese Spannung kurzzeitig sehr hoch werden (Beispiele: Zündspule im Kfz, elektrischer Weidezaun). (Anmerkung: Es gibt hier eine Analogie zum Kraftstoß, Abschnitt 2.5, dort wurde die Kraft immer dann kurzzeitig sehr hoch, wenn eine Impulsänderung während einer sehr kurzen Zeit erfolgte, z.B. Aufprall eines harten Gegenstands auf einen harten Fußboden.)

Für den Kondensator hatten wir den entsprechenden Fall des Lade- bzw. Entladevorgangs bereits in Abschnitt 5.3.2 behandelt. Dort hatten wir eine Zeitkonstante $\tau_C = RC$ gefunden. Beim Verbinden eines Kondensators mit einer Stromquelle fließt zunächst schlagartig ein Strom, mit dem der Kondensator geladen wird, bevor sich am Kondensator die Spannung aufbaut. Dabei fällt der Strom mit der Zeitkonstanten τ_C ab, die Spannung baut sich mit dieser Zeitkonstanten auf (ein idealer Kondensator

hat unter *zeitlich konstanten* Bedingungen einen unendlich hohen Widerstand). Bei der Entladung eines Kondensators gilt das Gleiche anders herum: Die Spannung geht nicht sofort auf Null zurück, sondern fällt mit der Zeitkonstanten τ_C exponentiell ab (siehe Abschnitt 5.3.2), während der Entladestrom bei der Entladung zunächst schlagartig einsetzt und dann mit der Zeitkonstanten τ_C abnimmt. Wird der Kondensator über einen sehr kleinen Widerstand entladen, kann dieser Strom kurzzeitig sehr hoch werden (Versuch Ummagnetisieren eines Nagels). Auch hier gibt es wieder die Analogie zum Kraftstoß.

Vergleicht man Spule und Kondensator, so sieht man, dass sich in den zeitlichen Abläufen die Rollen von Spannung und Strom vertauschen: Bei der Spule erhält man das zeitliche Verhalten der Spannung aus der Zeitableitung des Stroms ($U = L \frac{dI}{dt}$), beim Kondensator ergibt sich das zeitliche Verhalten des Stroms aus der Zeitableitung der Spannung ($I = C \frac{dU}{dt}$, folgt aus $Q = CU$ und $I = \frac{dQ}{dt}$).

Die in einer Spule, durch die ein Strom I fließt, gespeicherte Energie ist gegeben durch

$$E = \frac{1}{2} L I^2,$$

die in einem Kondensator, der mit der Spannung U geladen ist, gespeicherte Energie ist gegeben durch

$$E = \frac{1}{2} C U^2.$$

5.5.3 Wechselspannung

Eine zeitlich sinusförmige Spannung $U(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$ nennt man eine Wechselspannung. Eine solche Spannung wird zum Beispiel durch eine rotierende Spule im Magnetfeld eines Generators erzeugt. Schließt man die Spannung $U(t)$ an einen Widerstand R an, so fließt ein Strom $I(t)$ nach dem Ohm'schen Gesetz,

$$I(t) = \frac{U(t)}{R}.$$

Strom und Spannung laufen synchron, ihre Phasen φ sind gleich; sie sind nicht *phasenverschoben*. Die Leistung, die im Widerstand als Joule'sche Wärme verbraucht wird, ist wie beim zeitlich konstanten Strom das Produkt aus Strom und Spannung:

$$\begin{aligned} P(t) = U(t)I(t) &= U_0 \sin[\omega t + \varphi] \frac{U(t)}{R} \\ &= U_0 \sin[\omega t + \varphi] \frac{U_0}{R} \sin[\omega t + \varphi] \\ &= \frac{U_0^2}{R} \sin^2[\omega t + \varphi]. \end{aligned}$$

Die mittlere Leistung $\langle P \rangle$, gemittelt über eine Sinusschwingung, ist dann

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{U_0^2}{R} \langle \sin^2[\omega t + \varphi] \rangle \\ &= \frac{U_0^2}{2R} \quad \text{oder} \quad \frac{U_0 I_0}{2}, \end{aligned}$$

da der Mittelwert $\langle \sin^2 \rangle$ über eine volle Schwingung gleich $1/2$ ist:

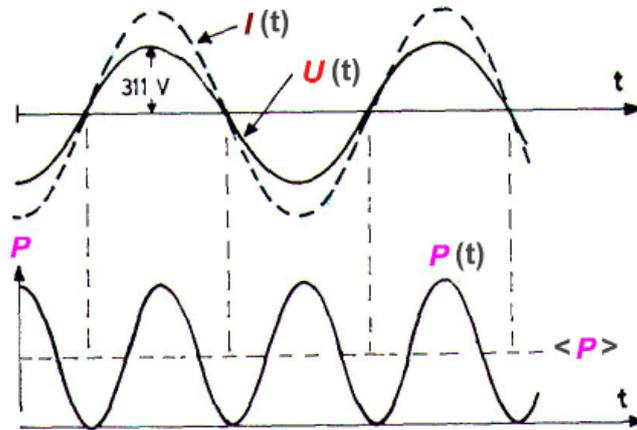


Abbildung 5.16. Strom $I(t)$, Spannung $U(t)$ und Leistung $P(t)$ in einem Wechselstromkreis mit Ohm'schem Widerstand. Strom und Spannung sind sinusförmig und in Phase miteinander. Der Effektivwert der Spannung ist 220 V , die maximale Spannung U_0 (Maximum der Sinusfunktion) beträgt 311 V : $220 \text{ V} = 311 \text{ V}/\sqrt{2}$. Die Leistung $P(t)$ ist proportional zu $\sin^2(\omega t)$: $P(t) = P_0 \sin^2(\omega t)$. Die mittlere Leistung $\langle P \rangle$ ist als gestrichelte Linie dargestellt, sie hat den Wert $1/2 P_0$.

Man definiert daher Effektivwerte $U_{\text{eff}}, I_{\text{eff}}$ für Strom und Spannung mit $U_{\text{eff}} = U_0/\sqrt{2}$ und $I_{\text{eff}} = I_0/\sqrt{2}$, so dass

$$U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = \frac{U_0 I_0}{2} = \langle P \rangle .$$

5.5.4 Wechselstromwiderstände

Lässt man eine Wechselspannung auf *andere* Schaltelemente wirken, wie z. B. einen Kondensator oder eine Spule, so laufen Strom und Spannung *auseinander*.

Die Spannung am Kondensator führt zu einem Ladestrom, der phasenverschoben ist relativ zur Spannung. Dies kann man für eine sinusförmige Spannung leicht ausrechnen:

$$\begin{aligned} q(t) &= CU(t) \quad \text{und} \quad I(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU(t)}{dt} \\ &= CU_0 \frac{d(\sin[\omega t + \varphi])}{dt} \end{aligned}$$

d. h.

$$I(t) = \omega CU_0 \cos[\omega t + \varphi] = \omega CU_0 \sin \left[\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2} \right] .$$

(Die letzte Gleichung folgt aus der trigonometrischen Beziehung $\sin[\alpha + \frac{\pi}{2}] = \cos \alpha$.)

Wir finden daher folgende Wirkungen des Kondensators auf eine Wechselspannung $U(t)$:

- der Strom $I(t)$ ist phasenverschoben um $+\frac{\pi}{2}$ relativ zur Spannung $U(t)$, der Strom „läuft der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ hinterher“; dann ist die mittlere Leistung $\langle P \rangle$ im Kondensator gegeben durch:

$$U(t)I(t) = U_0 I_0 \langle \sin[\omega t + \varphi] \cos[\omega t + \varphi] \rangle = 0!!$$

- die Amplituden von Spannung und Strom verhalten sich wie

$$I_0 = \omega C U_0 = \frac{U_0}{R_{\text{eff},C}} \quad \text{mit} \quad R_{\text{eff},C}(\omega) = \frac{1}{\omega C} .$$

Man nennt den Effektivwiderstand $R_{\text{eff},C}(\omega)$ auch »Wechselstromwiderstand«, »Scheinwiderstand« oder »Blindwiderstand«, da er keine Leistung verbraucht: der Kondensator speichert nur Energie und gibt sie wieder (1/4 Schwingung später) frei.

Wir können eine ähnliche Rechnung für eine Spule durchführen: Setzen wir für den Strom einen Wechselstrom $I(t) = I_0 \sin[\omega t + \varphi]$ an, so finden wir (ähnliche Rechnung wie beim Kondensator), dass in der Spule der Strom um $-\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben ist relativ zur Spannung $U_i(t)$, der Strom „eilt der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ voraus“, die Leistung ist wieder im Mittel gleich Null.

Der Effektiv- oder Wechselstromwiderstand der Spule ist gegeben durch:

$$R_{\text{eff},L}(\omega) = \omega L .$$

Kondensator und Spule wirken also beide bei Wechselspannung als Energiespeicher, sie verschieben Spannung und Strom so gegeneinander, dass keine Leistung verbraucht wird. Die Effektivwiderstände von beiden sind frequenzabhängig; $R_{\text{eff},C}$ des Kondensators wird unendlich, wenn $\omega \rightarrow 0$ geht (Gleichspannung, kein Ladungsdurchgang), R_{eff} der Spule geht gegen Null, wenn $\omega \rightarrow 0$ geht (nur Ohm'scher Widerstand).

5.5.5 Der elektrische Schwingkreis

Schließt man einen Kondensator und eine Spule zusammen, so führen ihre gegenläufigen Frequenzabhängigkeiten zu einem Resonanzverhalten: sie haben eine Resonanzfrequenz, bei der der Gesamtwiderstand maximal (bzw. minimal, je nach Schaltung) ist. Dies nennt man einen Schwingkreis:

Er ist ein Beispiel für einen Harmonischen Oszillator. Man kann mit einem Schwingkreis auch Wechselspannung erzeugen, indem man ihm Energie zuführt (Aufladen des Kondensators, Induktion in der Spule). Die Eigenfrequenz ω_0 erhält man für den Fall dass $R_{\text{eff},L}(\omega_0) = R_{\text{eff},C}(\omega_0)$; sie ist gegeben durch $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

5.5.6 Der Transformator

Ein Transformator besteht aus zwei Spulen mit N_1 bzw. N_2 Windungen, die um einen gemeinsamen geschlossenen Kern aus einem ferromagnetischen Material mit einer hohen Permeabilität μ_r gewickelt sind (siehe Abb. 5.19). Wird durch eine der Spulen ein

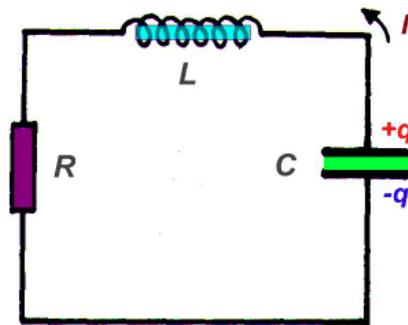


Abbildung 5.17. Elektrischer Schwingkreis (*LRC*-Kreis). Der Kondensator speichert elektrische Energie in seinem elektrischen Feld, die Spule speichert magnetische Energie in ihrem Magnetfeld. Die Schwingungsenergie wechselt zwischen diesen beiden Formen, wie in einem mechanischen Oszillator zwischen potentieller und kinetischer Energie. Der Widerstand wandelt Schwingungsenergie in Wärme um und bewirkt damit eine Dämpfung der Schwingungen.

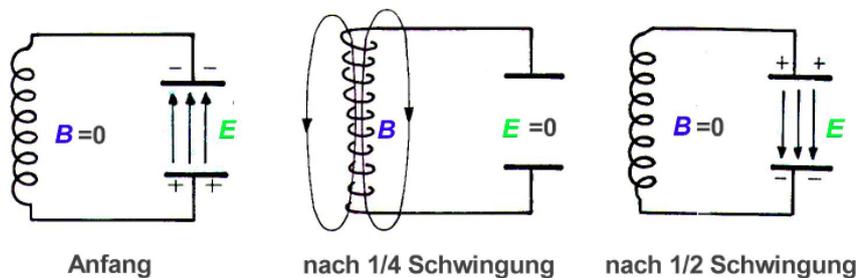


Abbildung 5.18. Elektromagnetische Schwingungen in einem *LC*-Kreis. Im linken Bild ist der Kondensator gerade aufgeladen, die Schwingungsenergie ist in seinem elektrischen Feld E gespeichert, der Strom ist null. Im mittleren Bild, nach einer Viertelschwingung, hat sich der Kondensator entladen, der Strom ist maximal und erzeugt das Magnetfeld B in der Spule, in der nun die Energie gespeichert ist. Im rechten Bild, nach einer halben Schwingung, hat der Induktionsstrom aus der Spule den Kondensator umgekehrt aufgeladen, die Energie ist wieder dort gespeichert. Der Vorgang wiederholt sich nun mit umgekehrtem Vorzeichen, bis der Anfangszustand wieder (nach einer vollen Schwingung) erreicht wird.

Wechselstrom geschickt, so erzeugt dieser ein sich sinusförmig zeitlich veränderndes Magnetfeld B , das hauptsächlich innerhalb des Kerns verläuft. Im Kern hat man also einen sich zeitlich sinusförmig verändernden magnetischen Fluss Φ . Dieser induziert in der anderen Spule eine Wechselspannung. Nach dem Induktionsgesetz gilt für jede der Spulen

$$N \frac{d\Phi}{dt} = U,$$

also

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{U_1}{N_1} = \frac{U_2}{N_2} \text{ bzw. } \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Vernachlässigt man die in den ohmschen Widerständen der Spulen durch Reibung in Wärme umgewandelte Energie, so muss die Leistung $P = U I$ in den Stromkreisen an den beiden Spulen (Ströme I_1 bzw. I_2) gleich sein:

$$U_1 I_1 = U_2 I_2$$

oder

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{I_2}{I_1}.$$

Man benutzt Transformatoren zum Beispiel, um elektrische Energie bei verschiedenen Spannungen zu transportieren (Hochspannungs-Fernleitung) oder um hohe Ströme zu erzeugen (Schweißgerät).

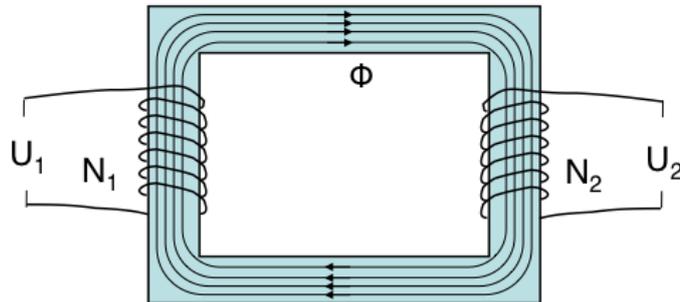


Abbildung 5.19. Schematische Darstellung eines Transformators.

6 Schwingungen und Wellen

6.1 Die Schwingungsbewegung

Nun betrachten wir die neben einer geradlinigen Bewegung und einer Kreisbewegung dritten einfache Bewegungsart: Die mechanische Schwingung. Eine Schwingung zeigt einige Ähnlichkeiten mit der ebenen Kreisbewegung, z. B. sind beide ortsgebunden: die Kreisbewegung an den Kreismittelpunkt, die Schwingung an ihre sogenannte Ruhelage.

Es gibt jedoch einige wesentliche Unterschiede: Die gleichförmige Kreisbewegung schreitet (auf der Kreisbahn) immer weiter fort, während sich die Schwingung zeitlich wiederholt. Die Kreisbewegung hat eine konstante (Zentripetal-) Beschleunigung, bei der Schwingung treten aber während jedem Schwingungszyklus unterschiedliche Beschleunigungen (in Betrag und Richtung) auf. Die Kreisbewegung besitzt nur kinetische (Rotations-) Energie, die Schwingung aber sowohl kinetische als auch potentielle Energie.

Die Zeit, nach der sich eine Schwingung wiederholt, wird Schwingungsdauer T genannt. Der Kehrwert dieser Zeit gibt die *Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit* an und heißt Schwingungsfrequenz ν ; sie wird in $1/\text{s} = \text{Hz}$ (Hertz) gemessen. Man verwendet oft auch die Kreisfrequenz ω , mit $\omega = 2\pi\nu$. Die Kreisfrequenz deutet auf eine andere Ähnlichkeit der Schwingung und der Kreisbewegung hin: Betrachtet man eine gleichförmige, ebene Kreisbewegung in der Kreisebene, d. h. projiziert auf eine Linie in der Ebene, so scheint sich der Massenpunkt auf und ab entlang dieser Linie zu bewegen. Die scheinbare Bewegung ist identisch mit einer harmonischen Schwingung, wobei die Kreisfrequenz der Schwingung gleich die Winkelgeschwindigkeit ω der Kreisbewegung ist (siehe Abbildung 6.1).

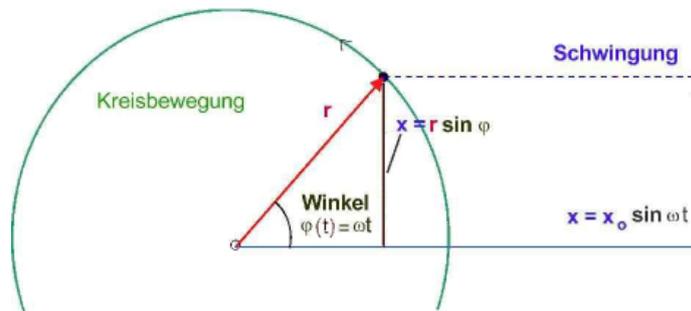


Abbildung 6.1.

6.1.1 Beschreibung der Schwingungsbewegung

Eine Schwingung entsteht, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind:

- es muß eine rücktreibende Kraft (zur Ruhelage hin) wirken, und

- eine Trägheit muß vorhanden sein.

Die Beschreibung der Bewegung erhalten wir dann einfach dadurch, dass wir die rücktreibende Kraft als F in die Newtonsche Bewegungsgleichung $F = m a$ einsetzen. Alternativ dazu können wir die Summe von potenzieller Energie (welche mit der rücktreibenden Kraft zusammenhängt) und kinetischer Energie (die die Trägheit enthält) konstant setzen (Energiesatz!).

Beispiel: Federpendel Die rücktreibende Kraft ist die elastische Kraft,

$$\mathbf{F}_{\text{el}} = -D\mathbf{x} \quad (\text{Hooke'sches Gesetz})$$

wobei D die »Federkonstante« und x die Auslenkung (relativ zur Ruhelage) sind. Einsetzen in $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m d^2\mathbf{x}/dt^2$ und Umformen ergibt:

$$\left(\frac{D}{m}\right) \mathbf{x}(t) + \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = 0$$

Diese Differentialgleichung (2. Ordnung) kann formell durch 2-maliges Integrieren gelöst werden; wir können sie aber einfach mit einer Versuchslösung

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 \sin[\omega_0 t + \varphi_0]$$

lösen. (Die 2. Ableitung der Sinus- oder Kosinus-Funktion ist proportional der Funktion selbst!) Die Lösung enthält zwei Integrationskonstanten: (\mathbf{x}_0 = Anfangsauslenkung oder Amplitude; φ_0 = Anfangsphase). Außerdem enthält sie eine Systemkonstante, die Kreisfrequenz ω_0 , die durch Eigenschaften des schwingenden Systems (des harmonischen Oszillators), nämlich die Kraftkonstante D sowie die Trägheitskonstante m , bestimmt wird. Dieselbe Schwingungsgleichung erhalten wir mit dem Energie-Ansatz.

Weitere Beispiele: Drehschwingungen (Torsionspendel), Fadenpendel, Wassersäule in einem U-Rohr.

6.1.2 Vergleich von elektrischen und mechanischen Schwingungen

Sehen Sie dazu bitte die Tabelle 6.1 auf der rechten Seite.

6.1.3 Die gedämpfte Schwingung

Alle wirklichen Schwingungen halten nicht ewig an, wie die obige Lösung für $x(t)$ andeuten würde; die Schwingungsenergie geht durch Reibung verloren. Die Schwingungen sind dann »gedämpft« durch eine Reibungskraft. Wir nehmen eine geschwindigkeitsproportionale Reibung an:

$$\mathbf{F}_R = -k\mathbf{v} = -k \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

wo k die »Reibungskonstante« und v die momentane Geschwindigkeit der Schwingungsbewegung sind. (Andere Reibungskräfte, die nicht geschwindigkeitsproportional sind, sind auch bekannt, diese ist aber die wichtigste Form).

Tabelle 6.1. Vergleich von elektrischen mit mechanischen Schwingungen

Größe	Parallel-Schwingkreis	Federpendel
»Auslenkung«	Ladung q (As)	Strecke x (m)
»Bewegungsgröße«	Strom $I = dq/dt$ (A)	Geschwindigkeit $v = dx/dt$ (m/s)
»Beschleunigung«	$dI/dt = d^2q/dt^2$ (A/s)	$a = dv/dt = d^2x/dt^2$ (m/s ²)
»rücktreibende Kraft«	$U_C = (1/C)q$ (V)	$F_{el} = -Dx$ (N)
»Trägheit«	Induktivität L (Vs/A) $U_L = -LdI/dt =$ $-Ld^2q/dt^2$	Masse m (kg) $F_{Tr} = ma = md^2x/dt^2$
»Bewegungsenergie«	magnetische Feldenergie $E_B = (L/2)I^2$ (J)	kinetische Energie $E_{kin} = (m/2)v^2$ (J)
»potentielle Energie«	elektrische Feldenergie $E_E = (1/2C)q^2$ (J)	elastische Energie $E_{el} = (D/2)x^2$ (J)
»Kräftegleichgewicht«	Maschenregel, $U_L - U_C = 0$	actio = reactio, $F_{el} = F_{Tr}$
Energieerhaltung	$E_B + E_E = \text{konst.}$	$E_{kin} + E_{el} = \text{konst.}$
Schwingungsgleichung	$d^2q/dt^2 + (1/LC)q = 0$	$d^2x/dt^2 + (D/m)x = 0$
Lösung	$q(t) = q_0 \sin[\omega_0 t + \varphi_0]$ mit $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$	$x(t) = x_0 \sin[\omega_0 t + \varphi_0]$ mit $\omega_0 = \sqrt{D/m}$
Dämpfung	elektr. Widerstand $U_R = RI$	Reibungskraft $F_R = -kv$

Die Lösung $\mathbf{x}(t)$ enthält wieder zwei Anfangsbedingungen, zeigt aber eine zusätzliche Zeitabhängigkeit :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 e^{(-t/\tau)} \sin[\omega_1 t + \varphi_0]$$

mit der Dämpfungszeit $\tau = 2m/k$, und mit einer neuen Kreisfrequenz ω_1 , gegeben durch:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{4m^2}}$$

Das heißt die Frequenz wird i. a. *kleiner*, die Amplitude sinkt exponentiell mit der Zeitkonstante τ (vgl. Abb. 3.12):

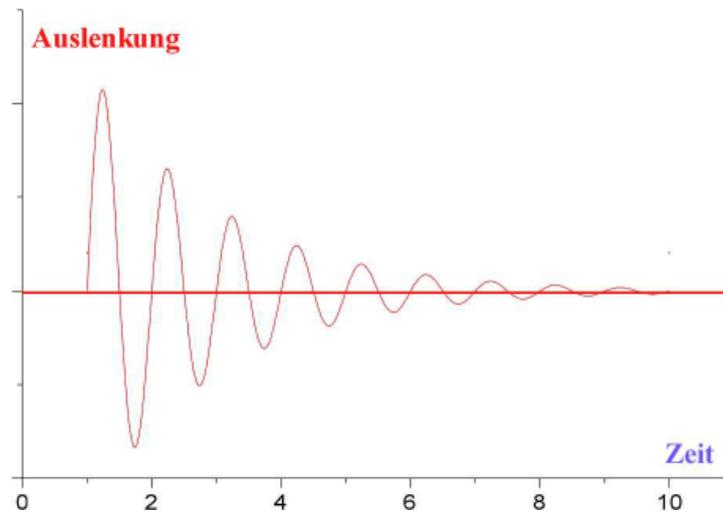


Abbildung 6.2. Gedämpfte Schwingung im Schwingfall.

Wir können drei Fälle unterscheiden:

1. *Schwingfall*: es gilt $\omega_0^2 > k^2/4m^2$: der Oszillator schwingt, ist aber (wie oben) gedämpft.
2. *aperiodischer Grenzfall*: $\omega_0^2 = k^2/4m^2$: die Schwingung kommt nie zustande, die Dämpfung ist genauso schnell wie die Schwingung selbst. Nützlich für die Vermeidung von Schwingungen.
3. *Kriechfall*: $\omega_0^2 < k^2/4m^2$: der ausgelenkte Oszillator kehrt langsam, ohne zu schwingen, exponentiell zur Ruhelage zurück (»Kriechen«).

6.1.4 Erzwungene Schwingungen

Die bisher betrachteten Schwingungen sind *freie* Schwingungen, mit oder ohne Dämpfung – d. h., der Oszillator wird einmal »angestoßen« und läuft dann frei von äußeren Kräften weiter oder ist, wie im vorigen Abschnitt behandelt, gedämpft.

Ein wichtiger Fall, um Schwingungen trotz Dämpfung aufrechtzuerhalten, ist die *erzwungene* Schwingung, wobei eine zyklisch wirkende externe Kraft die Schwingung in Gang hält. Diese externe Kraft muß natürlich nicht stetig, sondern wiederkehrend wirken. Sie kann im Prinzip eine beliebige Form haben (z. B. das Stoßen einer Schaukel), jedoch ist der wichtigste Fall eine harmonische externe Kraft, d. h. eine Kraft mit einer zeitlichen Abhängigkeit der Sinus- oder Kosinusform:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{F}_0 \cos(\omega_{\text{ext}} t)$$

wo \mathbf{F}_0 die Stärke (Amplitude) der externen Kraft und ω_{ext} ihre Kreisfrequenz sind. Beide sind frei wählbar, unabhängig von dem Oszillator, auf den die Kraft wirkt.

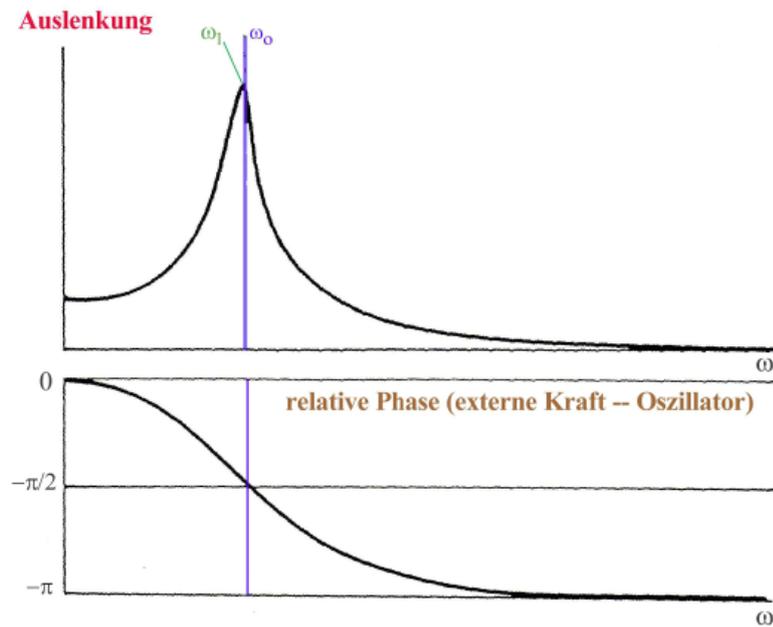


Abbildung 6.3. Die Auslenkung (Amplitude) und die relative Phase eines erzwungenen Oszillators im stationären Zustand als Funktion der externen Frequenz. Bei niedrigen Frequenzen »geht der Oszillator mit«, seine Auslenkung ist genauso groß, wie die Amplitude der externen Kraftquelle. Wenn die externe Frequenz gleich die Eigenfrequenz des Oszillators ist ($\omega_0/\omega_{\text{ext}} = 1$), ist die Leistungsübertragung optimal, es gibt eine »Resonanzüberhöhung« der Auslenkung. Die maximale Auslenkung findet man jedoch bei der gedämpften Frequenz, $\omega_{\text{ext}} = \omega_1$. Steigt die externe Frequenz noch weiter, so nimmt die Auslenkung wieder ab und geht gegen Null für hohe Frequenzen. Die relative Phase zwischen externer Kraftquelle und Oszillator ist Null für kleine Frequenzen, 90° bei Resonanz, und geht gegen 180° für große externe Frequenzen.

Die Schwingungsgleichung hat nun eine andere Form: Die Summe von rücktreibender Kraft, Trägheitskraft und Reibungskraft ist nicht mehr Null, sondern gleich der

externen Kraft:

$$\left(\frac{D}{m}\right) \mathbf{x}(t) + \left(\frac{k}{m}\right) \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \left(\frac{\mathbf{F}_0}{m}\right) \cos(\omega_{\text{ext}}t)$$

Die Lösung dieser Schwingungsgleichung ist komplizierter als bei der freien Schwingung. Sie besteht aus zwei Teilen:

1. *dem Einschwingen*: der Oszillator versucht, mit seiner Eigenfrequenz ω_0 zu schwingen; dies klingt mit der Dämpfungszeit τ ab ...
2. *dem stationären Zustand*: der Oszillator schwingt mit der von außen geprägten Frequenz ω_{ext} , die Amplitude und Phase der Schwingungen hängen von dem Verhältnis $\omega_0/\omega_{\text{ext}}$ sowie von der Dämpfung ab (siehe Abb. 6.3 auf der vorangehenden Seite).

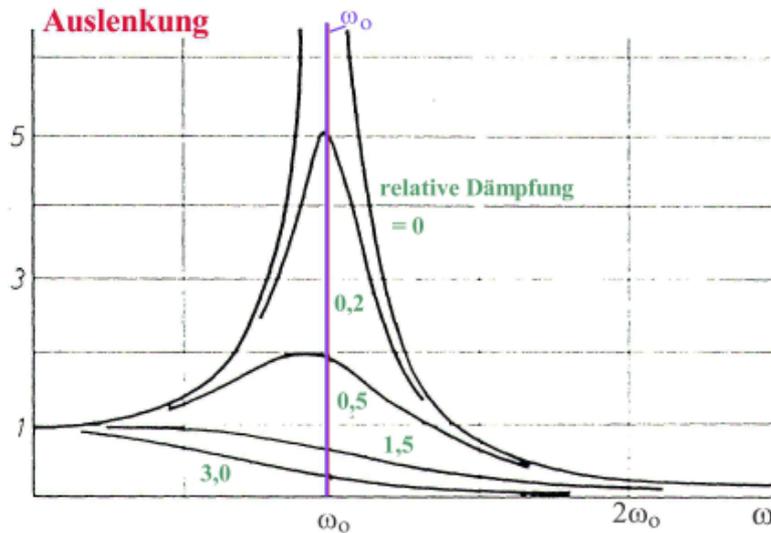


Abbildung 6.4. Die Auslenkung eines erzwungenen Oszillators der Eigenfrequenz ω_0 in Abhängigkeit der externen Frequenz ω für verschiedene relative Dämpfungsfaktoren k/\sqrt{mD} . Bei kleiner Dämpfung wächst die Auslenkung im Resonanzfall gegen Unendlich (Resonanzkatastrophe!). Bei großer Dämpfung gibt es keine Resonanzüberhöhung der Auslenkung mehr. Die Breite der Resonanzkurve wird geringer, wenn die Dämpfung kleiner wird.

6.1.5 Vergleich verschiedener Oszillatoren

Sehen Sie dazu Tabelle 6.2 auf der rechten Seite.

Tabelle 6.2. Vergleich von verschiedenen Oszillatoren (schwingungsfähigen Systemen)

Größe, Eigenschaft	Federpendel	Drehpendel	Fadenpendel (Länge l)
Auslenkung	Strecke $x(t)$	Winkel $\varphi(t)$	Winkel $\varphi(t)$ oder Bahnstrecke $s_B(t)$
rücktreibende Kraft	elastische (Feder-)Kraft $F = -Dx$	elastisches (Torsions-)Moment $M = -D^*\varphi$	Schwerkraft $F = -mg \sin \varphi$ (nicht harmonisch!)
Trägheit	Masse m	Trägheitsmoment Θ	Masse m
Dämpfung	Reibungskraft $F = -kv$	Torsionsreibung $M = -k^*\varphi$	Reibungskraft $F = -kv$
Lösung der Bewegungsgleichung	$x(t) = x_0 \sin[\omega_0 t + \varphi_0]$	$\varphi(t) = \varphi_0 \sin[\omega_0 t + \xi_0]$	$s_B(t) = s_0 \sin[\omega_0 t + \xi_0]$ oder $\varphi(t) = \varphi_0 \sin[\omega_0 t + \xi_0]$ (mit $\sin \varphi \approx \varphi$)
Kreisfrequenz ω_0 (Eigenfrequenz)	$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{D^*}{\Theta}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$
gedämpfte Frequenz ω_1	$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{4m^2}}$	$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^{*2}}{4\Theta^2}}$	$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{4m^2}}$

6.2 Wellenlehre

6.2.1 Gekoppelte Schwingungen

Werden zwei (oder mehr) harmonische Oszillatoren aneinander gekoppelt¹, dann führen sie eine komplexe Bewegung aus. Diese gekoppelten Schwingungen haben jedoch eine einfache Form, wenn die richtigen Anfangsbedingungen gewählt werden:

- wenn am Anfang die gesamte Schwingungsenergie in *einem* Oszillator gespeichert wird, entstehen sog. »Schwebungen«: die Schwingungsenergie wechselt zeitlich zwischen den einzelnen Oszillatoren hin und her;
- wenn alle Oszillatoren am Anfang mit einer festen Phasenbeziehung angeregt werden, entstehen *Normalschwingungen*. Dabei bewegen sich alle Oszillatoren synchron, mit der gleichen Frequenz; die niedrigste Frequenz entspricht der Grundschiwingung, wobei sich alle Oszillatoren zusammen bewegen. Es gibt so viele Normalschwingungen wie einzelne Oszillatoren im gesamten, gekoppelten System (»Anzahl der Freiheitsgrade«)

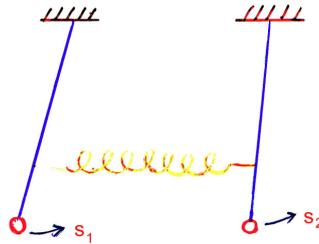


Abbildung 6.5. Zwei mit einer Feder gekoppelte Fadenpendel

Es gibt viele Beispiele für gekoppelte Schwingungen in der Natur. Relativ einfach sind die Schwingungen kleiner Moleküle (CO_2 , NH_3 usw.), die mit der Infrarot-Spektroskopie auch gemessen werden können. Auch alle Wellen können als gekoppelte Schwingungen angesehen werden, wobei sich die Schwingungsenergie durch eine Kette von aneinandergekoppelten Oszillatoren (das Medium der Wellenausbreitung) fortpflanzt (siehe Abb. 6.5). Beispiele: Gekoppelte Federpendel, gekoppelte Fadenpendel; Dreh- und lineare Schwingungen eines Federpendels.

6.2.2 Wellen, allgemeine Beschreibung

Wellen sind gewissermaßen »Schwingungen, die sich auf den Weg gemacht haben«. Eine Schwingung ist ortsgebunden, zeigt aber eine zyklische Änderung (Bewegung) in der Zeit. Wellen sind nicht nur in der Zeit, sondern auch im Ort zyklisch; sie erstrecken sich über einen größeren Ortsbereich bzw. breiten sich im Ortsbereich aus.

¹ z. B. Federpendel durch eine »Kopplungsfeder«

Wie auch bei den Schwingungen haben Wellen eine besonders einfache Form, wenn sie *harmonisch* sind, d. h. durch eine Sinus- oder Kosinusfunktion beschrieben werden können. Das Argument der Funktion enthält dann nicht nur die Zeitabhängigkeit, wie bei Schwingungen, sondern auch die Ortsabhängigkeit der Wellen.

Wellen haben ebenso wie Schwingungen eine Amplitude A_0 und eine Phase φ_0 , welche durch die Anfangsbedingungen gegeben sind. Außerdem sind sie charakterisiert durch eine Systemkonstante, die ihre Zeitabhängigkeit angibt (Schwingungsdauer T bzw. Frequenz $\nu = 1/T$ oder Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$). Wellen sind außerdem gekennzeichnet durch eine *zweite* Systemkonstante, die ihre Ortsabhängigkeit beschreibt – ihre Wellenlänge λ bzw. Wellenzahl $= 1/\lambda$ oder Wellenvektor $k = 2\pi/\lambda$):

$$\Psi(x, t) = A_0 \sin[\omega t - kx + \varphi_0]$$

$\Psi(x, t)$ wird Wellenfunktion genannt; sie beschreibt die Auslenkung der Welle als Funktion von Ort x und Zeit t . Diese Form gilt für eindimensionale, laufende Wellen, die sich in $+x$ -Richtung ausbreiten.

Zwischen den Systemkonstanten (die vom Medium bestimmt sind, in dem sich die Wellen ausbreiten) gibt es eine weitere Beziehung, die die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) u_φ der Wellen angibt:

$$u_\varphi = \lambda \nu = \frac{\omega}{k} \quad (\text{Grundgleichung der Wellenlehre})$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt also vom Medium ab.

6.2.3 Wellentypen

Wir unterscheiden verschiedene *Typen von Wellen*, je nachdem, wie die schwingende Größe zu der Ausbreitungsrichtung steht und wie sie sich ausbreiten:

- falls die schwingende Größe senkrecht zur Ausbreitung steht, sind es *transversale Wellen* (Wasserwellen, Lichtwellen)
- steht sie parallel dazu, sind es *longitudinale* Wellen (Schallwellen)
- Wellen, die sich in eine (oder mehrere) Richtung(en) ausbreiten und Energie transportieren, heißen *laufende* Wellen (Licht, Schall, ...)
- Wellen, die in einem fest abgegrenzten System schwingen und keine Energie transportieren, heißen *stehende* Wellen (akustische Wellen auf einer Geigensaite oder in einer Orgelpfeife)
- Wellen, bei denen die Amplitude überall gleich ist (senkrecht zur Ausbreitungsrichtung), heißen *ebene* Wellen; sie können durch Ebenen senkrecht zur Ausbreitung dargestellt werden
- Wellen, bei denen die Bereiche konstanter Amplitude auf Kugelflächen liegen, heißen *Kugelwellen* (z. B. Lichtwellen von einer Punktquelle)

Transversale Wellen können auch *polarisiert* sein: das heißt, ihre schwingende Größe schwingt in nur einer Ebene (anstatt in allen möglichen Richtungen) senkrecht zur Ausbreitung (bei Licht: *Linearpolarisation*).

Als Beispiel, um die Wellenausbreitung in einem Medium zu untersuchen, betrachten wir *transversale, laufende, eindimensionale* Wellen auf einem elastischen Seil (Gummiseil, siehe Abb. 6.6). Wir bezeichnen die Seilrichtung als x , die Auslenkungsrichtung des Seils (senkrecht zu x) als z . Wir wollen dann das Verhalten der Wellenfunktion $\Psi(x, t) \equiv z(x, t)$ berechnen.

Dazu teilen wir das Seil in beliebig viele sehr kleine Schnitte der Länge dx , die je eine Masse $dm = \rho_l dx$ haben (ρ_l = Masse pro Längeneinheit oder lineare Massendichte). Jeder Schnitt verhält sich wie ein harmonischer Oszillator. Nun berechnen wir die rücktreibende Kraft auf jedem Schnitt und setzen sie in die Newtonsche Bewegungsgleichung $F = ma$ ein. Die rücktreibende Kraft hängt von der Zugkraft Z ab, mit der



Abbildung 6.6. Die Welle am Beispiel der Seilwelle

das Seil gestreckt wird, aber auch von der Krümmung des Seils am jeweiligen Punkt. Ist die Krümmung Null (gerades Seil), so verschwindet die rücktreibende Kraft. Die Krümmung wird durch die 2. Ableitung der Seilkurve $z(x)$ gegeben:

$$\text{Krümmung} \equiv \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2}$$

und damit ist die rücktreibende Kraft $F_{\text{rü}}$ gegeben als:

$$F_{\text{rü}} = Z \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} dx$$

Die *Beschleunigung* während der Wellenbewegung ist die 2. zeitliche Ableitung der Auslenkung $z(t)$, d. h.

$$a = \frac{d^2 z}{dt^2} \equiv \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2}$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung, mit $m = \rho_l dx$, ergibt:

$$Z \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} dx = \rho_l \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} dx$$

oder, nach Kürzen des Faktors dx auf beiden Seiten der Gleichung,

$$Z \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = \rho_l \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2}$$

Dies nennt sich die **klassische Wellengleichung**; ihre Lösung ist die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$. Die Konstanten Z und ρ_l (Systemkonstanten) bestimmen die Ausbreitungsgeschwindigkeit u_φ :

$$u_\varphi^2 = \frac{Z}{\rho_l}.$$

6.2.4 Interferenz von Wellen, stehende Wellen

Finden mehrere Wellenbewegungen im selben Medium statt, so können diese durch Superposition, d.h. Überlagerung bzw. Addition der einzelnen Wellenbewegungen dargestellt werden.

Da die Wellenbewegung positive und negative Amplituden aufweist, kann diese Addition von einzelnen Wellenbewegungen zur Verstärkung oder auch Auslöschung der Bewegung oder der Schwingung führen. Diese Phänomene bezeichnet man als Interferenzerscheinung. Einfache Lösungen der Wellengleichung, die durch Interferenz hervorgerufen werden, sind stehende Wellen. Diese werden hervorgerufen, wenn zwei identische Wellen in entgegengesetzter Richtung aufeinander zulaufen und zur Überlagerung kommen:

$$\Psi_1(x, t) = A_0 \sin(\omega t - kx)$$

$$\Psi_2(x, t) = A_0 \sin(\omega t + kx + \varphi_0)$$

$$\text{mit } \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) = 2A_0 \sin\left(\frac{\omega t - kx + \omega t + kx + \varphi_0}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega t - kx - \omega t - kx - \varphi_0}{2}\right)$$

$$\Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) = 2A_0 \sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(-kx - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Dies ist keine fortschreitende Welle mehr, da der charakteristische Term mit $(\omega t - kx)$ in der Sinus- und Kosinusfunktion fehlt. Unabhängig vom Ort schwingen nun alle Teilchen in gleicher Phase (Sinusterm) und nur ihre Amplitude ist ortsabhängig (Cosinusterm).

Die Schwingungsknoten (Amplitude Null) und die Schwingungsbäuche (Amplitude maximal) sind ortsfest. Es berechnen sich die Positionen der Knoten und Bäuche für $\varphi = \pi$ und natürlichen Zahlen $n = 0, 1, \dots$ aus:

$$x_K = n \frac{\lambda}{2}$$

$$x_B = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}$$

Diese kann man gut auf einer schwingenden Saite oder an einem schwingenden Seil sehen, siehe Abb. 6.7.

Wird eine stehende Welle in einem einseitig geschlossenen Rohr erzeugt (z.B. Panflöte), so befindet sich ein Wellenknoten am geschlossenen Ende (Phasensprung von π) und ein Wellenbauch am offenen Ende (kein Phasensprung). Die Wellenlänge der Grundschiwingung des Rohres ($n=1$) ergeben sich aus $l = (2n - 1) \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4\nu}$, wobei l die Rohrlänge ist, siehe Abb. 6.8.

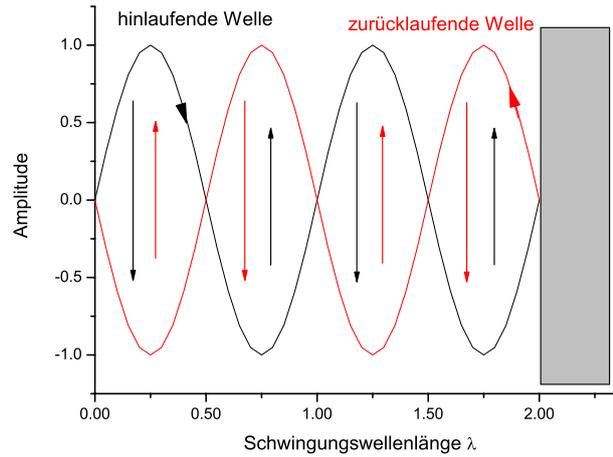


Abbildung 6.7. Interferenzerscheinung der stehenden Welle

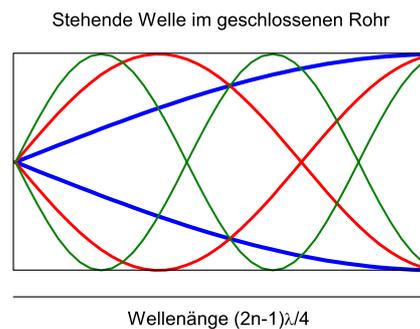


Abbildung 6.8. Stehenden Welle im einseitig geschlossenen Rohr

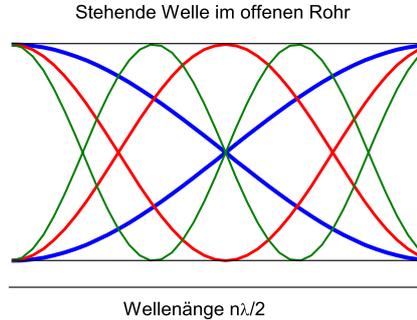


Abbildung 6.9. Stehenden Welle im offenen Rohr

Wird eine stehende Welle in einem beidseitig offenen Rohr erzeugt, so befinden sich an beiden Seiten des Rohres Wellenbäuche. Die Wellenlängen der Schwingungen des Rohres der Länge l ergeben sich zu $\lambda = \frac{2l}{n} = \frac{c}{\nu}$, siehe Abb. 6.9.

6.2.5 Fourier-Analyse

Bisher haben wir nur harmonische Schwingungen oder Wellen betrachtet: Diejenigen, die mit einer einfachen Sinus- oder Kosinusfunktion beschrieben werden können. In der Natur kommen jedoch viele periodische Vorgänge vor, die nicht harmonisch, sondern durch kompliziertere Funktionen zu beschreiben sind. Sie können trotzdem alle ähnlich behandelt werden, wie die harmonischen Phänomene, die wir bisher angeschaut haben.

Dies ist von dem Mathematiker J. FOURIER vor längerer Zeit gezeigt worden. Der *Satz von FOURIER* sagt, dass *jede* periodische Funktion, egal welcher Form, als Summe von Sinus- und/oder Kosinus-Funktionen beschrieben werden kann:

$$F(t) = \sum A(\omega_i) \sin(\omega_i t)$$

Hier ist $F(t)$ die (beliebige) periodische Zeitfunktion, die ω_i sind Frequenzen (eine Grundfrequenz ω_1 und Vielfache davon), die durch den Laufindex i numeriert sind, die $A(\omega_i)$ sind Amplituden (d. h. Zahlen, die die Wichtigkeit der jeweiligen Frequenzkomponenten ω_i angeben), und die Summe erfasst sovieler Frequenzen (Werte vom Laufindex i) wie nötig, um die Funktion $F(t)$ darzustellen.

Die Angabe der Frequenzen ω_i und Amplituden $A(\omega_i)$ für eine (z. B. gemessene) Funktion $F(t)$ nennt man »Fourier-Zerlegung«; umgekehrt kann man eine beliebige Funktion $F(t)$ durch Wahl der Amplituden und Frequenzen aufbauen – dies heißt »Fourier-Synthese«. Der Überbegriff für beide Verfahren ist die »Fourier-Analyse«. Das Ergebnis – in beiden Richtungen – nennt man eine »Fourier-Transformierte«.

Diese Verfahren sind in den letzten 20 Jahren – seitdem es preiswerte und leistungsfähige elektronische Rechner gibt – sehr wichtig geworden. Sie werden in der Strukturanalyse der Materie mittels Streuexperimenten (Elektronenstreuung, Neutronenstreuung, Röntgenstreuung), aber auch in der Spektroskopie² und vor allem bei bildgebenden Methoden³ verwendet, um die erhaltenen Informationen nutzbar zu machen.

Auch nicht-periodische Funktionen $G(t)$ können so analysiert werden – nur dann muß die Summe durch ein Integral ersetzt werden, die Frequenzen werden nun kontinuierlich variiert:

$$G(t) = \int A(\omega) \sin(\omega t) d\omega \quad \text{bzw.} \quad A(\omega) = \int G(t) \sin(\omega t) dt .$$

² Infrarot Schwingungs-Spektroskopie an Molekülen, magnetische Kernresonanz-Spektroskopie

³ Resonanz-Tomographie, Röntgen-Tomographie, Positron-Emissions-Tomographie

6.3 Akustik

Die Akustik behandelt die Erzeugung und Ausbreitung von Schallwellen. Der Schall ist eine longitudinale Welle, die sich in einem materiellen Medium ausbreitet (Luft, Wasser, Metall usw.). Er spielt eine besonders wichtige Rolle auch in den biomedizinischen Wissenschaften, weil Menschen und Tiere Sinnesorgane für die Aufnahme von Schallwellen besitzen. Wie bereits besprochen, hängt die Ausbreitungsgeschwindigkeit u von Schallwellen von zwei Eigenschaften des Mediums ab, von seiner »rücktreibenden Kraft« (durch den Kompressionsmodul bzw. Elastizitätsmodul bestimmt) sowie von seiner Trägheit (durch die Massendichte ρ bestimmt; vgl. Seilwellen).

In Medien, in denen sich der Schall dreidimensional ausbreitet, ist der Kompressionsmodul maßgebend:

$$u = \sqrt{\frac{K}{\rho}}.$$

Dies ist der Fall bei Gasen und Flüssigkeiten. In Gasen läßt sich der Kompressionsmodul K mit Hilfe der Zustandsgleichung (siehe Wärmelehre im Abschnitt 4, Seite 62) als Funktion des Drucks P ausdrücken: $K = P\kappa$ [wobei angenommen wird, dass die Schallausbreitung so schnell abläuft, dass kein Temperatenausgleich möglich ist (adiabatisch)]. Dann ist κ der sogenannte Adiabatenexponent ($\kappa \simeq 1,4$ für Luft)].

Da Dichte und Druck einander proportional sind, ergibt sich für die Schallgeschwindigkeit in Luft dann:

$$u = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M}}$$

Hier sind R die »allgemeine Gaskonstante«, T die absolute Temperatur und M die Molmasse des Gases (Zahlenwert für Luft bei 20 °C : $u = 343$ m/s).

Bei Schallausbreitung in z. B. einem Metallstab ist der Elastizitätsmodul E maßgebend, die Schallgeschwindigkeit ist gegeben durch

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

In festen Medien können auch transversale Schallwellen auftreten.

Die Größe, die als »Auslenkung« von einer Schallwelle angesehen werden kann, ist die lokale Dichte des Mediums: Die Welle besteht aus einer Folge von Verdichtungen und Verdünnungen entlang der Ausbreitungsrichtung. In Gasen sind Druck und Dichte einander proportional, so dass eine Schallwelle auch als Druckwelle in solchen Medien beschrieben werden kann.

6.3.1 Schallstärke und Lautstärke

Ein Maß für die Schallstärke in einer sich dreidimensional ausbreitenden Schallwelle ist die *Intensität* der Welle, definiert als die von der Welle übertragene Schallenergie pro Zeit und Fläche (die Schalleistung, die auf eine Fläche A fällt):

$$I = \frac{\Delta E}{A \Delta t}.$$

Unser Hörvermögen empfindet nicht direkt die Schallintensität; vielmehr ist die gehörte Lautstärke logarithmisch. Damit hat das Ohr eine große dynamische Skala, es kann über einen sehr großen Bereich von Schallstärken den Schall aufnehmen. Man definiert deshalb die Lautstärke β als Dezimal-Logarithmus der Schallintensität:

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

(Einheit »Dezibel (akustisch)« $\hat{=}$ dB_A). Hier ist I_0 die Schallintensität an der Hörschwelle, $I_0 = 10^{-12}$ W/m². Demnach ist die Lautstärke der Hörschwelle gegeben durch

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I_0}{I_0} \right) = 10 \log(1) = 0 \text{ dB}_A$$

und die Schmerzschwelle $I_S \hat{=}$ 1 W/m² durch

$$\beta = 10 \log 10^{12} = 120 \text{ dB}_A .$$

6.3.2 Akustische Schwebungen

Überlagert man zwei Schallwellen mit unterschiedlicher Frequenz, so entstehen Schwebungen (vgl. »gekoppelte Schwingungen«). Die beiden Wellen schwächen sich ab und verstärken sich abwechselnd; man hört dieses Auf und Ab als periodische Änderung der Lautstärke, die um so langsamer abläuft, je näher die beiden Frequenzen zueinander liegen. Mathematisch läßt sich dieses Phänomen als Überlagerung von zwei Sinus- oder Kosinuswellen beschreiben, so dass das Ergebnis als Produkt einer zeitabhängigen Amplitude mit einer »mittleren Welle« geschrieben werden kann:

$$\Psi(t) = \{2 A_0 \cos [\Delta\omega t]\} \sin[\langle w \rangle t] .$$

Die Wellenfunktion Ψ stellt hier entweder den Schalldruck oder die Dichte des Mediums dar (hier ist nur die Zeitabhängigkeit berücksichtigt, die Ortsabhängigkeit gehorcht aber auch einer ähnlichen Beziehung). Die Schwebungsfrequenz $\Delta\omega$ ist gegeben durch $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$ und wird sehr klein, wenn sich die beiden überlagerten Frequenzen sehr nah liegen; die mittlere Frequenz $\langle \omega \rangle$ ist der Mittelwert der überlagerten Frequenzen: $\langle \omega \rangle = (\omega_1 + \omega_2)/2$.

6.3.3 Ultraschall

Menschen hören in einem Frequenzbereich zwischen ca. 10 Hz und ca. 20 kHz. Schallwellen, die wesentlich höhere Frequenzen haben, heißen »Ultraschall«. Sie breiten sich in der Luft kaum aus, dafür aber in kondensierten Medien – Wasser oder feste Materie – mehr oder weniger gut. Sie können daher benutzt werden, um unsichtbare Strukturen innerhalb der Materie, z. B. auch innerhalb des menschlichen Körpers, zu untersuchen. Reflektion der Ultraschallwellen an inneren Strukturen führt nämlich zu Echos, die nachgewiesen und zu einem Bild verarbeitet werden können.

6.4 Elektromagnetische Wellen

6.4.1 Feldgleichungen bei zeitlich veränderlichen Feldern

Feldgleichungen (Maxwell-Gleichungen) Wie in Abschnitt 5.4.2 auf Seite 95 erwähnt, müssen die Feldgleichungen im Falle nicht statischer Felder noch modifiziert werden.

Zunächst ist das Faraday'sche Induktionsgesetz zu berücksichtigen; es ändert die Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes E . Ein elektrostatisches Feld muß wirbelfrei sein, da man sonst durch ewiges Kreisen einer Ladung ein *Perpetuum Mobile* bauen könnte, was den Energieerhaltungssatz verletzen würde. Bei einem zeitlich veränderlichen Feld ist dies jedoch kein Problem mehr, da die Veränderung des Feldes mit Arbeit verbunden ist, so dass die Energie nicht aus dem Nichts entstehen müsste. Die Induktionsspannung U_i kann mit Hilfe des Zusammenhangs zwischen Potentialdifferenz und elektrischem Feld als Integral des Feldes um eine geschlossene Kurve ausgedrückt werden:

$$U_i(t) = \oint_{K \text{ um } A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

so dass, mit dem Induktionsgesetz, $U_i(t) = -d\Phi/dt = -d/dt(\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A})$,

$$\oint_{K \text{ um } A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \left(\int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \right)$$

als erste Feldgleichung gilt. Der Kreis im Integralzeichen deutet an, dass das Wegintegral über einen geschlossenen Weg, nämlich die Umrandung der Fläche A , geht. Dies ist die allgemeine, integrale Form des Induktionsgesetzes; im zeitunabhängigen Fall wird die rechte Seite wieder gleich Null.

Zur Vervollständigung der Feldgleichungen muß das Ampèresche Gesetz (d. h. die zweite Feldgleichung, $\oint_{K \text{ um } A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_{(\text{durch } A)}$) auch ergänzt werden. J.C. MAXWELL bemerkte, dass sie bei zeitlich veränderlichen Vorgängen (z. B. der Entladung eines Kondensators in einem RC -Kreis) zu Widersprüchen führt, da die Fläche A so gewählt werden könnte, dass z. B. der Anschluss zum Kondensator, der den Entladestrom führt, diese Fläche nicht durchschneidet und der Strom $I_{\text{durch } A}$ scheinbar verschwinden würde; trotzdem entsteht ein Magnetfeld während des Stromflusses. Er schlug vor, einen zweiten, zeitabhängigen Term hinzuzufügen, analog der rechten Seite der Gleichung für das Induktionsgesetz: Im Kondensator während der Entladung existiert nämlich ein zeitabhängiges elektrisches Feld, der elektrische Fluss Φ_E durch die Fläche A zwischen den Kondensatorplatten ändert sich zeitlich:

$$\oint_{K \text{ um } A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_{(\text{durch } A)} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \right) .$$

Der Faktor ε_0 sorgt dafür, dass die Einheiten stimmen. Dieser Zusatzterm wird »Maxwellscher Verschiebungsstrom« genannt, er hat ohne den Vorfaktor μ_0 die Einheit

eines Stromes und spielt eine analoge Rolle zu der des freien Stromes I . Damit lauten die vier Feldgleichungen (ohne Materie aber mit Zeitabhängigkeit), die Maxwell'schen Gleichungen, wie folgt:

1. Induktionsgesetz für das E -Feld (Faradaysches Gesetz):

$$\oint_{K \text{ um } A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \left(\int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \right). \quad (6.1)$$

2. Ströme erzeugen das B -Feld (Ampèresches Gesetz plus Maxwell'scher Verschiebungsstrom):

$$\oint_{K \text{ um } A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_{(\text{durch } A)} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \right). \quad (6.2)$$

3. Ladungen sind Quellen des E -Felds (Gauß'sches Gesetz):

$$\oint_{A \text{ um } V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{(\text{in } V)} \quad (6.3)$$

4. Es gibt keine magnetischen Ladungen (Monopole), das B -Feld ist quellenfrei:

$$\oint_{A \text{ um } V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (6.4)$$

Diese Gleichungen sind fast symmetrisch bezüglich der Felder E und B ; die verbleibende Unsymmetrie resultiert daraus, dass elektrische Ladungen q (Monopole) existieren, magnetische Ladungen (sowie Ströme dieser Ladungen) jedoch nicht. Letztere sind nicht durch irgendein physikalisches Gesetz verboten, sie sind aber bis jetzt nie beobachtet worden. Die Gleichungen (6.1) und (6.2) können miteinander gekoppelt werden, so dass ein sich zeitlich änderndes E -Feld ein B -Feld aufbaut und umgekehrt; als Ergebnis erhält man zwei Wellengleichungen (hier eindimensional angegeben, vgl. im Abschnitt 6.4.3 auf Seite 128):

$$\frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial t^2}.$$

Diese beschreiben eine elektromagnetische Welle, in x -Richtung laufend, die aus senkrecht-(in y - bzw. z -Richtung) stehenden, sinusförmigen E - und B -Feldern besteht. (Die Bedingungen für die Feldrichtungen ergeben sich aus den anderen beiden Feldgleichungen.)

6.4.2 Allgemeine Eigenschaften elektromagnetischer Wellen

Elektromagnetische Wellen, Entstehung und Ausbreitung, das elektromagnetische Spektrum Die zweite Wellenart, außer Schallwellen, die direkt von menschlichen Sinnesorganen wahrgenommen werden kann, sind die Lichtwellen. Sie sind Beispiele für elektromagnetische Wellen und bilden einen (kleinen) Teil des elektromagnetischen Spektrums.

Im Gegensatz zu Schallwellen sind elektromagnetische Wellen nicht an ein materielles Medium gebunden – sie können sich auch in einem perfekten Vakuum ausbreiten. Sie sind auch nicht longitudinale, sondern transversale Wellen. Die »Auslenkungsgrößen« sind nicht mechanische Eigenschaften (wie z. B. der Druck oder die Dichte bei Schallwellen), sondern, wie der Name besagt, elektrische und magnetische Größen: genauer, ein elektrisches und ein magnetisches Feld.

Die Eigenschaften solcher Felder werden wir uns später genauer anschauen; zunächst reicht es zu wissen, dass sie Energie speichern können, und dass sie sich gegenseitig aufbauen können (wenn sie zeitabhängig sind, z. B. sinusförmig wie in einer harmonischen Welle).

Elektromagnetische Wellen sind tatsächlich harmonisch, sie bestehen aus sinusförmigen elektrischen und magnetischen Feldern, welche senkrecht zueinander und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen (daher *transversale* Wellen!). Diese Felder schwingen in der Zeit mit der Frequenz ν (bzw. der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$) und wiederholen sich als Funktion des Orts entlang der Ausbreitungsrichtung nach der Wellenlänge λ (bzw. Wellenvektor $k = 2\pi/\lambda$).

Es gilt die übliche Grundgleichung der Wellenlehre:

$$c = \lambda \nu = \frac{\omega}{k},$$

bei der c die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) der Wellen ist. Sie ist wiederum eine Funktion der Konstanten des Mediums.

Bei Ausbreitung im Vakuum ist das »Medium« eben dieses Vakuum: es hat eine elektrische Eigenschaft (die »Durchlässigkeit« oder »Permittivität« für elektrische Felder, ausgedrückt durch die »elektrische Feldkonstante« ε_0), sowie eine magnetische Eigenschaft (die »Permeabilität« für magnetische Felder, gegeben durch die entsprechende »magnetische Feldkonstante« μ_0).

In Analogie zu mechanischen Wellen (z. B. Seilwellen) kann man den Kehrwert der Konstanten ε_0 als eine Art »rücktreibende Kraftkonstante« (für elektrische Ladungen) und die Konstante μ_0 als eine Art »Trägheitskonstante« (für die Bewegung von elektrischen Ladungen) bezeichnen. Es folgt für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Sie ist eine Naturkonstante (sogar die bestbekannte Naturkonstante) und hat den Zahlenwert 299 792 456,2 m/s (also etwa 1 Million mal schneller als der Schall in Luft).

Diese Geschwindigkeit gilt für alle Arten von elektromagnetischen Wellen im Vakuum [d. h. für Licht, aber auch für Radiowellen, Mikrowellen (Radar), »Millimeterwellen«, infrarotes Licht (»Wärmestrahlung«), ultraviolettes Licht, Röntgenstrahlen und Gammastrahlen]. In Materie kommen die entsprechenden materialspezifischen Konstanten dazu (die »relative Permittivität« oder »Dielektrizitätskonstante« ϵ_r sowie die »relative Permeabilität« μ_r). Beide sind üblicherweise ≥ 1 , so dass die sich ergebende Geschwindigkeit

$$c_M = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}}$$

kleiner als c (im Vakuum) ist. Das Verhältnis $N = c/c_M$ ist auch eine Eigenschaft der Materie und nennt sich Brechungsindex oder Brechzahl:

$$N = \frac{c}{c_M} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \geq 1.$$

Wir werden sie in der Optik verwenden können.

6.4.3 Entstehung elektromagnetischer Wellen

Ebenso wie Seilwellen durch eine Beschleunigung von Seilabschnitten oder Schallwellen durch die Beschleunigung von Materieteilchen (Atomen oder Molekülen im Medium) entstehen, kommen elektromagnetische Wellen durch beschleunigte elektrische Ladungen zustande.

Diese Ladungen können in einzelnen Atomen gebunden sein (Lichtemission durch elektronische Energieübergänge in Atomen oder Molekülen), sie können im freien Raum sein (schwingende Elektronen im Vakuum in einem Radarsender [Klystron] oder in Materie [schwingende Ladungen in einer Sendeantenne]), sie können selbst die Ladungen im Atomkern sein (Emission von Gammastrahlen durch einen angeregten Kern).

Die elektromagnetischen Wellen gehorchen einer Wellengleichung, genau derjenigen, die wir für die Seilwellen hergeleitet haben. Für das elektrische Feld E lautet sie (eindimensional):

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{c^2}\right) \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Die Konstante c ist wieder die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen im Vakuum.

6.4.4 Das elektromagnetische Spektrum

Das elektromagnetische Spektrum erstreckt sich über viele Größenordnungen in ν und λ , und entsprechend in der Energie der Wellen (die proportional ν ist), siehe dazu Abb. 6.10 auf der gegenüberliegenden Seite.

Die Art und Größe des »Wellengenerators«, welcher die Wellen ausstrahlt, sind auch sehr unterschiedlich: Für langwellige Radiowellen ist er eine Antenne von mehreren

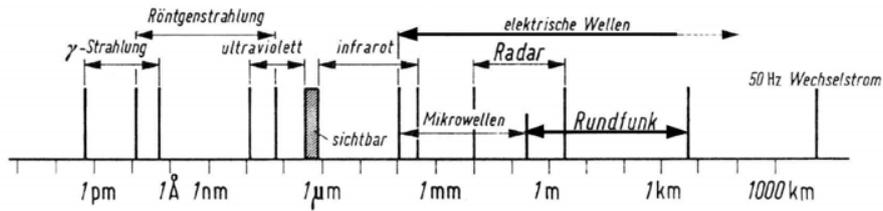


Abbildung 6.10.

hundert Meter Länge; für Mikrowellen eine Vakuumröhre von einigen cm Durchmesser; für Licht einzelne Atome oder Moleküle; und für γ -Strahlen einzelne Atomkerne. Grundsätzlich gilt aber:

Beschleunigte Ladungen strahlen Energie in Form von elektromagnetischen Wellen aus.

6.4.5 Polarisation elektromagnetischer Wellen

Eine transversale Welle hat ihre Schwingungsrichtung (z. B. den E -Feldvektor einer Lichtwelle) senkrecht zur Ausbreitungsrichtung \mathbf{k} . Es gibt jedoch beliebig viele Ebenen, die senkrecht zu einem gegebenen \mathbf{k} stehen. Wenn die Schwingungsrichtungen von Wellen wahllos über diese möglichen Ebenen verteilt sind, heißen sie *unpolarisierte Wellen* (Beispiel: »natürliches« Licht: Sonnenlicht oder Licht von einer thermischen Quelle). Findet dagegen die Schwingung in nur einer bestimmten Ebene statt, spricht man von einer *polarisierten Welle* (in diesem Falle: linearpolarisiert, siehe Abb. 6.11 auf der nächsten Seite).

Eine beliebige linearpolarisierte Welle lässt sich als Überlagerung zweier polarisierter Wellen mit senkrecht zueinanderstehenden Amplituden (E_σ, E_π) und ohne Phasendifferenz (oder mit der Phasendifferenz $\Delta\varphi = n\lambda/2, n = 0, 1, 2, \dots$) darstellen. Die Amplitude der resultierenden Welle ergibt sich als Vektorsumme der beiden Amplituden E_σ und E_π , ihr Betrag und ihre Richtung hängen von der relativen Größe von E_σ und E_π ab.

Als Beispiel kann hier ein Polarisator für Mikrowellen angeführt werden. Dieser besteht aus einem Gitter von parallelen Drähten, die nicht miteinander leitend verbunden sind. Fällt eine elektromagnetische Welle auf das Gitter ein, so regt die Komponente des E -Vektors, die entlang der Richtung der Drähte liegt, eine Schwingung der Ladungen in diesen Drähten an, die zu einer Energieumwandlung in Wärme durch den Ohmschen Widerstand der Drähte führt; dadurch geht dieser Komponente der Welle Energie verloren, sie wird absorbiert. Die Komponente der Welle mit E -Vektor senkrecht zu den Drähten wird dagegen nicht absorbiert und geht durch das Gitter ungeschwächt hindurch.

Eine weitere Art der Polarisation entsteht, wenn die Wellen E_σ und E_π mit einer Phasenverschiebung von $\Delta\varphi = \lambda/4$ überlagert werden: Die Amplitude der resultie-

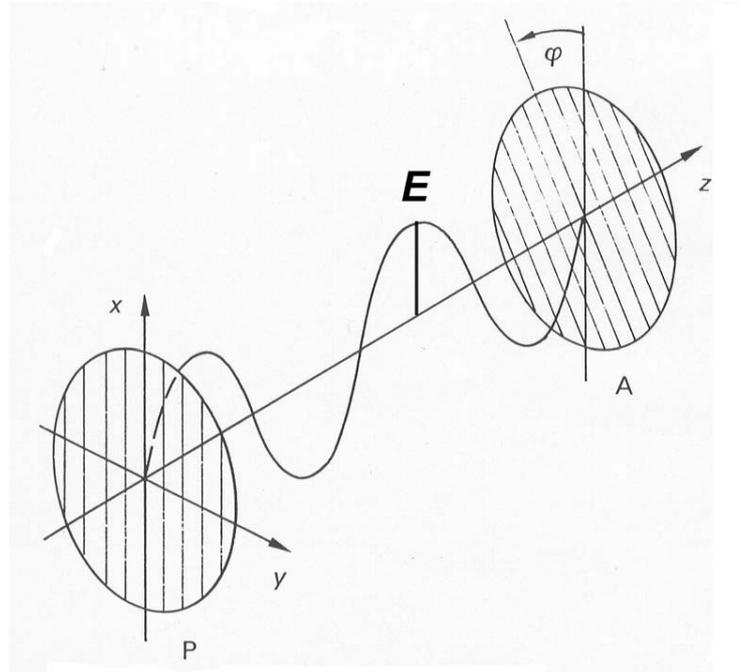


Abbildung 6.11. Darstellung einer linearpolarisierten elektromagnetischen Welle: Die Welle breitet sich in $+z$ -Richtung aus, ihr elektrischer Feldvektor E schwingt nur in $\pm x$ -Richtung aufgrund des »Polarisators« P . Eine eventuelle Drehung der Polarisationssebene ist als Winkel φ in der A (»Analysator«) -Ebene angezeigt

renden Welle dreht sich um die \mathbf{k} -Achse einmal pro Schwingung, wobei ihr Betrag konstant bleibt. Dies nennt man eine *zirkulare* Polarisation. Je nach Drehsinn (d. h. $\Delta\varphi = +\lambda/4$ oder $-\lambda/4$) wird sie als *rechts-zirkular-polarisierte* oder *links-zirkular-polarisierte* Welle bezeichnet (*rhc* bzw. *lhc*; Konventionen!). Eine zirkularpolarisierte Welle überträgt nicht nur Energie und Linearimpuls, sondern auch Drehimpuls (siehe Abb. 6.12 auf der gegenüberliegenden Seite).

Ist die Phase $0 < \Delta\varphi < \lambda/4$, so dreht sich die Amplitude und ändert ihren Betrag gleichzeitig; dies wird als *elliptische* Polarisation bezeichnet. Überlagert man zwei zirkularpolarisierte Wellen (*rhc* + *lhc*), so entsteht wieder eine linearpolarisierte Welle, deren Polarisationssebene von der Phasendifferenz der beiden überlagerten Wellen abhängt.

6.4.6 Beugung und Interferenz

Eine wesentliche Eigenschaft von Wellen aller Art – d. h. auch von Lichtwellen – ist ihre Fähigkeit, sich zu überlagern, was zu den Phänomenen der Interferenz und der Beugung führt.

Wellen – auch elektromagnetische Wellen – können sich *überlagern*. Falls sie die (an-

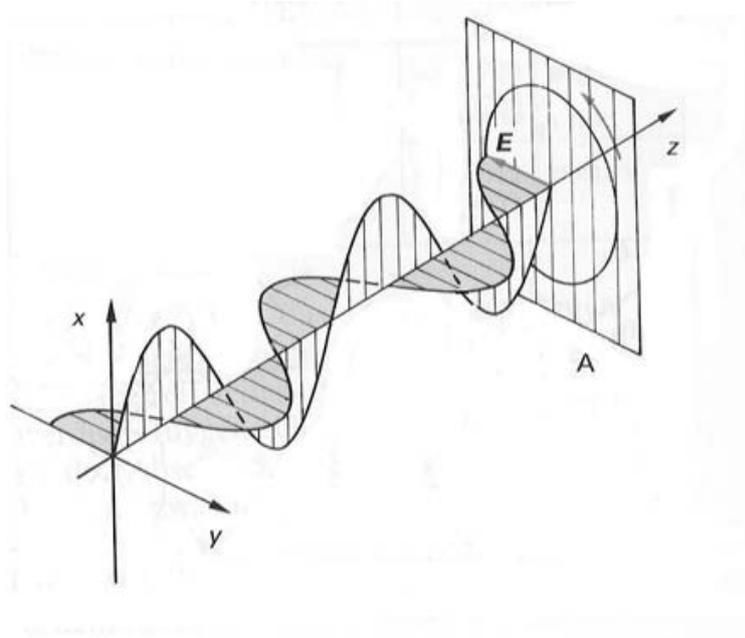


Abbildung 6.12. Eine zirkularpolarisierte Lichtwelle, die sich in $+z$ -Richtung ausbreitet: Zwei linear polarisierte Wellen E_σ und E_π , mit ihren elektrischen Feldvektoren senkrecht zueinander, haben eine relative Phasenverschiebung von $\Delta\varphi = -\lambda/4$. Der resultierende elektrische Feldvektor E dreht sich nach links während der Wellenausbreitung (abgebildet in der Ebene A), d. h. im Sinne einer Linksschraube. Dies entspricht einer *lhc*-Polarisation nach der physikalischen Konvention, einer *rhc*-Polarisation nach der optischen Konvention.

nähernd) gleiche Frequenz und Wellenlänge haben, entsteht dabei eine *neue Welle*, die – je nach Phasenbeziehung der sich überlagernden Wellen – *verstärkt* oder *abgeschwächt* ist.

Dieses Phänomen nennt man *Interferenz*; die Verstärkung (die auftritt, wenn die Phasenverschiebung einer ganzen Wellenlänge entspricht, d. h. $\Delta\varphi = \lambda n$, $n = 0, 1, 2 \dots$) heißt *konstruktive Interferenz*, die Auslöschung (die auftritt, wenn $\Delta\varphi = \lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2, \dots$, d. h. eine halbe Wellenlänge) heißt *destruktive Interferenz*. Wellen, die interferenzfähig sind (d. h. Wellen mit fester Phasenbeziehung und gleicher Frequenz) werden *kohärente Wellen* genannt.

Lassen wir Wellen auf ein Hindernis fallen, welches einen Teil der Wellenfront durch Absorption oder Reflexion am Weiterlaufen hindert, den Rest aber durchlässt, so erscheint am Rande des durchgelassenen Strahls die sogenannte *Beugung*: der Strahl läuft nicht nur geradeaus, sondern wird seitlich zu den Rändern vom Hindernis *abgelenkt*.

Dies kann man sich durch die Huygenssche Konstruktion (siehe Abb. 6.13 auf der nächsten Seite) klarmachen: Demnach stellt jeder Punkt einer Wellenfront (eigentlich reichen Punkte, die jeweils um $\lambda/2$ voneinander entfernt sind) den Ausgangspunkt einer

neuen Elementarwelle dar. Die Elementarwellen breiten sich kreis- oder kugelförmig aus, sie heben sich durch Interferenz in allen Richtungen auf, bis auf die ursprüngliche Ausbreitungsrichtung. Dort bildet die Einhüllende der Elementarwellen die neue Wellenfront. Wenn die Welle ein Hindernis trifft, werden einige Elementarwellen ausgeschaltet, die verbleibende Welle ist an den Rändern gekrümmt (siehe Abb. 6.13).

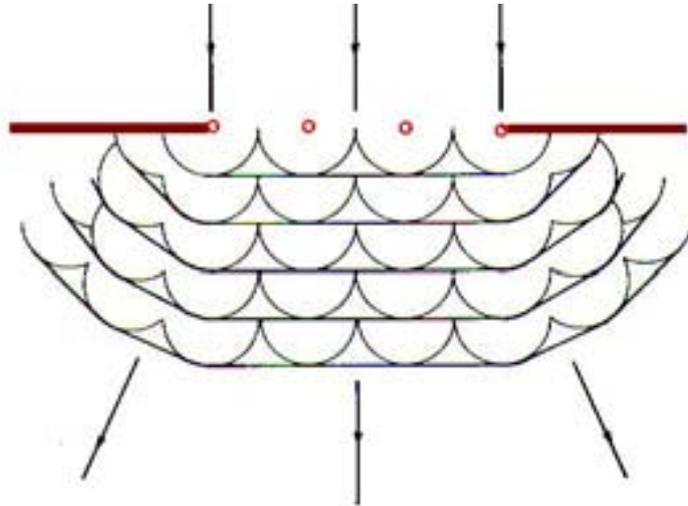


Abbildung 6.13. Huygenssche Konstruktion: Die von oben ankommenden Wellen lassen sich durch Elementarquellen (o) darstellen; jede Elementarquelle sendet eine Kugelwelle aus, die Überlagerung dieser Kugelwellen bildet die neue Wellenfront. Am Rand des Hindernisses werden die Wellen abgelenkt (Beugung).

Wenn die Welle durch einen Spalt der Breite $d \leq \lambda/2$ geht, bleibt nur eine Elementarwelle, sie breitet sich hinter dem Spalt kreis- oder kugelförmig aus. Wenn $d > \lambda/2$, gibt es mehrere Elementarwellen, die miteinander interferieren. Dabei haben die einzelnen Elementarwellen einen Gangunterschied Δ , sie sind gegeneinander phasenverschoben. Bei der Überlagerung entstehen daher konstruktive oder destruktive Interferenzen, je nach Gangunterschied (siehe Abb. 6.14 auf der gegenüberliegenden Seite). Am weit entfernten Bildschirm entsteht ein Beugungsmuster (helles zentrales Maximum, mehrere nach außen schwächer werdende Nebenmaxima = »Beugungsringe oder -streifen«)

6.4.7 Beispiele für Beugung/Interferenz

Die Interferenz bezieht sich auf Überlagerung kohärenter Wellen, d. h. Wellen, die annähernd gleiche Frequenzen bzw. Wellenlängen und eine feste Phasenbeziehung haben.

Mit Beugung bezeichnen wir die Richtungsänderung, die eine laufende Welle erfährt, wenn sie an einem Hindernis vorbeikommt: Einer Kante, einem Spalt, einer runden Öffnung. Beugung und Interferenz treten oft gemeinsam auf, da die gebeugten Teilwellen sich überlagern und interferieren können. Es gibt (u.a.) drei wichtige Fälle:

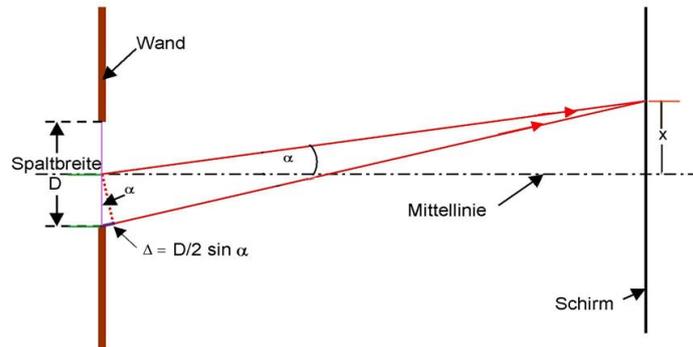


Abbildung 6.14. Gangunterschied von zwei Elementarwellen: zwei Strahlen, die um einen Winkel α an einem Spalt der Breite D abgelenkt werden und sich auf einem (weit entfernten) Schirm am Ort x von der Mittellinie entfernt treffen, haben einen Gangunterschied Δ ; er beträgt hier $(D/2) \sin \alpha$ (ähnliche Dreiecke)

1. Doppelspalt-Interferenz (siehe Abb. 6.15): Eine Welle passiert zwei Spalte S_1 und S_2 , die im Abstand d zueinander stehen und jeweils so schmal sind, dass nur *eine* Elementarwelle von jedem Spalt ausgeht. Die Verteilung der Amplituden

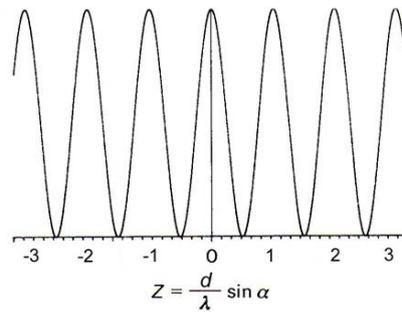


Abbildung 6.15. Doppelspalt-Interferenz

in der Beobachtungsebene ist kosinusförmig; die Maxima sind gegeben durch die Bedingung

$$\sin \alpha_{\text{Max}} = n \frac{\lambda}{d} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

2. Beugung an einem breiten Spalt (siehe Abb. 6.16 auf der folgenden Seite): Eine Welle passiert einen Spalt, der so breit ist, dass viele Elementarwellen von ihm durchgelassen werden. Diese Teilwellen interferieren miteinander und geben in der Beobachtungsebene ein Beugungsmuster mit einem breiten zentralen Maximum und schwächeren Nebenmaxima. Die Amplitudenverteilung auf dem

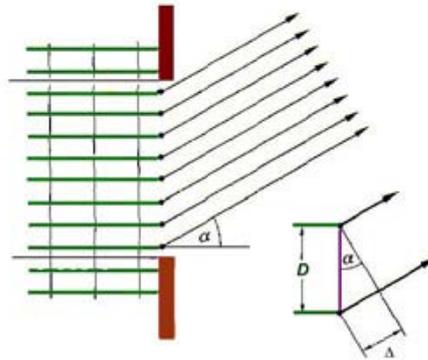


Abbildung 6.16. Durch den breiten Spalt laufen viele Parallelstrahlen, die alle um den Winkel α abgelenkt werden; das kleine Bild zeigt den Gangunterschied $\Delta = D \sin \alpha$ zwischen den Randstrahlen. Die Strahlen (jeder stellt eine Elementarwelle dar) treffen sich am Bildschirm und erzeugen dort Interferenzen

Bildschirm hat die Form $[\sin \Delta\Phi]/\Delta\Phi$, wo $\Delta\Phi$ die gesamte Phasenverschiebung (d.h. die von den Randstrahlen) ist. Der Winkel, bei dem das erste Minimum auftritt, ist gegeben durch:

$$\sin \alpha_{\text{Min}} = \pm n \frac{\lambda}{D} \quad (n = 1),$$

wobei D die Spaltbreite angibt (siehe auch Abb. 6.17 auf der rechten Seite).

3. Beugung am Gitter (siehe Abb. 6.18 und Abb. 6.19): Wir haben nun eine große Anzahl von Einzelspalten (N pro Längeneinheit), die nebeneinander stehen, jeweils mit dem Abstand g ($g \hat{=}$ »Gitterkonstante«, d.h. $g = 1/N$). Die Teilwellen von den Spalten geben in der Beobachtungsebene scharfe, gut getrennte Hauptmaxima (0., 1., 2. ... Ordnung). Die Bedingung für ein Maximum der n . Ordnung in der Beobachtungsebene ist dann:

$$\sin \alpha_{\text{Max}} = n \frac{\lambda}{g}.$$

Beugung am Gitter hat eine wichtige Anwendung in der Wellenlängenbestimmung (Spektroskopie in verschiedenen Bereichen, auch in der Astronomie) sowie zur Strukturbestimmung von Molekülen und Kristallen (das »Beugungsgitter« ist dann das mikroskopische Kristallgitter, man verwendet kurzwellige Strahlung wie Röntgenstrahlung, Elektronen oder Neutronen).

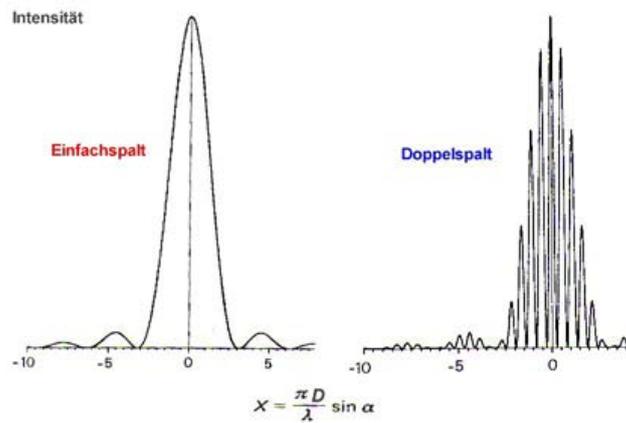


Abbildung 6.17. Beugungsbilder: Links das Bild von einem Einzelspalt der Breite $D \gg \lambda/2$. Die Intensitätsminima treten für $x = \pm\pi, 2\pi, 3\pi \dots$ auf, entsprechend der Bedingung $\sin \alpha_{\text{Min}} = n\lambda/D$, mit $n = \pm 1, 2, 3 \dots$; rechts das Bild von zwei gleichen Spalten; zum Beugungsbild (einhüllende Kurve) kommt ein Interferenzmuster der Strahlen von den beiden Spalten (kosinusförmige Änderung der Amplitude entsprechend dem Abstand d der beiden Spalten)

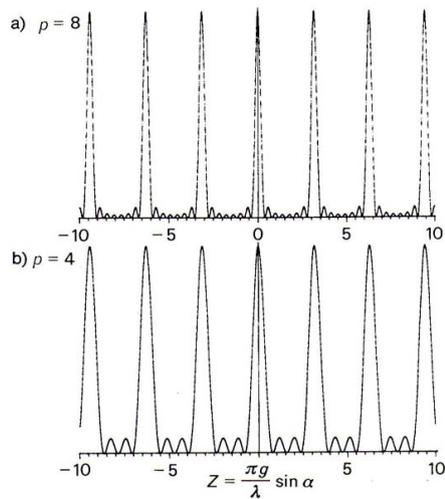


Abbildung 6.18. Beugung am Gitter, dargestellt für zwei verschiedene Gitter; oben (a) für $p = 8$ Einzelspalte, unten (b) für 4 Spalte. Es bilden sich Hauptmaxima aus, die restlichen Maxima im Interferenzbild werden mit wachsendem p zunehmend schwächer. Bei $p = 4$ ist jedes 3. Maximum ein Hauptmaximum, bei $p = 8$ jedes 7. Maximum usw.

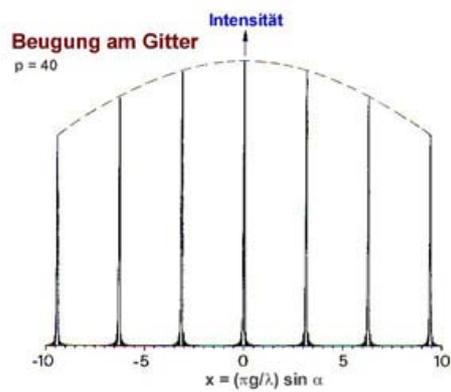


Abbildung 6.19. Gitterbeugung von einer großen Anzahl von Einzelspalten ($p = 40$). Die Hauptmaxima sind nun sehr scharf und intensiv, die Nebenmaxima fast unsichtbar. Die einhüllende Kurve (gestrichelt) entspricht dem Beugungsbild der einzelnen Spalte.

7 Optik

7.1 Reflexion und Brechung

Wie wir bereits gesehen haben, besteht sichtbares Licht aus elektromagnetischen Wellen. Unter „Optik“ versteht man im engeren Sinn das Verhalten von elektromagnetischen Wellen mit einer Frequenz von $\nu = 10^{14} \dots 10^{15}$ Hz. Das Gebiet der Optik ist daher eigentlich nur ein Teilgebiet des Themas „Schwingungen und Wellen“. Wir werden es jedoch aus den nachfolgenden Gründen dennoch als eigenständiges Gebiet behandeln:

1. Wir haben ein Sinnesorgan für elektromagnetische Wellen in diesem Frequenzbereich, unser Auge, das für die Wahrnehmung unserer Umgebung das wichtigste ist.
2. Aufgrund ihrer kurzen Wellenlänge (400...800 nm) können optische Wellen leicht mit Blenden, Spiegeln, Prismen, Linsen etc. geformt, abgelenkt und damit gesteuert werden.
3. Das Strahlungsfeld der optischen Wellen lässt sich leicht auch räumlich modulieren, man erhält eine räumliche Abbildung.
4. Der Dualismus Welle/Teilchen ist an optischen Wellen besonders gut zu beobachten.

7.1.1 Optische Elemente

Optische Elemente fallen (grob gesagt) in drei Gruppen: *Spiegel*, *Prismen* und *Linsen*. Sie wechselwirken mit den Lichtstrahlen durch zwei Phänomene: die *Reflexion* und die *Brechung*. Beide finden im Prinzip bei jedem Übergang eines Lichtstrahls von einem Medium zum anderen statt.

Die Reflexion eines Lichtstrahls ähnelt dem voll-elastischen Stoß eines Teilchens mit einer flachen Wand: Die Impulskomponente senkrecht zur Wand wird umgekehrt, die Komponenten parallel zur Wand bleiben unverändert. Das Ergebnis ist ein reflektierter Strahl, der *in einer Ebene* mit dem einfallenden Strahl sowie der Flächennormale (»Einfallslot«) liegt, und den gleichen Winkel mit dem Lot bildet (»Ausfallswinkel γ «), wie der einfallende Strahl (»Einfallswinkel α «; siehe Abb. 7.1 auf der folgenden Seite).

Die Brechung (siehe Abb. 7.2 auf Seite 139) findet statt, wenn der einfallende Strahl (teilweise) in das zweite Medium eindringt (transparentes Medium!), dort aber eine andere Ausbreitungsgeschwindigkeit hat als im ersten Medium.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c (im Vakuum) wird von den elektromagnetischen Eigenschaften des Vakuums (ϵ_0 , »elektrische Elastizität« des Vakuums; μ_0 , »elektrische Trägheit« des Vakuums) bestimmt.

Ein anderes Medium als das Vakuum hat andere Eigenschaften als Träger der elektromagnetischen Wellen (relative Dielektrizitätszahl ϵ_r , relative Permeabilitätszahl μ_r).

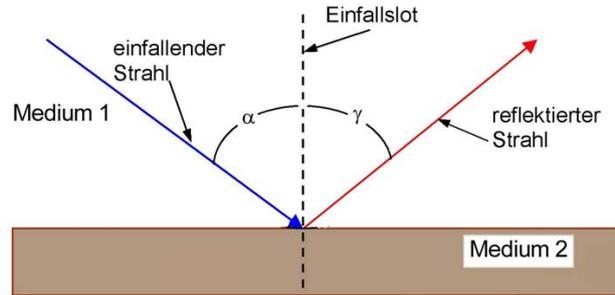


Abbildung 7.1. Reflexion eines Lichtstrahls

Diese multiplizieren die Konstanten ε_0 und μ_0 und ergeben somit die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium, c_M :

$$c_M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$$

Eine Änderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit hat auch eine Änderung der Wellenlänge λ zur Folge (aufgrund von $c = \lambda\nu$; die Frequenz ν bleibt konstant!). Außerdem ändert sich die Ausbreitungsrichtung, wenn der einfallende Strahl nicht senkrecht auf die Grenzfläche trifft.

Dies kann man mit geometrischen Modellen verstehen (Aufreffen der Wellenfronten, marschierende Soldaten, Prinzip der kürzesten Durchlaufzeit). Da die Konstanten ε_r und μ_r des Materials von der Lichtfrequenz abhängen, ist die Brechung auch frequenzabhängig (Dispersion): Licht höherer Frequenz (bzw. kürzerer Wellenlänge) wird stärker gebrochen!

Den Brechungswinkel kann man mit Hilfe der SNELLIUS-Formel berechnen:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_{M1}}{c_{M2}} = \frac{N_2}{N_1}$$

wobei α der Einfallswinkel und β der Winkel des gebrochenen Strahls zum Einfallslot sind, und M_1 bzw. M_2 bezeichnen die beiden Medien. Die dimensionslosen Zahlen N_1 und N_2 werden »Brechzahlen« oder »Brechungsindizes« genannt; sie sind definiert als das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum zur Lichtgeschwindigkeit c_M im Medium:

$$N_1 = \frac{c}{c_{M1}} .$$

Mit der obigen Formel für die Lichtgeschwindigkeit sieht man, dass

$$N = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$$

gilt. Da die Permeabilität μ_r für alle transparenten Medien etwa gleich 1 ist, wird oft als gute Näherung $N = \sqrt{\varepsilon_r}$ gesetzt.

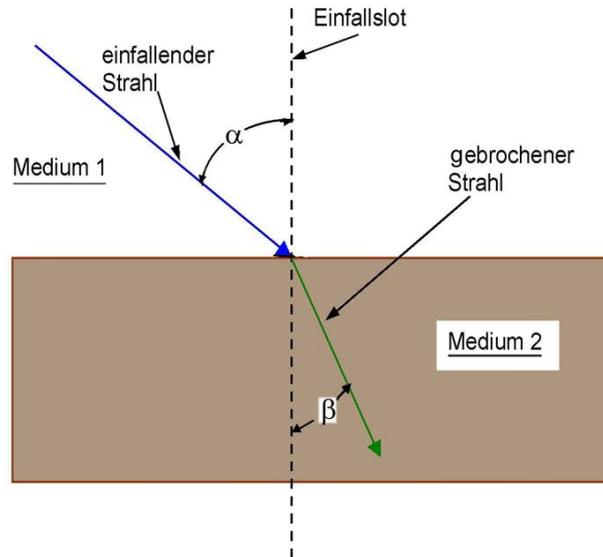


Abbildung 7.2. Brechung eines Lichtstrahls

Beide Phänomene – Reflexion und Brechung – können mit Hilfe eines Dipol-Modells mit der Wellentheorie des Lichtes in Einklang gebracht werden. Dabei wird in der Materie die Anwesenheit von elementaren (elektrischen) Dipolen (in Wahrheit die Atome und Moleküle) vorausgesetzt. Der einfallende Strahl (Primärstrahl) regt sie zu erzwungenen Schwingungen an, die schwingenden Dipole strahlen wieder Sekundärstrahlen ab. Der reflektierte Strahl besteht aus solchen Sekundärstrahlen, der gebrochene Strahl aus der Überlagerung des Primärstrahls mit vorwärtsgerichteten Sekundärstrahlen. Mit diesem Modell kann man auch die Polarisierung von reflektierten Strahlen erklären.

7.2 Geometrische Optik

Um das Verhalten von Licht in der makroskopischen Welt zu beschreiben, insbesondere um die Funktionsweise von optischen Instrumenten zu verstehen, reicht ein idealisiertes Bild der Lichtausbreitung aus: wir vergessen die Wellennatur des Lichts und betrachten die Ausbreitung von (gedachten) *Strahlen* oder Strahlenbündel. Diese sind (beliebig dünne) Linien, die senkrecht zu den Wellenfronten des Lichtes stehen und sich geradlinig ausbreiten, außer bei Wechselwirkung mit optischen Elementen.

7.2.1 Reflexion und Brechung an gekrümmten Flächen

Die obigen Betrachtungen der Reflexion und Brechung gelten zunächst für ebene Grenzflächen. Wenn wir optische Elemente mit gekrümmten Grenzflächen (Hohlspiegel, Linsen) verwenden, können einfallende Lichtstrahlen in einen Brennpunkt gesamt-

melt bzw. zerstreut werden. Dies bildet die Basis aller bildgebenden optischen Instrumente, angefangen mit dem menschlichen Auge.

Gekrümmte Flächen heißen *konvex*, wenn sie nach außen gewölbt sind; sie heißen *konkav*, wenn sie nach innen gewölbt sind. Ein konkaver Spiegel (Hohlspiegel) bündelt einfallende Lichtstrahlen in einen Brennpunkt, er *sammelt* sie durch Reflexion.

Linsen sind symmetrisch gekrümmte Körper aus transparentem Material – Glas oder Kunststoff – die Lichtstrahlen durch Brechung sammeln oder zerstreuen. Ihre Brechungsindizes N sind höher als der des umgebenden Mediums (meistens Luft).

- Bikonvexe Linsen (in der Mitte dicker) wirken immer als Sammellinsen;
- bikonkave Linsen (in der Mitte dünner) wirken immer als Zerstreuungslinsen;
- konkavo-konvexe Linsen (z. B. Brillengläser) können Sammellinsen oder Zerstreuungslinsen sein, je nach dem, ob sie in der Mitte dicker oder dünner sind als am Rande.

Als Beispiel betrachten wir den Fall einer *Sammellinse*. Zur Vereinfachung nimmt man üblicherweise an, dass die Brechung der Lichtstrahlen, die in Wirklichkeit an zwei Grenzflächen geschieht (hintere und vordere Fläche der Linse) nur einmal – in der sog. Hauptebene der Linse – stattfindet. (Diese Näherung gilt für dünne Linsen, deren Dicke am Mittelpunkt viel kleiner als der Durchmesser ist.) Die Symmetrieachse durch den Linsenmittelpunkt und senkrecht zur Hauptebene heißt »optische Achse« der Linse (siehe Abb. 7.3).

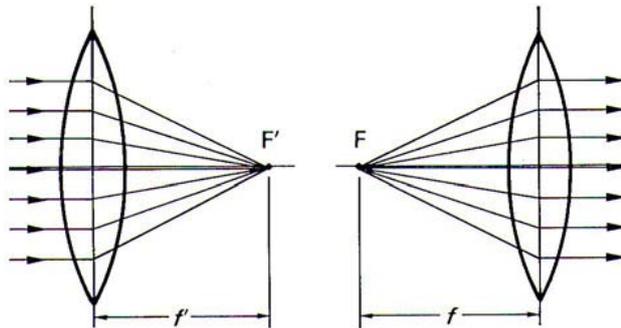


Abbildung 7.3. Zwei Sammellinsen: links kommen parallele Strahlen von der Vorderseite der Linse, sie werden im hinteren Brennpunkt F' gesammelt; rechts kommen Strahlen von einer Punktquelle am vorderen Brennpunkt F , sie werden zu Parallelstrahlen hinter der Linse (Linse als Kondensor).

Eine (dünne) Sammellinse bricht von vorne einfallende achsenparallele Strahlen so, dass sie durch den hinteren Brennpunkt F' gehen. Die Entfernung des Brennpunktes vom Linsenmittelpunkt nennt man die Brennweite f . Der Kehrwert der Brennweite ist ein Maß für die Stärke der Linse, er heißt Brechkraft D :

$$D = \frac{1}{f} \quad (\text{Einheit: dioptrie} \equiv 1/\text{m}, 1 \text{ dpt} \hat{=} 1 \text{ m}^{-1}).$$

Die Brechkraften dünner Linsen, die hintereinander aufgestellt sind, addieren sich einfach, solange sie nicht zu weit auseinander stehen (Brechung an einer einzigen Hauptebene):

$$D_{\text{ges}} = D_1 + D_2 .$$

Bei größeren Entfernungen der Linsen muss ein Korrekturterm eingefügt werden.

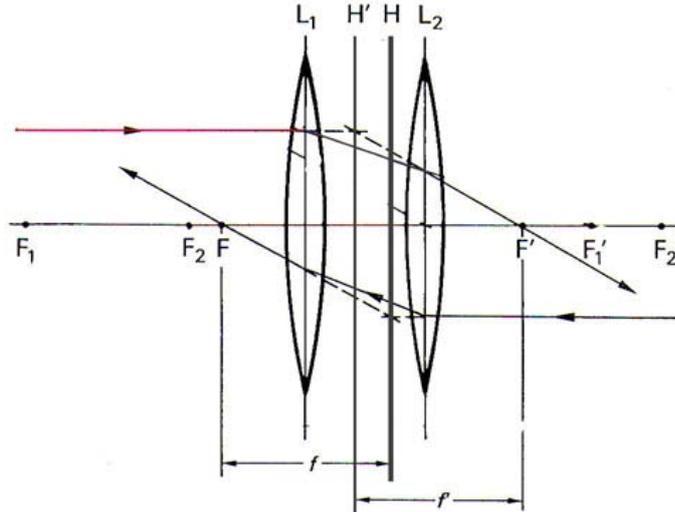


Abbildung 7.4. Zwei Linsen hintereinander auf der gleichen optischen Achse. Von links kommende Strahlen (Pfeile) brechen an den beiden Hauptebenen L_1 und L_2 ; dies kann als Brechung durch eine einzige, stärkere Linse mit der Hauptebene H' und Brennweite f' aufgefasst werden. Strahlen von rechts werden scheinbar an der Hauptebene H gebrochen

Zerstreuungslinsen brechen einfallende Parallelstrahlen so, dass sie auf der hinteren Seite der Linse auseinandergehen (*divergente* Strahlen); ihre rückwärtigen Verlängerungen treffen sich jedoch vor der Linse am vorderen Brennpunkt F . Die Brennweite f ist daher negativ, ebenfalls die Brechkraft D . Die Kombination einer Sammellinse und einer Zerstreuungslinse gibt eine Linse mit kleinerer Brechkraft.

Die Bildentstehung bei einer Sammellinse zeigt Abbildung 7.5 auf der nächsten Seite. Man benutzt zur Konstruktion des Strahlengangs drei Strahlen, die von einem Punkt des abzubildenden Gegenstandes ausgehen:

1. einen achsenparallelen Strahl, der von der Linse zum Brennpunktstrahl gebrochen wird;
2. einen Mittelpunktstrahl, der ungebrochen weiterläuft;
3. sowie einen Brennpunktstrahl (durch den vorderen Brennpunkt F), der auf der Hinterseite der Linse zum Parallelstrahl wird.

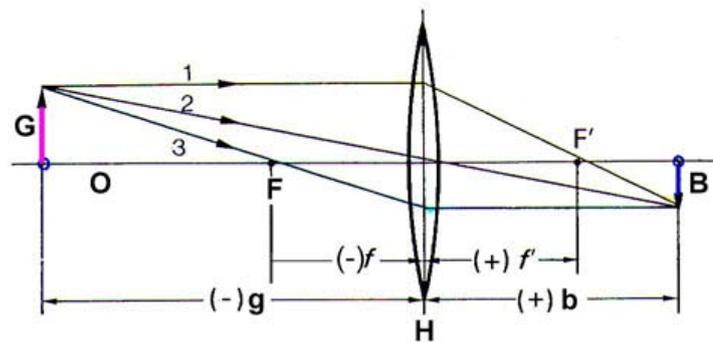


Abbildung 7.5. Abbildung durch eine Sammellinse der Brennweite f und Brechkraft $D = 1/f$, mit optischer Achse O und Hauptebene H . Im Abstand $(-)g$ vor der Hauptebene steht ein Gegenstand der Größe G ; er wird hinter der Linse als reelles Bild der Größe B im Abstand b abgebildet.

Die Entfernung des Gegenstandes vom Linsenmittelpunkt auf der vorderen Seite der Linse heißt »Gegenstandsweite« g , seine Größe »Gegenstandsgröße« G ; die Entfernung des Bildes (vordere oder hintere Seite) ist die »Bildweite« b , seine Größe die »Bildgröße« B . Diese hängen mit der Brechkraft $1/f$ der Linse über die Abbildungsgleichung zusammen:

$$D = \frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}.$$

Darüberhinaus gilt die Vergrößerungsgleichung:

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g}$$

(Beide lassen sich durch einfache trigonometrische Überlegungen herleiten; s. Skizze zum Strahlengang.) Wir können drei Fälle unterscheiden:

1. $g \geq 2f$, der Gegenstand ist außerhalb der doppelten Brennweite. Das Bild (s. Abbildungsgleichung) ist bei $f \leq b \leq 2f$, es ist umgekehrt, reell, und verkleinert (ein reelles Bild kann auf einem Bildschirm geworfen werden). Dies ist der Fall z. B. beim Fernrohr und bei der Augenlinse.
2. $f \leq g \leq 2f$, der Gegenstand ist zwischen der einfachen und der doppelten Brennweite. Das Bild ist bei $b \geq 2f$, es ist umgekehrt, reell, und vergrößert. Dies gilt z. B. für eine Projektionslinse oder bei der Objektivlinse des Mikroskops.
3. $g \leq f$, der Gegenstand ist innerhalb der einfachen Brennweite. Das Bild ist virtuell, aufrecht, und vergrößert, $b < 0$, die Strahlen auf der Vorderseite der Linse sind divergent. Das virtuelle Bild kann nur durch eine weitere Fokussierung der Strahlen gesehen werden (z. B. durch die Augenlinse). Dies gilt bei der Lupe.

Anwendungen werden im nächsten Abschnitt 7.3 behandelt.

7.3 Optische Instrumente

7.3.1 Das menschliche Auge

Das menschliche Auge ist ein optisches Instrument mit einer relativ komplexen Struktur (siehe Abb. 7.6). Die Brechung geschieht bei einer Reihe von Übergängen zwischen verschiedenen Medien (Luft – Hornhaut, Hornhaut – Kammerwasser, Kammerwasser – Linse, Linse – Glaskörper).

An der hinteren Wand ist der »Lichtdetektor«, die Netzhaut (retina), welche die Lichtrezeptoren enthält. Diese reagieren mit Nervenimpulsen auf Lichteinstrahlung und stellen die »Bildpunkte« im gesehenen Bild dar. Damit ein Gegenstand scharf gesehen wird, muß ein (reelles) Bild davon auf die Netzhaut geworfen werden. Dies geschieht durch die kombinierte Wirkung der verschiedenen brechenden Medien im Auge (siehe Abb. 7.6). Die Lichtstärke wird durch die Größe der Pupillengröße gere-

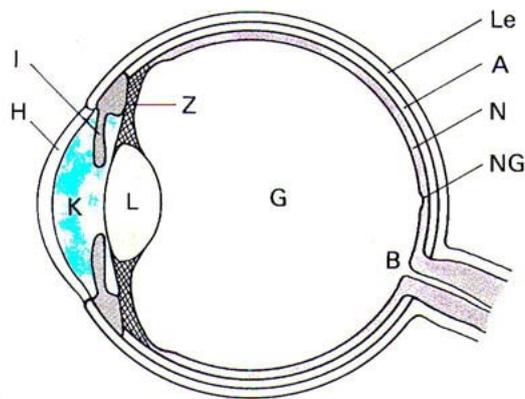


Abbildung 7.6. Schnitt durch ein Auge. Die Hornhaut *H* bildet die erste brechende Fläche; dahinter befindet sich das Kammerwasser *K*. Die Öffnung zur Linse *L* ist variabel (Pupillengröße) und begrenzt durch die Iris *I*. Die Linse ändert ihre Krümmung (Akkommodation), je nach Spannung der Ziliarmuskulatur *Z*. Hinter der Linse befindet sich der Glaskörper *G*. Die Nervenrezeptoren (Zapfen, Stäbchen) sind in der Netzhaut *N* angeordnet. Den Außenkörper des Auges bilden die Lederhaut *Le* und die Aderhaut *A*. Der Ausgang der Sehnerven befindet sich am »blinden Fleck« *B*, die größte Dichte der Zapfen in der Netzhautgruppe *NG* (fovea), wo ein Bild am schärfsten wahrgenommen wird.

gelt (Rückkopplungs-Mechanismus, genannt »Dunkeladaptation«). Die Bildschärfe wird durch Änderung der Brechkraft der Augenlinse eingestellt (»Akkommodation«); diese wird wiederum durch Straffung der Ziliarmuskulatur und Spannung oder Entspannung der Linsenkapsel bewirkt. Im entspannten Zustand ist das Auge »auf Unendlich« akkomodiert. Parallel einfallenden Strahlen werden auf der Netzhaut gebündelt, die Bildweite b ist gleich die Augentiefe (ca. 22 mm) bei unendlicher Gegenstandsweite ($b = f, D = 1/f = 1/b$, d. h. D beträgt ca. 45,5 dpt.). Etwa die Hälfte dieser Brechkraft entsteht vor und nach der Linse, die Brechkraft der Linse selbst im entspannten Zustand beträgt ca. 22 dpt.

Bei der Betrachtung eines nahen Objektes ($g \simeq s_0 =$ »mindest deutliche Sehweite« oder »konventionelle Sehweite«, definiert als 250 mm) muß die Brechkraft des Auges entsprechend der Abbildungsgleichung zunehmen, damit b weiterhin der Augentiefe von 22 mm entspricht. Aus der Gleichung finden wir $D = 1/f = 1/b + 1/g = 1/0,022 + 1/0,250 = 49,5$ dpt.

Die zusätzliche Brechkraft muß durch die Linse aufgebracht werden, sie erhöht ihre Brechkraft von etwa 22 auf 26 dpt. Bei älteren Menschen verliert die Linse an Flexibilität, man wird »weitsichtig«, da diese Brechkrafterhöhung nicht mehr möglich ist.

Bei einem Menschen, der an Kurzsichtigkeit (myopia) leidet, ist die Gesamtbrechkraft des Auges zu hoch (oder der Augapfel zu lang), so dass beim entspannten Auge das Bild vor der Netzhaut entsteht. Dies bedeutet, dass entfernte Objekte nicht mehr scharf gesehen werden können; andererseits wird die mindest deutliche Sehweite s_0 kleiner, der Mensch kann Objekte noch näher betrachten als ein Normalsichtiger. Er hat eine »eingebaute Lupe« (Korrektur: Zerstreuungslinse von typisch -1,5 bis -4,5 dpt als Brille oder Kontaktlinse).

Bei Weitsichtigkeit ist der Augapfel zu kurz bzw. die Brechkraft vom Auge zu gering. Der Mensch kann auf ferne Objekte leicht akkomodieren, jedoch werden Objekte in seiner Nähe nicht mehr scharf gesehen; die mindest deutliche Sehweite s_0 ist größer als beim Normalsichtigen (Korrektur: Sammellinse von typisch 1,5 bis 3 dpt).

7.3.2 Die Lupe

Eine Lupe ist eine einfache Sammellinse von mittlerer Brennweite, typisch zwischen 20 mm und 50 mm. Sie dient dazu, Objekte noch näher zu betrachten, als bei der deutlichen Sehweite s_0 , welche für das bloße Auge gilt, möglich ist. Das Objekt wird innerhalb der Brennebene ($g \leq f$) der Lupe gehalten. Damit sind die durch die Lupe tretenden Lichtstrahlen parallel bzw. divergent, es wird ein virtuelles Bild hinter der Lupe (im Unendlichen, falls $g = f$) erzeugt.

Das Auge kann dieses Bild im völlig entspanntem Zustand betrachten. Die effektive Vergrößerung Γ der Lupe ist definiert mit Hilfe des Sehwinkels δ (da kein reelles Bild entsteht, kann man die Bildgröße B nicht verwenden). Der Sehwinkel ist ein Maß für die scheinbare Größe des Objektes bei einem bestimmten Abstand.

Die Vergrößerung einer Lupe wird durch Vergleich des Sehwinkels δ definiert, mit dem der Gegenstand *mit* und *ohne* die Lupe gesehen wird. Ohne Lupe, wenn der Gegenstand aus der mindest deutlichen Sehweite s_0 betrachtet wird, ist der Sehwinkel durch $\tan \delta_0 \simeq G/s_0$ ($G =$ Gegenstandsgröße) gegeben. Mit der Lupe wird per Konvention das Objekt in der Brennebene gehalten, so dass die durch die Lupe fallenden Strahlen parallel sind, das Auge ist auf unendlich akkomodiert. Der Sehwinkel ist dann vergrößert, er beträgt $\tan \delta' \simeq G/f$ ($f =$ Brennweite der Lupe; siehe Abb. 7.7 auf der gegenüberliegenden Seite).

Das Verhältnis δ'/δ_0 gibt die Vergrößerung Γ an; wenn man davon ausgeht, dass beide Sehwinkel bei einem kleinen Gegenstand klein sein werden, gilt als gute Näherung

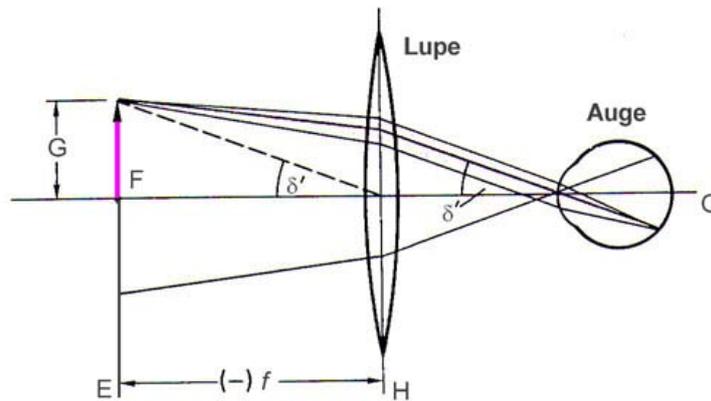


Abbildung 7.7. Wirkungsweise einer Lupe. Der Gegenstand (Größe G) steht in der Brennebene der Lupe, die von ihm ausgehenden Strahlen werden zu Parallelstrahlen. Diese werden durch das (entspannte) Auge betrachtet, wobei ein reelles Bild auf der Netzhaut entsteht. Der Betrachter »sieht« ein virtuelles, vergrößertes Bild im Unendlichen, mit dem Sehwinkel δ' .

$\tan \delta \approx \delta$, so dass

$$\Gamma = \frac{\delta'}{\delta_0} \approx \frac{\left(\frac{G}{f}\right)}{\left(\frac{G}{s_0}\right)} = \frac{s_0}{f}.$$

Die Vergrößerung ist einfach das Verhältnis der deutlichen Sehweite zur Brennweite der Lupe (z. B. 250 mm/50 mm = 5x für $f = 50$ mm; gilt für einen Gegenstand in der Brennebene der Lupe).

7.3.3 Das Mikroskop

Das Mikroskop soll eine stärkere Vergrößerung liefern, als mit der Lupe allein möglich wäre (siehe Abb. 7.8 auf der nächsten Seite). Dazu werden zwei Sammellinsen verwendet: Die erste (das »Objektiv«) hat eine kurze Brennweite und wird als Projektionslinse eingesetzt, um ein vergrößertes, umgekehrtes, reelles Zwischenbild vom Gegenstand zu erzeugen, wobei sich der Gegenstand zwischen der ersten und der zweiten Brennweite befindet (siehe Seite 142, Fall 2).

Dieses Zwischenbild wird dann durch die zweite Linse (»Okular«) betrachtet, wobei diese als Lupe benutzt wird, das Zwischenbild liegt in ihrer Brennebene. (Bei Projektionsmikroskopen wird das Zwischenbild knapp außerhalb der Brennebene der 2. Linse gestellt, es wird wieder ein vergrößertes, reelles Bild z. B. auf eine Photoplatte oder einen Bildschirm geworfen).

Die Gesamtvergrößerung des Mikroskops ist das Produkt der Vergrößerungen der einzelnen Linsen. Die Lage des Zwischenbildes ist durch die Konstruktion des Mikroskops (»Tubuslänge« t) festgelegt (siehe Abb. 7.8).

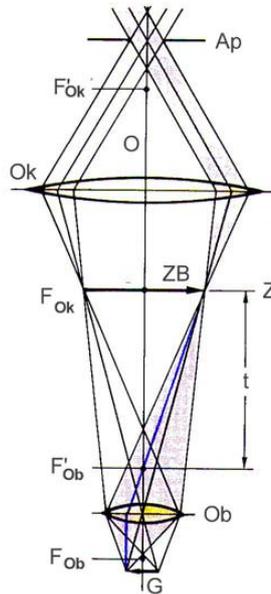


Abbildung 7.8. Mikroskop (schematisch): der Gegenstand der Größe G liegt knapp außerhalb der 1. Brennweite der Objektivlinse Ob auf der optischen Achse O . Die Objektivlinse wirft das Zwischenbild der Größe ZB in der Ebene Z , welche um die Tubuslänge t vom hinteren Brennpunkt F'_{Ob} des Objektivs entfernt ist ($t \simeq \text{typ. } 200 \text{ mm}$). Z ist gleichzeitig die Brennebene der Okularlinse Ok ; diese wirkt als Lupe und wirft parallele Lichtstrahlen vom Zwischenbild ins Auge des Betrachters (durch die Apertur Ap).

Es gilt (aus ähnlichen Dreiecken):

$$\frac{G}{f_{Ob}} = \frac{ZB}{t},$$

wo f_{Ob} die Brennweite des Objektivs, t die »Tubuslänge« und ZB die Größe des Zwischenbildes sind. Damit ist die Vergrößerung des Objektivs $\Gamma_1 = ZB/G = t/f_{Ob}$. Die Vergrößerung Γ_2 des Okulars ist gegeben durch die Vergrößerung einer Lupe, $\Gamma_2 = s_0/f_{Ok}$. Die Gesamtvergrößerung ist dann $\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 = t s_0 / f_{Ob} f_{Ok}$ (typischer Wert: $200 \cdot 250 / (4 \cdot 10) = 1250 \times$, alle Größen in mm). Man könnte sie scheinbar beliebig groß machen, indem man die Brennweiten der Linsen sehr klein und die Tubuslänge des Instruments sehr groß wählte. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass diesem grundsätzliche Grenzen gesetzt sind.

Das selbe Prinzip wie beim Mikroskop (Erstellen eines reellen Zwischenbilds durch eine Objektivlinse, Betrachten durch eine Lupe) liegt auch dem Fernrohr zugrunde. Während beim Mikroskop eine möglichst kleine Brennweite und eine große Tubuslänge für eine möglichst hohe Vergrößerung sorgen, will man beim Fernrohr weit entfernte Gegenstände verkleinert abbilden, wobei aber der Sehwinkel, unter dem ein Betrach-

ter den Gegenstand sieht, vergrößert ist. Hier sind möglichst große Brennweiten der Objektivlinse von Vorteil.

7.3.4 Auflösungsvermögen

Das räumliche Auflösungsvermögen – die Fähigkeit, kleine Einzelheiten im betrachteten Gegenstand zu unterscheiden – des Auges und von anderen optischen Instrumenten ist beugungsbegrenzt; durch Beugung an der Augenöffnung (Pupille) erscheinen Punkte im Gegenstand als Beugungsscheibchen im Bild, die nur voneinander unterschieden (aufgelöst) werden können, wenn das Beugungsmaximum des zweiten Punkts im 1. Minimum des ersten Punkts liegt (oder weiter entfernt ist: dies nennt man das Rayleighsche Kriterium). Für den Winkelunterschied α ergibt sich $\sin \alpha = \frac{\lambda}{d}$, wobei d der Durchmesser der Objektivöffnung ist. In diesem Fall ist der Winkel α sehr klein, so dass näherungsweise gilt:

$$\alpha \approx \frac{\lambda}{d}.$$

Für eine Lichtwellenlänge von 600 nm und eine runde Pupillenöffnung vom Durchmesser $d = 4$ mm ergibt sich ein Mindestwinkel zwischen zwei auflösbaren Punkten von $1,5 \cdot 10^{-4}$ rad, entsprechend einem Abstand auf der Netzhaut von ca. $3 \mu\text{m}$. Der tatsächliche Abstand der Rezeptoren liegt in dieser Größenordnung, da noch dichtere Bildpunkte zu keiner weiteren Verbesserung der Auflösung führen würden (siehe Abb. 7.9).

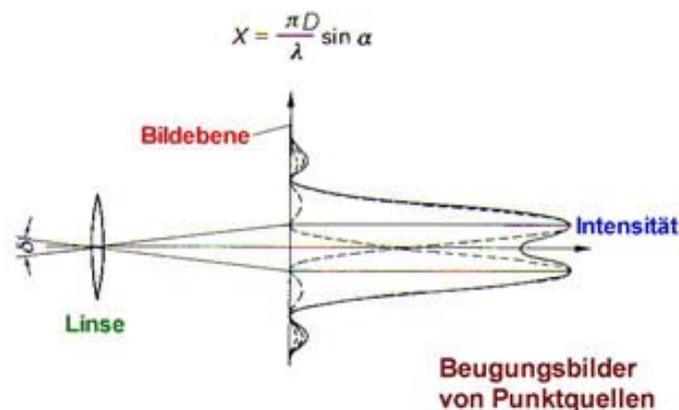


Abbildung 7.9. Auflösung von zwei Punkten im Gegenstand (Mindestsehinkel δ nach dem Rayleighschen Kriterium). Die Punkte werden in der Bildebene (z. B. auf der Netzhaut im Auge) jeweils als Beugungsbilder abgebildet; die Breite der Beugungsbilder hängt von der Größe der Öffnung (Pupille, Linse) sowie von der Lichtwellenlänge λ ab. Wenn die Beugungsbilder zu stark überlappen, »verschmelzen« die beiden Punkte im Bild, sie können nicht mehr aufgelöst werden. Hier ist das Beugungsmaximum des 2. Punkts genau im 1. Minimum des Beugungsbildes des 1. Punkts, entsprechend dem Rayleighschen Kriterium.

Beim Mikroskope ist die maximal nutzbare Vergrößerung auch durch die Beugung begrenzt: Das Auflösungsvermögen des Mikroskops ist definiert als $A = 1/d$, $d \hat{=}$ dem kleinsten auflösbaren Abstand zwischen zwei Punkten im Gegenstand. Dieser Abstand ist begrenzt durch die Breite der Beugungsscheibchen, welche die beiden Punkte im Zwischenbild erzeugen. Anstelle des Rayleighschen Kriteriums (siehe oben) verwendet man für das Mikroskop das Abbesche Kriterium:

$$d \geq \frac{\lambda}{A_N},$$

wobei A_N die »numerische Apertur« des Objektivs ist:

$$A_N = N \sin \varepsilon,$$

mit $N \equiv$ Brechungsindex des Mediums zwischen Gegenstand und Objektiv (Verkleinerung der Wellenlänge λ im Medium mit $N > 1$!) und $\varepsilon \equiv$ halber Öffnungswinkel des Objektivs vom Gegenstand aus gesehen ($\tan \varepsilon \approx R/f_{\text{Ob}}$, $R =$ Radius des Objektivs).

Praktisch ist $A_N \approx 1$, so dass $d \geq \lambda$; durch Beugung ist der kleinste auflösbare Abstand von einem konventionellen Lichtmikroskop etwa gleich der Lichtwellenlänge, typisch 600 nm. Um kleinere Objekte abbilden zu können, muss man also Wellen kleinerer Wellenlänge benutzen, z.B. Elektronen.

7.3.5 Spektralapparate

Ein Spektralapparat dient dazu, Licht (oder andere Strahlung) in seine Frequenz- bzw. Wellenlängenkomponenten zu zerlegen. Zwei gängige Methoden verwenden entweder die Dispersion bei der Brechung (Wellenlängenabhängigkeit des Brechungsindex N) in einem Prismenspektrometer oder die Wellenlängenabhängigkeit der Beugung in einem Gitterspektrometer. Ein Spektrometer registriert die Intensität als Funktion der Strahlungsfrequenz bzw. Wellenlänge (Spektrum); ein Spektrograph erzeugt ein Bild des Spektrums, z. B. auf einer Photoplatte; ein Monochromator trennt eine bestimmte Frequenz- oder Wellenlängenkomponente aus dem vorhandenen Spektrum heraus (siehe Abb. 7.10 auf der rechten Seite).

Abbildung 7.10 auf der gegenüberliegenden Seite zeigt einen Gittermonochromator schematisch: Mit Hilfe eines Reflexionsgitters G wird das durch den Eintrittsspalt E einfallende weiße Licht in seine Spektralfarben zerlegt, die einzeln auf den Austrittsspalt A fokussiert werden können. Die Auswahl der Wellenlänge geschieht durch Drehung des Gitters. Die Spektralauflösung $\lambda/\Delta\lambda$ eines Spektralapparats bezeichnet seine Fähigkeit, zwei benachbarte Wellenlängen (λ und $\lambda + \Delta\lambda$) zu trennen; $\Delta\lambda$ ist die kleinste Wellenlängendifferenz, die noch aufzulösen ist. Die Abbildung 7.11 auf der rechten Seite zeigt die Trennung bei der 1. und der 2. Ordnung des Gitterbeugungsbildes.

Wenn wir das Rayleighsche Kriterium für die Auflösung der Hauptmaxima der beiden Wellenlängen anwenden, erhalten wir $\lambda/\Delta\lambda = mp$, $m =$ Ordnung des Maximums und $p =$ Anzahl der Spalte oder Gitterstriche (dies gilt für beliebig schmale Ein- und Austrittsspalte und N Gitterspalte pro Längeneinheit, wobei $N = 1/D = p/B$, $D =$ Gitterkonstante $\hat{=}$ Spaltabstand und $B =$ Gesamtbreite des Gitters). Man kann

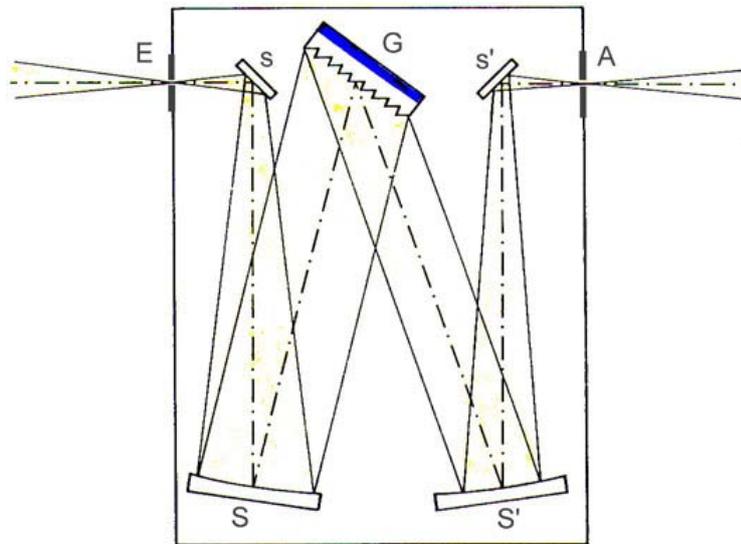


Abbildung 7.10. Gittermonochromator, schematische Darstellung. s und s' sind Planspiegel, S und S' Konkavspiegel, E und A der Eintritts- und Austrittsspalt, G das Beugungsgitter.

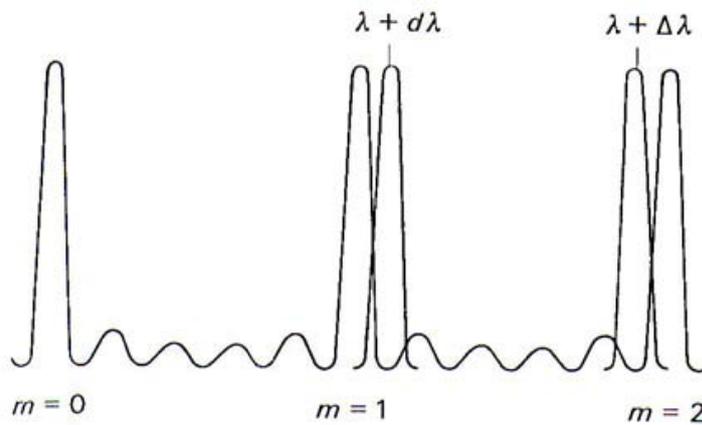


Abbildung 7.11. Spektralaufösung eines Gittermonochromators. Die Intensitätsverteilung (schematisch) eines Beugungsgitters mit Hauptmaxima der 0., 1. und 2. Ordnung für zwei benachbarte Wellenlängen.

die Auflösung also durch Erhöhung der Strichzahl oder durch Erhöhung der Ordnung verbessern, wobei letzteres auf Kosten der Lichtintensität geht.

Eine spektrale Aufspaltung des Lichts erhält man auch durch **Interferenz in dün-**

nen Schichten. Hier überlagern sich die von der oberen und der unteren Grenzfläche einer Schicht mit einer zur Umgebung unterschiedlichen Brechzahl reflektierten Strahlen. Durch Interferenz dieser beiden Wellen kann es zu einer Verstärkung oder Auslöschung, entsprechend konstruktiver oder destruktiver Interferenz, kommen. Der Winkel, unter dem man das eine oder das andere beobachtet, hängt von der Lichtwellenlänge und der Dicke sowie der Brechzahl der Schicht ab (Beispiele: Newtonsche Ringe zwischen zwei dicht aneinanderliegenden Glasplatten, Regenbogenfarben in Ölfilm auf Wasser oder in Seifenblasen).

7.4 Entstehung der Polarisation

Wir hatten uns bereits in Abschnitt 6.4.5 auf Seite 129 mit der Polarisation elektromagnetischer Wellen auseinandergesetzt. Es gibt verschiedene Wege, eine linear- oder zirkularpolarisierte Welle sichtbaren Lichts zu erzeugen:

1. Emission durch eine polarisierte Quelle (z. B. schwingenden Dipol mit feststehender Dipolachse);
2. Streuung oder Reflexion einer Welle um einen festen Winkel (Dipolmodell! Brewsterwinkel);
3. Transmission durch einen doppelbrechenden Kristall;
4. Transmission durch einen Polarisationsfilter (Polaroidfilter);
5. Überlagerung polarisierter Wellen.

7.4.1 Doppelbrechung

Verschiedene Kristalle (z. B. Kalkspat, Quarz) zeigen unterschiedliche Lichtgeschwindigkeiten für transmittiertes Licht mit senkrechter bzw. paralleler Polarisation E_σ oder E_π (relativ zur »optischen Achse«, die von der Kristallstruktur festgelegt wird). Ein unpolarisierter Lichtstrahl, der auf einen solchen Kristall fällt, wird in zwei Strahlen mit unterschiedlicher Ausbreitungsrichtung \mathbf{k} und senkrecht zueinanderstehenden Polarisationsrichtungen (»ordentlicher« und »außerordentlicher« Strahlen) aufgespalten. Fällt ein linear-polarisierter Strahl senkrecht zur optischen Achse ein, so wird er nicht abgelenkt, aber die beiden Polarisationskomponenten E_σ und E_π erfahren eine Phasenverschiebung je nach Kristalldicke; der ausgehende Strahl kann dann zirkularpolarisiert sein (» $\lambda/4$ -Platte«).

7.4.2 Optische Aktivität

Manche Substanzen (insbes. Lösungen von organischen Verbindungen mit asymmetrischen C-Atomen, z. B. Zucker, Aminosäuren) zeigen verschiedene Lichtgeschwindigkeiten für *rhc* und *lhc* Lichtwellen. Wenn linearpolarisiertes Licht sie durchquert, das aus einer Überlagerung von *rhc*- und *lhc*-Komponenten besteht, werden die beiden Komponenten relativ zueinander phasenverschoben, je nach Probendicke d ; dies erzeugt eine Drehung φ der Polarisationsebene, proportional d (und bei Lösungen proportional der Konzentration c des »optisch aktiven« Stoffes). Die Proportionalitätskonstante ist die spezifische Drehung α_K , gemessen in Drehwinkel ($^\circ$)/mm. Dies kann zum Nachweis und zur Analyse von solchen Substanzen verwendet werden (Polarimeter!).

Andere polarisationsabhängige Effekte hängen vom *mechanischen* Streß oder vom angelegten *elektrischen* oder *magnetischen* Feld ab (Streßdichroismus, optischer KERR-Effekt, FARADAY-Effekt). Die meisten dieser Effekte sind auch *wellenlängenabhängig* (Dichroismus).

Wird eine linearpolarisierte Welle mit einem Winkel φ zwischen ihrer Polarisations Ebene und der Durchlassrichtung eines Polarisationsfilters vom Filter transmittiert, so

reduziert sich ihre Amplitude um den Faktor $\cos \varphi$ (idealer Filter). Polaroidfilter sind im sichtbaren Bereich weitgehend *wellenlängenunabhängig*.

7.4.3 Brewsterwinkel

Bei der Reflexion kommt es unter einem bestimmten Winkel zu einer vollständigen linearen Polarisierung des reflektierten Lichts. Diesen Winkel nennt man den *Brewsterwinkel*. Er ist dadurch gekennzeichnet, dass reflektierter und gebrochener Strahl in einem rechten Winkel zueinander stehen. In einem Oszillatormodell der Reflexion regt dann die Polarisationskomponente, bei der der elektrische Feldvektor in der Reflexionsebene liegt, Ladungen im Medium zu Schwingungen in Richtung des reflektierten Strahls an. Ein Hertzscher Dipol strahlt aber in diese Richtung nicht ab. Folglich enthält das reflektierte Licht diese Polarisationskomponente nicht, es ist also mit dem E-Vektor entlang der Oberfläche und senkrecht zur Reflexionsebene polarisiert.

Rechnerisch erhält man den Brewsterwinkel durch die Bedingung $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ und die Brechungsbedingung $\sin \alpha = N \sin \beta = N \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = N \cos \alpha$ zu

$$\tan \alpha = N,$$

wobei N die Brechzahl des Mediums ist, an dem reflektiert wird (als das andere Medium wurde Luft mit Brechzahl ungefähr 1 angenommen). Für Glas mit der Brechzahl 1,55 ergibt sich ein Winkel von etwa 57° .

7.5 Einheiten und Lichtstärken

Der **Lichtstrom** ist die Gesamtmenge des sichtbaren Lichtes, das eine Lichtquelle emittiert, unabhängig von der Größe der beleuchteten Fläche. Die Einheit ist das Lumen (lm). Der Lichtstrom ist eine physiologische Größe, die mit der Empfindlichkeit des Auges gewichtet ist. Die entsprechende physikalische Größe ist die Lichtleistung in Watt.

Die **Lichtstärke** ist eine SI-Basisgröße und bezeichnet den Lichtstrom pro Raumwinkeleinheit (in Steradian, sr), gemessen in großer Entfernung von der Lichtquelle. Einheit ist das Candela ($\text{cd} = \text{lm}/\text{sr}$).

Die Definition der Einheit Candela lautet: „Eine Lichtquelle hat in einer gegebenen Raumrichtung 1 cd Lichtstärke, wenn sie auf einem Sensor mit der genormten spektralen Empfindlichkeitsverteilung des menschlichen Auges dasselbe Signal erzeugt wie monochromatisches Licht der Frequenz $540 \cdot 10^{12}$ Hz und der Strahlungsstärke von $1/683 \text{ W}/\text{sr}$.“

Unter der **Beleuchtungsstärke** versteht man den Lichtstrom pro beleuchteter Fläche, also die „Helligkeit“. Die Einheit ist das Lux ($\text{lx} = \text{lm}/\text{m}^2$). Je größer die Projektionsfläche, umso geringer die Beleuchtungsstärke.

8 Aufbau der Materie: Kernphysik

Wir beginnen mit einer sehr bekannten Gleichung:

$$E = mc^2 .$$

Im Jahre 1911 entdeckte RUTHERFORD mit Hilfe von Streuexperimenten, dass Atome aus leichten, negativ geladenen *Elektronen* (»Atomhülle«) und einem massiven, positiv geladenen, sehr viel kleineren *Atomkern* bestehen. Später stellte man fest, dass die Atomkerne z.T. *instabil* sind (schon bekannte »Radioaktivität«) und zwei Kernbausteine (positive *Protonen*, ungeladene *Neutronen*) enthalten. Der radioaktive Zerfall findet statt, wenn ein Atomkern einen Überschuß an Masse (und daher *Energie*) besitzt (Massenformel).

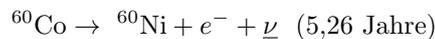
8.1 Kern-Zerfallstypen

Instabile Atomkerne zeigen drei häufige sowie einige seltenere Zerfallstypen. Die drei häufig vorkommenden Zerfälle, bekannt seit den frühen Tagen der Untersuchung der natürlichen Radioaktivität, sind:

1. der α -Zerfall: Zerfall eines überschweren Kerns, wobei er ein »Alphateilchen« (2 Protonen + 2 Neutronen = ${}^4_2\text{He}$ -Kern) ausschleudert und dabei seine Ladung Z um 2, seine Massenzahl A um 4 Einheiten reduziert.
2. der β -Zerfall: Zerfall eines neutronenreichen Kerns, in dem ein Neutron in ein Elektron, ein Proton sowie ein Neutrino zerfällt. Prototyp: Zerfall des freien Neutrons:

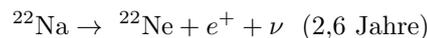


bzw.



Hierbei bleibt A gleich, Z erhöht sich um 1 Einheit.

Bei *protonenreichen* Kernen (künstliche Radioaktivität!) geschieht der umgekehrte Prozess des *Positron-Zerfalls*:



oder des *Elektroneneinfangs*:



Hier bleibt A gleich, Z wird um 1 Einheit erniedrigt.

3. der γ -Zerfall: Abregung eines Kerns, der in einem hohen internen Energiezustand ist, durch Ausstrahlung von energiereichem Licht (elektromagnetische Strahlung, genannt *Gammastrahlung*). A und Z bleiben unverändert.

8.2 Energie der Kern-Zerfälle

Woher kommt die Energie für Kern-Zerfälle?

Nach den bisherigen Überlegungen müssten alle Kerne eine ganze Zahl von Protonen (Z) und Neutronen (N) besitzen, die Kernmasse wäre dann:

$$M(A, Z) = Z \cdot m_p + N \cdot m_n ; \quad \text{wobei} \quad A = Z + N .$$

Dies ist aber nicht der Fall – das Zusammenbinden der Z Protonen und der N Neutronen geschieht mit Hilfe einer Bindungsenergie $E_B(A, Z)$. Die Kernmasse $M(A, Z)$ ist um die entsprechende Masse – den sogenannten *Massendefekt* – kleiner als die Summe der Protonen- und Neutronen-Massen. Diese fehlende Masse erscheint nach $E = mc^2$ als Energie in Form der (negativen) Kernbindungsenergie, die von Z und N bzw. Z und A abhängt.

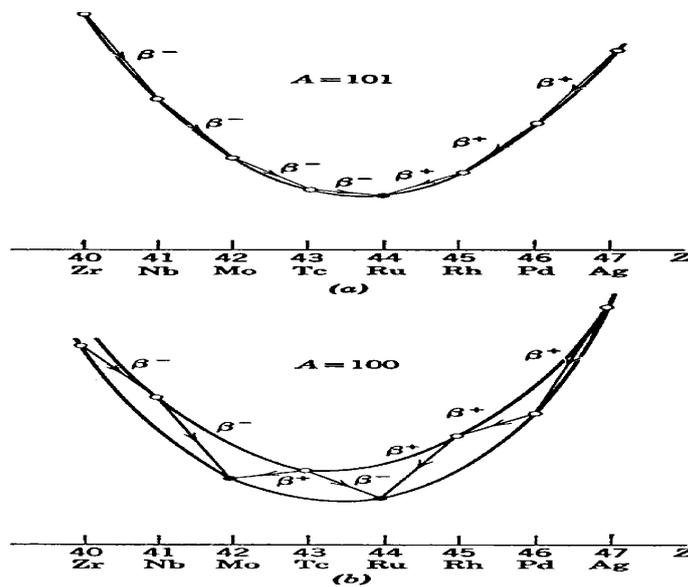


Abbildung 8.1. Kernbindungsenergie gegen Protonenzahl Z für Kerne mit der ungeraden Massenzahl $A = 101$ (oben) bzw. der geraden Massenzahl $A = 100$ (unten). Bei gerader Massenzahl unterscheiden sich die Kurven für $Z, N =$ gerade (g,g-Kern) und $Z, N =$ ungerade (u,u-Kern)

Für die Isotope eines gegebenen Elements hat die Bindungsenergie eine »Tal«-Form, mit den stabilen Isotopen in der »Talsohle« und den instabilen, radioaktiven Isotopen beiderseits zu höheren Energien. Die Talsohle hat eine unterschiedliche Tiefe für verschiedene Elemente, so dass ein Kern (»Mutterkern«) Energie abgeben kann, in dem er sich – z. B. durch Betazerfall, siehe Abb. 8.1 – in einen anderen Kern verwandelt (»Tochterkern«).

Der Verlauf der Bindungsenergie (pro Nukleon) E_B/A als Funktion der Kernmassenzahl A heißt »Bethe-Weizsäcker-Formel« (siehe Abb. 8.2, hier jetzt als Betrag po-

sitiv aufgetragen). Sie sagt voraus, ob man Energie durch Kernverschmelzung (Fusion; $A < 60$) oder durch Verkleinerung eines Kerns (Kernspaltung, Alphazerfall; $A > 60$) gewinnen kann.

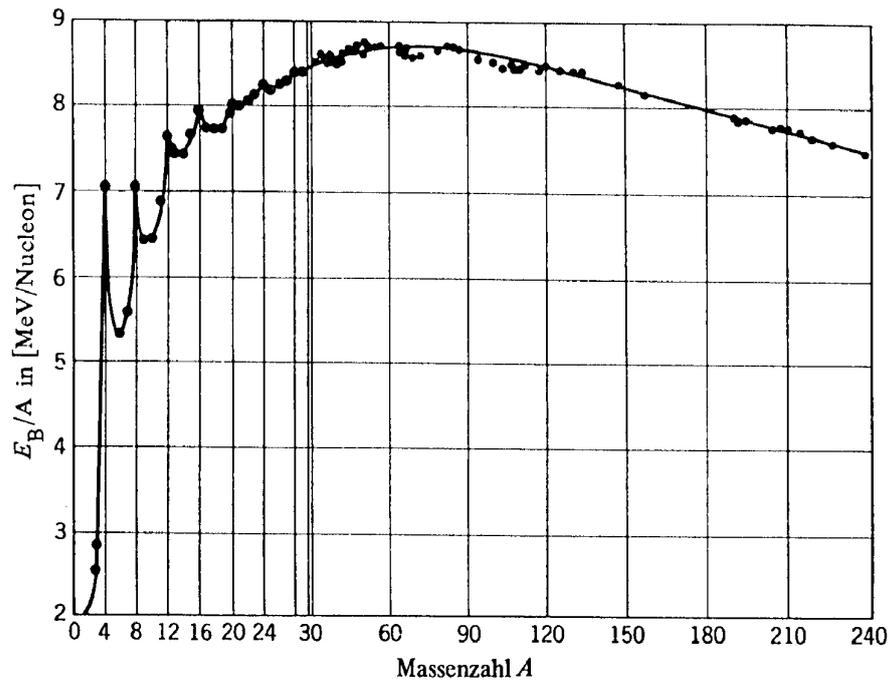


Abbildung 8.2. Bethe-Weizsäcker-Graph

In einer **Nuklidkarte** ist für alle Isotope eingetragen, ob sie stabil sind oder, wenn nicht, durch welche Zerfallsart sie mit welcher Halbwertszeit (siehe folgenden Abschnitt) zerfallen. Abb. 8.3 zeigt einen Ausschnitt aus einer Nuklidkarte. Nach rechts ist dort die Zahl der Neutronen, nach oben die Zahl der Protonen aufgetragen. So entspricht jede Zeile einem chemischen Element. Als Beispiel erkennt man für Kohlenstoff ($Z = 6$), dass ^{12}C und ^{13}C stabil sind, ^{14}C aber mit einer Halbwertszeit von 5700 Jahren durch β^- -Zerfall (in das stabile ^{14}N) zerfällt. Bei allen Zerfällen kann zusätzlich γ -Strahlung emittiert werden, wenn der neu entstandene Kern sich zunächst in einem energetisch höheren Zustand befindet.

					12O 0.40 MeV P	13O 8.58 MS ε: 100.00% ε: 100.00%	14O 70.606 S ε: 100.00%	15O 122.24 S ε: 100.00%	16O STABLE 99.762%	17O STABLE 0.038%	18O STABLE 0.200%
			10N	11N 1.58 MeV P: 100.00%	12N 11.000 MS ε: 100.00%	13N 9.965 M ε: 100.00%	14N STABLE 99.634%	15N STABLE 0.366%	16N 7.13 S β-: 100.00% β-ε: 1.2E-3%	17N 4.173 S β-: 100.00% β-n: 95.1%	
	8C 230 KeV P: 100.00% α	9C 126.5 MS ε: 100.00% ε: 61.60%	10C 19.290 S ε: 100.00%	11C 20.334 M ε: 100.00%	12C STABLE 98.89%	13C STABLE 1.11%	14C 5700 Y β-: 100.00%	15C 2.449 S β-: 100.00%	16C 0.747 S β-: 100.00% β-n: 99.00%		
	6B	7B 1.4 MeV α P	8B 770 MS ε: 100.00% ε: 100.00%	9B 0.54 KeV 2α: 100.00% P: 100.00%	10B STABLE 19.8%	11B STABLE 80.2%	12B 20.20 MS β-: 100.00% βα: 1.58%	13B 17.33 MS β-: 100.00%	14B 12.5 MS β-: 100.00% β-n: 6.04%	15B 9.93 MS β-: 100.00% β-n: 93.60%	
	5Be	6Be 92 KeV P: 100.00%	7Be 53.22 D ε: 100.00%	8Be 5.57 eV α: 100.00%	9Be STABLE 100%	10Be 1.51E+6 Y β-: 100.00%	11Be 13.81 S β-: 100.00% β-ε: 3.1%	12Be 21.49 MS β-: 100.00% β-n: 1.00%	13Be 2.7E-21 S N	14Be 4.64 MS β-: 100.00% β-n: 94.00%	
3Li	4Li 6.03 MeV P: 100.00%	5Li ≈ 1.5 MeV α: 100.00%	6Li STABLE 7.59%	7Li STABLE 92.41%	8Li 839.9 MS β-ε: 100.00% β-n: 100.00%	9Li 178.3 MS β-: 100.00% β-n: 50.80%	10Li N: 100.00%	11Li 8.59 MS β-: 100.00% β-ne: 0.027%	12Li <10 NS N		
	3He STABLE 0.000137%	4He STABLE 99.999863%	5He 0.60 MeV N: 100.00% α: 100.00%	6He 806.7 MS β-: 100.00%	7He 150 KeV N	8He 119.1 MS β-: 100.00% β-n: 16.00%	9He N: 100.00%	10He 300 KeV N: 100.00%			
	1H STABLE 99.985%	2H STABLE 0.015%	3H 12.32 Y β-: 100.00%	4H 4.6 MeV N: 100.00%	5H 5.7 MeV N: 100.00%	6H 1.6 MeV N: 100.00%	7H 29E-23 Y 2N?				
		Neutron 10.23 M β-: 100.00%									

Abbildung 8.3. Ausschnitt aus einer Nuklidkarte.

8.2.1 Drei Gesetze der Radioaktivität

1. *Das Abstandsgesetz:* Die Zählrate aus einer radioaktiven Quelle nimmt umgekehrt proportional zum quadratischen Abstand ab

$$\frac{dN}{dt}(r) = \frac{N_0}{r^2}$$

d. h.

$$\text{Zählrate} = \frac{\text{Quellstärke } n_0}{(\text{Abstand})^2}.$$

Dies folgt daraus, dass sich die Strahlung gleichmäßig in alle Richtungen ausbreitet und sich dabei auf eine Kugeloberfläche (Fläche = $4\pi r^2$) verteilt, so dass sie entsprechend mit wachsendem Abstand r »verdünnt« wird (am besten in einer *log-log-Darstellung* zu sehen).

2. *Das Zerfallsgesetz:* die Zerfallsrate dn/dt (Zählrate) einer Quelle ist der jeweiligen

Menge $n(t)$ der *noch nicht zerfallenen* Kerne proportional:

$$\frac{dn}{dt}(t) = -\lambda n(t).$$

Diese Gleichung gilt für ein kurzes Zeitintervall dt . Für eine beliebige Zeit muß man sie integrieren:

$$\int \frac{dn}{n} = - \int \lambda dt \rightarrow \ln \frac{n(t)}{n(0)} = -\lambda t$$

oder

$$n(t) = n(0) \cdot e^{-\lambda t}.$$

exponentielles Zerfallsgesetz! (Am besten in einer *log-lin-Darstellung* zu sehen).

Als **Halbwertszeit** $t_{1/2}$ bezeichnet man die Zeit, nach der die Aktivität (und somit auch die Zahl der noch nicht zerfallenen Kerne) auf die Hälfte gesunken ist. Aus $n(t) = \frac{n(0)}{2} = n(0) \cdot e^{-\lambda t_{1/2}}$ erhält man

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

3. Das *Absorptionsgesetz für Gammastrahlung* (gilt auch für Licht!) hat die gleiche Form, da die in einer dünnen Schicht absorbierte Strahlung proportional der dort vorhandenen Strahlungsmenge (Intensität) ist (x = Absorberdicke):

$$\frac{dN}{dx} = -\mu N(x)$$

oder

$$N(x) = N(0) \cdot e^{-\mu x}.$$

(Lambert-Beersches Gesetz für Licht, Absorptionsgesetz für γ -Strahlung; μ heißt »Absorptionskoeffizient«).

γ -**Strahlen** sind elektromagnetische Strahlung oder -Wellen (wie Radiowellen, Wärmestrahlung, Licht, UV-Strahlung...)

Sie haben drei wesentliche Eigenschaften:

1. eine hohe Energie (10 keV - GeV) (d.h. 10 000 Elektronen-Volt bis 1 000 000 000 eV);
2. sie werden von *Atomkernen* emittiert, wenn diese überschüssige Energie besitzen;
3. γ -Strahlen werden als Quanten (Energiepakete) emittiert, daher zeigen sie ein *Linienspektrum*.

Die Energie E eines Photons (das zu einer elektromagnetischen Welle gehörende Teilchen) hängt von der Frequenz ν der Strahlung ab:

$$E = h\nu.$$

Dabei ist $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js das **Plancksche Wirkungsquantum**.

γ -Strahlungs-Spektrum: Anzahl N der γ -Strahlen/Zeit („Zählrate“) gegen ihre Energie:

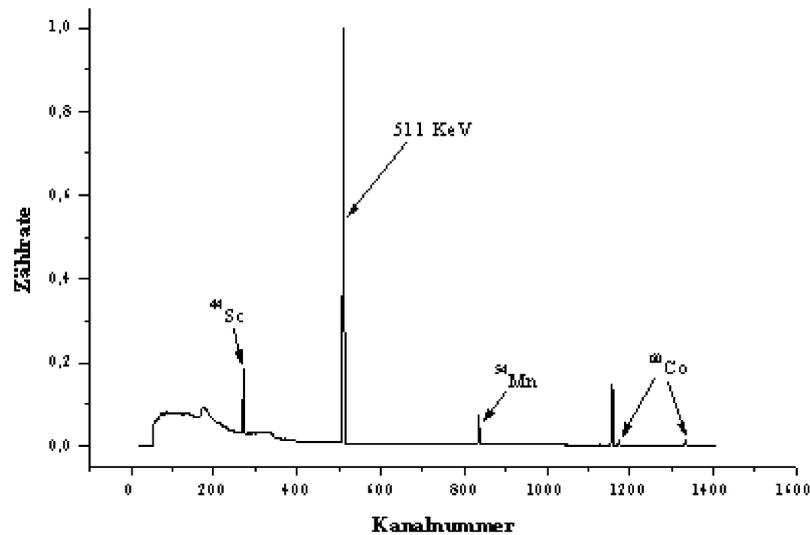


Abbildung 8.4. γ -Strahlen/Zeit oder γ -Zählrate gegen Energie. Die scharfen Linien entsprechen γ -Quanten von den angegebenen Atomkernen.

8.3 Wechselwirkung Strahlung-Materie

Es gibt drei Arten der Wechselwirkung energiereicher Strahlung mit Materie:

- | | |
|----------------------|--|
| elastische Streuung | die Strahlung wird abgelenkt, ohne Energie an die Materie abzugeben. Beispiel: RUTHERFORD-Streuung von α -Teilchen. Sie wird verwendet, um die mikroskopische Struktur der Materie zu untersuchen (Röntgen-Streuung, Neutronenstreuung, usw.) |
| direkte Ionisation | α - und β -Teilchen können atomare Elektronen aus der Atomhülle schlagen; sie hinterlassen geladene Atome, d. h. Ionen. Die meisten Nachweismethoden für Strahlung basieren darauf. Die Ionisation bildet auch die Grundlage für die biologische Wirkung der Strahlung (Zerstörung chemischer Bindungen durch Ionisation benachbarter Atome). |
| indirekte Ionisation | γ -Strahlen wechselwirken mit der Atomhülle (Photoeffekt, Compton-Effekt) oder mit dem Kern (Paarbildung, Kern-Photoeffekt) und setzen geladene Teilchen frei, die ihrerseits weitere Ionisation hervorrufen. Neutronen lösen Kernreaktionen aus, die radioaktive Kerne produzieren und zu sekundärer Ionisation führen. |

Die letzten beiden Effekte können zum Nachweis der Strahlung benutzt werden, wobei der eigentliche Nachweis letztlich immer über die Ionisation abläuft. (Versuche zum Nachweis der Strahlung: Messgeräte, Ionisationskammer)

Strahlungsdetektoren

Gas-Ionisationsdetektoren für α -, β -, γ -, Röntgen-Strahlung

- Ionisationskammer
- Geiger-Müller-Zählrohre
- Proportionalzähler

Festkörper-Ionisationsdetektoren für γ -, Röntgen-Strahlung

- Halbleiterdetektoren

Szintillationsdetektoren für β -, γ -, Röntgen-Strahlung

- Flüssigkeits-Szintillatoren
- feste Szintillatoren (Na(Tl)J, Anthrazen, Kunststoff)
- Leuchtschirme

Abbildende Detektoren für α -, β -Strahlung; Ionen

- Nebelkammer
- Blaskammer
- Funkenkammer

Film, Thermolumineszenz für alle Strahlungsarten

- Dosimeter

Neutronendetektoren für Neutronen

- Kernreaktionen, z.B.

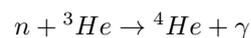


Tabelle 8.1. relative biologische Wirksamkeit von verschiedenen Strahlungsarten

Strahlungstyp	RBW $\equiv q$
Röntgen-, γ -Strahlung	1
β -Strahlung (Elektronen)	1
langsame Neutronen	3
schnelle Neutronen	20
α -Teilchen	20

8.3.1 Biologische Wirkung der Strahlung

Die verschiedenen Strahlungstypen haben unterschiedliche biologische Wirkungen; die Wirkung beim menschlichen Körper hängt auch davon ab, ob sich die Strahlungsquelle außerhalb oder innerhalb des Körpers befindet (Inkorporation!), sowie von der Intensität und Dauer der Bestrahlung. Den Strahlungstypen wird eine »relative biologische Wirksamkeit« (RBW) (bzw. Bewertungsfaktor q) zugeschrieben (siehe Tabelle 8.1).

Die biologische Wirkung bei Inkorporation (Kontamination von Atemluft oder Nahrung, Tracer-Diagnostik, Therapie) hängt sowohl von der physikalischen Halbwertszeit $t_{1/2}$ (Zeit, in der 50% der radioaktiven Kerne zerfallen) als auch von der biologischen Halbwertszeit $T_{\text{H}_{\text{biol}}}$ (Zeit, in der 50% des Isotopes aus dem Körper ausgeschieden wird) ab. Maßgebend ist die effektive Halbwertszeit:

$$\frac{1}{T_{\text{H}_{\text{eff}}}} = \frac{1}{t_{1/2}} + \frac{1}{T_{\text{H}_{\text{biol}}}}.$$

Häufig ist die biologische Halbwertszeit viel kürzer, jedoch nicht immer (siehe z. B. ^{90}Sr !).

Strahlung von außerhalb des Körpers bezieht sich hauptsächlich auf γ - und Röntgenstrahlung, da die Teilchenstrahlungen (α, β) eine sehr kurze Reichweite haben. Sie stammt aus natürlichen Quellen (Höhenstrahlung, Zerfall von natürlichen Isotopen – ^{40}K , $^{234,235,238}\text{U}$, ^{232}Th -Zerfallsketten) sowie aus medizinischer Röntgendiagnostik (wesentliche Belastungsquelle für die Gesamtbevölkerung!) und Kerntechnologie (wichtig für »beruflich strahlenexponierte Personen«, nicht für die Gesamtbevölkerung außer bei »Störfällen«).

Die biologische Wirkung von Strahlung resultiert aus der Ionisierung von Atomen und dadurch verursachte Zerstörung von chemischen Bindungen. Besonders wichtig sind Schädigungen des genetischen Materials (DNS) der Zellen, die zu Zellveränderungen (Krebs) und Genschäden (Erbkrankheiten) führen kann. Verschiedene Organe zeigen unterschiedliche Empfindlichkeiten gegenüber Strahlung; daher ist die Organ-dosis ein wichtiges Maß für die biologische Strahlenschäden. Siehe Tabelle 8.2 auf der nächsten Seite (aus der Strahlenschutzverordnung).

Tabelle 8.2. Wichtungsfaktoren für Organdosis

Organe und Gewebe	Wichtungsfaktoren
1. Keimdrüsen	0,25
2. Brust	0,15
3. rotes Knochenmark	0,12
4. Lunge	0,12
5. Schilddrüse	0,03
6. Knochenoberfläche	0,03
7. andere Organe und Gewebe ^a Blase, oberer Dickdarm, unterer Dickdarm, Dünndarm, Gehirn, Leber, Magen, Milz, Nebenniere, Niere, Bauch- speicheldrüse, Thymus, Gebärmutter	je 0,06

^a Zur Bestimmung des Beitrages der anderen Organe und Gewebe bei der Berechnung der effektiven Dosis ist die Teilkörperdosis für jedes der 5 am stärksten strahlenexponierten anderen Organe und Gewebe zu ermitteln. Die Strahlenexposition der übrigen Organe und Gewebe bleibt bei der Berechnung der effektiven Dosis unberücksichtigt

8.3.2 Dosimetrie

Unter »Dosimetrie« versteht man die genau definierte Bestimmung der Strahlungsmenge (Dosis), die an einem bestimmten Ort in einer gegebenen Zeit vorherrscht bzw. von einer Person (einem Tier, einer Pflanze, usw.) aufgenommen wird. Dazu definiert man Einheiten, die zur Strahlungsmessung und -kontrolle dienen. Sie basieren z. T. auf den Nachweismethoden, z. T. auf physikalischen oder biologischen Begriffen.

Die *Aktivität* ist eine rein physikalische Größe, die wir schon verwendet haben; sie sagt aus, wieviele Kerne in einer Zeiteinheit (Sekunde) zerfallen. Die *alte Einheit* entspricht der Aktivität eines Gramms vom natürlichen Radium, wie es von MARIE und PIERRE CURIE zuerst chemisch getrennt wurde; die Einheit heißt »Curie« (Ci) und beträgt

$$1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Zerfälle/Sek.}$$

Die *neue (SI) Einheit* wird nach dem Entdecker der Radioaktivität, HENRI BECQUEREL, genannt; sie lautet:

$$1 \text{ Bq} = 1 \text{ Zerfall/Sek.} (1\text{s}^{-1})$$

Die Aktivität kann nur indirekt mit einem geeichten Detektor in genau definierter Geometrie gemessen werden.

Die *Ionendosis I* bezieht sich auf die ionisierende Wirkung der Strahlung in Luft; sie kann mit Hilfe einer Ionisationskammer gemessen werden und ist nach dem Entdecker der Röntgenstrahlung, CONRAD RÖNTGEN, benannt: $1 \text{ R} \hat{=} \text{Strahlungsmenge, die in } 1 \text{ kg trockener Luft die Ladungsmenge } 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ C freisetzt (entsprechend } 1,6 \cdot 10^{16} \text{ Elektronen)}$. Sie ist auch eine physikalische (meßtechnische) Einheit.

Die *Energiedosis* gibt an, wieviel Energie von einem Kilogramm der absorbierenden Substanz (meistens *Wasser* als Vergleichssubstanz) absorbiert wird:

$$D_E = \frac{\text{absorbierte Strahlungsenergie}}{\text{Masse des Absorbers}}$$

oder

$$D_E = \frac{dE}{dm}$$

Die alte Einheit ist das Rad: $1 \text{ rad} \hat{=} 0,01 \text{ J/kg}$. Die neue (SI) Einheit heißt »**Gray**« (Gy), mit $1 \text{ Gy} \hat{=} 1 \text{ J/kg}$. Die Energiedosis beschreibt die Wirkung der Strahlung auf Materie.

Die *Äquivalentdosis* beinhaltet die biologische Wirkung der Strahlungsmenge; sie ist proportional zur Energiedosis:

$$D_q = q \cdot D_E$$

wobei q gleich dem RBW (Bewertungsfaktor) ist. Die Einheit ist die gleiche wie für D_E (da q dimensionslos ist), erhält jedoch einen neuen Namen, »**Sievert**« (Sv): $1 \text{ Sv} \hat{=} 1 \text{ J/kg}$. Auch hier gibt es eine ältere Einheit (entsprechend dem Rad für Energiedosis): $1 \text{ rem} \hat{=} 0,01 \text{ Sv}$.

8.3.3 Strahlenschutz

Strahlenschutz besteht hauptsächlich in der ständigen Kontrolle der Strahlenexposition von Menschen sowie der Verhinderung von unnötigen oder übergroßen Strahlenaufnahmen. Die zulässigen Strahlenexpositionen sind gesetzlich festgelegt; für nicht beruflich strahlenexponierte Personen sind sie aus der Tabelle 8.3 zu entnehmen.

Tabelle 8.3. Zulässige Strahlenexposition (Grenzwerte) für *nicht* beruflich strahlenexponierte Personen

1.	Effektive Dosis, Teilkörperdosis für Keimdrüsen, Gebärmutter, rotes Knochenmark	0,3 mSv/Jahr
2.	Teilkörperdosis für alle Organe und Gewebe, soweit nicht unter 1 oder 3 genannt	0,9 mSv/Jahr
3.	Teilkörperdosis für Knochenoberfläche, Haut	1,8 mSv/Jahr

Für beruflich strahlenexponierte Personen ist die zulässige Dosis höher (siehe Tabelle 8.4 auf der nächsten Seite).

Ein Teil der Strahlenexposition ist bereits durch die natürliche »Hintergrundstrahlung« bedingt (je nach geographischer Lage bis zu über 1 mSv/Jahr).

Tabelle 8.4. Grenzwerte für beruflich strahlenexponierte Personen [mSv/Jahr]

Körperdosis	Grenzwerte der Körperdosis für beruflich strahlenexponierte Personen im Kalenderjahr		
	Kategorie A	Kategorie B	$\frac{1}{10}$ Kategorie A
1. Effektive Dosis, Teilkörperdosis: Keimdrüsen, Gebärmutter, rotes Knochenmark	50	15	5
2. Teilkörperdosis: Alle Organe und Gewebe, soweit nicht unter 1., 3. oder 4. genannt	150	45	15
3. Teilkörperdosis: Schilddrüse, Knochenoberfläche, Haut, soweit nicht unter 4. genannt	300	90	30
4. Teilkörperdosis: Hände, Unterarme, Füße, Unterschenkel, Knöchel, einschließlich der dazugehörigen Haut	500	150	50