

# 4.7 Der Drehimpuls

H-Atom : Radialv.  $n, l$   
Winkelv.  $l, m$

Vorzugsrichtung  $z$  - Richtung

Drehimpuls  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ;  $\hat{p} = -i\hbar \nabla$   
 $\hat{L} = -i\hbar (\vec{r} \times \nabla)$

Kartesisch

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\hat{L}_y = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}$$

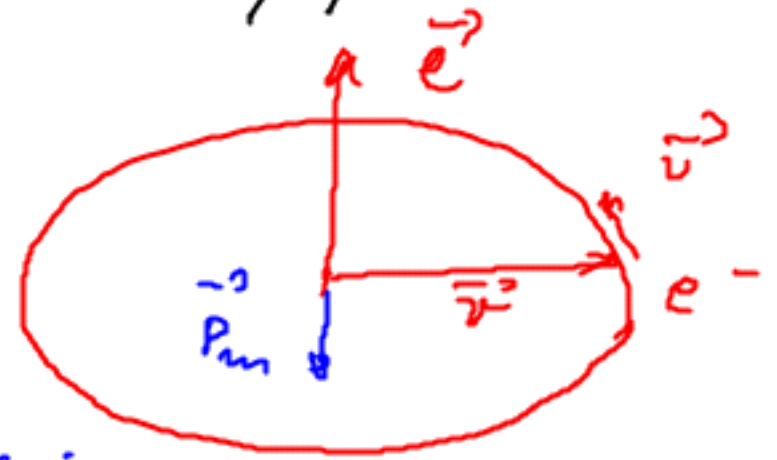
$$\hat{L}_z = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$$

Kugelkoordinaten: Anlange

# Bahn Drehimpuls und normaler Zeeman-Effekt

$T$ : Umlaufzeit

Strom  $\vec{I} = \frac{-e}{T} = \frac{-e v}{2\pi r}$



magnet. Moment  $P_m$ , Bahn-  
fläche  $A$

$P_m = \vec{I} \cdot A$

$$P_m = - \frac{e v}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = - \frac{e v \cdot r}{2} = \frac{e L}{2 m}$$

$$\vec{P}_m = - \frac{e}{2 m_e} \vec{L} = - \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{L}$$

$\mu_B = \frac{e \hbar}{2 m_e}$   
 $= 0.927 \times 10^{-23}$   
 (amp·m<sup>2</sup>; J/T)

externes homogene externes  
Feld  $\vec{B}$  in z-Richtung

Drehmoment  $\vec{D}$

$$\vec{D} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$

$$= d\vec{L} / dt$$

Präzession

pot. Energie

$E_{\text{pot}}$

$$E_{\text{pot}} = - \vec{p}_m \cdot \vec{B}$$

$$= \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{L} \cdot \vec{B}$$

aber:  $L_z$  und  $|L|$   
quantisiert

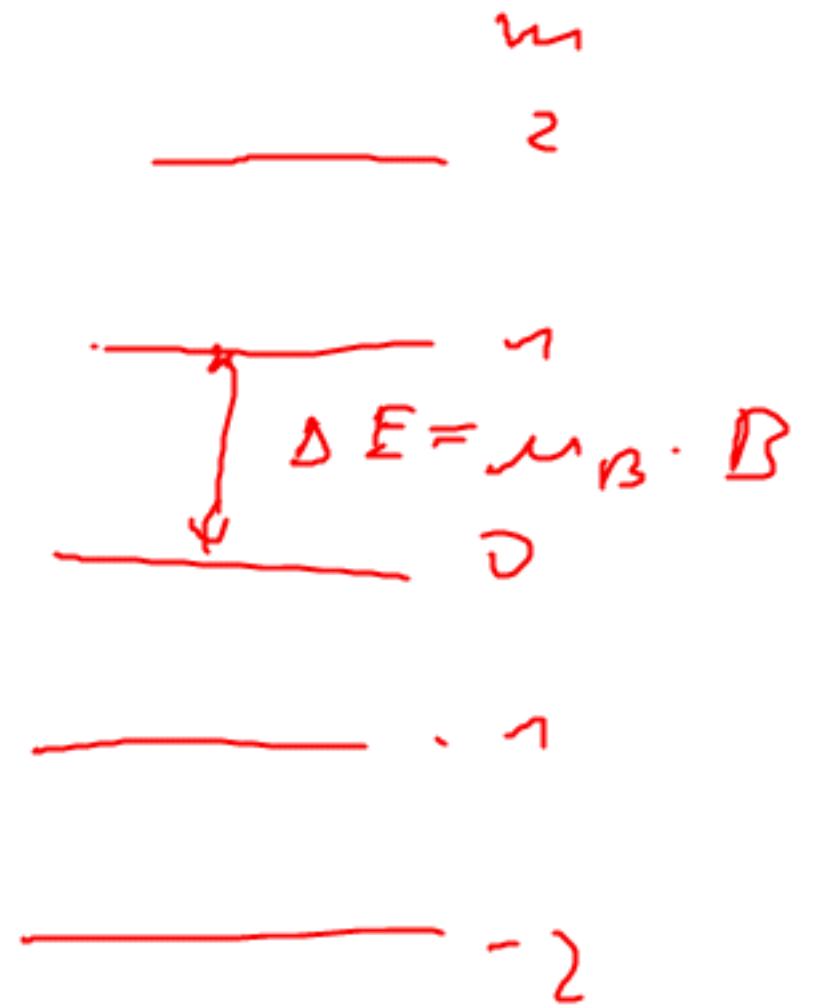
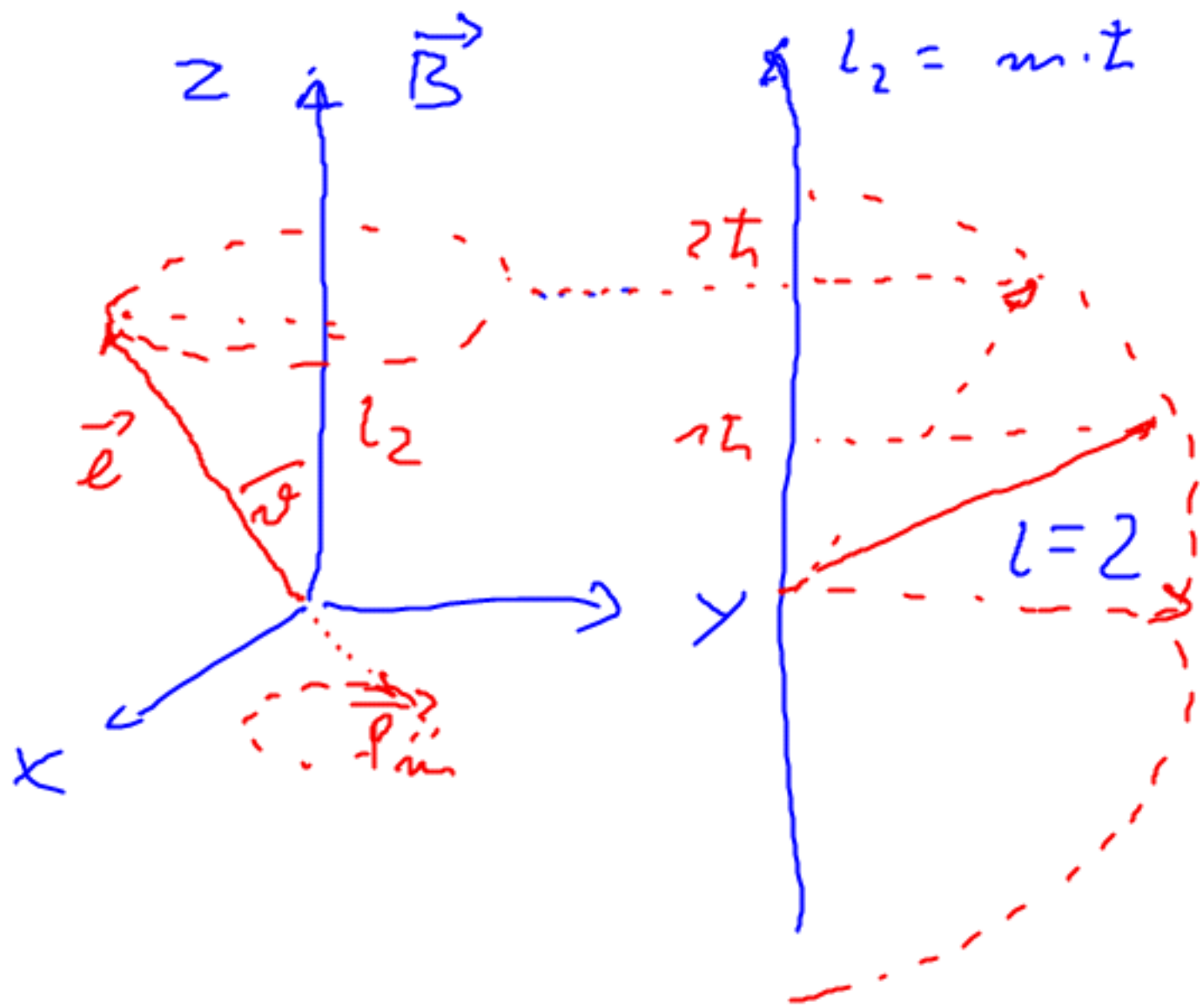
$$\cos \vartheta = \frac{L_z}{|L|} = \frac{m \cdot \hbar}{\sqrt{l(l+1)} \hbar} \quad \{-l \leq m \leq l\}$$

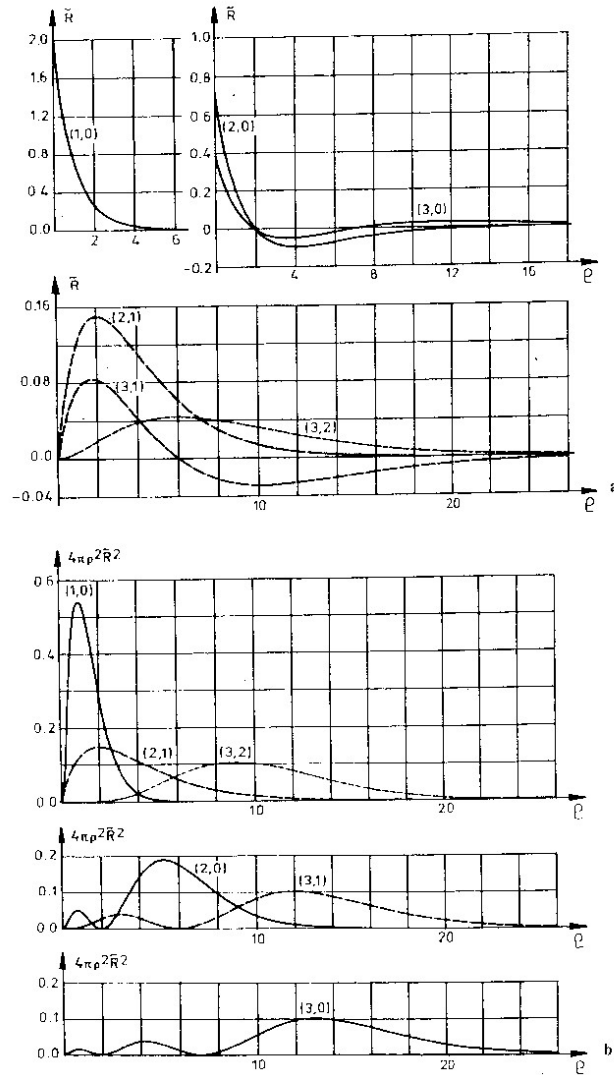
$$L_z \parallel B$$

$$L_z = m \hbar$$

$$E_{\text{pot}} = \mu_B m \cdot B$$

$$\Delta E = \mu_B \cdot B$$





**Abb. 10.3. a)** Die Wellenfunktion des Radialteils  $\tilde{R}(\rho) \equiv R(r)$  (10.77) des H-Atoms ist gegenüber der dimensionslosen Koordinate  $\rho$  aufgetragen. Die an den Kurven angegebenen Indizes  $(1, 0)$ ,  $(2, 1)$ , ... usw. entsprechen  $(n, l)$ , wobei  $n$  die Hauptquantenzahl und  $l$  die Drehimpulsquantenzahl ist. **b)** Die entsprechenden Aufenthaltswahrscheinlichkeiten in radialer Richtung, d.h.  $4\pi\rho^2(\tilde{R}(\rho))^2$ , sind gegenüber der dimensionslosen Koordinate  $\rho$  aufgetragen, (vgl. Text)

Tab. 4 Einige vollständige Eigenfunktionen des Wasserstoffatoms.

Quantenzahlen			Eigenfunktionen $\psi_{n\ell m}(r, \vartheta, \varphi)$
n	$\ell$	m	
1	0	0	$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}$
2	0	0	$\psi_{200} = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \left(2 - \frac{Zr}{a_0}\right) e^{-Zr/2a_0}$
2	1	0	$\psi_{210} = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/2a_0} \cos \vartheta$
2	1	$\pm 1$	$\psi_{21\pm 1} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/2a_0} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi}$
3	0	0	$\psi_{300} = \frac{1}{81\sqrt{3}\pi} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \left(27 - 18 \frac{Zr}{a_0} + 2 \frac{Z^2 r^2}{a_0^2}\right) e^{-Zr/3a_0}$
3	1	0	$\psi_{310} = \frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \left(6 - \frac{Zr}{a_0}\right) \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/3a_0} \cos \vartheta$
3	1	$\pm 1$	$\psi_{31\pm 1} = \frac{1}{81\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \left(6 - \frac{Zr}{a_0}\right) \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/3a_0} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi}$
3	2	0	$\psi_{320} = \frac{1}{81\sqrt{6}\pi} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \frac{Z^2 r^2}{a_0^2} e^{-Zr/3a_0} (3 \cos^2 \vartheta - 1)$
3	2	$\pm 1$	$\psi_{32\pm 1} = \frac{1}{81\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \frac{Z^2 r^2}{a_0^2} e^{-Zr/3a_0} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{\pm i\varphi}$
3	2	$\pm 2$	$\psi_{32\pm 2} = \frac{1}{162\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \frac{Z^2 r^2}{a_0^2} e^{-Zr/3a_0} \sin^2 \vartheta e^{\pm 2i\varphi}$

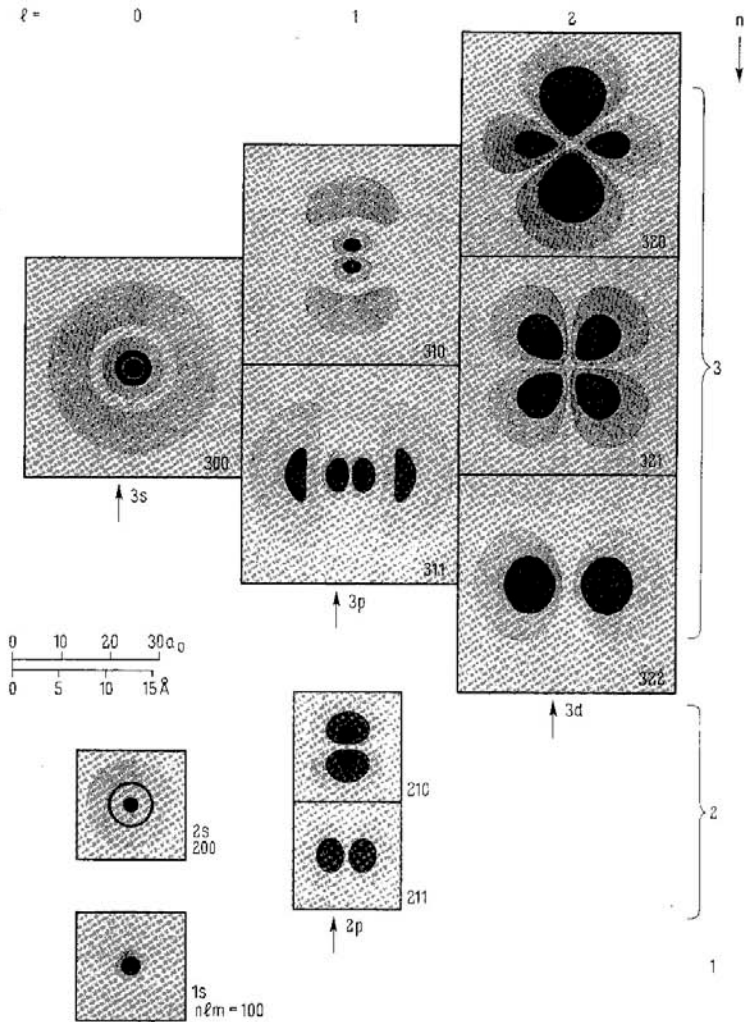


Fig. 35. Schnitte durch die Elektronen-Dichteverteilung  $|\psi_{n\ell m}(r, \vartheta)|^2$  verschiedener Zustände des Wasserstoffatoms. Die räumliche Verteilung ergibt sich durch Rotation um die z-Achse, die nach oben zeigt. Die Konturen der Graustufen entsprechen Linien gleicher Wahrscheinlichkeitsdichte. Die äußere Begrenzung liegt bei 1% der maximalen Wahrscheinlichkeitsdichte (jeweils für gleiches  $n$  und  $\ell$ ), die anderen Konturen entsprechen 10%, 50% und 90%



## 1. Kugelkoordinaten

$$\hat{L}_x = i\hbar \left( \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\varphi} + \cot\vartheta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} \right)$$

$$\hat{L}_y = i\hbar \left( -\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} + \cot\vartheta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} \right)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left( \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right]$$

$$\langle L_z \rangle = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Psi^* \hat{L}_z \Psi \underbrace{r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi}_{d\tau}$$

$$\langle L^2 \rangle = \int \Psi^* \hat{L}^2 \Psi \, d\tau$$



## 2. Erwartungswerte

$$\hat{L}_z \psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi = -i\hbar R_{nc}(r) \Theta_{lm_e}(r) \frac{\partial}{\partial \varphi} \phi_{m_e}(\varphi)$$

$$\phi_{m_e}(\varphi) = e^{im_e \varphi}$$

$$\hat{L}_z \psi = -i\hbar (im_e) R \cdot \Theta \cdot \phi = \hbar m_e \psi$$

$$\langle L_z \rangle = \hbar m_e \int \psi^* \psi d\tau = m_e \hbar$$

analog ab unter ausnutzen von Schr. Gl.

$$\langle L^2 \rangle = l(l+1) \hbar^2$$

## 3). Quantisierung

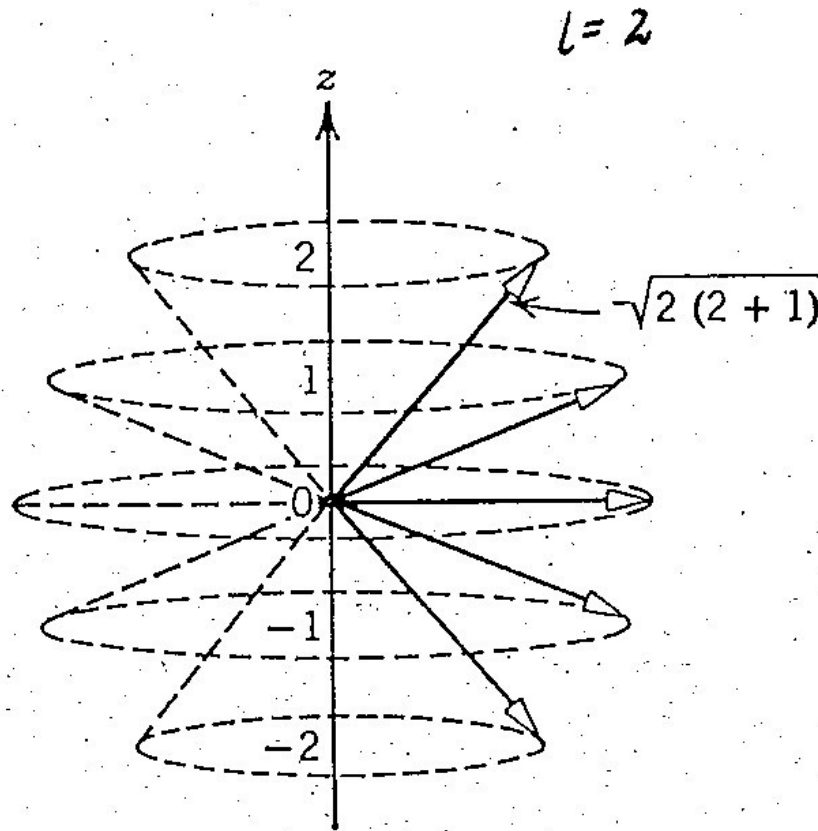
$$\langle |L| \rangle = \sqrt{l(l+1)} \cdot \hbar \quad \text{Betrag}$$

$$\langle L_z \rangle = m \cdot \hbar \quad \text{Richtung}$$

gleichzeitig scharfe Eigenwerte

$L_x$  und  $L_y$  nicht! Unschärferelation!

(r momenten-  
 units of  $\hbar$ )  
 with  $l=2$ .  
 r precesses  
 axis, main-  
 tude and a

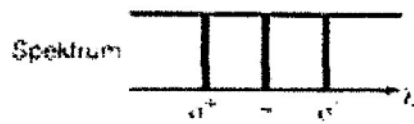
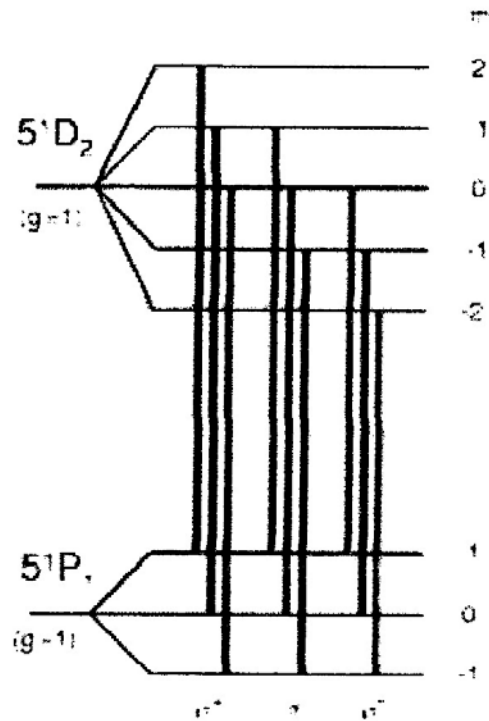


Pfeillänge:  $|L| = \hbar \sqrt{l(l+1)}$

z-Komponente:  $L_z = m_l \hbar$

Präzession von  $L$  da  $L_x$  und  $L_y$  fluktuieren

rot (643,8 nm):  $5^1D_2 \rightarrow 5^1P_1$



Termschema der roten Cd-Linie