Wechselspannung

Eine zeitlich sich periodisch bzw. sinusförmig verändernde Spannung heißt **Wechselspannung**.

Liegt die Spannung $U(t)$ über einen ***Ohm*'schen Widerstand *R*** an, so fließt ein Strom $I(t)$ nach dem *Ohm*'schen Gesetz:

$$I(t) = U(t)/R\ .$$

Strom und Spannung laufen **synchron**, ihre Phasen φ sind gleich; sie sind nicht ***phasenverschoben***. Die <u>*Leistung*</u>, die im Widerstand als ***Joule***'sche Wärme verbraucht wird, ist wie beim zeitlich konstanten Strom das Produkt aus **Strom** und **Spannung**:

$$P(t) = U(t)I(t) = U_o \sin[\omega t + \varphi]\ U(t)/R$$

$$= U_o \sin[\omega t + \varphi][U_o/R]\sin[\omega t + \varphi]$$

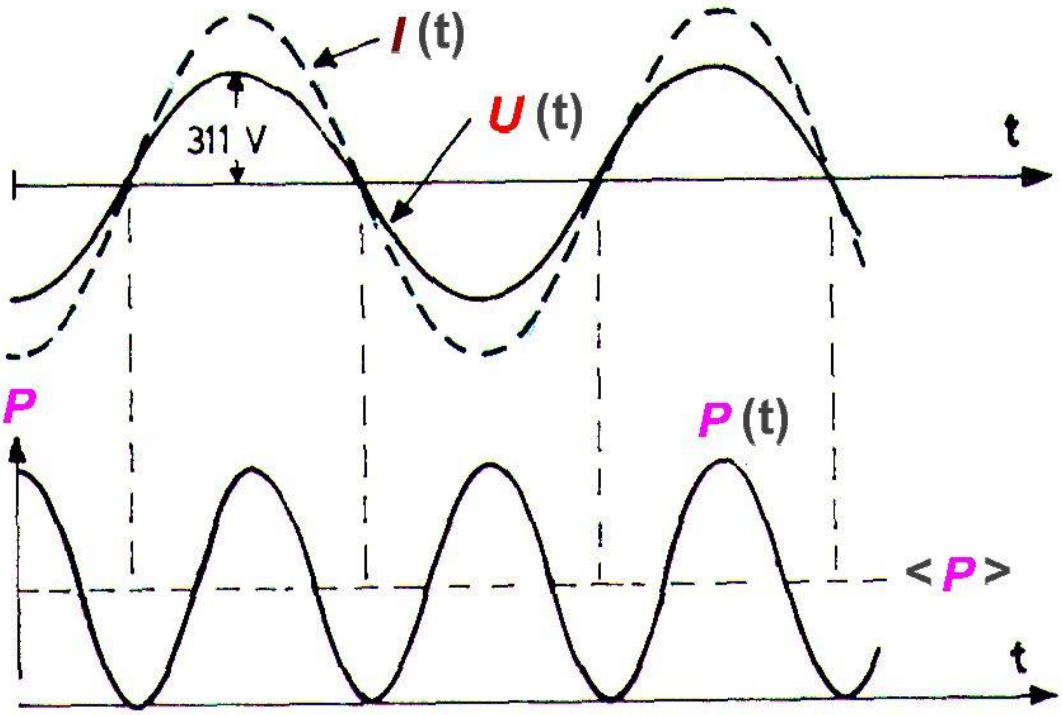
$$= [U_o^2/R]\ \sin^2[\omega t + \varphi].$$

Die mittlere **Leistung** $\langle P \rangle$, gemittelt über eine Sinus-schwingung, ist dann

$$\langle P \rangle = [U_o^2/R]\ \langle \sin^2[\omega t + \varphi] \rangle$$

$$= [U_o^2/R]/2 \quad \textit{oder} \quad U_o I_o/2,$$

da der Mittelwert $\langle \sin^2 \rangle$ über eine volle Schwingung gleich 1/2 ist.



Strom $I(t)$, Spannung $U(t)$ und Leistung $P(t)$ in einem Wechselstromkreis mit *Ohm*'schem Widerstand. Strom und Spannung sind beide sinusförmig und in Phase miteinander. Der Effektivwert der Spannung ist 220 V, die maximale Spannung U_o (Maximum der Sinusfunktion) beträgt 311 V: 220 V = 311 V/$\sqrt{2}$. Die Leistung $P(t)$ ist proportional zu $\sin^2(\omega t)$: $P(t) = P_o \sin^2(\omega t)$. Die mittlere Leistung $\langle P \rangle$ ist als gestrichelte Linie dargestellt, sie hat den Wert $P_o/2$.

Man definiert daher **Effektivwerte** U_{eff}, I_{eff} für Strom und Spannung mit $U_{eff} = U_o/\sqrt{2}$ und $I_{eff} = I_o/\sqrt{2}$, so daß

$$U_{eff}\, I_{eff} = U_o I_o/2 = \langle P \rangle.$$

Wechselstromwiderstand des Kondensators

Lässt man eine Wechselspannung auf **andere** Schaltelemente wirken, wie z.B. einen *Kondensator* oder eine *Spule*, so laufen **Strom** und **Spannung** ***auseinander***.

Die **Spannung** am *Kondensator* führt zu einem **Ladestrom**, der *phasenverschoben* ist relative zur Spannung. Dies kann man für eine sinusförmige Spannung leicht ausrechnen:

$$q(t) = C\,U(t)$$

und $$I(t) = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$$

also $$I(t) = C\,\mathrm{d}U(t)/\mathrm{d}t$$

Mit $U(t) = \sin[\omega t + \varphi]$:

$$I(t) = CU_o \, \mathrm{d}(\sin[\omega t + \varphi])/\mathrm{d}t$$

d.h.

$$\begin{aligned} I(t) &= \omega C U_o \cos[\omega t + \varphi] \\ &= \omega C U_o \sin[\omega t + \varphi + \pi/2]\,. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus der trigonometrischen Beziehung:

$$\sin[\alpha + \pi/2] = \cos\alpha$$

Wir finden daher folgende ***„Wirkungen" des Kondensators*** auf eine Wechselspannung $U(t)$:

(i) der **Strom** $I(t)$ ist **phasenverschoben** um $+\pi/2$ relativ zur **Spannung** $U(t)$; dann ist die *mittlere Leistung* $\langle P\rangle$ im Kondensator gegeben durch:

$$U(t)I(t) = U_o I_o \langle \sin[\omega t + \varphi] \cos[\omega t + \varphi] \rangle = \mathbf{0} \text{ !!}$$

(ii) die **Amplituden** von Spannung und Strom verhalten sich wie

$$I_o = \omega C U_o = U_o/\boldsymbol{R}_{\mathbf{eff}} \quad mit \quad \boldsymbol{R}_{\mathbf{eff}}(\omega) = \mathbf{1}/\boldsymbol{\omega C}\ .$$

Man nennt den Widerstand $\boldsymbol{R}_{\mathbf{eff}}(\omega)$ auch 'Schein-widerstand' oder 'Blindwiderstand', da er ***keine Leistung verbraucht*****:** der Kondensator speichert nur **Energie** (im elektrischen Feld) und gibt sie wieder frei (1/4 Schwingung später).

Wechselstromwiderstand einer Spule

Es gilt für Drahtschleifen und Spulen elektrischer Leiter:

$$U_i(t) = -L \, dI(t) / dt$$

Bei einer Spule der Länge l, Windungszahl N mit dem Radius r gilt in guter Näherung:

$$L = \mu_o \pi r^2 N^2 / l$$

Die Konstante L nennt man die **Selbstinduktivität** der Spule.

Das Verhalten der Spule lässt sich als Bewahrung bzw. Speicherung des Stromes verstehen, im Gegensatz zum Kondensator der durch Ladungsspeicherung Spannungen "aufbewahrt". Die Spule zeigt eine Art '**elektrische Trägheit**': sie widerstrebt jegliche Änderung des Stromes $I(t)$, indem sie eine **Gegenspannung** $U_i(t)$ aufbaut.

(Enthält die Spule in ihrem Inneren ***Materie*** mit der relativen Permeabilitätszahl μ_r, muß man anstatt μ_o das Produkt $\mu = \mu_o\mu_r$ in L einsetzen.)

Setzen wir für den Strom einen Wechselstrom

$I(t) = I_o \sin[\omega t + \varphi]$ an,

so finden wir (ähnliche Rechnung wie beim Kondensator) dass in der Spule, der **Strom** um $-\pi/2$ ***phasenverschoben*** ist relativ zur **Spannung** $U_i(t)$, die Leistung ist wieder im Mittel gleich Null.

Der **Effektivwiderstand** bzw. Wechselstromwiderstand der Spule ist gegeben durch:

$$R_{\text{eff}}(\omega) = \omega L.$$

Kondensator und Spule wirken also beide bei Wechselspannung als **Energiespeicher**, sie verschieben Spannung und Strom so gegeneinander, dass ***keine Leistung*** verbraucht wird. In einem Kondensator mit der gespeicherten Ladung q ist die gespeicherte **elektrische Energie** gleich $(1/2C)q^2$, in einer Spule mit Strom I ist die **magnetische Energie** gleich $(1/2)LI^2$.

Die Effektivwiderstände von beiden sind *frequenzabhängig*; R_{eff} des Kondensators wird unendlich, wenn $\omega \to 0$ geht (Gleichspannung, **kein** Ladungsdurchgang), R_{eff} der Spule geht gegen Null, wenn $\omega \to 0$ geht (nur *Ohm*'scher Widerstand).

Schaltungen mit Ohm'schen Widerständen, Kondensatoren und Widerständen kann der Gesamtwiderstand nur durch geeignete vektorielle Addition der Wechselstromwiderstände berechnet werden.