Dynamik der ebenen Kreisbewegung

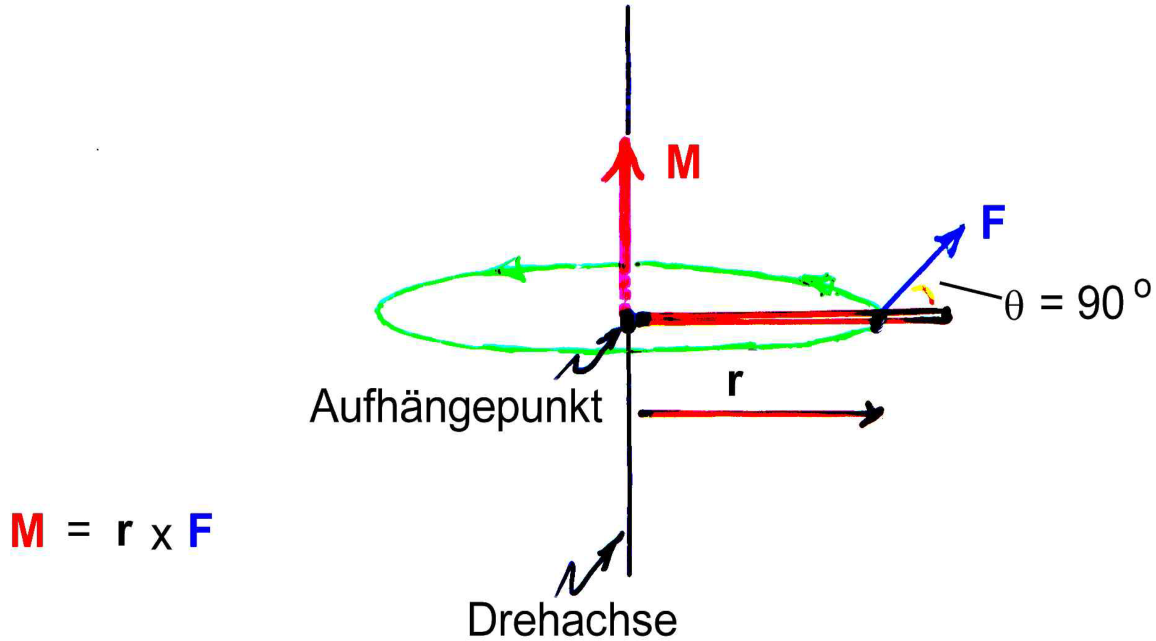
Eine Kreis- oder Rotationsbewegung entsteht, wenn ein

Drehmoment: $M = Fr$

um den Aufhängungspunkt des Kraftarms ***r*** (von der Drehachse) wirkt; die <u>Einheit</u> des Drehmoments ***M*** ist Nm oder kg m^2/s^2.
Um den vektoriellen Charakter von ***F***, ***r*** und ***M*** auszudrücken und die Richtungsabhängigkeit von ***F*** und ***r*** zu berücksichtigen, verwenden wir das **Vektorprodukt:**

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

wobei
$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ bedeutet: "***C*** ist ein Vektor, der senkrecht auf ***A*** und ***B*** steht und den Betrag $|C| = |A||B| \sin\theta$ besitzt, mit θ = Winkel zwischen ***A*** und ***B***". Die <u>Richtung</u> von ***M*** ist also parallel zur Drehachse (Rechte-Hand-Regel):



(hier abgebildet für den speziellen Fall, daß die Kraft ***F*** senkrecht zum Kraftarm ***r*** steht, d.h. $\theta = 90^{\circ}$).

Newton'sche Axiome für die Drehbewegung

1. **Trägheitsprinzip** --ein (massives) Objekt, worauf **keine Drehmomente** wirken, beharrt in seinem jeweiligen Zustand der **gleichförmigen** Drehbewegung.

2. **Aktionsprinzip** --wenn ein Drehmoment $\boldsymbol{M}$ auf ein Objekt wirkt, erzeugt sie eine Winkelbeschleunigung α (rad/s^2), nach der Bewegungsgleichung:

$$\boldsymbol{M} = \Theta\, \alpha$$

Hierbei ist Θ das **Trägheitsmoment** des Objektes. Aus den Einheiten der obigen Bewegungsgleichung sieht man, daß Θ die Einheit N m s^2 = kg m^2 haben muß. Für eine **Punktmasse** m im Abstand r von der Drehachse gilt

$$\Theta = m\, r^2$$

(andere Fälle s. Tabelle, unten).

3. ***actio* = *reactio*** --ein wirkendes Drehmoment $\boldsymbol{M}$ ruft immer ein gleich großes, entgegengerichtetes **Gegen**moment (Reaktionsmoment) $\boldsymbol{M}_R = -\boldsymbol{M}$ hervor (z.B. Gegendrehung eines Hubschraubers).

Der Drehimpuls

Die **Bewegungsgleichung**

$$\boldsymbol{M} = \Theta\, \alpha$$

für die **Drehbewegung** kann genau analog zur Newton'schen Gleichung für eine **lineare** Bewegung durch 2-maliges Integrieren gelöst werden.

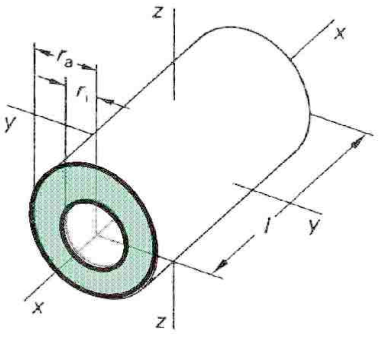
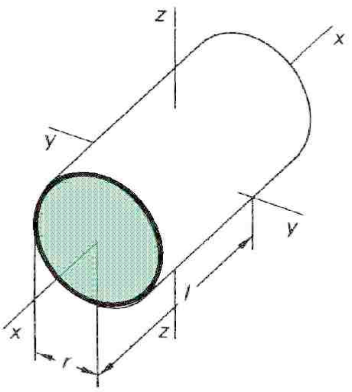
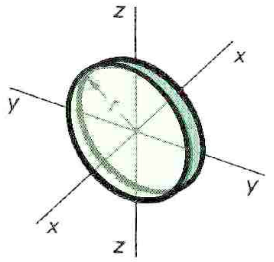
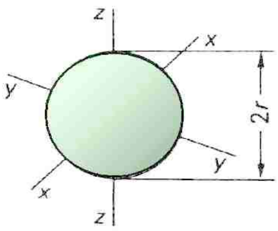
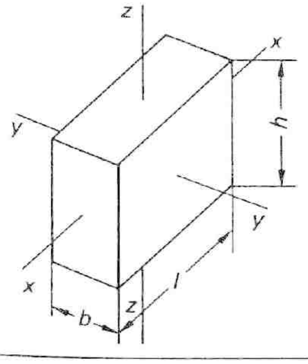
Analog zum ***Linearimpuls*** $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ definieren wir auch den

$$\textbf{Drehimpuls} \quad \boldsymbol{L} = \Theta\boldsymbol{\omega} = m\, \boldsymbol{v}_B \times \boldsymbol{r}$$

(die letzte Definition gilt für eine Punktmasse m auf einer Kreisbahn vom Radius $\boldsymbol{r}$ mit der Bahngeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_B$). Hier gilt ebenfalls ein Erhaltungssatz, die **Drehimpulserhaltung**. Die allgemeine Form der Bewegungsgleichung für die Drehbewegung ist dann:

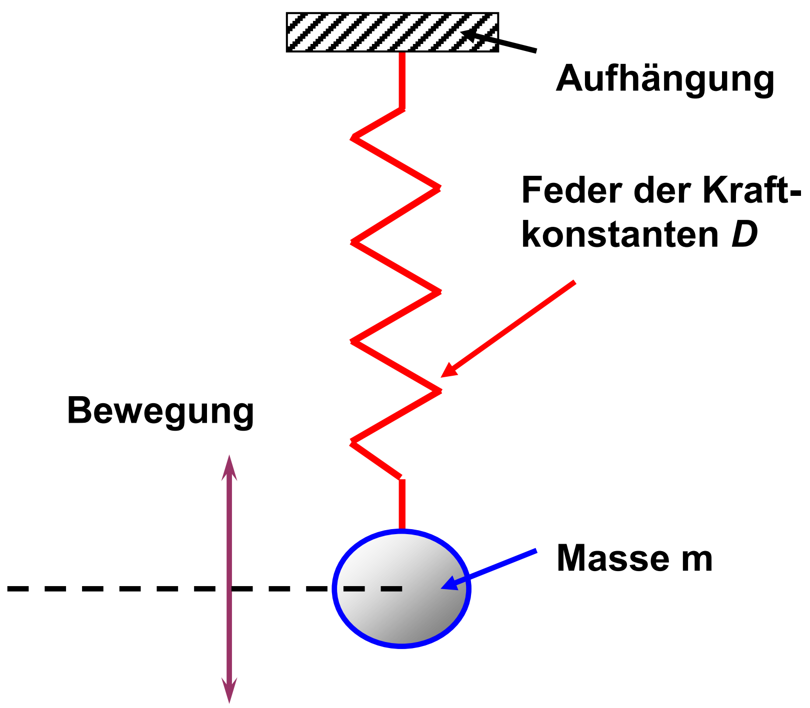
$$\boldsymbol{M} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t\,.$$

Beispiele für das **Trägheitsmoment Θ** von verschiedenen Körpern:

Körperform		Trägheitsmoment
	Hohlzylinder	$\Theta_x = (m/2)[r_a^2 + r_i^2]$ $\Theta_y = \Theta_z = (m/4)[r_a^2 + r_i^2 + l^2/3]$
	dünnwandiger Hohlzylinder	$\Theta_x = mr^2$ $\Theta_y = \Theta_z = (m/4)[2r^2 + l^2/3]$
	Vollzylinder	$\Theta_x = (m/2)r^2$ $\Theta_y = \Theta_z = (m/4)r^2 + (m/12)\, l^2$
	dünne Scheibe ($l \ll r$)	$\Theta_x = (m/2)r^2$ $\Theta_y = \Theta_z = (m/4)r^2$
	dünner Stab ($l \gg r$) unabhängig von der Form des Querschnitts	$\Theta_x = (m/2)r^2$ $\Theta_y = \Theta_z = (m/12)\, l^2$
	dünner Ring	$\Theta_x = m\, r^2$ $\Theta_y = \Theta_z = (m/2)r^2$
	Kugel, massiv	$\Theta_x = \Theta_y = \Theta_z = (2m/5)r^2$
	dünne Kugelschale	$\Theta_x = \Theta_y = \Theta_z = (2m/3)r^2$
	Quader	$\Theta_x = (m/12)[b^2 + h^2]$ $\Theta_y = (m/12)[l^2 + h^2]$ $\Theta_z = (m/12)[l^2 + b^2]$

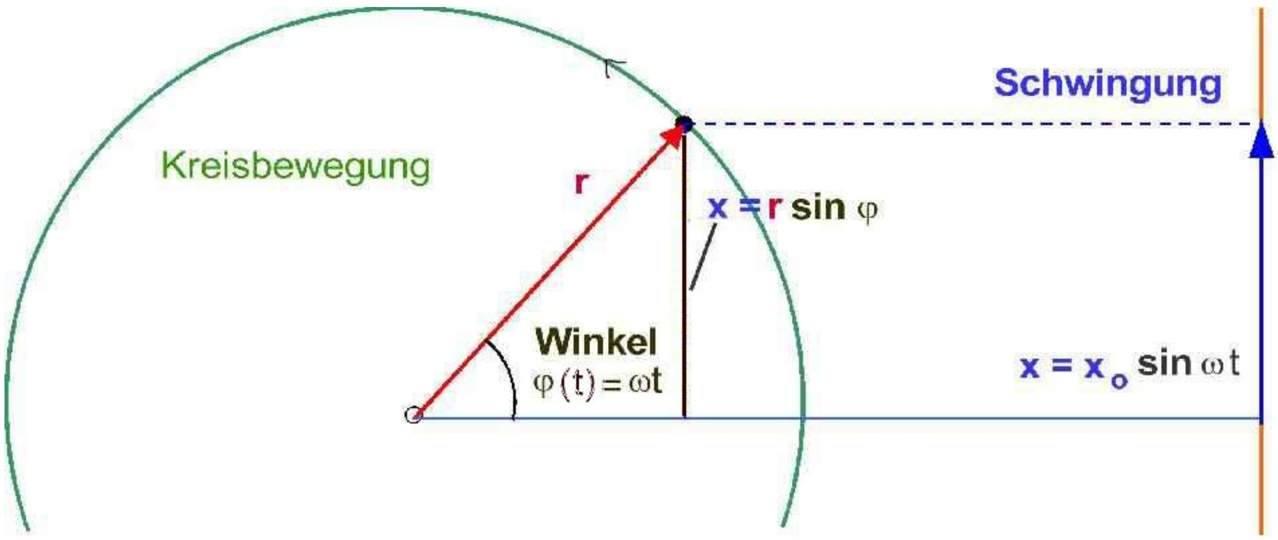
Die **Schwingung**

Nun kommen wir zur dritten **einfachen Bewegungsart**: zur **Schwingung**. Eine Schwingung zeigt einige Ähnlichkeiten zur ebenen Kreisbewegung, z.B. sind beide **ortsgebunden**: die Kreisbewegung an dem Kreis**mittelpunkt**, die Schwingung an ihre sogenannte **Ruhelage**. Es gibt jedoch einige wesentliche Unterschiede: die gleichförmige Kreisbewegung schreitet (auf der Kreisbahn) immer weiter fort, während sich die Schwingung zeitlich **wiederholt**. Die Kreisbewegung hat eine konstante (Zentripetal-) Beschleunigung, bei der Schwingung treten aber während jedem Schwingungszyklus **unterschiedliche** Beschleunigungen (in Betrag und Richtung) auf. Die Kreisbewegung besitzt nur **kinetische** (Rotations-) Energie, die Schwingung aber sowohl **kinetische** als auch **potentielle** Energie.



Federpendel. Die Masse schwingt auf und ab (bzw. hin und her) um die Ruhelage der Feder (gestrichelte Linie). Bei Auslenkung von der Ruhelage erzeugt die Feder eine rücktreibende Kraft.

Die Zeit, nach der sich eine Schwingung wiederholt, wird **Schwingungsdauer** *T* genannt. Der Kehrwert dieser Zeit gibt die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit an und heißt Schwingungs**frequenz** ν (gr. 'nu'); sie wird in 1/Sek. = *Hertz* (Hz) gemessen. Man verwendet auch oft die **Kreisfrequenz** ω, mit ω = 2πν (auch in Hz gemessen). Die Kreisfrequenz deutet auf eine andere Ähnlichkeit der Schwingung und der Kreisbewegung hin: betrachtet man eine gleichförmige, ebene Kreisbewegung **in der Kreisebene**, d.h. projiziert auf eine Linie in der Ebene, so scheint sich der Massenpunkt entlang dieser Linie auf und ab zu bewegen. Diese scheinbare Bewegung ist identisch mit einer **harmonischen Schwingung**, wobei die Kreisfrequenz der Schwingung gleich die Winkelgeschwindigkeit ω der Kreisbewegung ist:



Vergleich der ebenen Kreisbewegung (links) mit der Schwingung (rechts).

Beschreibung der Schwingungsbewegung

Beispiel: **Federpendel** (s. Bild oben). Die rücktreibende Kraft ist die **elastische** Kraft,

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{el}} = -D\,\boldsymbol{x} \qquad (\textit{Hooke}\text{'sches Gesetz!})$$

wobei D die 'Federkonstante' und $\boldsymbol{x}$ die Auslenkung (relativ zur Ruhelage) sind. Einsetzen in $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t^2$ und Umformen ergibt:

$$(D/m)\,\boldsymbol{x}(t) + \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t^2 = 0\ .$$

Diese ***Schwingungsgleichung*** (Differentialgleichung 2. Ordnung) kann formell durch 2-maliges **Integrieren** gelöst werden; wir können sie aber einfach mit einer **Versuchslösung** lösen (welche aus dem Vergleich mit der Kreisbewegung nahe liegt):

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_{\mathrm{o}} \sin[\omega_{\mathrm{o}} t + \varphi_{\mathrm{o}}]$$

(Die 2. Ableitung der Sinus- oder Kosinus-Funktion ist proportional der Funktion selbst!). Die Lösung enthält zwei **Integrationskonstanten:** $\boldsymbol{x}_{\mathrm{o}}$ = Anfangsauslenkung oder **Amplitude**; φ_{o} = **Anfangsphase**). Außerdem enthält sie eine Konstante der Bewegung (Systemkonstante), die Kreisfrequenz $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{o}}$, die durch Eigenschaften des schwingenden Systems (des harmonischen Oszillators), nämlich die Kraftkonstante D sowie die Trägheitskonstante m, bestimmt wird: $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{o}} = \sqrt{D/m}$.

Dieselbe Schwingungsgleichung erhielten wir mit dem Energie-Ansatz...

weitere Beispiele: Drehschwingungen (Drehpendel), Fadenpendel, Wassersäule in einem U-Rohr.

Vergleich von verschiedenen Oszillatoren

(schwingungsfähigen Systemen)

Größe, Eigenschaft	**Federpendel**	**Drehpendel (Torsionspendel)**	**Fadenpendel** (Länge l)
Auslenkung	Strecke $\boldsymbol{x}(t)$	Winkel $\varphi(t)$	Winkel $\varphi(t)$ *oder* Bahnstrecke $s_B(t)$
rücktreibende Kraft	Elastische **(Feder-)**Kraft $\boldsymbol{F} = -D\boldsymbol{x}$	Elastisches (**Torsions-**) Moment $\boldsymbol{M} = -D^*\boldsymbol{\varphi}$	Schwerkraft $\boldsymbol{F}_{\|} = -mg \sin \varphi$ (**nicht** harmonisch!)
Trägheit	Masse m	Trägheitsmoment Θ	Masse m
Dämpfung	Reibungskraft $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{v}$	Torsionsreibung $\boldsymbol{M} = -k^*\boldsymbol{\omega}$	Reibungskraft $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{v}$
Lösung der Bewegungsgleichung	$x(t)=x_o\sin[\omega_o t + \varphi_o]$	$\varphi(t)= \varphi_o\sin[\omega_o t + \xi_o]$	$s_B(t)=s_o\sin[\omega_o t+\xi_o]$ *oder* $\varphi(t)=\varphi_o\sin[\omega_o t+\xi_o]$ (mit $\sin \varphi \approx \varphi$)
Kreisfrequenz ω_o (Eigenfrequenz)	$\omega_o = \sqrt{D/m}$	$\omega_o = \sqrt{D^*/\Theta}$	$\omega_o = \sqrt{g/l}$
gedämpfte Frequenz ω_1	$\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - k^2/4m^2}$	$\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - k^{*2}/4\Theta^2}$	$\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - k^2/4m^2}$
