Dämpfung - Gedämpfte Schwingungen

Alle wirklichen Schwingungen halten nicht ewig an, wie die obige Lösung für $\boldsymbol{x}(t)$ andeuten würde; die Schwingungsenergie geht durch **Reibung** verloren. Die Schwingungen sind dann 'gedämpft' durch eine **Reibungskraft**:

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{R} = - k\boldsymbol{v} = -k\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t$$

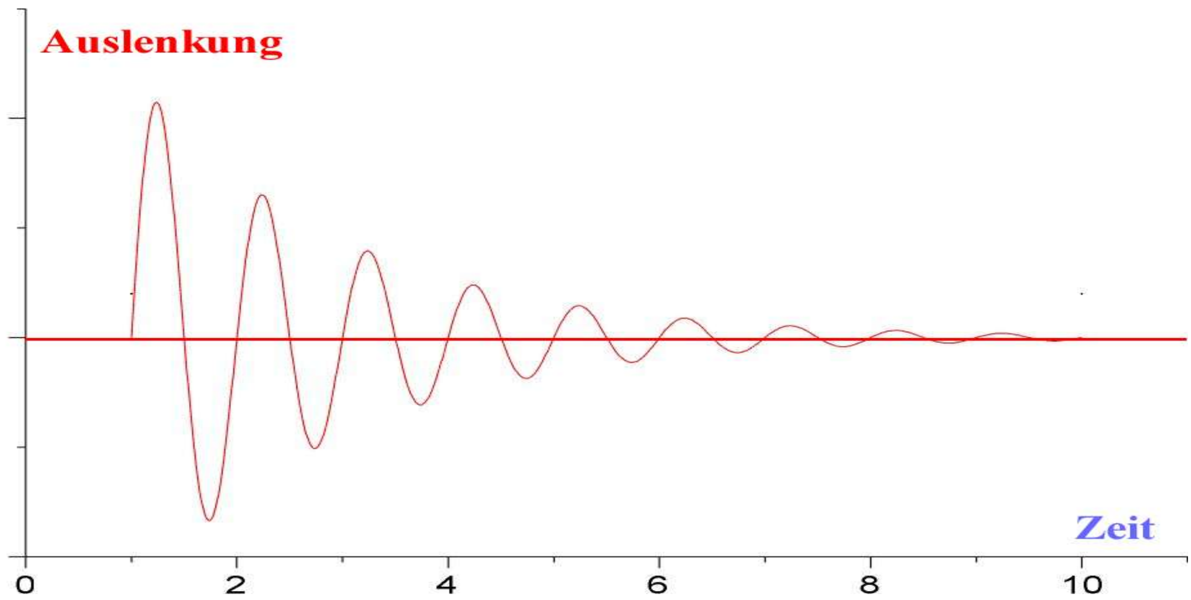
wo k die 'Reibungskonstante' und $\boldsymbol{v}$ die momentane Geschwindigkeit der Schwingungsbewegung sind. (Andere Reibungskräfte, die nicht Geschwindigkeitsproportional sind, sind auch bekannt, diese ist aber die wichtigste Form).

Die Lösung $\boldsymbol{x}(t)$ enthält wieder zwei Anfangsbedingungen, zeigt aber eine zusätzliche **Zeit**abhängigkeit :

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_\mathrm{o} \exp(-t/\tau) \sin[\omega_1 t + \varphi_\mathrm{o}]$$

mit der Dämpfungszeit $\tau = 2m/k$, und mit einer neuen Kreisfrequenz ω_1, gegeben durch:

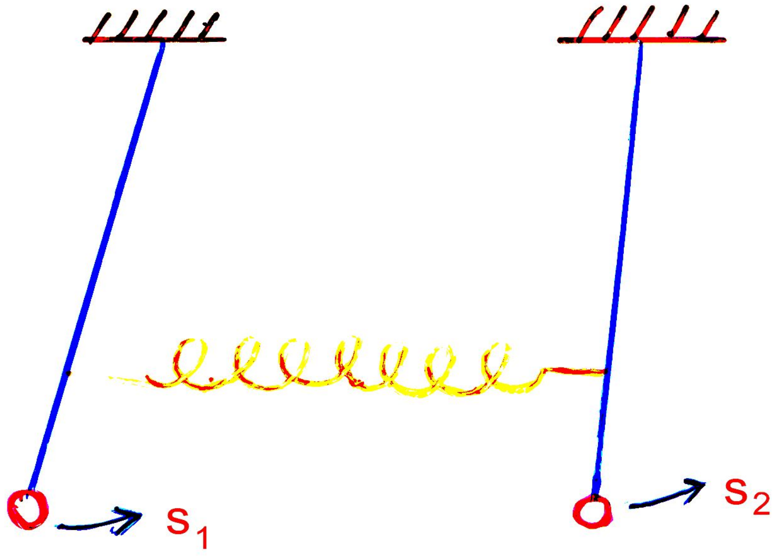
$$\omega_1 = \sqrt{\omega_\mathrm{o}^2 - k^2/4m^2}\ .$$



Gedämpfte Schwingung: die Amplitude (maximale Auslenkung) der Schwingung sinkt exponentiell mit der Zeit ab.

Wellenlehre

gekoppelte Schwingungen



Werden zwei (oder mehr) harmonische Oszillatoren aneinander **gekoppelt** (z.B. zwei Federpendel durch eine 'Kopplungsfeder'), dann führen sie eine komplexe Bewegung aus. Diese **gekoppelten Schwingungen** haben jedoch eine einfache Form, wenn die richtigen Anfangsbedingungen gewählt werden:

(i) wenn am Anfang die gesamte Schwingungsenergie in **einem** Oszillator gespeichert wird, entstehen sogenannte '**Schwebung-en**': die Schwingungsenergie wechselt zeitlich zwischen den einzelnen Oszillatoren hin und her;

(ii) wenn alle Oszillatoren am Anfang mit einer **festen Phasenbeziehung** angeregt werden, entstehen Normal-schwingungen. Dabei bewegen sich alle Oszillatoren synchron, mit der gleichen Frequenz; die niedrigste Frequenz entspricht der **Grundschwingung**, wobei sich alle Oszillatoren **zusammen** Bewegen. Es gibt so viele Normalschwingungen wie einzelne Oszillatoren im gesamten, gekoppelten System ("Anzahl der Freiheitsgrade")

Beschreibung von **Wellen**

Wellen sind gewissermaßen 'Schwingungen, die sich auf den Weg gemacht haben'. Eine Schwingung ist **ortsgebunden**, zeigt aber eine zyklische Änderung (Bewegung) in der **Zeit**. Wellen sind nicht nur in der Zeit, sondern auch im **Ort** zyklisch; sie erstrecken sich über einen größeren Ortsbereich bzw. breiten sich im Ortsbereich aus.

Wie auch bei den Schwingungen haben Wellen eine besonders einfache Form, wenn sie **harmonisch** sind, d.h. durch eine Sinus- oder Kosinusfunktion beschreiben werden können. Das Argument der Funktion enthält dann nicht nur die **Zeitabhängigkeit**, wie bei Schwingungen, sondern auch die **Ortsabhängigkeit** der Wellen.

Wie Schwingungen, haben Wellen eine **Amplitude** A_o und eine **Phase** φ_o, welche durch ihre **Anfangsbedingungen** gegeben sind. Außerdem sind sie charakterisiert durch eine **Konstante der Bewegung**, welche ihre **Zeitabhängigkeit** angibt (die Schwingungsdauer T bzw. Frequenz $\nu = 1/T$ oder Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$) --und durch eine **zweite** Konstante, die ihre **Ortsabhängigkeit** beschreibt (die Wellenlänge λ bzw. Wellenzahl $= 1/\lambda$ oder $k = 2\pi/\lambda$):

$$\psi(x,t) = A_o \sin[\omega t - kx + \varphi_o].$$

$\psi(x,t)$ wird **Wellenfunktion** genannt; sie beschreibt die Auslenkung der Welle als Funktion von Ort x und Zeit t. Diese Form gilt für **eindimensionale**, **laufende** Wellen, die sich in **+*x*-**Richtung ausbreiten.

Zwischen den Konstanten der Bewegung (die vom Medium bestimmt sind, in dem sich die Wellen ausbreiten) gibt es eine weitere Beziehung, welche die **Ausbreitungsgeschwindigkeit** (Phasengeschwindigkeit) u_φ der Wellen angibt:

$$\boxed{u_\varphi = \lambda\nu = \omega/k}$$

(Grundgleichung der Wellenlehre).

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt also auch von dem **Medium** ab.

Wellentypen

Wir unterscheiden verschiedene **Typen von Wellen**, je nach dem, wie die schwingende Größe zu der Ausbreitungsrichtung steht und wie sich die Wellen ausbreiten:

--falls die schwingende Größe **senkrecht** zur Ausbreitung steht, sind es **transversale** Wellen (Beispiele: Wasserwellen, Lichtwellen);

--steht sie **parallel** dazu, sind es **longitudinale** Wellen (Beispiel: Schallwellen).

--Wellen, die sich in eine (oder mehrere) Richtung(en) ausbreiten und Energie transportieren, heißen **laufende** Wellen (Licht, Schall,...);

--Wellen, die in einem **fest gegrenzten** System schwingen und **keine** Energie transportieren, heißen **stehende** Wellen (akustische Wellen auf einer Geigensaite oder in einer Orgelpfeife).

--Wellen, bei denen die Amplitude überall gleich ist (senkrecht zur Ausbreitungsrichtung), heißen **ebene** Wellen; sie können durch ***Ebenen*** senkrecht zur Ausbreitung ("Wellenfronten") dargestellt werden;

--Wellen, bei denen die Bereiche konstanter Amplitude auf ***Kugelflächen*** liegen, heißen **Kugelwellen** (z.B. Lichtwellen von einer Punktquelle).

Transversale Wellen können auch **polarisiert** sein: das heißt, ihre schwingende Größe schwingt in **nur eine Ebene** (anstatt in allen möglichen Ebenen) senkrecht zur Ausbreitung (bei Licht: **Linearpolarisation**.

Als Beispiel, um die Wellenausbreitung in einem Medium zu untersuchen, betrachten wir **transversale**, **laufende**, **eindimensionale** Wellen auf einem elastischen Seil (**Gummiseil**). Wir bezeichnen die Seilrichtung als $\boldsymbol{x}$, die Auslenkungsrichtung des Seils (senkrecht zu $\boldsymbol{x}$) als $\boldsymbol{z}$. Wir wollen dann das Verhalten der Wellenfunktion $\psi(x,t) \equiv z(x,t)$ berechnen.

Dazu teilen wir das Seil in beliebig viele sehr kleine Schnitte der Länge dx, die je eine Masse $dm = \rho_l\, dx$ haben (ρ_l = Masse pro Längeneinheit oder ***lineare Massendichte***). Jeder Schnitt verhält sich wie ein **harmonischer Oszillator**. Nun berechnen wir die rücktreibende Kraft auf jedem Schnitt und setzen sie in die Newton'sche Bewegungsgleichung $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ ein.

Seilwellen auf einem ausgestreckten, elastischen Seil. (*oben*) Ruhendes Seil, mit der Zugkraft $\boldsymbol{Z}$ an beiden Enden; die Seilrichtung ist die x-Richtung. (*unten*) Das Seil wird in z-Richtung ausgelenkt (gezüpft); eine Seilwelle bewegt sich nach rechts (+x-Richtung). Vergrößerte Darstellung (*im Kreis*): durch die ***Krümmung*** des Seils gibt es eine ***rücktreibende Kraft*** (resultierende Kraft aus den beiden Zugkräften von links und rechts).

Die rücktreibende Kraft hängt von der **Zugkraft *Z*** ab, mit der das Seil gestreckt wird, aber auch von der Krümmung des Seils am jeweiligen Punkt. Ist die Krümmung Null (gerades Seil), so verschwindet die rücktreibende Kraft.

Die Krümmung wird durch die 2. Ableitung der Seilkurve $z(x)$ beschrieben:

$$\textbf{\textit{Krümmung}} \equiv \mathrm{d}^2z/\mathrm{d}x^2 = \partial^2\psi(x,t)/\partial x^2$$

und damit ist die rücktreibende Kraft $\boldsymbol{F}_{\text{rü}}$ gegeben durch:

$$\boldsymbol{F}_{\text{rü}} = \boldsymbol{Z}\, \partial^2\psi(x,t)/\partial x^2 \,\mathrm{d}x\,.$$

Die **Beschleunigung** während der Wellenbewegung ist die 2. zeitliche Ableitung der Auslenkung $z(t)$, d.h.:

$$a = \mathrm{d}^2z/\mathrm{d}t^2 = \partial^2\psi(x,t)/\partial t^2.$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung, mit $m = \rho_l\, \mathrm{d}x$, ergibt:

$$Z\, \partial^2\psi(x,t)/\partial x^2\, \mathrm{d}x = \rho_l\, \partial^2\psi(x,t)/\partial t^2\, \mathrm{d}x,$$

oder, nach Kürzen des Faktors dx auf beiden Seiten der Gleichung,

$$\boxed{Z\, \partial^2\psi(x,t)/\partial x^2 = \rho_l\, \partial^2\psi(x,t)/\partial t^2\,.}$$

Dies nennt sich die **klassische Wellengleichung**; ihre ***Lösung*** ist die Wellenfunktion $\psi(x,t)$. Die **Konstanten** Z und ρ_l (Systemkonstanten) bestimmen die **Ausbreitungsgeschwindigkeit** u_φ:

$$u_\varphi^2 = Z/\rho_l.$$

Anwendungen der Wellengleichung

Wir haben für das Gummiseil eine **Wellengleichung** gefunden, die zwei Systemkonstanten enthält, die Zugkraft $\boldsymbol{Z}$ und die lineare Massendichte ρ_l:

$$Z\partial^2\psi(x,t)/\partial x^2 = \rho_l\,\partial^2\psi(x,t)/\partial t^2.$$

Diese Gleichung beschreibt die **Bewegung von laufenden Seilwellen**. Wir wollen zunächst zeigen, daß eine harmonische Welle, die in $+\boldsymbol{x}$-Richtung lauft, tatsächlich eine **Lösung der Wellengleichung** ist. Wir nehmen als ***Versuchslösung***

$$\psi(x,t) = A_o \sin[\omega t - kx + \varphi_o]$$

und setzen sie in die Wellengleichung ein. Dazu brauchen wir die Ableitungen bzgl. Ort x und Zeit t:

$$\begin{aligned}
&\partial\psi(x,t)/\partial x = -k\,A_o \cos[\omega t - kx + \varphi_o]\\
&\partial^2\psi(x,t)/\partial x^2 = -k^2\,A_o \sin[\omega t - kx + \varphi_o]\\
&\partial\psi(x,t)/\partial t = \omega\,A_o \cos[\omega t - kx + \varphi_o]\\
&\partial^2\psi(x,t)/\partial t^2 = -\omega^2 A_o \sin[\omega t - kx + \varphi_o]\ .
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Wellengleichung ergibt:

$$-k^2\,Z\,A_o \sin[\omega t - kx + \varphi_o] = -\omega^2\,\rho_l\,A_o \sin[\omega t - kx + \varphi_o]$$

oder, nach kürzen der Sinusfunktionen und Amplituden auf beiden Seiten,

$$k^2 Z = \omega^2\rho_l \quad \textit{oder} \quad \omega^2/k^2 = Z/\rho_l\ .$$

Da aber, nach der Grundgleichung der Wellenlehre, die Ausbreitungsgeschwindigkeit u_φ durch $u_\varphi = \omega/k$ gegeben ist, finden wir für die Seilwellen:

$$u_\varphi{}^2 = Z/\rho_l\ .$$

Dieses Ergebnis können wir wieder in die Wellengleichung einsetzen, um eine **allgemeine** Wellengleichung, gültig für **jedes System**, zu erhalten:

$$\boxed{\partial^2\psi(x,t)/\partial x^2 = (1/u_\varphi^{\,2})\,\partial^2\psi(x,t)/\partial t^2\,.}$$

Diese Gleichung enthält nur ***eine*** (allgemeine) Konstante der Bewegung, die Phasengeschwindigkeit u_φ. Sie gilt für **jedes** Wellenmedium und jeden Wellentyp.

Wir sehen, daß für **jede Art von Wellen** --Wasserwellen, Seilwellen, akustische (Schall-) Wellen, elektrische Wellen, auch elektromagnetische Wellen (Radio-, Radar-, Infrarotlicht-, sichtbares Licht-, UV-Licht-, Röntgen- und schließlich Gamma-strahlungs-Wellen)-- dieselbe Bewegungsgleichung gilt, wobei die einzige auftretende Konstante --durch das **Ausbreitungs-medium** bestimmt-- die Ausbreitungsgeschwindigkeit u_φ ist.

***Fourier*analyse**

Bisher haben wir nur **harmonische** Schwingungen oder Wellen betrachtet: diejenige, die mit einer einfachen Sinus- oder Kosinusfunktion beschrieben werden können. In der Natur kommen jedoch viele periodische Vorgänge vor, die ***nicht harmonisch***, sondern durch kompliziertere Funktionen zu beschreiben sind. Sie können trotzdem alle ähnlich behandelt werden, wie die harmonischen Phänomene, die wir bisher betrachtet haben.

Dies ist von dem Mathematiker *J. Fourier* vor längerer Zeit gezeigt worden. Der **Satz von *Fourier*** besagt, daß **jede** periodische Funktion, egal welcher Form, als Summe von Sinus- und/oder Kosinus-Funktionen beschrieben werden kann:

$$F(t) = \Sigma\, A(\omega_i) \sin(\omega_i t)\ .$$

Hier ist $F(t)$ die (beliebige) periodische Zeitfunktion, die ω_i sind Frequenzen (Grundfrequenz und Vielfache davon), welche durch den Laufindex i numeriert sind, die $A(\omega_i)$ sind Amplituden (d.h. Zahlen, welche die Wichtigkeit der jeweiligen Frequenzkomponenten ω_i angeben), und die Summe erfaßt soviele Freqenzen (Werte vom Laufindex i) wie nötig, um die Funktion $F(t)$ darzustellen.

Die Angabe der Frequenzen und Amplituden für eine (z.B. gemessene) Funktion $F(t)$ nennt man 'Fourier-Zerlegung'; umgekehrt kann man eine beliebige Funktion $F(t)$ durch Wahl der Amplituden und Frequenzen aufbauen --dies heißt Fourier-Synthese'. Der Überbegriff für beide Verfahren ist die 'Fourieranalyse'. Das Ergebnis --in beiden Richtungen-- nennt man eine '**Fouriertransform**'.

Diese Verfahren sind in den letzten 20 Jahren --seitdem es preiswerte und leistungsfähige kleinere elektronische Rechner gibt-- sehr wichtig geworden.

Sie werden in der Strukturanalyse der Materie mittels Streuexperimente (Elektronenstreuung, Neutronenstreuung, Röntgenstreuung), aber auch in der Spektroskopie (Infrarot Schwingungs-Spektroskopie an Molekülen, magnetische Kernresonanz-Spektroskopie) und vor allem bei bildgebenden Methoden [Resonanztomografie (MRT), Röntgentomografie (CRT), Positron-Emissionstomografie (PET)] verwendet, um die erhaltene Informationen nutzbar zu machen.

Auch **nicht** periodische Funktionen $G(t)$ können so analysiert werden-- nur dann muß die ***Summe*** durch ein ***Integral*** ersetzt werden, die Frequenzen werden nun kontinuierlich variiert:

$$G(t) = \int A(\omega) \sin(\omega t)\, \mathrm{d}\omega$$

bzw.

$$A(\omega) = \int G(t) \sin(\omega t)\, \mathrm{d}t\ .$$

Akustik

Die **Akustik** behandelt die Erzeugung und Ausbreitung von **Schallwellen**. Der Schall ist eine ***longitudinale Welle***, die sich in einem **materiellen Medium** ausbreitet (Luft, Wasser, Metall usw.). Wie bereits gezeigt, hängt die Ausbreitungsgeschwindigkeit u von Schallwellen von zwei **Eigenschaften des Mediums** ab, von seiner '**rücktreibenden Kraft**' (durch den Kompressionsmodul bzw. Elastizitätsmodul bestimmt) sowie von seiner **Trägheit** (durch die Massendichte ρ bestimmt; vgl. Seilwellen).

Schwebungen

Überlagert man zwei Schallwellen mit unterschiedlicher Frequenz, so entstehen **Schwebungen** (vgl. 'gekoppelte Schwingungen'). Die beiden Wellen schwächen sich ab und verstärken sich abwechselnd; man hört dieses auf und ab als periodische **Änderung der Lautstärke**, die um so langsamer abläuft, je näher die beiden Frequenzen zueinander liegen.

Mathematisch läßt sich dieses Phänomen als **Überlagerung** von zwei Sinus- oder Kosinuswellen beschreiben (s. 'Wellengruppen'), so daß das Ergebnis als Produkt einer ***zeitabhängigen Amplitude*** mit einer '***mittleren Welle***' geschrieben werden kann:

$$\psi(t) = [A_o \cos \Delta\omega t] \cos \langle \omega t \rangle.$$

Die Wellenfunktion ψ stellt hier entweder den ***Schalldruck*** oder die lokale ***Dichte*** des Mediums dar (hier ist nur die Zeitabhängigkeit berücksichtigt, die Ortsabhängigkeit gehorcht aber auch einer ähnlichen Beziehung). Die **Schwebungsfrequenz** $\Delta\omega$ ist gegeben durch $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$ und wird sehr klein, wenn sich die beiden überlagerten Frequenzen sehr nah liegen; die **mittlere Frequenz** $\langle\omega\rangle$ ist der Mittelwert der überlagerten Frequenzen: $\langle\omega\rangle = (\omega_1 + \omega_2)/2$.

Ruhende Flüssigkeiten, Druck
- Hydrostatik -

In einer Flüssigkeit sind die Teilchen (Atome, Moleküle) fest aneinander gebunden durch sogenannte **Kohäsionskräfte**, die Teilchen lassen sich jedoch beliebig aneinander ***vorbeischieben***. Dies führt dazu, daß sich das Volumen der Flüssigkeit nur schwer ändern läßt (Flüssigkeiten sind **kaum komprimierbar**!), die **Form** der Flüssigkeit aber beliebig ist (Volumenelastizität, aber keine Formelastizität).

Wirkt eine Kraft auf eine bewegliche Gefäßwand ('Stempel'), so wird sie innerhalb der Flüssigkeit als **Druck** übertragen. Der Druck wirkt allseitig und überall in der Flüssigkeit; er ist daher **nicht** eine Vektorgröße. Der Druck ist definiert als 'Kraft pro Fläche':

Druck = **wirkende Kraft**/**Angriffsfläche**, $P = F/A$

Druckeinheit = $N/m^2 \equiv Pa$ (*Pascal*); gemeint ist die Kraft-**komponente**, die ***senkrecht*** zur Fläche A steht. (Zum Vergleich: der **Atmosphärendruck**, der auf der Edoberfläche aufgrund des Gewichts der Lufthülle wirkt, beträgt etwa 100 000 Pa. Man definiert daher eine weitere Druckeinheit, das **Bar**:

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}.$$

Wir sprechen von einer **idealen** Flüssigkeit, wenn das Volumen exakt konstant bleibt (***keine*** Komprimierbarkeit) und die Formänderung (z.B. Fliessen) ***ohne Widerstand*** geschieht (***keine*** Formelastizität). Wirkliche Flüssigkeiten (reale Flüssig-keiten) haben diese idealen Eigenschaften nur annähernd; insbesondere zeigen sie einen Widerstand (Zähigkeit) gegenüber *Form*änderungen, d.h. Fliessen.

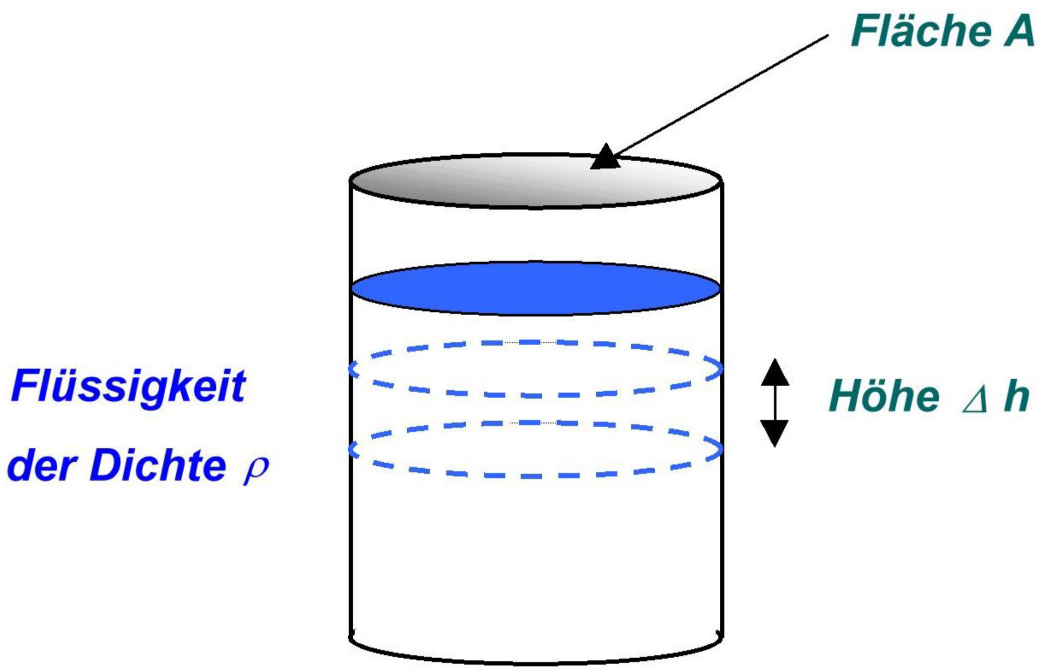
Hydrostatischer Druck

Der **Schweredruck** entsteht durch das Gewicht der Flüssigkeit, welche über dem Meßpunkt liegt. Er ist gegeben durch die Gewichtskraft, geteilt durch die Fläche des Behälters:

$$\Delta P(\Delta h) = mg/A = \rho Vg/A = \rho gA\Delta h/A = \rho g\Delta h,$$

wo ρ die *Massendichte* der Flüssigkeit bezeichnet. Der Schweredruck steigt also *linear mit wachsender Tiefe* in der Flüssigkeit an, bei der tiefe h hat er den Wert:

$$P(h) = \rho gh\ .$$



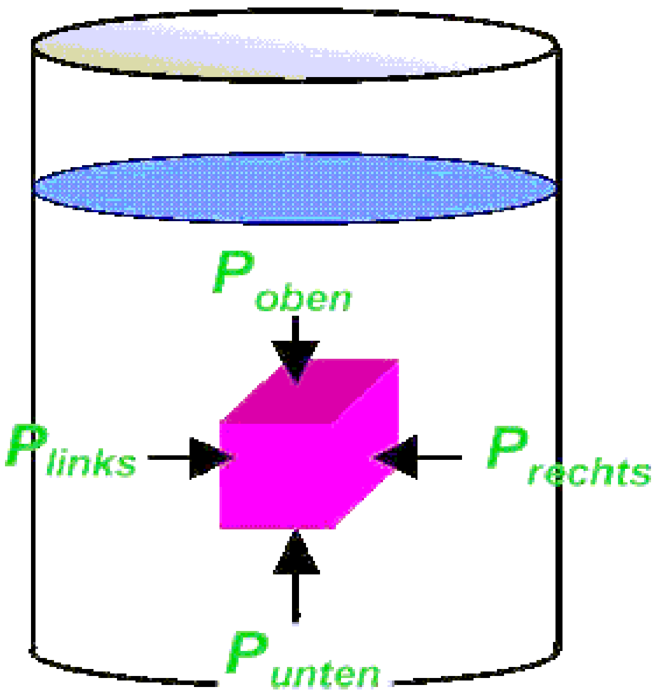
Schweredruck in einer Flüssigkeit der Dichte ρ.

Der **Gesamtdruck** in einer ruhenden Flüssigkeit, der sogenannte **hydrostatischer Druck**, ist die Summe vom Stempeldruck P_o und Schweredruck $P(h)$:

$$P = P_o + P(h)\ .$$

Dieser Druck wirkt bei gegebener Tiefe überall gleich, er ist ***nicht richtungsabhängig*** und hängt auch nicht von der Form des Behälters ab ('hydrostatisches Paradoxon').

Auftrieb: Taucht ein Objekt in die Flüssigkeit ein, wirkt an seiner unteren Fläche aufgrund des Schweredrucks ein höherer Druck, als an der oberen. Dies führt zu einer **Nettokraft**, die das Objekt ***anzuheben*** versucht: sein Gewicht ist geringer in der Flüssigkeit. Diese Kraft nennt man den **Auftrieb**, sie ist gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit (Prinzip von Archimedes).



Druckverhältnisse um ein Objekt in einer Flüssigkeit; der Druck von unten ist um den Schweredruck der verdrängten Flüssigkeit größer, als der Druck von oben.

Zu beachten:

In einer **nichtidealen** (komprimierbaren) Flüssigkeit bzw. in einem Gas nimmt der Schweredruck nicht mehr **linear** mit wachsender Tiefe zu, da sich das Medium zunehmend komprimiert aufgrund des wachsenden Drucks; die Dichte nimmt damit auch zu. Dies führt bei einem gut komprimierbaren Medium (Gas) zur **barometrischen Höhenformel**: Druck und Dichte nehmen *exponentiell* mit wachsender Tiefe zu. Diese Formel kann auch als wichtiges Beispiel des **thermischen Gleichgewichts** (Boltzmann-Gleichgewicht) verstanden werden.

Hydrodynamik: bewegte Flüssigkeiten

Bewegte Flüssigkeiten, Strömung

Wir betrachten eine **stationäre** Strömung, d.h. die Geschwindigkeit der Strömung an einem gegebenen Punkt bleibt **konstant** im Laufe der Zeit. Außerdem betrachten wir zunächst die Strömung einer **idealen** Flüssigkeit, die nicht komprimierbar ist und ohne Widerstand fließt.

Eine wichtige Größe, um die Strömung zu charakterisieren, ist die **Volumenstromstärke** $\boldsymbol{I}_{\mathrm{V}}$:

$$I_{\mathrm{V}} = \Delta V/\Delta t \qquad \text{(Einheit m}^3\text{/s)} .$$

Bei der idealen Strömung ist das Geschwindigkeitsprofil in einem Rohr gleichmäßig, es bildet eine Ebene senkrecht zur Strömungsrichtung. Bei einem Rohr vom Querschnitt A ist das Volumen, welches in der Zeit Δt durch die Querschnittsfläche mit Geschwindigkeit v fließt, gegeben durch

$$\Delta V = A\ v\ \Delta t\ ,$$

d.h. die Stromstärke ist

$$I_{\mathrm{V}} = A\ v\ .$$

Da die Flüssigkeit inkompressibel ist und auch im Laufe der Strömung nicht erzeugt oder vernichtet wird, gilt eine ***Kontinuitätsbedingung***:

--Das Volumen ΔV, das in einer gegeben Zeit durch eine gegebene Querschnittsfläche im Rohr fließt, muß überall gleich sein.--

Es kann nicht mehr Flüssigkeit in das Rohr hineinfließen, als am anderen Ende in der gleichen Zeit herausfließt; die Volumenstromstärke überall gleich. Ändert sich die Querschnittsfläche des Rohrs, so muß sich die Strömungsgeschwindigkeit v entsprechend ändern, um I_V konstant zu halten:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad oder \quad v_1/v_2 = A_2/A_1.$$

Wo der Querschnitt enger wird, muß die Flüssigkeit also schneller fließen.